



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Geometrie reálného světa ve výuce matematiky

Vypracovala: Bc. Michaela Bártová
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Geometrie reálného světa ve výuce matematiky jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

.....

Bc. Michaela Bártová

Poděkování

Děkuji panu Mgr. Romanu Haškovi Ph.D. za jeho trpělivost, ochotu řešit problémy a pomoc při tvorbě mé diplomové práce, kterou jsem psala pod jeho vedením.

Anotace

Na základě této diplomové práce získá čtenář pojetí o vztahu geometrie s reálným životem. Vybrané objekty jsou matematicky popsány a ilustrovány fotografiemi, které napomáhají k lepšímu pochopení geometrie. U různých příkladů jsou vytvořeny modely v programu GeoGebra. Cílem práce je vytvoření materiálu k pochopení a procvičení si geometrie, která se v praktických příkladech objevuje a jeho případná aplikace do výuky matematiky a geometrie.

Annotation

The reader learns about relations of geometry and real life in this diploma thesis. Selected objects are mathematically formulated and illustrated with photos. Photos help to understand geometry. Models are created in the program GeoGebra. The goal is to create materials for teaching mathematics.

Obsah

1	Úvod	6
2	Pravidelné n-úhelníky.....	8
2.1	Vlastnosti.....	8
3	Rovnostranný trojúhelník.....	10
3.1	Vlastnosti.....	10
3.2	Příklad	13
4	Pravidelný čtyřúhelník – čtverec.....	15
4.1	Vlastnosti.....	15
4.2	Příklad	18
5	Pravidelný pětiúhelník	19
6	Zlatý řez.....	22
6.1	Příklad 1	25
6.2	Příklad 2	25
7	Pravidelný šestiúhelník.....	27
7.1	Důkaz.....	27
7.2	Příklad	29
7.3	Keplerova domněnka.....	33
8	Fraktály.....	35
8.1	Příklad	38
9	Symetrie	39
9.1	Středová souměrnost	39
9.2	Osová souměrnost	40
9.3	Rovinná souměrnost.....	40
9.4	Příklad 1	41
9.5	Příklad 2	46
9.6	Příklad 3	48
10	Žakovské práce - použití symetrie.....	52
10.1	Příklad.....	52
11	Křivky	58
11.1	Spirály.....	58
11.2	Bernoulliho lemniskáta	60
11.3	Hügelschafferovo vejce	61
12	Závěr	64

1 Úvod

S geometrií se všichni běžně setkáváme v každodenním životě. Mnozí si nevšímají věci okolo sebe a to nejen z pohledu matematiky. Stačí se rozhlédnout a okamžitě nám svět nabízí mnoho zajímavých úkazů.

V dnešní moderní době plné nejnovějších technologií možná někteří lidé zapomínají na přírodní zajímavosti a všední předměty vyskytující se v našem okolí, nicméně i v těchto technologiích se rovněž geometrii nevyhneme. Velký význam má pro počítačovou grafiku, kde se bez znalostí vektorů, křivek a dalších matematických dovedností jistě neobejdeme.

Vyučuji na střední odborné škole zaměřené inženýrským směrem, proto z vlastní zkušenosti vím, že bez znalosti matematiky, potažmo geometrie se žáci neobejdou ve spoustě předmětů inženýrského směru, ať už se jedná právě o počítačovou grafiku či například programování. Právě proto, jsem se rozhodla psát závěrečnou práci takovou, která by žákům pomohla k pochopení především důležitosti geometrie.

Pro lepší představu a pochopení problematiky práce obsahuje velké množství obrázků a fotografií objektů z reálného světa. Obrázky sloužící k lepšímu pochopení řešených příkladů jsou vytvořeny v programu GeoGebra.

Tento program je velmi intuitivní a snadno ovladatelný, proto jej využívám i při hodinách matematiky. Je volně ke stažení na webových stránkách www.geogebra.org. Program není nutné stahovat, příklady jsou možné řešit přímo na tomto serveru, kde si můžeme prohlížet materiály vložené uživateli, kteří tyto stránky používají. Nacházejí se zde také různé manuály a nápovědy. Pokud si nejsme jisti, jak nějaký nástroj využít, není problém jeho funkce a aplikaci vyhledat.

V této práci se seznámíme s pravidelnými n -úhelníky, jež se objevují v přírodě, architektuře i ve virtuálním světě. Nalezneme zde řešené příklady pro lepší pochopení a i příklady řešené žáky a popis problémů, se kterými si při zpracování počínali.

Seznámíme se s pokrýváním roviny pravidelnými i nepravidelnými mnohoúhelníky, fraktály, logaritmickou spirálou a dalšími křivkami používané například v počítačové grafice.

Prvky o nichž se v diplomové práci pojednává, jsou doprovázeny fotografiemi. Většinu těchto fotografií a výukových obrázků jsem pořídila sama. Zapůjčené snímky jsem řádně citovala.

Diplomová práce může sloužit pro výuku matematiky na základních a středních školách. Díky tomu, že je zde na konkrétních případech srozumitelnou formou za pomoci výpočetní techniky patrná spojitost reálného světa s matematikou. U vybraných příkladů je popsáno, jaké kompetence z Rámcového vzdělávacího programu si žáci osvojují.

2 Pravidelné n-úhelníky

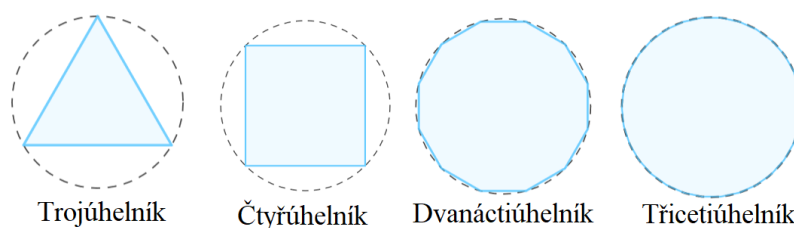
Pravidelný n-úhelník je mnohoúhelník, který má všechny strany i vnitřní úhly shodné. Všechny pravidelné n-úhelníky jsou symetrické.

S těmito mnohoúhelníky se setkáváme v běžném životě, ať už se jedná o architekturu vytvořenou člověkem, či útvary, které běžně nalezneme v přírodě všude kolem sebe.

2.1 Vlastnosti

- pravidelný n-úhelník má střed kružnice opsané i vepsané v jednom bodě. Střed těchto kružnic je zároveň středem daného n-úhelníku
- pokud má mnohoúhelník sudý počet stran, všechny jeho protější stany jsou rovnoběžné
- pravidelný n-úhelník lze rozložit na n shodných rovnoramenných trojúhelníků, které nemají žádný společný vnitřní bod

Každý pravidelný n-úhelník je vepsán v kružnici. Čím je n větší, tím více tento n-úhelník kružnici připomíná, jak je znázorněno na obrázku 1. Aby se skutečně jednalo o n-úhelník, musí být $n > 2$.



Obrázek 1: Mnohoúhelníky

U pravidelných n-úhelníků můžeme snadno zjistit jejich plochu, to znamená obsah mnohoúhelníku a také jejich obvod. Tyto údaje nás zajímají v běžném životě spíše u objektů vytvořených člověkem. Toto zjišťujeme například v případě, že budeme chtít vydláždít podlahu v domě, nalepit kachličky na zeď a podobně. Musíme vědět, kolik dlaždic koupit, abychom pokryli celou plochu, a k tomu používáme výpočty obsahů. Obvod nás zajímá v situaci, kdy si chceme oplotit pozemek, vyrobit rámeček na obrázek a další.

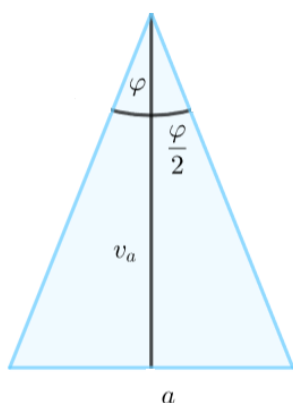
Obvod pravidelných n -úhelníků zjistíme velmi snadno a to tak, že sežneme všechny jeho hrany. Vzhledem k tomu, že všechny strany jsou stejně dlouhé, můžeme použít vzorec

$$o = n \cdot a.$$

V případě, že chceme počítat obsah, můžeme daný n -úhelník rozdělit na n shodných trojúhelníků. Spočítáme obsah tohoto trojúhelníků a vynásobíme počtem trojúhelníků. K tomu můžeme použít vzorec

$$S = n \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}.$$

Z tohoto vzorce lze vyjádřit v_a pomocí úhlu φ (viz obrázek 2). Součet všech úhlů φ tvoří kružnici, tzn. $n \cdot \varphi = 360^\circ$.



v_a :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{v_a}$$

$$v_a \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{a}{2}$$

$$v_a = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Obrázek 2: Výpočet výšky

Nyní dosadíme vypočítanou výšku do vzorce pro obsah výše:

$$S = n \cdot \frac{a^2}{4 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Přes trojúhelník vzniklý rozdělením mnohoúhelníku můžeme zjistit také vnitřní úhly tohoto mnohoúhelníku. Víme, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je roven 180° . Těchto 180° vynásobíme počtem trojúhelníků a odečteme součet úhlů φ . Tímto způsobem jsme vypočítali součet všech vnitřních úhlů mnohoúhelníků, který vydělíme počtem trojúhelníků (n).

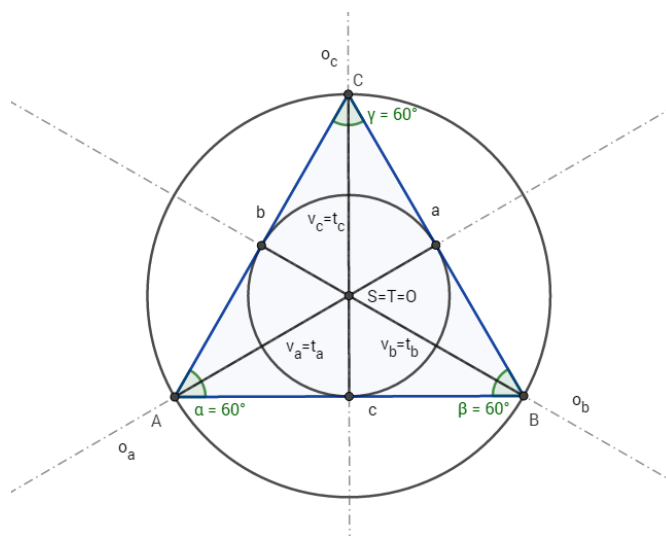
$$\frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{n} = \frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n}.$$

3 Rovnostranný trojúhelník

Prvním případem pravidelných n -úhelníků je rovnostranný trojúhelník. Jedná se o trojúhelník, který má všechny tři strany stejně dlouhé a všechny úhly stejně velké.

3.1 Vlastnosti

- rovnostranný trojúhelník má všechny úhly stejně velké ($\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$)
- všechny těžnice a výšky rovnostranného trojúhelníku jsou identické ($t_a = t_b = t_c = v_a = v_b = v_c$)
- rovnostranný trojúhelník je osově souměrný podle těžnic (výšek), tzn., že má tři osy souměrnosti
- střed kružnice opsané, střed kružnice vepsané, těžiště a ortocentrum splývají ($S \equiv T \equiv O$)
- těžnice (výška) rozděluje trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky



Obrázek 3: Rovnostranný trojúhelník

V reálném světě se běžně s pravidelnými trojúhelníky setkáváme. Každodenně můžeme vidět například dopravní značky. Tyto ukazatele zajišťují bezpečný provoz na silnicích a mnoho z nich má tvar pravidelného trojúhelníku. Převážná většina z nich jsou takzvané výstražné dopravní značky, ale můžeme se s nimi setkat i u značek určující přednost. Jednou z nejčastějších značek je „Dej přednost v jízdě!“ (Obrázek 4).



Obrázek 4: Dopravní značka

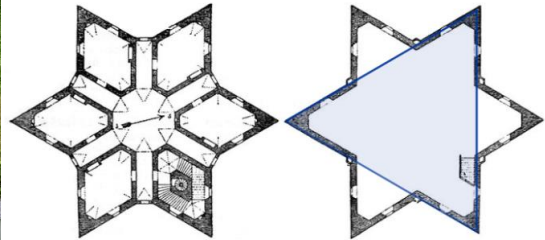
Mimo silničního provozu si můžeme pravidelných trojúhelníků všimnout i u budov, nejčastějším příkladem jsou štíty třech. Nejen u štítu, který je ukázán na obrázku 5, ale i třeba u půdorysů budov se můžeme setkat s těmito trojúhelníky, jak může čtenář vidět na obrázku 6, kde nalezne letohrádek Hvězdu, který se nachází v hlavním městě Praha. Snímek je však pořízen v Mariánských lázních v Miniaturparku Bohemium. A na obrázku 7 je znázorněn půdorys této stavby.



Obrázek 5: Štít domu



Obrázek 6: Letohrádek Hvězda - zmenšený model



Obrázek 7: Letohrádek Hvězda – půdorys [20]

Geometrické tvary se objevují také v řadě náboženských symbolů. Jedním z nejznámějších je například šesticípá Davidova hvězda, známá též jako Davidův štít (viz obr. 8), který má židovské víře takový význam, že je tento symbol vyobrazen i na vlajce státu Izrael.



Obrázek 8: Davidova hvězda [16]

Šesticípá hvězda – hexagram se objevuje i v duchovní sféře, známá je jako Šalamounova pečeť. Jedná se o dva trojúhelníky, které se vzájemně prolínají a to tak, že trojúhelník, jehož vrchol směřuje vzhůru, značí mužskou energii a druhý s vrcholem směrem dolů ženskou energii.

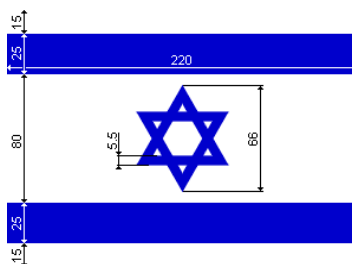
Tento symbol by se dal uvažovat jako jednoduchý fraktál, o kterém se budeme bavit podrobněji níže.

Nyní si v příkladu 1 sestojíme šesticípou hvězdu inspirovanou vlajkou Izraele.

3.2 Příklad

Zadání:

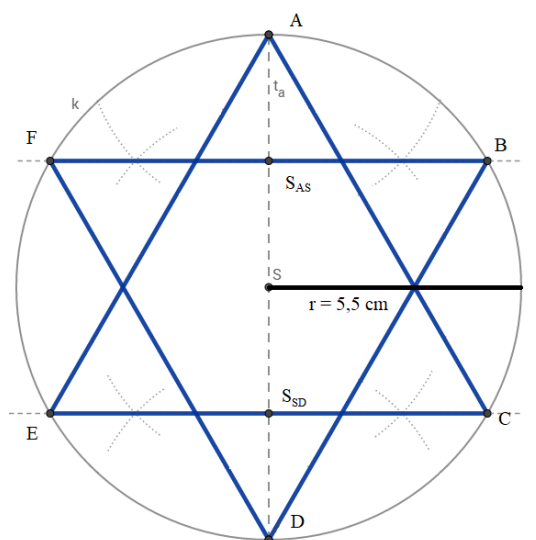
Na obrázku 9 vidíte rozměry vlajky. Sestrojte pouze hvězdu a to v měřítku 1:6, přičemž šířku čáry zanedbáme.



Obrázek 9: Vlajka Izraele

Řešení:

Rozbor:

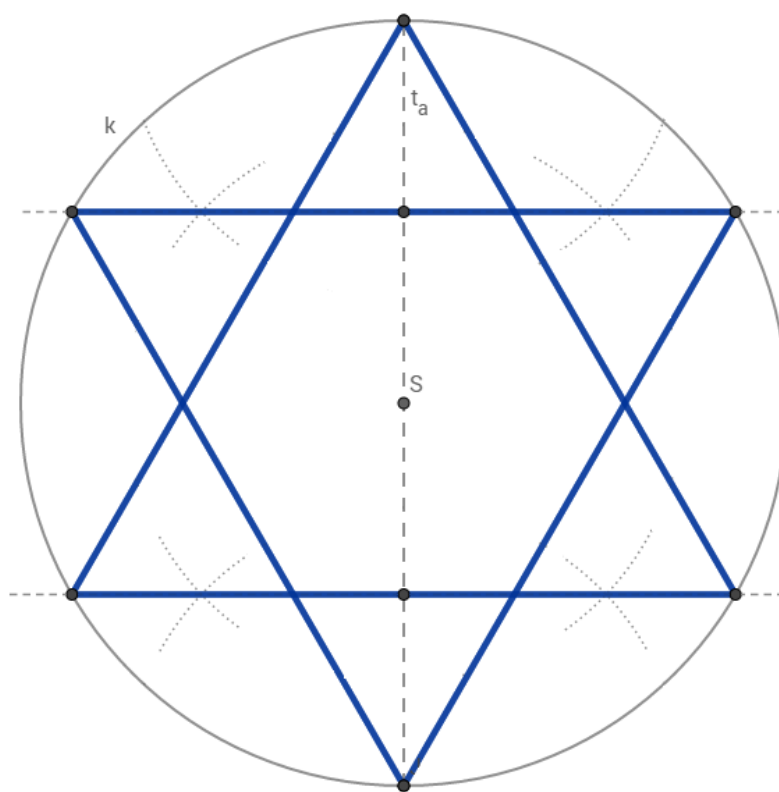


Obrázek 10: Rozbor příkladu

Postup:

- 1) k ; $k(S, r = 5,5 \text{ cm})$
- 2) A ; $A \in k$
- 3) t_a ; $t_a = \leftrightarrow AS$
- 4) D ; $D \in k \cap t_a$
- 5) S_{AS} je střed AS
- 6) S_{SD} je střed SD
- 7) p ; $p \perp t_a \wedge S_{AS} \in p$
- 8) B, F ; $B, F \in p \cap k$
- 9) q ; $q \perp t_a \wedge S_{SD} \in q$
- 10) C, E ; $C, E \in q \cap k$
- 11) $\triangle ACE$
- 12) $\triangle BDF$

Konstrukce:



Obrázek 11: Konstrukce hvězdy na vlajce

Žáci by měli zvládnout určit a znázornit geometrické útvary, jak vychází z RVP. K tomu jim pomáhají příklady, vycházející z reálných situací, které jsou schopni pozorovat okolo sebe. Tyto situace vymodelují, proto se učí problém analyzovat a rozfázovat problém na části, které znají a umí vyřešit.

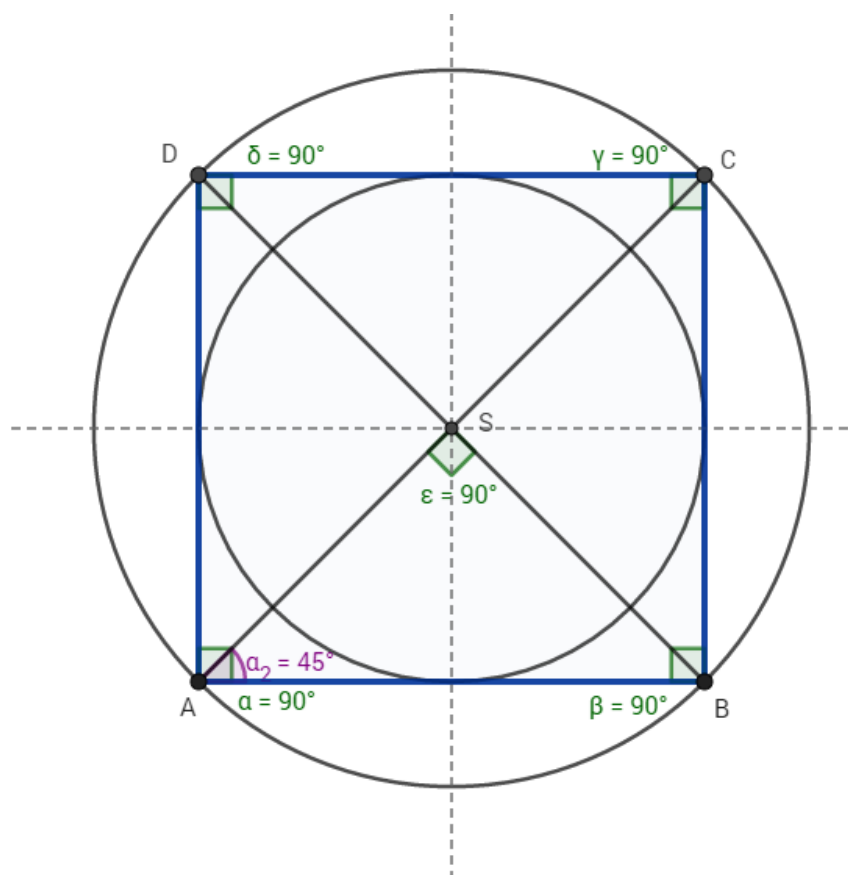
Jednou z klíčových kompetencí, kterou si tímto příkladem žák osvojuje je formulace a vyjádření myšlenky v logickém sledu v matematickém projevu. Další získávanou kompetencí je například schopnost operovat s obecně užívanými termíny, znaky a symboly, uvádí věci do souvislostí, propojuje do širších celků poznatky, čímž si vytváří komplexnější pohled na matematické jevy. Žáci promýšlí a plánují řešení na základě rozboru příkladu, k čemuž využívají vlastní zkušenosti. Při řešení problému využívají matematické postupy.

4 Pravidelný čtyřúhelník – čtverec

Pravidelný čtyřúhelník též známý spíše jako čtverec má všechny čtyři strany stejně dlouhé, které jsou na sebe kolmé.

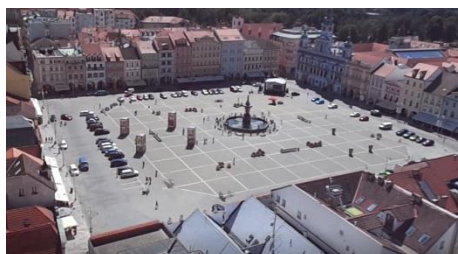
4.1 Vlastnosti

- čtverec má všechny úhly stejně velké ($\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$)
- protilehlé strany jsou rovnoběžné
- pravidelný čtyřúhelník je osově souměrný podle úhlopříček a středových příček
- úhlopříčky jsou stejně dlouhé a kolmé, půlí úhly i sebe navzájem
- střed kružnice opsané, střed kružnice vepsané splývají a jsou současně středem čtverce



Obrázek 12: Pravidelný čtyřúhelník

Každý se jistě s pravidelným čtyřúhelníkem setkal. Objevuje se všude okolo nás a můžeme ho vidět například v podobě náměstí (obr. 13) nebo plotů, jak je znázorněno na obrázku 14. Tvar čtverce mohou mít ale i střešní krytiny, viz obrázek 15, různá dvířka od skříněk, dlažba a podobně.



Obrázek 13: Náměstí v Českých Budějovicích



Obrázek 14: Pletivový plot



Obrázek 15: Střešní krytina

V současné době v životě každého z nás hrají velkou roli technologie. Každý se denně setkáváme s počítačovou grafikou, která se dělí na dva druhy, rastrová a vektorová.

Rastrovou grafiku můžeme pozorovat například u fotografií přenesených do počítače. Pokud tuto fotografii dostatečně zvětšíme, můžeme si všimnout barevných bodů (pixelů), ze kterých je tento snímek tvořen (viz obrázek 16). Body jsou uspořádány do pravoúhlé mřížky, takzvaného rastru - odtud název rastrová grafika. Každý z těchto bodů má svoji danou souřadnici. Kvalita fotografie závisí na velikosti, rozlišení, které se udává v DPI (počet bodů na palec – palec je cca 2,54 cm) a barevné hloubce (počet barev). Při tisku fotografií by rozlišení mělo být okolo 300 DPI a 24 bitová barevná hloubka (2^{24} barev – přibližně 16,8 milionů). Výhodou používání rastrové grafiky je to, že pořízení obrázku je velmi snadné. Nevýhodou je to, že má snímek velké nároky na zdroje počítače a při zvětšování případně zmenšování dochází k nenávratnému zhoršení kvality fotografie.



Obrázek 16: Pixely

Vektorovou grafiku použijeme v případě, že chceme vytvořit například logo firmy. V tomto případě použijeme vektorovou grafiku, protože velikost obrázku lze libovolně měnit bez ztráty kvality. Pokud je logo vytvořeno z různých objektů, lze s těmito objekty pracovat samostatně. To je zapříčiněno tím, že vektorový obrázek je složen ze základních geometrických útvarů, jako jsou například body, přímky, křivky či mnohoúhelníky.

Více informací o rastrové a vektorové grafice se čtenář dozví na webových stránkách [10].

4.2 Příklad

Zadání

Vypočítejte, kolik místa v paměti počítače potřebuje černobílá fotografie, jejíž šířka je 12 cm, délka 18 cm a rozlišení 300 DPI a barevná hloubka 256 barev.

Řešení:

- 1) Převédeme centimetry na palce

$$12 : 2,54 \doteq 4,72$$

$$18 : 2,54 \doteq 7,09$$

- 2) Zjistíme počet palců

$$4,72 \cdot 7,09 \doteq 33,46$$

- 3) Vypočítáme počet pixelů

$$33,46 \cdot 300 = 10\,038$$

- 4) Vypočítáme potřebnou paměť

$$256 = 2^8 \text{ (8 bitová barevná hloubka – 8 bitů na bod)}$$

$$10\,038 \cdot 8 = 84\,304 \text{ b}$$

Na danou fotografii potřebujeme 84 303 bitů.

Žáci na základě řešení úkolu vidí přesah matematiky do informačních technologií. Díky tomu si uvědomují důležitost matematiky, která provází jejich každodenní život. Bez základních vědomostí matematiky nejsou schopni řešit problémy z jiných oblastí vzdělávání. Žáci ochotněji řeší příklady, ve kterých jsou tyto přesahy zřejmé. Uvědomují si tím důležitost získávaných znalostí a jejich následné použití v konkrétních případech

5 Pravidelný pětiúhelník

Pravidelný pětiúhelník má všechny strany stejně dlouhé a jeho vnitřní úhly jsou shodné. Úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku jdou sestrojít jedním tahem. Pokud tento útvar sestrojíme, vznikne nám symbol známý jako pentagram. Pentagram má velký význam v náboženství, v umění či astronomii. Vyskytuje se hojně ale i v přírodě.

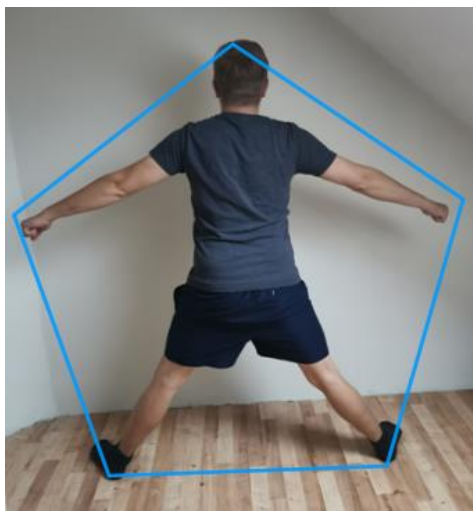


Obrázek 17: Rozkrojené jablko



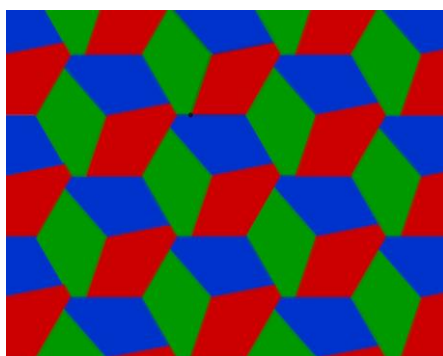
Obrázek 18: Drchnička rolní [14]

Například, když rozkrojíme jablko, jeho jádra jsou uspořádána do tvaru pětiúhelníku (obrázek 17). Okvětní lístky různých květů jsou uspořádány také do pravidelného pětiúhelníku. Takový květ můžete vidět na obrázku 18. Významný představitel umění Leonardo da Vinci viděl dokonalost v lidském těle, kterou znázornil ve svém díle *Virtuviánský muž*. V této myšlence jde především o to, že výška člověka má přibližně stejnou velikost, jako rozpětí jeho paží. Proto při správném postavení těla, lze i v tomto případě najít pravidelný pětiúhelník (obrázek 19). Autor článku Chris Budd tvrdí, že zlatý řez v lidském těle je jen způsob jakým mozek nachází souvislosti. Protože zlatý poměr je iracionální číslo, nedokážeme ho nikdy vyjádřit přesně v žádném měření.



Obrázek 19: Lidské tělo

Pokud budeme pravidelné pětiúhelníky skládat vedle sebe, nikdy se nám nepodaří pokrýt celou rovinu beze zbytku, jako například u trojúhelníku, čtyřúhelníků či šestiúhelníků. Existuje ale i malé množství nepravidelných pětiúhelníků, které tuto vlastnost mají. Naposledy byl takový pětiúhelník objeven v roce 2015, vědci, kterým k tomu dopomohl počítač. Jeden z těchto nalezených případů můžete vidět na obrázku 20, který vychází z toho, že u třech vrcholů musí být úhel 120° . Tento typ pokrytí plochy pětiúhelníky beze zbytku popsal v roce 2019 Karel Reinhardt [3].



Obrázek 20: Pokrytí plochy pětiúhelníky

Pravidelný pětiúhelník má mnoho zajímavých vlastností. Mimo to, že je stejně jako ostatní mnohoúhelníky symetrický má navíc velký vztah ke zlatému řezu.

Pokud pravidelnému pětiúhelníku sestrojíme úhlopříčky, vznikne pentagram. Průsečíky úseček, které tvoří tento pentagram, jsou vrcholy dalšího pravidelného pětiúhelníku. Takto můžeme pokračovat do nekonečna. Délky stran pravidelného pětiúhelníka s délkami úhlopříček jsou vždy v poměru zlatého řezu. Průsečík úhlopříček danou diagonálu rozdělí na dvě části, které jsou rovněž v poměru zlatého řezu.

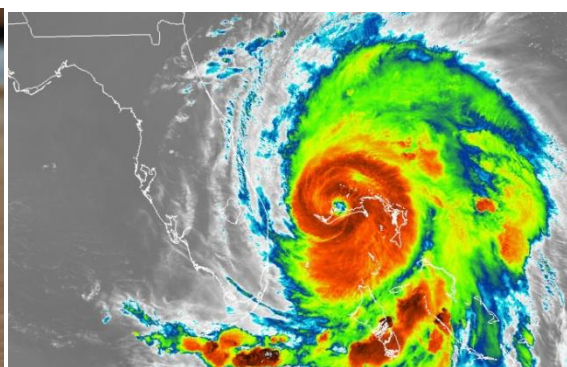
6 Zlatý řez

Zlatý řez je pokládán za ideální poměr mezi dvěma úsečkami. Vznikne rozdělením úsečky tak, že poměr celé úsečky ku menší části úsečky je stejný jako poměr větší části ku menší části.

Často se využívá v umění, setkáme se s ním například u obrazů, fotografii nebo v architektuře. A to proto, že tyto proporce jsou příjemné lidskému oku. Zlatý řez můžeme najít také v přírodě u lastur (obr. 19), plžů, rostlin, plodů a podobně. Například semínka slunečnice tvoří zlatou spirálu, aby do sebe dobře zapadly. Listy některých květin tuto vlastnost mají také, proto, aby absorbovaly co nejvíce slunečního světla. Na obrázku 22 může čtenář vidět zlatou spirálu také ve větrném víru zachyceném radarem.[7]

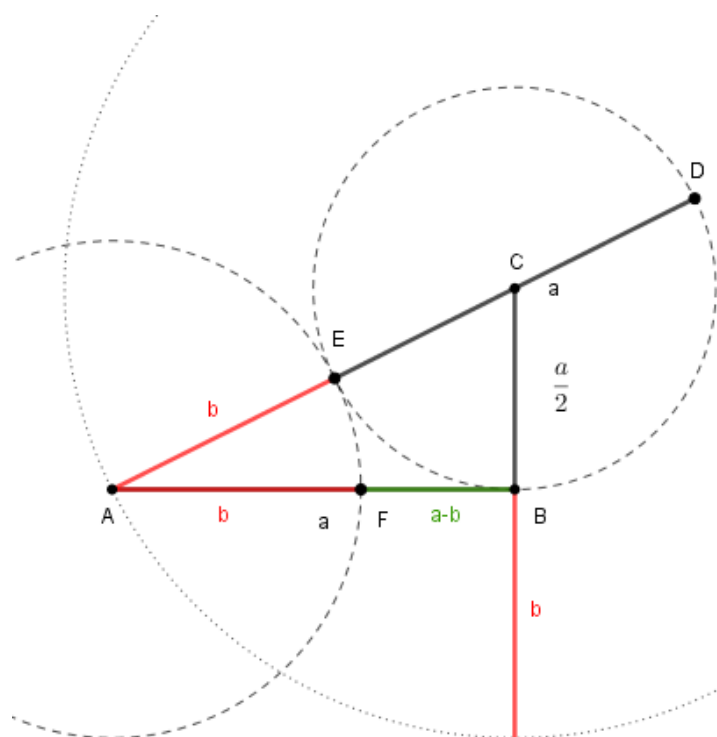


Obrázek 21: Lastura



Obrázek 22: Větrný vír [15]

Konstrukce a výpočet zlatého řezu:



$$\frac{a}{b} = \varphi$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} = \frac{a+b}{a}$$

$$a = b\varphi$$

$$\frac{b\varphi}{b} = \frac{b}{b\varphi - b}$$

$$\frac{b\varphi}{b} = \frac{b}{b(\varphi - 1)}$$

$$\varphi(\varphi - 1) = 1$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

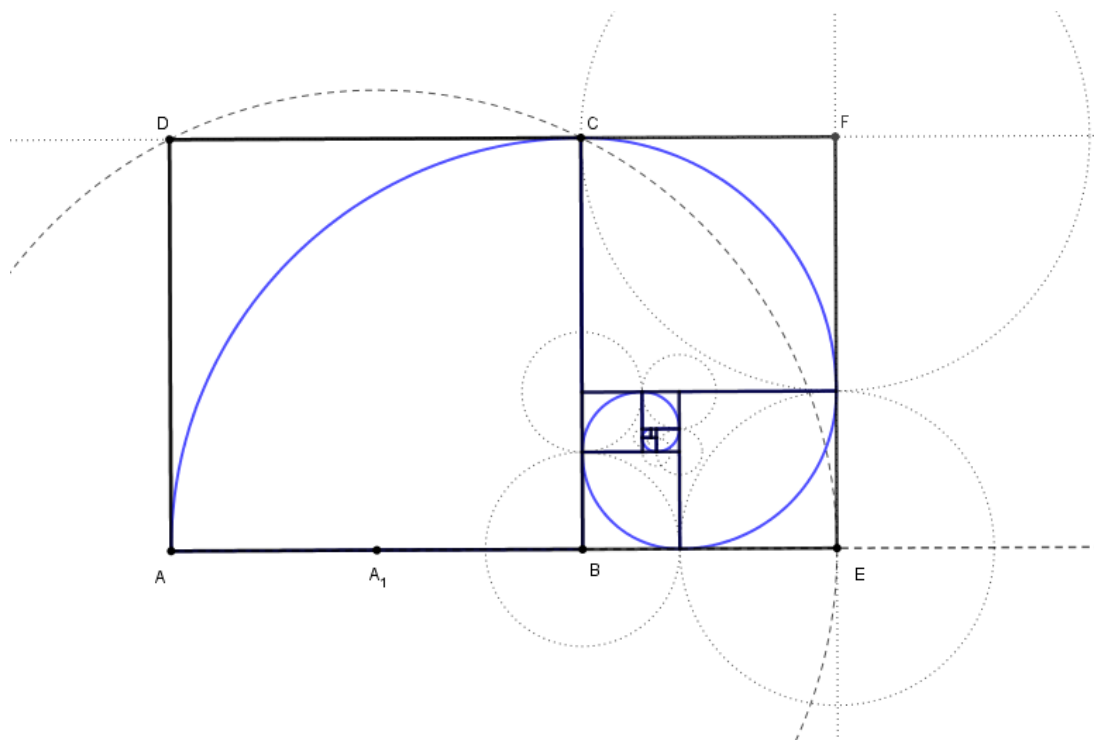
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Obrázek 23: Konstrukce zlatého řezu

Postup konstrukce:

- 1) AB; $|AB| = a$
- 2) BC; $BC \perp AB$, $|BC| = \frac{a}{2}$
- 3) k; $k(C, r = \frac{a}{2})$
- 4) E; $E \in k \cap AC$
- 5) l; $l(A, r = |AE|)$

Zlatý řez lze znázornit i pomocí zlatého obdélníku. Když tento obdélník budeme rozdělovat v poměru zlatého řezu, dostaneme zlatou spirálu, se kterou se často setkáváme v přírodě. Tuto spirálu nalezneme tak, že do obdélníku rozdělíme na čtverec a další obdélník, který je rovněž zlatý. Takto můžeme pomocí posloupností menších a menších obdélníků vytvořit spirálu tak, že vyznačíme čtvrtkruh v každém čtverci, jež se objevuje ve zlatých obdélnících.



Obrázek 24: Zlatá spirála v obdélníku

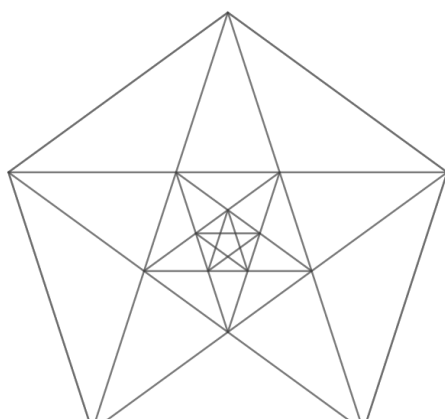
Postup konstrukce zlatého řezu obdélníku, tzv. zlatý obdélník:

- 1) čtverec ABCD; $|AB| = a$
- 2) A_1 ; $|AA_1| = |A_1B|$
- 3) k ; $k(A_1, r = |A_1C|)$
- 4) E ; $E \in k \cap AB$
- 5) p ; $p \perp AB, E \in p$
- 6) F ; $F \in CD \cap p$

6.1 Příklad 1

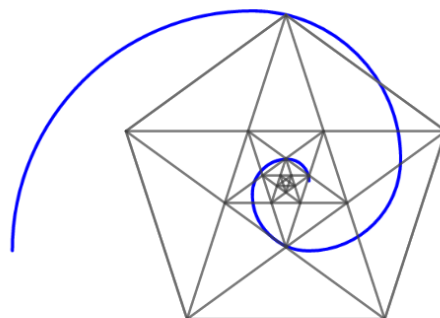
Zadání:

Zakreslete do obrázku zlatou spirálu.



Obrázek 26: Vnořené pětiúhelníky

Řešení:



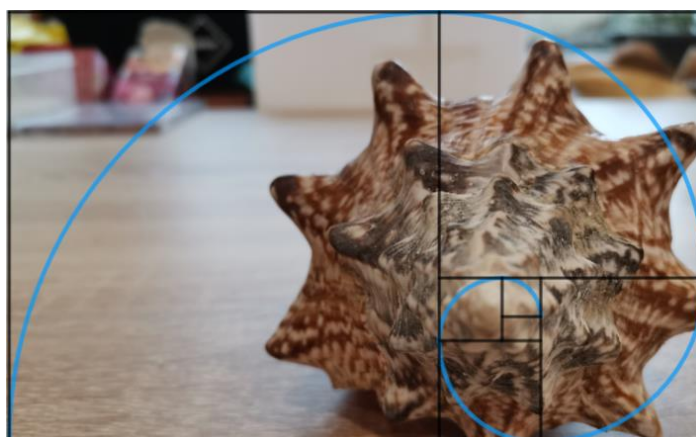
Obrázek 25: Zlatá spirála v pětiúhelníku

6.2 Příklad 2

Zadání:

Vyfotografujte předmět a obrázek ořízněte tak, aby byl předmět ve zlatém řezu toho snímku. Zlatou spirálu do obrázku vyznačte pomocí programu GeoGebra.

Řešení:



Obrázek 27: Zlatá spirála ve fotografii

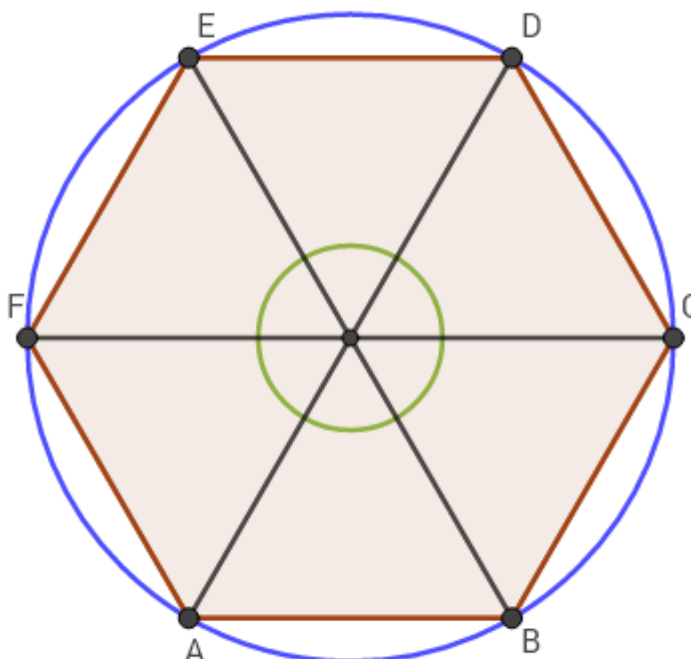
Při zpracování zadaného úkolu žáci nejdříve vyhledají vhodný objekt, což je nutí hledat matematiku v reálném světě samostatně. Pokud si žáci jsou podněcování k samostatnému a tvořivému myšlení, což je jedním ze základních cílů vzdělávání dle RVP. V dnešní době všichni používají moderní technologie, proto je vhodné je využít i při výuce matematiky. Už jen tím, že musí žáci fotografie importovat do počítačů a následně upravit, využijí znalosti nabyté v informačních technologiích. Při práci v programu GeoGebra rovněž využijí práci s moderními technologiemi a to jim pomáhá udržovat si infromatickou gramotnost. Tím, že objekty žáci vyhledávají a zpracovávají, učí se hledat kolem sebe souvislosti s matematikou.

7 Pravidelný šestiúhelník

Pravidelný šestiúhelník je tvořen ze šesti rovnostranných trojúhelníků.

Každý vnitřní úhel šestiúhelníku má velikost 120 stupňů.

7.1 Důkaz



Obrázek 28: Pravidelný šestiúhelník

Zeleným kruhem je vyznačen součet vrcholových úhlů trojúhelníků, tzn. každý po 60-ti stupních (kruh má obvod 360 stupňů, tento obvod rozdělíme mezi šest stejných trojúhelníků).

Úsečky, které spojují dva protější vrcholy, jsou průměrem kružnice, jak je vidět na obrázku 28. Z toho plyne, že trojúhelníky jsou určitě rovnoramenné a proto úhly při základně budou oba stejné. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180 stupňů, 60 stupňů zaujímá vrcholový úhel a na zbylé dva zůstává 120 stupňů, tzn. na každý šedesát. Proto se jedná o rovnostranné trojúhelníky. Vnitřní úhel šestiúhelníku je tvořen dvěma vnitřními úhly trojúhelníků. Z toho plyne, že vnitřní úhel šestiúhelníku má 120 stupňů.

Pravidelnými šestiúhelníky lze vyplnit rovinu tak, že je budeme skládat vedle sebe bez mezer. Stejně tak rovinu můžeme vyplnit čtverci nebo rovnostrannými trojúhelníky.

Vyplňování šestiúhelníky je ovšem z pohledu využití materiálu nejefektivnější. Proto se s tímto tvarem setkáváme poměrně často. Například u včelích pláství (obr. 29), dlaždic na chodnících, jenž jsou vyobrazeny na obrázku 30, u technických materiálů jako je například Grafen (jedna vrstva atomů uhlíku uspořádaná do tvarů šestiúhelníků) či Karbyn (doposud nejtvrďší materiál na světě s podobnou strukturou jako má grafen)



Obrázek 29: Včelí plástev [19]



Obrázek 30: Dlaždice

Autoři článku Secret from a bathroom floor Josefina Alvarez a Cesar L. Garcia se zabývali tím, jakými pravidelnými mnohoúhelníky je možné pokrýt celou plochu beze zbytku.

Každý takový polygon lze rozdělit na n shodných rovnoramenných trojúhelníků, přičemž víme, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku dává 180° . Úhel u vrcholu zjistíme snadno tak, že vydělíme 360° počtem vzniklých trojúhelníků. Zbylé dva úhly u základny mají shodnou velikost úhlů. Z toho vychází, že:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{360}{n} = 180$$

$$\alpha = 180 - \frac{360}{n}$$

Hledáme ale pouze takové mnohoúhelníky, pro které platí, že $\frac{360}{\alpha}$ je celé číslo.

Po dosazení úhlu α :

$$\frac{360}{180 - \frac{360}{n}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} = \frac{2n}{n-2}.$$

Vzorec můžeme dále upravit na tvar

$$2 + \frac{4}{n-2}.$$

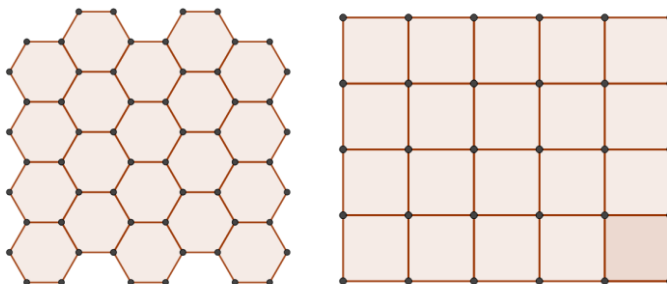
Ze vzorce je patrné, že přípustné hodnoty jsou větší než dva. Poslední číslo, které dělí čtyřku beze zbytku je číslo čtyři, proto můžeme tvrdit, že n -úhelník s největším počtem hran, který pokryje rovinu bez toho aniž by se překrýval, je právě šestiúhelník. Nesmíme zapomenout vyloučit pětiúhelník a dokázali jsme, že jediné pravidelné mnohoúhelníky splňující tento předpoklad jsou trojúhelník, čtyřúhelník a šestiúhelník.[2]

7.2 Příklad

Zadání:

Kolik metrů drátku budeme potřebovat na zvětšený model včelí plástve, kde jedna strana šestiúhelníku bude dlouhá 6 cm?

Kolik bychom spotřebovali metrů drátku, kdyby včely místo šestiúhelníků používali čtverce se stejným obsahem jako daný šestiúhelník?



Řešení:

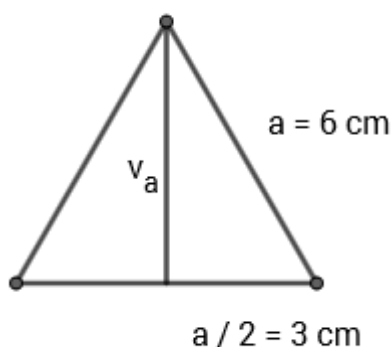
Obsah šestiúhelníku můžeme vyřešit tak, že spočítáme obsah rovnostranného trojúhelníku, který vznikne při rozdělení šestiúhelníku o délce hrany 6 cm. Těchto trojúhelníků je v každém šestiúhelníku šest.

Obsah trojúhelníku spočítáme pomocí vzorce

$$S_{\Delta} = \frac{a v_a}{2}.$$

Abychom mohli vypočítat obsah trojúhelníku, musíme nejdříve spočítat jeho výšku.

Výpočet výška v_a :



Obrázek 31: Výpočet výšky

$$6^2 = 3^2 + v_a^2$$

$$v_a = \sqrt{27}$$

$$v_a = 3\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\Delta} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Obsah šestiúhelníku:

$$6 \cdot 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$S_{\square} = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$a = 9,67 \text{ cm}.$$

Počet hran, na něž je použit drátek: šestiúhelník = 77 hran.

$$\text{čtverec} = 49 \text{ hran}$$

Délka drátu na šestiúhelník: $77 \cdot 6 = 462 \text{ cm} = 4,62 \text{ m}$.

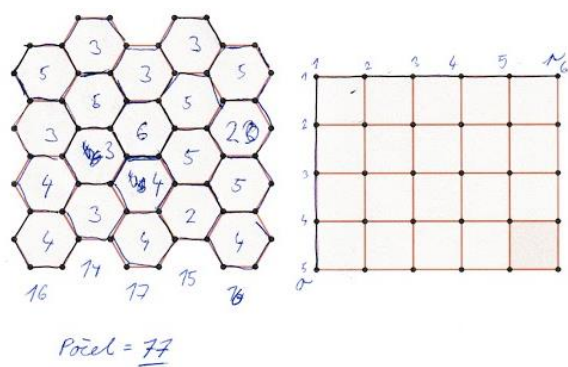
Délka drátu na čtverec: $49 \cdot 9,67 \doteq 474 \text{ cm} = 4,74 \text{ m}$.

Ušetřily jsme přibližně 12 cm drátu.

Tento příklad řešili žáci 3. ročníku střední školy v rámci opakování výpočtů obvodů a obsahů. Z celkového počtu 45 žáků, kteří příklad počítali, 4 odevzdali práci bez řešení. Z toho plyne že, necelých 9 % si se zadaným úkolem nedokázalo vůbec poradit.

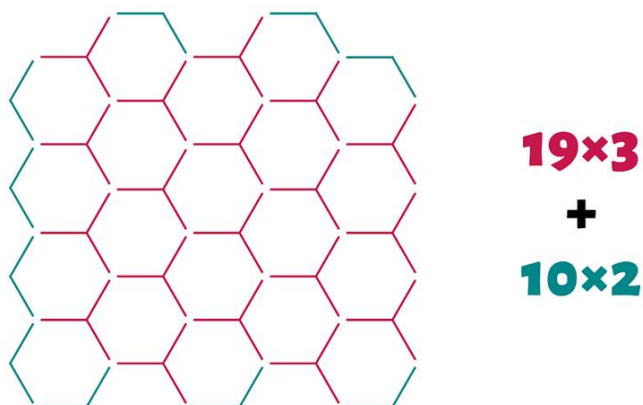
Předpoklad největší chybovosti byl při počítání obsahu pravidelného šestiúhelníku, se kterým žáci ve většině případů ale neměli problém. Tuto chybu udělali pouze 2 žáci.

U první části příkladu si se zadaným úkolem poradilo správně 34 žáků ze 41, kteří úlohu řešili. Žáci s nesprávným řešením se nejčastěji potýkali s chybovostí při výpočtu hran. Žáci hrany počítali převážně mechanickým sčítáním bez hledání možného algoritmu (obr. 32), někteří se ovšem snažili najít opakující se tvary či systematicky sčítat hrany všech mnohoúhelníků jako například na obrázku 33.



1

Obrázek 32: Mechanický výpočet úseček

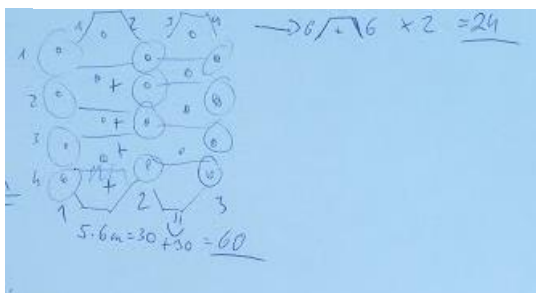


Obrázek 33: Algoritmus pro výpočet úseček

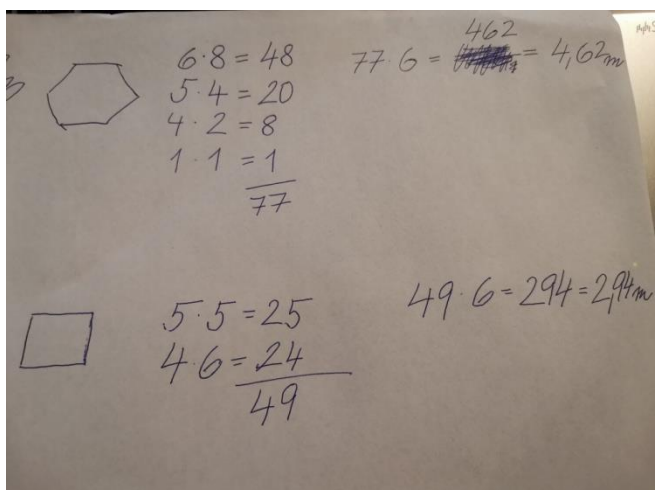
Nemnoho žáků se snažilo jistý algoritmus nalézt, nepodařilo se jim ale vyřešit příklad bezchybně. Správný postup a jejich řešení vedl k nesprávnému výsledku, jak je patrné z obrázku 34.

¹ Žák souhlasil s použitím části příkladu

Obrázek 34: Nesprávné řešení pomocí algoritmu



U druhé části příkladu se 4 krát vyskytla chyba, kde žáci počítali s délkou strany čtverce stejnou jako délkou strany šestiúhelníku (obr. 35). Tato chyba se pravděpodobně objevovala z nepochopení nebo špatného čtení zadání. Někteří žáci sice vypočítali obsah šestiúhelníku, ale již tento obsah nebyl schopen použit ve vzorečku pro obsah čtverce. Tato skutečnost pravděpodobně opět pramení z nepochopení zadání. S výpočtem hran tentokrát nebyl problém. Můžeme zde vidět podobné typy uvažování jako u první části.



Obrázek 35: Chybný výpočet délky strany čtverce

² Žák souhlasil s použitím části příkladu

³ Žák souhlasil s použitím části příkladu

Žákům trvalo poměrně dlouhou dobu, než příklad vyřešili. Hlavní příčinou tohoto fakt je skutečnost, že jim velké množství času zabralo řešení počtu hran modelu plástve.

Z příkladu vidíme, že je efektivnější rovinu vyplnit šestiúhelníky než čtverci. Stejně tomu je tak u rovnostranných trojúhelníků, což je zjevné, když je šestiúhelník tvořen rovnostrannými trojúhelníky.

Žáci souhlasili se zveřejněním částí jejich prací.

Matematici se již v minulosti zabývali vlastnostmi povrchu buňky včelí plástve a věřili, že má nejlepší tvar, jaký je vůbec možný. Matematik C. Maclaurin již v roce 1743 usoudil, že buňky mají šestiúhelníkový tvar proto, že je podíl jejich objemu a povrchu největší mezi všemi pravidelnými tělesy, která vyplňují prostor beze zbytku a zároveň mají nejlepší základnu. Toto tvrzení později matematik L. Fejes Tóth vyvrátil, když dokázal, že šestiúhelníková buňka tvořená včelami nevyplňuje prostor nejekonomičtěji. Nejekonomičtější tvar pokrytí prostoru však doposud nebyl určen.

Stejně tak jako problematikou včelách pláství se matematicky zabývali neefektivnějším uspořádáním dělových koulí v prostoru.

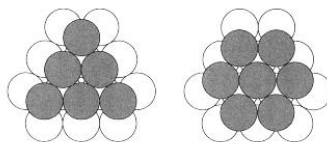
Matematici se také odedávna zabývají myšlenkou, jaké je neefektivnější uspořádání koulí v prostoru. Věnoval se jí například David Hilbert ve svém seznamu třiatvaceti problémů nebo Thomas Harriot a Johannes Kepler.

7.3 Keplerova domněnka

V trojrozměrném prostoru nemá žádné uspořádání koulí stejného poloměru větší hustotu než kubické plošně centrované uspořádání.

Důkaz této věty má 282 stran. Popisuje různá uspořádání koulí s hustotou $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$, tzn, stejně jako kubické plošně centrované uspořádání. Kubické plošně centrované uspořádání vznikne tak, že vyskládáme koule vedle sebe, aby se dotýkaly, a tuto spodní vrstvu skládáme další koule. Koule jsou v tomto případě uspořádány do tvaru trojúhelníku. Je možné je ale uspořádat také do tvaru šestiúhelníku. Toto uspořádání se

nazývá hexagonální těsné. Na obrázku 36 první zleva – uspořádání kubické plošně centrované, druhé uspořádání je hexagonální těsné.



Obrázek 36: Uspořádání koulí v prostoru [5]

Tyto dvě uspořádání jsou optimální způsoby pro umístění jedné vrstvy koulí nad druhou. Obměnami umístění každé další vrstvy lze sestavit mnoho různých optimálních uspořádání.

Více informací o této problematice se může čtenář dozvědět Thomase C. Halesa Pokroky matematiky, fyziky a astronomie [5].

8 Fraktály

Na základních a středních školách se zabýváme pouze euklidovskou geometrií, ve které popisujeme všechny geometrické útvary. V euklidovské geometrii je ale značný problém jednoduše popsat složité útvary. Tyto útvary se přesto běžně v reálném světě objevují. Pokud se budeme snažit popsat jednoduché matematické útvary, jako jsou například body, úsečky, čtverce, kvádry či jiné, s euklidovskou geometrií si snadno vystačíme.

Každý z těchto matematických útvarů můžeme pomocí euklidovské geometrie jednoznačně určit. V případě fraktálu to tak snadné není. Abychom mohli popsat jednoduchý fraktál jako je například Kochova křivka, museli bychom použít složitou rovnici, která by navíc byla nepřehledná. Tuto křivku lze bez obtíží popsat pomocí fraktální geometrie.

Fraktály nemusí být jen útvary, které vznikají matematickou definicí, ale můžeme je pozorovat v přírodních úkazech, jako jsou například sněhové vločky, pohoří, blesky, vločky, stromy či zelenina (obr. 37). Fraktálem je například i Davidova šesticípá hvězda.



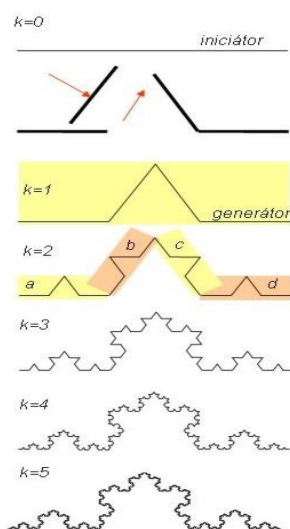
Obrázek 37: Romanesco [18]



Obrázek 38: Lastura

Je více možností jak fraktál sestavit, jednou z nich například použití transformací, které se cyklicky opakují. Kochovu křivku je možné popsat tak, že na začátku jsme měli

jednoduchou úsečku, což je takzvaný iniciátor. Abychom získali výsledky tvar, budeme potřebovat také generátor. Tento generátor je tvar, který nahradí iniciátor. Pokud počáteční úsečku rozdělíme na třetiny a prostřední vyjme a použijeme místo této části dvě úsečky stejné délky jako je vyjmutá třetina. Ve chvíli, kdy jsme provedli transformaci je již každá z úseček brána jako iniciátor dalšího kroku. A tak můžeme pokračovat stále dál, přičemž v každém z následujících kroků se délky těchto úseček neustále zmenšují. Tento postup je znázorněn na obrázku 39.



Obrázek 39: Kochova křivka [13]

Kochova křivka je křivka, která se nazývá soběpodobná. To znamená, že část této křivky je vždy zmenšenina původní množiny bez ohledu na to jak moc ji zmenšujeme. Tato křivka má stejnou vlastnost jako interval. Pokud vezmeme interval příklad od nuly do jedné, což je konečná ohraničená část roviny, nalezneme zde nekonečně mnoho čísel. Totéž platí i pro Kochovu křivku. Z toho vyplývá, že její délka je nekonečná. Tato vlastnost platí pro většinu fraktálů.

Fraktály vyskytující se v přírodě nebudou nikdy dokonalé stejné jako při jejich matematické reprezentaci. Například když odlomíme část kamene, který má nějakou strukturu, v ulomeném úseku bude tato struktura při zvětšení podobná, ale nikoliv stejná.

V euklidovské geometrii se setkáváme a dokonalými útvary jako je například čtverec, válec, jehlan, ... Různé objekty reálné světa lze euklidovskou geometrií popsat, nesmí se však jednat o jejich strukturu, pak už bychom se museli na předmět dívat z hlediska fraktální geometrie. Pokud tedy budeme chtít vytvářet animace do her případně filmů, bez fraktální geometrie se neobejde, abychom se alespoň částečně přiblížili realistickému ztvárnění objektů. Abychom tyto objekty dokázali reprezentovat, potřebujeme znát také fraktální dimenzi.

Fraktální dimenze D nám říká, jak moc je útvar nepravidelný. Pokud úsečku rozdělíme na N stejných dílů, délku jedné části r zapíšeme ve tvaru

$$r = \frac{1}{N},$$

pokud bychom rozdělovali na N dílů čtverec pak délka úsečky

$$r = \frac{1}{\sqrt{N}},$$

podobně krychle

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}.$$

Obecně lze tedy říct, že délka úsečky r je dána vzorcem

$$r = \frac{1}{N^{\frac{1}{D}}}.$$

Více informací o fraktální geometrii a fraktální dimenzi nalezne čtenář na webových stránkách [8].

8.1 Příklad

Zadání:

Vypočítejte fraktální dimenzi Kochovy křivky.

Řešení:

Úsečku rozdělujeme na 3 stejné díly, proto délka r je rovna $\frac{1}{3}$. Základní Kochova křivka obsahuje 4 stejné části a odtud $N = 4$

Dosadíme hodnoty do odvozeného vzorce:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4^D}$$

Vyjádříme D :

$$\log \frac{1}{3} = \log 4^{-\frac{1}{D}}$$

$$\log \frac{1}{3} = -\frac{1}{D} \log 4$$

$$D \log \frac{1}{3} = -\log 4$$

$$D = -\frac{\log 4}{\log \frac{1}{3}}$$

$$D = \frac{\log 4}{\log 3}$$

$$D \doteq 1,2618$$

Fraktální dimenze Kochovy křivky je přibližně 1,2618.

9 Symetrie

Symetrie prostupuje naším každodenním životem. Můžeme ji najít i v přírodě u rostlin, či zvířat. Symetrii vidíme například u různých krystalů, květů, motýlů, sněhových vloček nebo třeba také bytových doplňků, dětských hřišť a podobně.

Objekt je symetrický, pokud s ním můžeme nějak manipulovat a i přesto bude vypadat stejně jako předtím.

V eukleidovské geometrii je předmět symetrický, jestliže je souměrný podle středu nebo osy souměrnosti. Středově souměrné objekty jsou například dětská houpačka, čtyřlístek, přesýpací hodiny a další. U osové souměrnosti se můžeme zmínit například o motýlovi, mořské hvězdě, konopí a podobně. Souměrnosti lze pozorovat i v prostoru, příkladem je sněhulák, fotbalový míč, pyramidy,... Pokud je předmět nacházející se v prostoru symetrický, vždy nalezneme rovinu, která tuto vlastnost udává.

9.1 Středová souměrnost

Středová souměrnost je zobrazení, které přenesení střed souměrnosti S na sebe sama a bod A různý od středu na bod A' , který se nachází na polopřímce opačné k SA ve stejné vzdálenosti od S jako bod A (tj. platí pro něj $|SA| = |S A'|$).



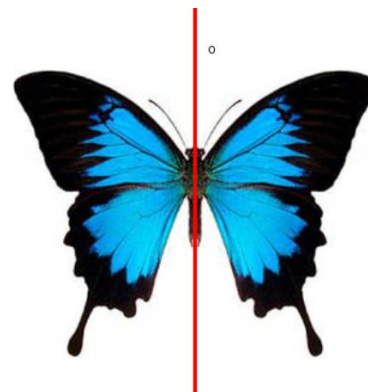
Obrázek 40: Střed souměrnosti

Na obrázku 40 je znázorněn střed souměrnosti, podle kterého je čtyřlístek symetrický.

9.2 Osová souměrnost

Osová souměrnost zobrazuje prvky osy o na sebe samé a bod A ležící mimo osu o s průmětem P do osy o na bod A' který se nachází na polopřímce opačné k PA ve stejné vzdálenosti od P jako bod A (tj. platí pro něj $|PA|=|PA'|$).

Na obrázku 41 se nachází motýl, který je souměrný podle osy o .



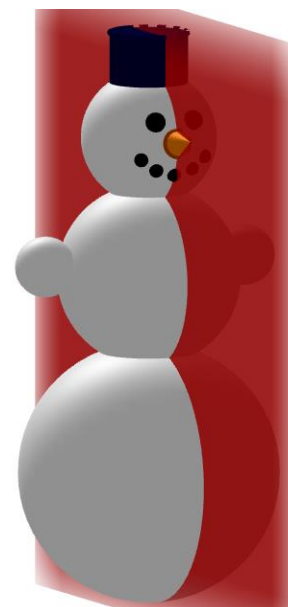
Obrázek 41: Osa souměrnosti

9.3 Rovinná souměrnost

Rovinná souměrnost zobrazuje prvky roviny O na sebe samé a bod A mimo rovinu O s průmětem P do roviny O na bod A' , který se nachází na polopřímce opačné k PA ve stejné vzdálenosti od P jako bod A (tj. platí pro něj $|PA|=|PA'|$).

Sněhulák na obrázku 42 je symetrický podle roviny, která

ho rozdělí na dvě totožné části.



Obrázek 42: Rovinná souměrnost

Podrobnější informace o souměrnostech jsou k nalezení v publikaci Geometrie II, jejíž text je dostupný na internetových stránkách [6].

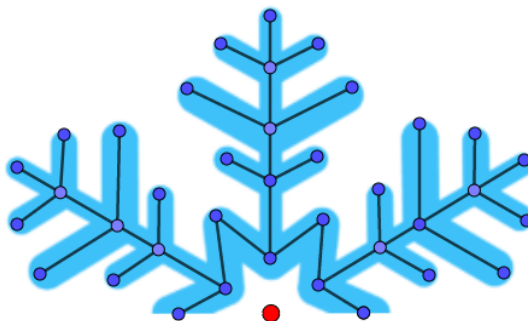
Na procházce městem, parkem, lesem a podobně nalezneme spoustu souměrných útvarů. A nemusíme k tomu nikam daleko, stačí se rozhlédnout doma po běžných předmětech. Souměrný je třeba plátek pomeranče, umyvadlo v koupelně stropní svítidla nebo židle, na které běžně sedíme. Pokusme se tedy podívat kolem sebe a takové předměty najít.

Abychom si více zažili souměrnosti, zkusíme vyřešit následující příklady.

9.4 Příklad 1

Zadání:

- 1) Dokreslete vločku, aby byla středově souměrná.

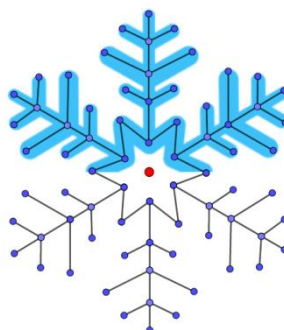


Obrázek 43: Nedokreslená vločka

Červený bod znázorňuje střed souměrnosti, podle kterého je vločka souměrná. Stačí přenést vyznačené body, které spojíme úsečkami. Jestliže přenášíme úsečku, použijeme k tomu právě dva krajní body této úsečky. V případě, že bychom chtěli přenést polopřímku, přeneseme krajní bod a libovolný bod dané polopřímky. V případě, že se jedná o přímku, zvolíme si dva libovolné body, které přeneseme.

Obrazy bodů nalezneme tak, že daným bodem a středem souměrnosti vedeme pomocnou přímku. Následně za pomoci kružítka přeneseme na pomocnou přímku vzdálenost bodu od středu na opačnou polopřímku. Přenesením a spojením všech bodů dostaneme výslednou vločku.

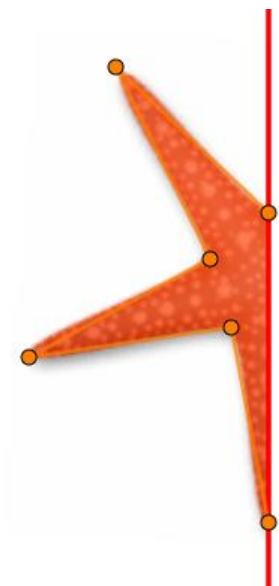
Řešení:



Obrázek 44: Výsledná vločka

Zadání:

- 2) Dokreslete mořskou hvězdu, tak aby byla osově souměrná.

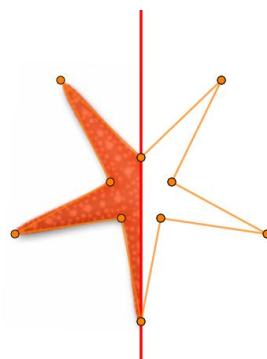


Obrázek 45: Nedokreslená mořská hvězda

Červená přímka nám udává osu, dle které je mořská hvězda souměrná. Body, které se na této ose nacházejí, se zobrazí na sebe sama. Ostatními body vedeme pomocnou přímkou, která je kolmá k ose a opět za pomoci kružítka přeneseme vzdálenost bodu od osy na opačnou polopřímku. K zobrazování úseček, polopřímek a přímek v osově souměrnosti je třeba nelézt dva body, stejné jako v souměrnosti středové.

Jakmile máme všechny body a úsečky zobrazené, mořská hvězda je dokončena.

Řešení:



Obrázek 46: Výsledná mořská hvězda

Zadání:

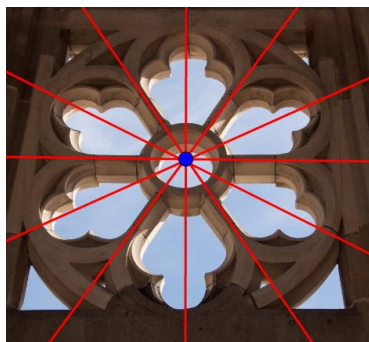
- 3) Najděte střed soudnosti a všechny osy souměrnosti



Obrázek 47: Vyhledání středu a os souměrnosti

Střed se na obrázku je středem kružnice uprostřed okna. Osy se zde vyskutují ve větším počtu. Průsečík všech os souměrnosti je totožný se středem okna. V obrázku se nachází celkem 6 os souměrnosti.

Řešení:



Obrázek 48: středy a osy souměrnosti

Symetrie se ve velké rozsahu objevuje také v architektuře. Na symetrii, geometrii a pravidelnost klade důraz především klasicismus. Varianta klasicismu je i empírový styl, ve kterém je vystaven Vítězný oblouk v Paříži. Symetrii nenajdeme jen v samotné stavbě, ale také v jejím okolí.



Obrázek 50: Miniatura Vítězného oblouku



Obrázek 49: Okolí Vítězného oblouku [17]

Na fotografii 49 je vyobrazena miniatura Vítězného oblouku v Paříži, která se nachází v MiniEurolandu v Polsku. Obrázek 50 je pořízen z internetové mapy.

Dalším příkladem architektonické symetrie je Kostel svatého Jana Nepomuckého na Zelené hoře ve Žďáru nad Sázavou, který je vystavěn ve slohu označovaném jako barokní gotika. Konstrukce kostela i jej obklopujícího ambitu vychází z geometrie kruhu. Fotografie 51 je pořízena v Miniaturparku Beheminiu v Mariánských lázních.



Obrázek 51: Miniatura kostela svatého Jana Nepomuckého

Následující příklad řešili žáci sedmé třídy základní školy v Českých Budějovicích. Na začátku hodiny byla probírána teorie osové souměrnosti. Žáci hledali různé věci, které jsou osově souměrné. Nejčastější předměty, které žáci jmenovali, byly například sešity, lavice, okna, dveře a další. Někteří z žáků oponovali, že například dveře nemůžou být symetrické, protože je na nich klika, která tuto vlastnost vyvrací. Toto bylo jasným důkazem toho, že danou problematiku pochopili a rozumí jí.

Poté žáci samostatně pracovali na zadaných příkladech. V první části příkladu 1 nebyl nikdo, kdo by měl problém obrázků dokreslit. Někteří měli úkol vyřešený během krátké chvíle, jiní potřebovali času více. Šlo ale především o snahu kreslit přesně. V druhé části příkladu 1 se už ale problém objevil. Objevili se žáci, kteří rukavici a chodidlo nakreslili přesně tak, jako vzor, což ale nesplňovalo zadání, že musí být osově souměrný. Příčina této chyby byla u většiny žáků to, že nebyla daná osa souměrnosti. Vyskytl se i případ toho, že žák chodidlo zakreslil správně, rukavici však pouze posunul. Osu souměrnosti přesto všichni vyznačili správně.

Ve zbytku hodiny se žáci věnovali příkladu 2, na který už nezbylo moc času. Žákům dlouho trvalo vystříhat obrázky, a proto nebylo moc prostoru věnovat se osám souměrnosti. Z tohoto důvodu bych příště přinesla do hodiny již vystřižené tvary.

9.5 Příklad 2

Zadání:

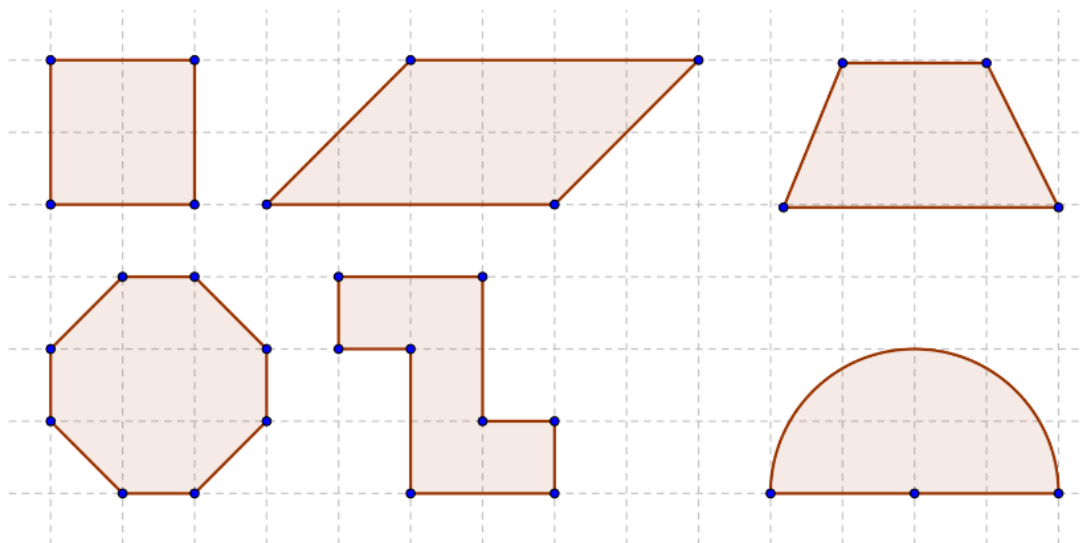
- 1) Dokreslete obrázky, tak aby jejich chybějící část odpovídala zbytku obrázku.



Obrázek 52: Příklad na osovou souměrnost

Do dokreslených obrázků vyznačte osu souměrnosti.

- 2) Obrázky vystřihněte a zkoušejte je překládat tak, aby se všechny jejich části překrývaly.



Obrázek 53: Objekty k hledání os souměrnosti

Celková hodina probíhala velmi dobře, žáci se aktivně zapojovali a řešili zadané úkoly. Na většině z nich bylo vidět, že je tyto činnosti baví.

Žáci třetího ročníku střední odborné školy v Českých Budějovicích dostali při hodině matematiky příklad, kde jim z velké části výpočet usnadnila symetrie. Příklady řešili v rámci opakování planimetrie, takže všechny potřebné informace pro výčet příkladu měli již z dřívější doby a získané znalosti propojovali. K řešení příkladů bylo žákům umožněno použití matematicko fyzikálních tabulek a kalkulaček.

Žáci řešili příklad přibližně polovinu vyučovací hodiny, což bylo podstatně více času než bylo původně plánováno.

Převážná většina žáků měla při řešení úkolů nemalé potíže. Hned v první fázi je nenapadlo rozdělit dvanáctiúhelník na trojúhelníky a snažili se řešit modré a žluté části samostatně.

Tuta část příkladu byla po nějaké době společně vyhodnocena, protože jen pár z žáků bylo schopno úkol vyřešit. Po společném řešení žáci začali samostatně pracovat na druhé části příkladu.

Takřka všichni dokázali vyřešit poměr obsahů skel, ale jen málo z nich dokázalo zdůvodnit proč to tak je. Na poměr přišli tak, že dali osahy obou barevných skel do poměru a zkrátili do základního tvaru. Jen dva žáci z celkového počtu dvaceti žáků, dokázali své tvrzení zdůvodnit.

Díky diskuzi, která při hodině vznikla si žáci osvojovali komunikační kompetence, kdy souvisle formulovali a vyjadřovali své myšlenky a názory. Žáci rovněž naslouchali a porozuměli ostatním, kteří vhodně argumentovali a obhajovali vlastní názor.

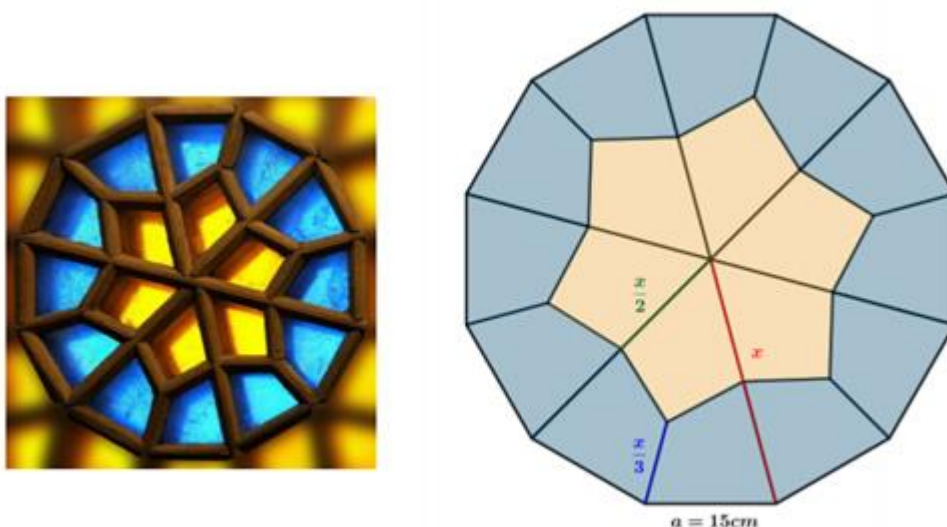
9.6 Příklad 3

Zadání:

Na obrázku vidíte okno a jeho model s rozměry.

Vypočítejte:

- 1) Kolik cm^2 žlutého a kolik cm^2 modrého skla bude potřeba na vytvoření stejného okna?
- 2) V jakém poměru jsou obsahy obou skel? Proč tomu tak je?



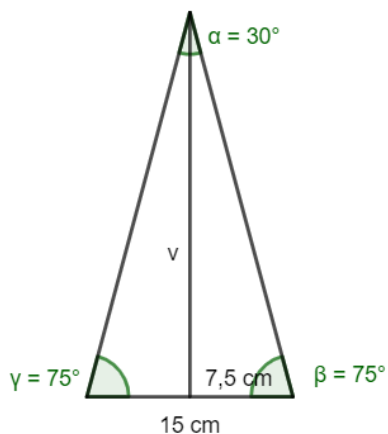
Obrázek 54: Okno a jeho model s rozměry

Řešení:

1) Dvanáctiúhelník můžeme rozdělit na 12 stejných trojúhelníků, které mají u vrcholu 30° , protože plný úhel (360°) rozdělíme na 12 stejných dílů. Vzhledem k tomu, že se jedná o rovnoramenný trojúhelník, úhly u základny jsou rovny 75° ($(180^\circ - 30^\circ) : 2$).

Nejprve vypočítáme obsah celého jednoho z dvanácti trojúhelníků (S), poté vypočteme obsah žluté části (S_Z) a žlutý obsah odečteme od celého trojúhelníku, abychom získali modrou část (S_m). Nakonec vše vynásobíme dvanácti a vzhledem k tomu, že každý díl je osově souměrný, máme hotovo.

Obsah celého trojúhelníku:



Obrázek 55: Obsah celého trojúhelníku

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{v}{7,5}$$

$$v = 28 \text{ cm}$$

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$S = \frac{15 \cdot 28}{2}$$

$$S = 210 \text{ cm}^2$$

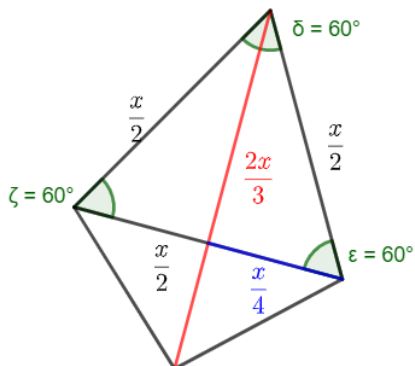
Délka ramene x :

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{28}{x}$$

$$x = 29 \text{ cm}$$

Obsah žlutého trojúhelníku:



$$S_z = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$S_z = \frac{\frac{2x}{3} \cdot \frac{x}{4}}{2}$$

$$S_z = \frac{\frac{2 \cdot 29}{3} \cdot \frac{29}{4}}{2}$$

$$S_z = 70 \text{ cm}^2$$

Obrázek 56: Obsah žluté části trojúhelníku

Obsah žluté části okna: $12 \cdot 70 = 840 \text{ cm}^2$

Obsah modrého čtyřúhelníku:

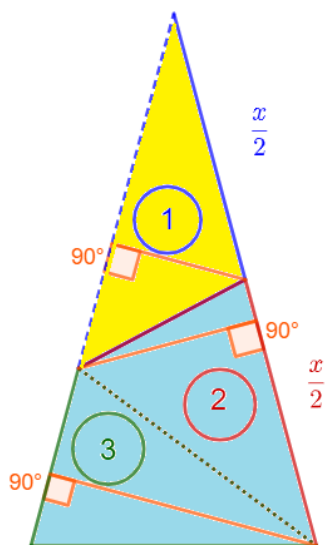
$$S_m = S - S_z$$

$$S_m = 210 - 70$$

$$S_m = 140 \text{ cm}^2$$

Obsah modré části: $12 \cdot 140 = 1680 \text{ cm}^2$

2)



Obrázek 57: Výpočet poměrů částí trojúhelníku

Základny trojúhelníků 1 a 2 jsou stejně dlouhé ($\frac{x}{2} \text{ cm}$). Výška trojúhelníků 1 a 2 je shodná (oranžová úsečka). Z obrázku 57 je patrné, že obsahy obou trojúhelníků jsou stejné.

Trojúhelníky 1 celý trojúhelník jsou si podobné (všechny úhly jsou shodné). Strana trojúhelníku 1 je poloviční než strana celého trojúhelníku a proto i výška trojúhelníku 1 je poloviční než výška celého trojúhelníku.

Trojúhelník 3 má poloviční základnu než trojúhelník 1 (vychází z podobnosti). Trojúhelník 3 má shodnou výšku s celým trojúhelníkem a z toho vyplývá, že je dvojnásobná než výška trojúhelníku 1. Proto oba tyto trojúhelníky mají stejný obsah.

Žluté sklo a modré sklo jsou v poměru 1:2.

Žáci příklad neřešili dle očekávání. Z jejich chyb lze soudit, že největší problém mají s představivostí a se zamyšlením se nad daným problémem. Bylo by dobré do výuky zařadit více úkolů, kde je nutné graficky příklad nejprve rozdělit a poté řešit. Pravděpodobně kvůli malému počtu takových typů úloh žáky nenapadlo řešení a z tohoto důvodu jim příklad zabral hodně času.

10 Žákovské práce - použití symetrie

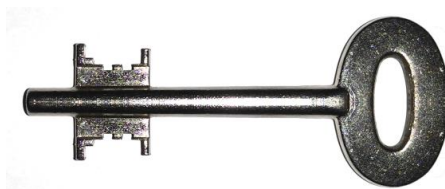
V této kapitole jsou vybrané práce žáků, kde využívali matematické výpočty, u nichž jim práci usnadnila symetrie.

Žáci třetího ročníku střední odborné školy dostali za úkol vypočítat povrch nebo objem těles za využití symetrie. Našli předměty, které se kolem nich vyskytovali ať už v domácnosti, v přírodě, ve městě nebo kdekoli v jejich okolí.

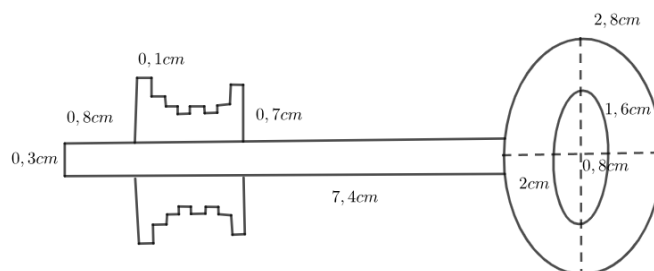
Předmět nejprve vyfotografovali, poté pomocí vhodného softwaru vytvořili model s rozměry a vypočítali povrch nebo objem. Vybrané práce žáků naleznete v následujících příkladech.

10.1 Příklad

První žák si vybral osově souměrný trezorový klíč, viz obrázek 58. Nakreslil si jeho model, kam zanesl rozměry (obrázek 59) a na základě kterých objem počítal.



Obrázek 58: Osově souměrný klíč⁴



Obrázek 59: Model klíče s rozměry⁵

1) Začneme výpočtem objemu části, která slouží k upevnění do svazku klíčů, takzvané hlavy klíče. Hloubka této části je dle žákova zaměřených hodnot 0,3 cm.

⁴ Fotografie je pořízena žákem střední odborné školy a použita s jeho souhlasem.

⁵ Model je vytvořen žákem střední odborné školy a rovněž použit s jeho vědomím.

Spočítáme si objem dutého válce, jehož podstavou je prostor mezi dvěma elipsami, délka hlavní vnější elipsy osy měří 2,8 cm a délka vedlejší osy měří 2 cm. Velikost hlavní osy menší elipsy má délku 1,6 cm, vedlejší osa měří 0,8 cm.

Obsah podstavy:

$$Sp = \pi \cdot a_1 \cdot b_1 - \pi \cdot a_2 \cdot b_2$$

$$Sp = \pi \cdot 1,4 \cdot 1 - \pi \cdot 0,8 \cdot 0,4$$

$$Sp = 1,4\pi - 0,32\pi$$

$$Sp = 1,08\pi \text{ cm}^2$$

Objem dutého eliptického válce:

$$V = Sp \cdot v$$

$$V = 1,08\pi \cdot 0,3$$

$$V = 0,324\pi \text{ cm}^3$$

2) Nyní vypočítáme objem těla klíče, tzn. tyčinky, na které se nachází uzávěr klíče (část sloužící k odemykání trezoru). Tento díl klíče má tvar válce s kruhovou podstavou, jejíž průměr je 0,3 cm a výška válce měří 7,4 cm.

Obsah podstavy:

$$Sp = \pi \cdot r^2$$

$$Sp = \pi \cdot 0,3^2$$

$$Sp = 0,09\pi \text{ cm}^2$$

Objem válce:

$$V = Sp \cdot v$$

$$V = 0,09\pi \cdot 7,4$$

$$V = 0,666\pi \text{ cm}^3$$

3) Poslední kus je uzávěr klíče, který je osově souměrný podle osy, která se nachází ve středu těla klíče. Z tohoto důvodu stačí vypočítat pouze jednu část a vynásobit ji dvěma. Jeho rozměry jsou v modelu uvedeny pouze částečně.

Tato část klíče je rozdělena na osm kvádrů, jež se liší pouze ve výšce. Šířka a hloubka každého z kvádrů měří přibližně 1 mm. Každý ze sousedících hranolů se liší ve výšce oproti sousednímu o 1 mm.

První kvádr má tedy rozměry 1 mm, 1 mm a 8 mm, jeho objem tedy vypočítáme

$$V_1 = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,8$$

$$V_1 = 0,008 \text{ cm}^3$$

Stejným způsobem vypočítáme i objemy ostatních částí závěru klíče.

$$V_2 = 0,007 \text{ cm}^3, V_3 = 0,006 \text{ cm}^3, V_4 = 0,005 \text{ cm}^3, V_5 = 0,006 \text{ cm}^3,$$

$$V_6 = 0,005 \text{ cm}^3, V_7 = 0,006 \text{ cm}^3, V_8 = 0,007 \text{ cm}^3$$

Nyní všechny objemy sečteme a vynásobíme dvěma, abychom zjistili celkový objem závěru klíče.

$$V = 2(V_1 + 2V_2 + 3V_3 + 2V_4)$$

$$V = 2(0,008 + 2 \cdot 0,007 + 3 \cdot 0,006 + 2 \cdot 0,005)$$

$$V = 0,09 \text{ cm}^3$$

Všechny objemy samostatných částí klíče dáme dohromady a dostaneme jeho výsledný objem.

$$V = 0,324\pi + 0,666\pi + 0,09$$

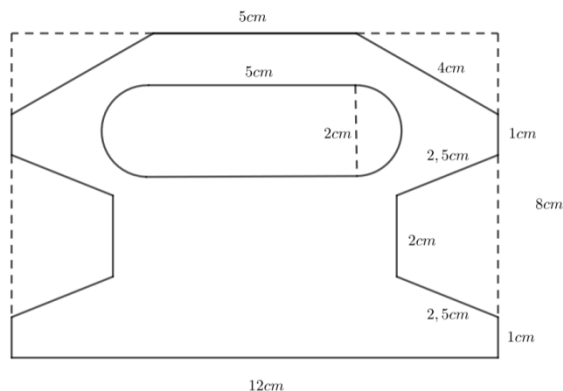
$$V = 3,2 \text{ cm}^3$$

Objem klíče od trezoru je $3,2 \text{ cm}^3$.

⁶⁷Dalším vybranou prací žáka je úchyt, na nějž se navinuje provaz. Žák se rozhodl pro výpočet povrchu tohoto osově souměrného úchytu. Hloubka toho úchytu měří 1 cm, dle žákova zaměření.



Obrázek 61: Úchyt provazu



Obrázek 60: Model úchytu provazu

V první kroku vypočítal žák obsah obdélníku, který si doplnil do vybraného objektu.

Obsah obdélníku je

$$S = a \cdot b$$

$$S = 12 \cdot 8$$

$$S = 96 \text{ cm}^2 .$$

Od obdélníků musíme odečíst trojúhelník a lichoběžník, který do modelu nepatří.

Obsah pravoúhlého trojúhelníku, který je viděl v horní části obrázku 61, vypočítáme pomocí vzorce

$$S = \frac{a \cdot b}{2} .$$

Strana se vypočítá tak, že celkové délky úchytu odečte vrchních 5 cm a vydělíme dvěma. Z toho vyplývá, že strana a měří 3,5 cm. Stranu b zjistíme pomocí Pythagorovy věty.

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 4^2 - 3,5^2$$

$$b \doteq 2 \text{ cm}$$

⁶ Fotografie je pořízena žákem střední odborné školy a použita s jeho souhlasem.

⁷ Model je vytvořen žákem střední odborné školy a rovněž použit s jeho vědomím.

Dosadíme do vzorce a zjistíme obsah tohoto trojúhelníku, který se u objektu vyskytuje dvakrát, proto jej vynásobíme dvěma

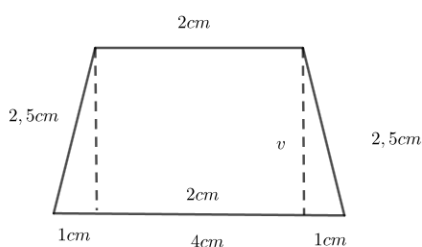
$$S = 2 \cdot \frac{3,5 \cdot 2}{2}$$

$$S = 7 \text{ cm}^2 .$$

Rovnoramenné lichoběžníky k úchytu také nepatří proto i je musíme odečíst. Použijeme vzorec pro výpočet obsahu lichoběžníku

$$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2} .$$

K vypočítání obsahu nám chybí výška, kterou vypočítáme rovněž přes Pythagorovu větu. Vypočítané rozměry lichoběžníku nalezne na obrázku 62.



Obrázek 62: Výpočet výšky

Výpočet výšky:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$v^2 = 2,5^2 - 1^2$$

$$v \doteq 2,7 .$$

Výšku dosadíme do vzorce a vynásobíme dvěma:

$$S = 2 \cdot \frac{(4 + 2) \cdot 2,7}{2}$$

$$S = 16,2 \text{ cm}^2 .$$

Poslední část, kterou musíme vypočítat, je obdélník, na jehož obou koncích se nachází půlkružnice. Vypočítáme tedy obsah obdélníku a k tomu přidáme obsah kruhu.

$$S = a \cdot b + \pi r^2$$

$$S = 5 \cdot 2 + \pi \cdot 1^2$$

$$S \doteq 13,4 \text{ cm}^2 .$$

Obsah přední strany úchytu je totožný s obsahem jeho zadní strany, proto poté co odečteme části, které nepatří objektu, vynásobíme vzniklý obsah dvěma.

$$S = 2 \cdot (96 - 7 - 16,2 - 13,4)$$

$$S = 118,8 \text{ cm}^2 .$$

Abychom zjistili celý povrch, přičteme obsahy obdélníků, které tvoří boční strany. Všechny tyto obdélníky mají šířku 1 cm, Proto jejich obsahy jsou:

$$S_1 = 12 \text{ cm}^2, \quad 4 \cdot S_2 = 1 \text{ cm}^2, \quad 4 \cdot S_3 = 2,5 \text{ cm}^2, \quad 2 \cdot S_4 = 2 \text{ cm}^2,$$

$$2 \cdot S_5 = 4 \text{ cm}^2, \quad S_6 = 5 \text{ cm}^2$$

$$S = 12 + 4 + 10 + 4 + 8 + 5$$

$$S = 43 \text{ cm}^2$$

Celkový povrch vybraného držáku na provaz je tedy $161,8 \text{ cm}^2$.

Mezi předměty, které si žáci vybírali se oblevili lepicí páska, tužka, různé lahve a lahvičky stojany na svíce a podobně. Tyto útvary buď byly jednoduché a žáci při jejich výpočtu neměli nutnost využít symetrii nebo naopak byly příliš složité, což vedlo ke zjednodušování modelů a následného řešení objemů nebo povrchů.

Příklad na výpočet objemu klíče a povrchu úchytu na provaz je zajímavý jak objekty, které si žáci vybrali, tak především jejich pílí při výpočtech. Většina žáků našla základní jednoduché tvary. Nicméně i přesto se museli zamyslet nad matematickou reprezentací běžného předmětu, který vidí každodenně okolo sebe. Někteří žáci použili naopak obtížné tvary, které si ale tak zjednodušili, že už se model, který vytvořili, neshodoval s původním předmětem. Dá se proto předpokládat, že příčinou byla malá motivace žáků k řešení problému, neměli příliš zájem o danou problematiku či jejich znalost matematiky je nedostatečná. Úkol řešili v době distanční výuky, kdy nebylo snadné žáky v dostatečné míře motivovat k jeho plnění. Z mnoha odevzdaných prací bylo patrné, že úkoly splnili jen proto, že to bylo vyžadováno. Žáci při vytváření objektů používali program GeoGebra se kterým již měli zkušenost z dřívější doby.

11 Křivky

V kapitole o zlatém řezu se čtenář seznámil s logaritmickou spirálou, která ale není jedinou zajímavou křivkou, s níže se můžeme setkat. Křivky se hojně využívají například v počítačové grafice při modelování různých objektů například do animací. Pomocí křivek jsou definovány například dráhy, po kterých se pohybují animované postavy. Křivky se využívají hlavně díky tomu, že se dají snadno měnit a zajišťují stabilitu chování objektu pohybujícího se této křivce.

Křivky můžeme zapisovat explicitně, jedná-li se o prosté funkce bez svislých tečen. Příkladem může být parabola, jejíž rovnice je ve tvaru

$$y = ax^2 + bx + c .$$

Implicitní zápis je vhodný pro testování, zda bod leží na křivce. Příkladem implicitního zápisu je rovnice kružnice, která má střed v bodě $[2;-1]$ a její poloměr je 4

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16 .$$

V případě, že křivky chceme vykreslit pomocí počítačového softwaru, použijeme parametrické vyjádření křivky, protože snadno vypočteme bod na křivce, který je jednoznačně určen hodnotou parametru. Kružnici se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic a poloměrem r , zapíšeme parametricky následovně

$$x = r \cdot \cos t$$

$$y = r \cdot \sin t$$

$$t \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle .$$

11.1 Spirály

Archimédova spirála

Křivky připomínající zlatou spirálu jsou například Archimédova spirála (obr. 63), jejíž rovnice má tvar $r = a\varphi$, kde a je celé kladné číslo.

Pokud bychom chtěli tuto spirálu vymodelovat, použijeme parametrické vyjádření rovnice ve tvaru

$$x = at \cdot \cos t$$

$$y = at \cdot \sin t$$



Obrázek 63: Archimédova spirála

Tvar této spirály mají různé pružiny. Tuto pružinu můžeme nalézt například u věci na tužkové baterie (obr. 64). Spirála se nachází v místě určeném pro vložení této baterie. Další obdobné spirály jsou například logaritmická spirála, hyperbolická spirála a další.



Obrázek 64: Pružina

Hyperbolická spirála

Hyperbolická spirála je inverzní ke spirále Archimédově a je dána rovnicí

$$r = \frac{a}{\alpha},$$

kde a je kladné číslo. Pokud úhel α roste, hodnoty se blíží k nule. To znamená, že se křivka svinuje k bodu, kterému říkáme asymptotický bod křivky.

11.2 Bernoulliho lemniskáta

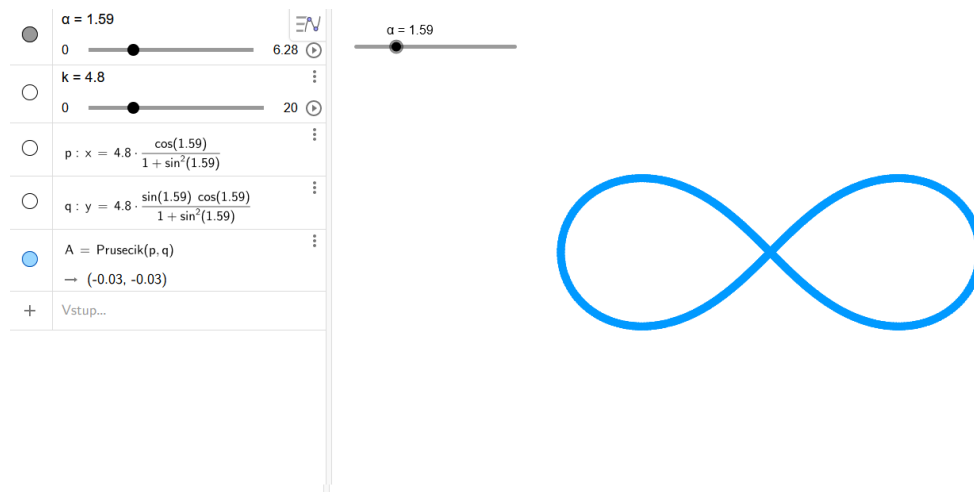
Jednou z křivek, které se používají v počítačové grafice je Bernoulliho lemniskáta. Která je popsána rovnicí

$$(x^2 + y^2)^2 + 2e^2(x^2 - y^2) = 0$$

Pokud chceme křivku vykreslit pomocí počítače, musíme ji převést do parametrického tvaru:

$$x = k \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$$
$$y = k \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}.$$

Po zadání parametrického vyjádření do programu GeoGebra, vznikne křivka, kterou můžeme vidět na obrázku 64. Tuto křivku vykresluje bod, který je průsečíkem. Změnou hodnoty α se pokusuje průsečík, který Bernoulliho lemniskátu vykresluje.



Obrázek 65: Bernoulliho lemniskáta

Tato křivka vypadá jako symbol nekonečna, který je v matematice velice důležitý. Můžeme si na ní představit také animaci auta, které se pohybuje po dráze odpovídající této křivce.

11.3 Hügelschafferovo vejce

Pokud bychom parametricky vyjádřili rovnici kružnice a elipsy, pak jejich modifikací získáme křivku, která je známá jako Hügelschafferovo vejce (obr. 64).

Parametrická rovnice kružnice, kde r je poloměrem kružnice:

$$x = r \cdot \cos t$$

$$y = r \cdot \sin t$$

Parametrická rovnice elipsy, kde a je délka hlavní poloosy a b je délka vedlejší poloosy:

$$x = a \cdot \cos t$$

$$y = b \cdot \sin t$$

Rovnici elipsy modifikujeme na parametrickou rovnici:

$$x = \left(\sqrt{a^2 - d^2 \cdot \sin^2 t} + d \cdot \cos t \right) \cos t$$

$$y = b \cdot \sin t$$

Neznámá d udává vzdálenost posunu středů kružnic.



Obrázek 66:Hügelschafferovo vejce

Hügelschafferovo vejce dostalo název podle matematika, který tuto křivku objevil a pochopitelně podle tvaru, který vejce skutečně připomíná.

O zmiňovaných křivkách a mnoha se čtenář může dozvědět více v publikaci Matematika křivek, vytvořené Miroslavou Jarešovou a Ivo Volfem[9].

11.4 Cykloidy

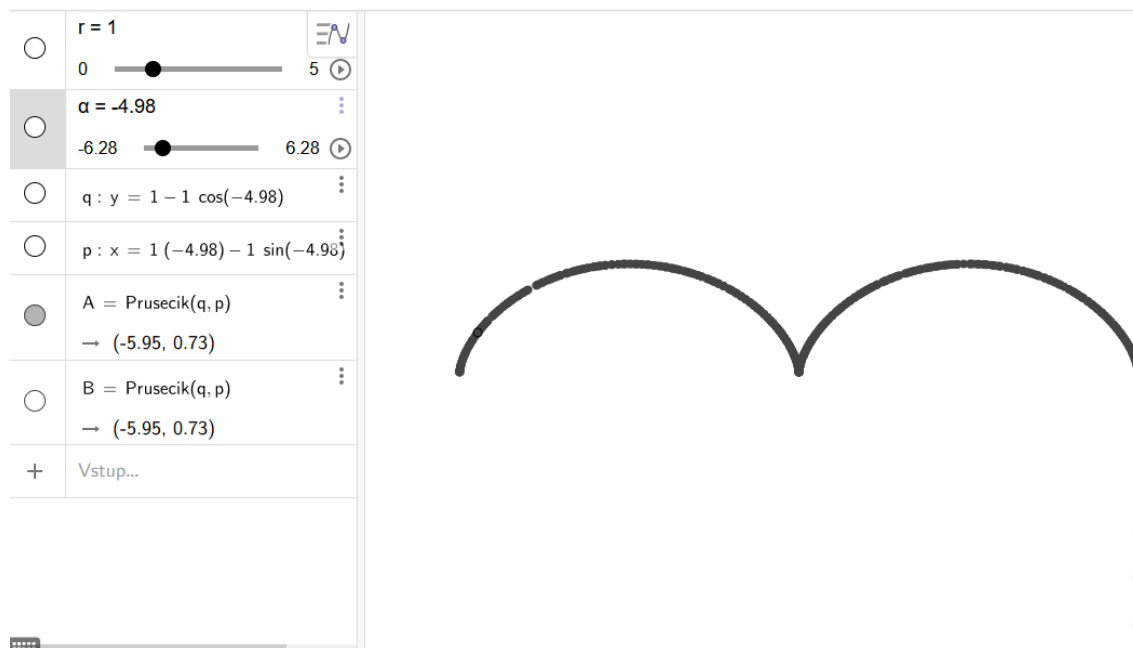
Křivky, které se využívají v technice například u rotačních čerpadel, jsou speciálními typy cykloid. Cykloida je křivka, která vzniká pohybem kružnice po přímce. Tuto křivku vykresluje bod spojený s kružnicí.

Parametricky můžeme cykloidu vyjádřit pomocí rovnice

$$x = rt - r \cdot \sin(t)$$

$$y = r - r \cdot \cos(t)$$

kde r je kladné číslo.



Informace o konkrétních cykloidách může čtenář nalézt v publikaci o geometrických technických křivkách v praxi.[11]

12 Závěr

Tato diplomová práce by měla sloužit jako pomůcka při výuce geometrie ve školách.

Pochopení matematiky a geometrie je pro mnohé žáky velkým problémem. Z tohoto důvodu jsem vybrané jevy doprovázela fotografiemi a obrázky, jež žákům napomohou k lepšímu pochopení řešené problematiky. Při hodinách matematiky se mi osvědčilo používání vizuálních pomůcek a nabádání žáků k tomu, aby se sami pokusili najít další objekty ve svém okolí, týkající se probíraného tématu. Žák tyto aktivity baví a navíc si tím osvojuje různé kompetence a vědomosti nejen matematického charakteru.

Při výuce geometrie žáci používají program GeoGebra, který je srozumitelný, lehce ovladatelný a navíc výstupy v podobě grafů, křivek a jiných objektů jsou velmi srozumitelné.

Díky tvorbě diplomové práce jsem se více zabývala okolím, přírodou, architekturou i infromatickými předměty jako je například grafika. Všimla jsem si více souvislostí a spojitostí matematiky s běžným životem. To že je matematika a geometrie všude kolem nás je zřejmé a věděli to vědci již dávno. Bez znalostí matematiky by naše společnost nemohla vypadat tak, jak ji dnes známe. Proto je důležité matematické porozumět a rozvíjet to, co naši předci věděli už dávno. Společnost se mění, jde kupředu a my musíme jít s ní.

Zdroje

- [1] ALVAREZ, Josefina a Cesar L. GARCIA. Secrets from a bathroom floor. + *plus magazine* [online]. 2009 [cit. 2020-12-03]. Dostupné z: <https://plus.maths.org/content/secrets-bathroom-floor>
- [2] BECHYŇOVÁ, Marta. *Stránky k výuce informatiky* [online]. 2020 [cit. 2020-12-07]. Dostupné z: <http://www.ivt.mzf.cz/seminar/10-vektorova-grafika/>
- [3] BELLOS, Alex. Attack on the pentagon results in discovery of new mathematical tile. *The Guardian* [online]. Katedra počítačové grafiky a interakce, ČVUT FEL, 2015 [cit. 2020-12-03]. Dostupné z: <https://www.theguardian.com/science/alexs-adventures-in-numberland/2015/aug/10/attack-on-the-pentagon-results-in-discovery-of-new-mathematical-tile>
- [4] FELKEL, Petr. *Křivky a plochy I* [online]. Katedra počítačové grafiky a interakce, ČVUT FEL, 2016 [cit. 2020-12-07]. Dostupné z: https://cw.fel.cvut.cz/old/_media/courses/b0b39pgr/10-krivky.pdf
- [5] HALES, Thomas C. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie: Dělové koule a včelí plásty* [online]. Jednota českých matematiků a fyziků, 2001 [cit. 2020-12-11]. Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141071/PokrokyMFA_46-2001-2_2.pdf
- [6] HAŠEK, Roman. *GEOMETRIE II - KMA/GEO2* [online]. 2016 [cit. 2020-11-18]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO2/GEO2_TextPrednasek_2016.pdf
- [7] HEMENWAYOVÁ, Priya. *Tajný kód*. Praha: Slovart, 2009. ISBN 978-80-7391-253-6.
- [8] HINNER, Martin. *Výpočet fraktální dimenze* [online]. [cit. 2020-12-11]. Dostupné z: <http://martin.hinner.info/math/Fraktaly/vypocet.php>

- [9] JAREŠOVÁ, Miroslava a Ivo VOLF. *Matematika křivek: Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku* [online]. [cit. 2020-12-11]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf>
- [10] PEXA, Petr. *Grafika - studijní materiály* [online]. 2011 [cit. 2020-11-03]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~pepe/gra/Studijni_materialy/
- [11] ŠMEJKAL, J., *Technické křivky geometrické v praxi*. Praha: Česká grafická unie a. s., 1939.
- [12] TAPP, Kristopher. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Switzerland: Springer International Publishing, 2016. ISBN 978-981-15-1739-6.
- [13] *Fraktální geometrie a fraktály* [online]. [cit. 2020-12-11]. Dostupné z: <http://www.ksr.tul.cz/fraktaly/geometrie.html>

Zdroje obrázků

- [14] HOUSKA, Jiří. *ANAGALLIS ARVENSIS L. – drchnička rolní* [online]. 2008 [cit. 2020-12-11]. Dostupné z: <https://botany.cz/cs/anagallis-arvensis/>
- [15] METEOCENTRUM.CZ, redakce, SD, MP, *Meteocentrum.cz* [online]. 2012 [cit. 2020-12-19]. Dostupné z: <https://www.meteocentrum.cz/aktuality/extremni-pocasi/12081600/nove-letouny-pro-studium-hurikanu-jsou-pripraveny>
- [16] IRozhlas: *Judaismus* [online]. Fili Jandourek [cit. 2020-09-12]. Dostupné z: <https://www.irozhlas.cz/fotogalerie/5926171>
- [17] Vítězný oblouk. *Mapy.cz* [online]. 2012 [cit. 2020-12-19]. Dostupné z: <https://mapy.cz/zakladni?x=2.2848646&y=48.8682351&z=15&source=osm&iid=94317307>

- [18] Wikipedia.org: *Romanesco* [online]. [cit. 2020-09-12]. Dostupné z:
[https://cs.wikipedia.org/wiki/Romanesco_\(zelenina\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Romanesco_(zelenina))
- [19] Wikipedia.org: *Včelí plástev* [online]. [cit. 2020-09-12]. Dostupné z:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/37/Bienenwabe_mit_Eiern_und_Brut_5.jpg
- [20] Wikizdroje: *Soubor:Hvězda letohrádek půdorys.jpg* [online]. 2014 [cit. 2020-11-04]. Dostupné z:
https://cs.m.wikisource.org/wiki/Soubor:Hv%C4%9Bzda_letohr%C3%A1dek_p%C5%AFdorys.jpg

Seznam obrázků

Obrázek 1: Mnohoúhelníky.....	8
Obrázek 2: Výpočet výšky	9
Obrázek 3: Rovnostranný trojúhelník	10
Obrázek 4: Dopravní značka.....	11
Obrázek 5: Štít domu	11
Obrázek 6: Letohrádek Hvězda - zmenšený model	12
Obrázek 7: Letohrádek Hvězda – půdorys [20]	12
Obrázek 8: Davidova hvězda [16].....	12
Obrázek 9: Vlajka Izraele.....	13
Obrázek 10: Rozbor příkladu	13
Obrázek 11: Konstrukce hvězdy na vlajce.....	14
Obrázek 12: Pravidelný čtyřúhelník.....	15
Obrázek 13: Náměstí v Českých Budějovicích.....	16
Obrázek 14: Pletivový plot	16
Obrázek 15: Střešní krytina.....	16
Obrázek 16: Pixely.....	17
Obrázek 17: Rozkrojené jablko.....	19
Obrázek 18: Drchnička rolní [14]	19
Obrázek 19: Lidské tělo	20
Obrázek 20: Pokrytí plochy pětiúhelníky	20
Obrázek 21: Lastura	22
Obrázek 22: Větrný vír [15].....	22
Obrázek 23: Konstrukce zlatého řezu	23
Obrázek 24: Zlatá spirála v obdélníku	24
Obrázek 27: Zlatá spirála ve fotografii	25
Obrázek 25: Zlatá spirála v pětiúhelníku	25
Obrázek 26: Vnořené pětiúhelníky	25
Obrázek 28: Pravidelný šestiúhelník.....	27
Obrázek 29: Včelí plástev [19].....	28
Obrázek 30: Dlaždice.....	28

Obrázek 31: Výpočet výšky	30
Obrázek 32: Mechanický výpočet úseček	31
Obrázek 33: Algoritmus pro výpočet úseček	31
Obrázek 35: Chybný výpočet délky strany čtverce	32
Obrázek 34: Nesprávné řešení pomocí algoritmu	32
Obrázek 36: Uspořádání koulí v prostoru	34
Obrázek 37: Romanesco [18]	35
Obrázek 38: Lastura	35
Obrázek 39: Kochova křivka [13]	36
Obrázek 40: Střed souměrnosti	39
Obrázek 41: Osa souměrnosti	40
Obrázek 42: Rovinná souměrnost	40
Obrázek 43: Nedokreslená vložka	41
Obrázek 44: Výsledná vložka	41
Obrázek 45: Nedokreslená mořská hvězda	42
Obrázek 46: Výsledná mořská hvězda	42
Obrázek 47: Vyhledání středu a os souměrnosti	43
Obrázek 48: středy a osy souměrnosti	43
Obrázek 51: Miniatura kostelu svatého Jana Nepomuckého	44
Obrázek 50: Okolí Vítězného oblouku [17]	44
Obrázek 49: Minatura Vítězného oblouku	44
Obrázek 52: Příklad na osovou souměrnost	46
Obrázek 53: Objekty k hledání os souměrnosti	47
Obrázek 54: Okno a jeho model s rozměry	48
Obrázek 55: Obsah celého trojúhelníku	49
Obrázek 56: Obsah žluté části trojúhelníku	50
Obrázek 57: Výpočet poměrů částí trojúhelníku	50
Obrázek 58: Osově souměrný klíč	52
Obrázek 59: Model klíče s rozměry	52
Obrázek 60: Model úchytu provazu	55
Obrázek 61: Úchyt provazu	55
Obrázek 62: Výpočet výšky	56

Obrázek 63: Archimédova spirála.....	59
Obrázek 64: Bernoulliho lemniskáta.....	61
Obrázek 65:Hügelschafferovo vejce	62