JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

Ekonomická fakulta

Studijní program: B6208 Ekonomika a management

Studijní obor: Obchodní podnikání

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Využití metody nejmenších čtverců v ekonomických aplikacích

Vedoucí práce | Autor
Mgr. Petr Chládek, Ph.D. | Zuzana Janečková

2011

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Ekonomická fakulta
Akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Zuzana JANEČKOVÁ**
Studijní program:	**B6208 Ekonomika a management**
Studijní obor:	**Obchodní podnikání**
Název tématu:	**Využití metody nejmenších čtverců v ekonomických aplikacích**
Zadávající katedra:	**Katedra aplikované matematiky a informatiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Diplomantka v práci provede popis a teoretické odvození metody nejmenších čtverců, s využitím doporučené literatury ukáže ideu celé metody ve vhodných příkladech. Poté bude odvozená metoda aplikována na konkrétní ekonomická data a ukazatele, které diplomantka pro potřeby práce shromáždí. Cílem práce je ukázat možnost použití vybrané numerické metody pro ekonomickou praxi a odhady či přibližné určování ekonomických veličin.

Metodický postup

1. Shromáždění a studium doporučené literatury.
2. Odvození metody nejmenších čtverců.
3. Vyhledání vhodných ekonomických údajů pro aplikaci vybrané numerické metody.
4. Použití odvozené metody (metod) na ekonomická data.
5. Závěry a obecná doporučení.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy: **40 - 50 stran**

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam odborné literatury:

Horová I. Numerické metody. Brno : MU, 1999.

Ralston A. Základy numerické matematiky. Praha : Academia, 1978.

Vitásek E. Numerické metody. Praha : SNTL, 1987.

Judd K. L. Numerical methods in economics. Massachsetts institute, 1998.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Petr Chládek, Ph.D.**
Katedra aplikované matematiky a informatiky

Datum zadání bakalářské práce: **15. února 2010**

Termín odevzdání bakalářské práce: **16. dubna 2011**

JIHOČESKÁ UNIVERZITA
V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
EKONOMICKÁ FAKULTA
Studentská 13 (26)
370 05 České Budějovice

L.S.

prof. Ing. Magdalena Hrabánková, CSc., prof.h.c.
děkanka

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.
vedoucí katedry

V Českých Budějovicích dne 11. března 2010

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Využití metody nejmenších čtverců v ekonomických aplikacích vypracovala samostatně s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 sb. v plném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly, v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb., zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

České Budějovice, 4. 4. 2011

……………………………..

Zuzana Janečková

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu práce Mgr. Petr Chládek, Ph.D., za pomoc a cenné rady při zpracování bakalářské práce.

Obsah

1 Úvod

„Jako věda se tedy numerická matematika zabývá procesy, pomocí nichž lze matematické problémy řešit aritmetickými operacemi. Někdy to bude znamenat sestrojení algoritmů k řešení problému, který je již v takovém tvaru, že jeho řešení lze nalézt algoritmickými prostředky (např. soustava lineárních rovnic). Často to bude znamenat náhradu veličin, které nemohou být počítány aritmeticky (např. derivace nebo integrály), aproximacemi, které umožní nalézt přibližné řešení. V tomto případě se budeme zajímat o chybu této aproximace. Ale v každém případě prostředky, kterých budeme užívat při vytváření procesů numerické analýzy, budou prostředky klasicky chápané matematické analýzy." (Ralston, Anthony, 1978)

„Současná doba je charakterizována prudkým rozvojem výpočetní techniky a s tím souvisí rozšíření možností aplikace matematiky i v dalších vědeckých oborech – biologii, chemii, ekonomii, psychologii, lékařství a v technických vědách" (Horová, Ivana, 2008)

„V předpočítačové éře totiž nebylo myslitelné, že bychom si mohli dovolit provádět statisíce a miliony operací, abychom získali jedno číslo ve výsledku. Proto v aplikované matematice převládala snaha dojít k zavřeným vzorcům (které výsledek vyjadřovaly pomocí elementárních nebo speciálně tabelovaných funkcí), a redukovat tak maximálně počet skutečně prováděných operací. Počítače tento stav radikálně změnily, neboť nesmírně zlevnily cenu jedné početní operace. To má za následek, že dnes vystupují výrazně do popředí výpočetní postupy jednoduchého cyklického charakteru, v nichž můžeme připustit dříve nemyslitelný počet operací, a že v současné době pokládáme daný problém za uspokojivě řešený, je-li znám postup, pomocí něhož lze získat řešení s požadovanou přesností v přijatelném čase. Tento přístup je daleko univerzálnější a takto získané řešení není o nic méně cenné než řešení v uzavřeném tvaru jen proto, že je pouze „pouze" přibližné. Chceme-li totiž získat z řešení v uzavřeném tvaru konkrétní číslo, musíme do příslušného vzorce dosadit konkrétní parametry a provést naznačené operace eventuálně i za použití předem připravených tabulek, což nelze samozřejmě obecně provést přesně." (Vitásek, Emil, 1987)

2 Odvození vzorce pro metodu nejmenších čtverců

V této kapitole se budu postupně věnovat polynomu prvního až m-tého stupně pro libovolné $m \in N$. Pro každý polynom sestavím funkci pro kvadratickou odchylku, kterou budu minimalizovat pomocí parciálních derivací a na základě tohoto postupu odvodím vzorec pro metodu nejmenších čtverců. Dále budu u každého polynomu zjišťovat, jaký je potřebný počet bodů, aby k aproximaci došlo. Vzorec pro metodu nejmenších čtverců mi poskytne koeficienty, které přísluší danému polynomu.

U aproximace metodou nejmenších čtverců se koeficienty volí za podmínky, aby součet čtverců rozdílů mezi funkcí f a její aproximací braný přes nějakou pevně zvolenou konečnou množinu bodů byl minimální. (Vitásek, Emil, 1987)

„Budiž $f(x)$ funkce a $\{x_i\}$, $i=1,..,n$ posloupnost bodů neboli argumentů, v nichž jsme naměřili hodnoty funkce $f(x)$, které obecně budou zatíženy chybami. Přesnou hodnotu $f(x_i)$ v bodě x_i označíme f_i, naměřenou hodnotu v bodě x_i označíme $\overline{f}_i$." (Ralston, Anthony, 1978)

Položím $E_i = f_i - \overline{f}_i$ pro $i=1,..n$ přičemž cílem je, aby druhá mocnina odchylek $\sum_{i=1}^{n} E_i^2$ byla minimální. (Rektorys, Karel, 1988)

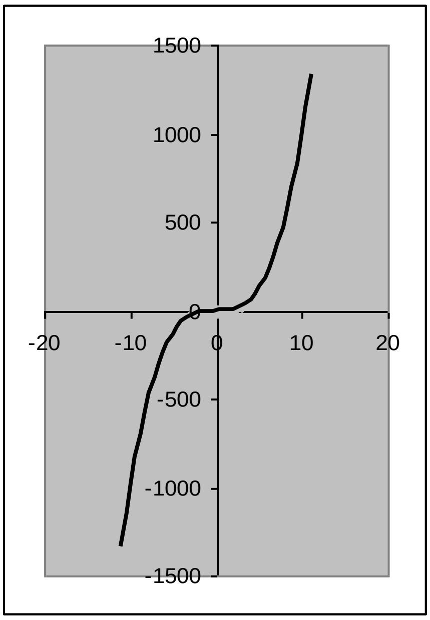
Tímto způsobem získám soustavu rovnic, která má jediné řešení. (Judd, Kenneth, 1998)

Minimum funkce se nalezne pomocí parciálních derivací pro každou neznámou, které následně položím rovny nule, abych zjistila, kde funkce parciálních derivací protíná osu x. Výsledné rovnice zobecním a získám vzorec pro metodu nejmenších čtverců. (Dlouhý, Zbyněk, 1970)

Jestliže bych namísto výpočtu nejmenších čtverců, chtěla nalézt pouze svislou vzdálenost od daného bodu, tedy aby rovnice $\sum_{i=1}^{n} E_i$, byla minimální, stává se tato úloha neřešitelná. Zatímco u metody nejmenších čtverců, se vždy podaří najít minimum funkce, díky existenci stacionárních bodů minimalizované funkce, problém metody nejkratších vzdáleností spočívá v lichých mocninách, jelikož pro tyto funkce sice existuje první derivace, ale tyto funkce nemají minimum.

Názorně to může být demonstrováno na funkci $y = x^3$, první derivace této funkce je $y' = 3x^2$, první derivaci položím rovnu nule, čímž získáme stacionární bod $x = 0$, ale i tak v tomto bodě minimum není, pouze se zde mění konkávnost na konvexnost funkce, jedná se o inflexní bod.

Graf 1: Funkce x^3



Zdroj: vlastní

V případě, že bych řešila aproximaci polynomem třetího stupně metodou nejkratších vzdáleností, například pro tři body, minimalizuji funkci

$$E(a,b,c,d) = (ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d - y_1) + (ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d - y_2) +$$
$$+ (ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d - y_3)$$

spočítám parciální derivace

$$\frac{\partial E}{\partial a} = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$
$$\frac{\partial E}{\partial b} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = x_1 + x_2 + x_3$$
$$\frac{\partial E}{\partial d} = 1 + 1 + 1$$

parciální derivace položím rovny nule a vzhledem k nerovnosti, je zřejmá neřešitelnost

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$1 + 1 + 1 = 0$$

Úvaha o metodě nejkratších vzdáleností je tedy nerealizovatelná.

V následujících kapitolách se věnuji pouze metodě nejmenších čtverců s výhradním zaměřením na funkce mocninné.

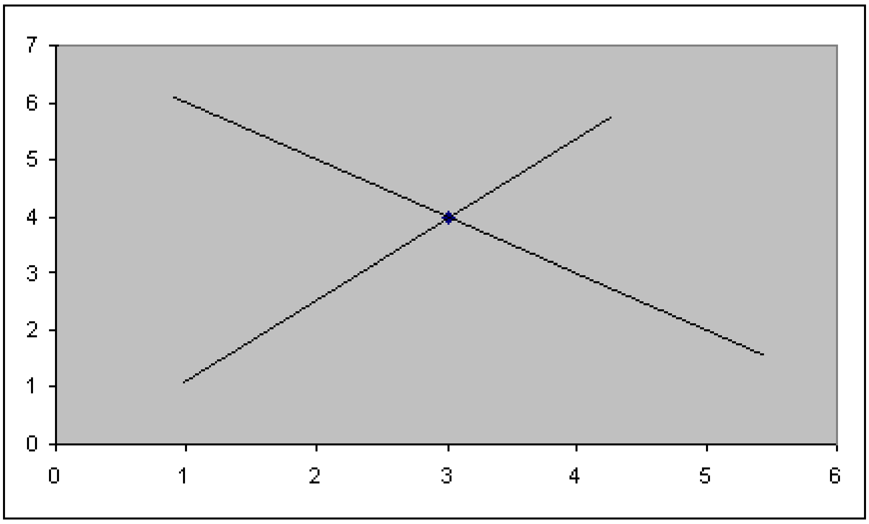
2.1 Aproximace polynomem prvního stupně $P_1(x) = ax + b$

2.1.1 Aproximace polynomem prvního stupně pro jeden bod

Daným bodem prochází nekonečně mnoho různých přímek, v tomto případě k žádné aproximaci nedochází.

Př: $[3,4]$, všechny přímky, kterým náleží tento bod, např. $y = \frac{4}{3}x,\ \ y = -x + 7$

Graf 2: Aproximace polynomem prvního stupně pro jeden bod



Zdroj: vlastní

2.1.2 Aproximace polynomem prvního stupně pro dva body

V případě zadaných dvou různých bodů, prochází těmito body jediná přímka, odchylky jsou v tomto případě nulové.

Aproximační přímka $P_1(x) = ax + b$, pro body $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$, tyto body dosadím do rovnice, což vede na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a po úpravě získám $a = \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}$, $b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - x_1}$

Př: $[2,3], [6,6]$

po dosazení do rovnice $y = ax + b$, dostávám

$$\begin{array}{rcrcr} 2a & + b & = & 3 \\ 6a & + b & = & 6 \end{array}$$

upravím první rovnici $2a \quad + b \quad = \quad 3 \qquad / \cdot (-1)$

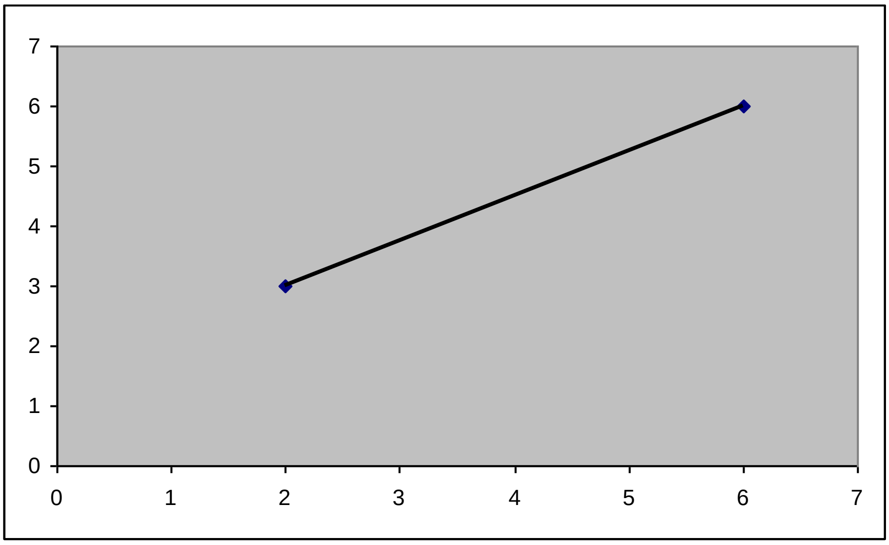
$$\begin{array}{rcrcr} -2a & - b & = & -3 \\ 6a & + b & = & 6 \end{array}$$

po sečtení rovnic a drobné úpravě získám řešení $a = \frac{3}{4}$ dosazením do libovolné rovnice získám i druhou neznámou $b = \frac{3}{2}$

rovnice regrese má tedy tvar $P_1(x) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

$$E(a,b) = (\frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{3}{2} - 3)^2 + (\frac{3}{4} \cdot 6 + \frac{3}{2} - 6)^2 = 0$$

Graf 3: Aproximace polynomem prvního stupně pro dva body



Zdroj: vlastní

2.1.3 Aproximace polynomem prvního stupně pro tři body

Uvažuji tři body $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3]$, u kterých předpokládám, že neleží na přímce, jinak by aproximace byla nulová, stejně jako v předchozí podkapitole. Svislá vzdálenost bodu od aproximující přímky je $E(x) = |ax + b - y|$, čímž se dostávám k funkci, která mi dává součet kvadratických odchylek $E(a,b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + (ax_3 + b - y_3)^2$, kterou chci minimalizovat. Minimum funkce se nalezne ve stacionárním bodě, zjištěném pomocí parciálních derivací.

parciální derivace jednotlivých proměnných

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2(ax_1 + b - y_1)x_1 + 2(ax_2 + b - y_2)x_2 + 2(ax_3 + b - y_3)x_3 =$$
$$= 2(ax_1^2 + bx_1 - y_1x_1) + 2(ax_2^2 + bx_2 - y_2x_2) + 2(ax_3^2 + bx_3 - y_3x_3) =$$
$$= 2a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2b(x_1 + x_2 + x_3) - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2(ax_1 + b - y_1) + 2(ax_2 + b - y_2) + 2(ax_3 + b - y_3) =$$
$$= 2ax_1 + 2b - 2y_1 + 2ax_2 + 2b - 2y_2 + 2ax_3 + 2b - 2y_3 =$$
$$= 2a(x_1 + x_2 + x_3) + 6b - 2(y_1 + y_2 + y_3)$$

derivace položím rovny nule a upravuji

$$2a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2b(x_1 + x_2 + x_3) - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = 0$$
$$a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b(x_1 + x_2 + x_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$2a(x_1 + x_2 + x_3) + 6b - 2(y_1 + y_2 + y_3) = 0$$
$$a(x_1 + x_2 + x_3) + 3b = y_1 + y_2 + y_3$$

což lze zobecnit na vzorce

$$a\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{3} x_i = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$
$$a\sum_{i=1}^{3} x_i + 3b = \sum_{i=1}^{3} y_i$$

Př: $[1,1], [2,3], [3,2]$

zadání upravím do soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 14a + 6b &= 13 \\ 6a + 3b &= 6 \end{aligned}$$

upravím druhou rovnici $6a + 3b = 6 \quad / \cdot (-2)$

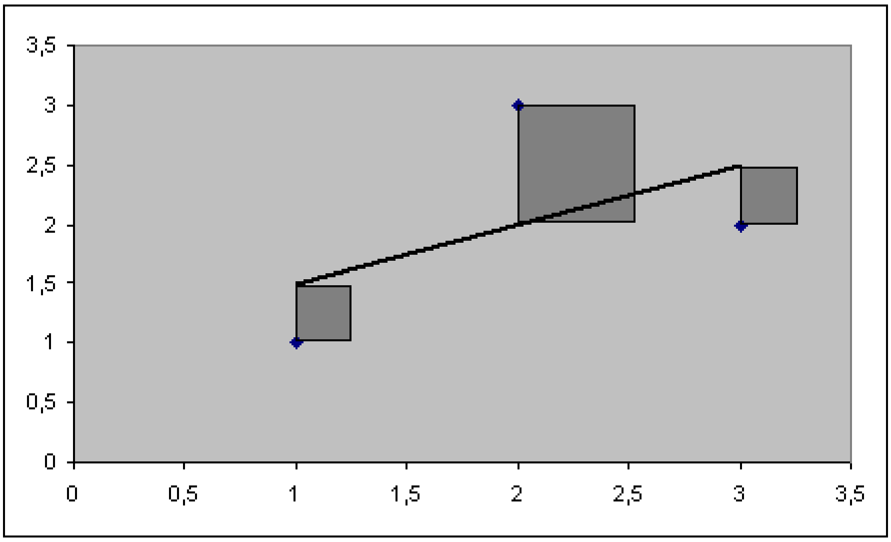
$$\begin{aligned} 14a + 6b &= 13 \\ -12a - 6b &= -12 \end{aligned}$$

po sečtení a úpravě dostávám první neznámou $a = \frac{1}{2}$ a po dosazení jedné z rovnic vyjde i druhá neznámá $b = 1$

rovnice regrese má tvar $P_1(x) = \frac{1}{2}x + 1$

$$E(a,b) = \left(\frac{1}{2}\cdot 1 + 1 - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot 2 + 1 - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot 3 + 1 - 2\right)^2 = \frac{3}{2}$$

Graf 4: Aproximace polynomem prvního stupně pro tři body



Zdroj: vlastní

2.1.4 Aproximace polynomem prvního stupně pro n bodů

Postupuji analogicky, jako v předchozí podkapitole. Mějme n bodů $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots, [x_n, y_n]$. Součet obsahů čtverců představuje rovnice $E(a,b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2$.

provedu parciální derivace pro každou neznámou

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2(ax_1 + b - y_1)x_1 + 2(ax_2 + b - y_2)x_2 + \ldots + 2(ax_n + b - y_n)x_n =$$
$$= 2\left(ax_1^2 + bx_1 - y_1x_1\right) + 2\left(ax_2^2 + bx_2 - y_2x_2\right) + \ldots + 2\left(ax_n^2 + bx_n - y_nx_n\right) =$$
$$= 2a\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) + 2b(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2(ax_1 + b - y_1) + 2(ax_2 + b - y_2) + \ldots + 2(ax_n + b - y_n) =$$
$$= 2a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + 2nb - 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

nyní položím rovnice rovny nule a upravím

$$2a(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + 2b(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n) = 0$$
$$a(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

$$2a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + 2nb - 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = 0$$
$$a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + nb = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

což obecně lze zapsat do vzorce

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

z těchto rovnic ještě lze vyjádřit neznámé

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad / \cdot \left(-a\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$bn = \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad / \div n$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

čímž jsem vyjádřila *b*, tento výraz dosadím do první rovnice

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

upravím

$$\frac{an\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}-\frac{a\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

vytknu a a druhý člen převedu na druhou stranu

$$\frac{a\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)}{n}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n} \qquad /\cdot n$$

$$a\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)=n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i$$

vyjádřím a

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)}$$

nyní dosadím $a=\dfrac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)}$ do $b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i-\dfrac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)}\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

roznásobím

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i-\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\sum_{i=1}^{n}y_i}{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)}}{n}$$

převedu členy čitatele na stejného jmenovatele

$$b=\frac{\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\sum_{i=1}^{n}y_i-n\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\sum_{i=1}^{n}y_i}{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)}}{n}$$

sečtu členy v čitateli a odstraním složený zlomek

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)}$$

čímž dostávám obě neznámé

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)}$$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)}$$

Př: $[1,12],[2,17],[3,18],[4,14],[5,16],[6,19]$

dosadím do vzorce

$$\begin{aligned} 91a &+ 21b &= 350 \\ 21a &+ 6b &= 96 \end{aligned}$$

upravím násobením, $91a \quad +21b \quad = \quad 350 \quad / \cdot 2$, $21a \quad +6b \quad = \quad 96 \quad / \cdot (-7)$

$$\begin{aligned} 182a &+ 42b &= 700 \\ -147a &- 42b &= -672 \end{aligned}$$

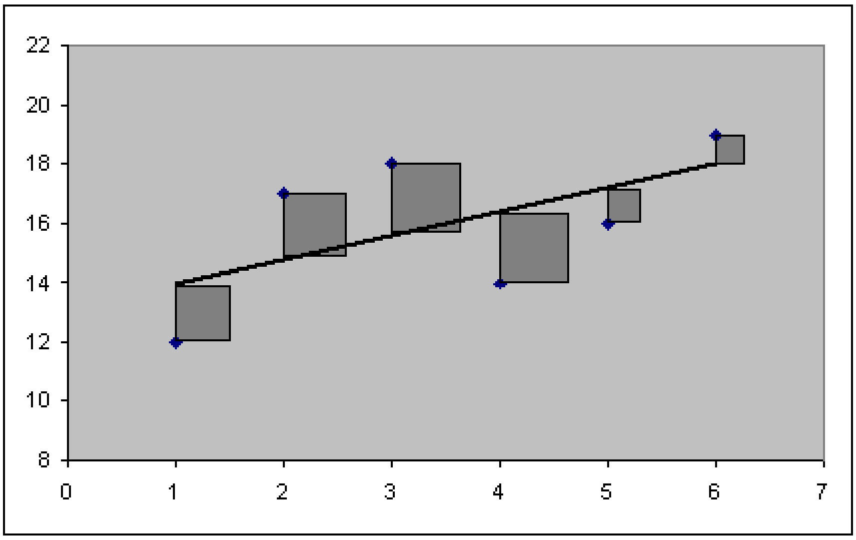
po sečtení a úpravě dostávám $a = \frac{28}{35}$ a $b = 13\frac{1}{5}$

rovnice regrese má tvar $P_1(x) = \frac{28}{35}x + 13\frac{1}{5}$

$$E(a,b) = \left(\frac{4}{5}*1^2 + 13\frac{1}{5} - 12\right)^2 + \left(\frac{4}{5}*2^2 + 13\frac{1}{5} - 17\right)^2 + \left(\frac{4}{5}*3^2 + 13\frac{1}{5} - 18\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{4}{5}*4^2 + 13\frac{1}{5} - 14\right) + \left(\frac{4}{5}*5^2 + 13\frac{1}{5} - 16\right)^2 + \left(\frac{4}{5}*6^2 + 13\frac{1}{5} - 19\right)^2 = 22\frac{4}{5}$$

Graf 5: Aproximace polynomem prvního stupně pro n bodů



Zdroj: vlastní

2.2 Aproximace polynomem druhého stupně $P_2(x) = ax^2 + bx + c$

2.2.1 Aproximace polynomem druhého stupně pro 3 body

Polynom druhého stupně má smysl řešit pro alespoň 3 body.

Uvažujme tři body $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3]$. Předpokládejme, že aproximační křivka má tvar polynomu $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. V případě tří bodů, jimi parabola prochází bez jakékoli odchylky.

Př: $[1,2],[2,2],[3,4]$

dosazením do vzorce polynomu získám soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1a &+ 1b + c = 2 \\ 4a &+ 2b + c = 2 \\ 9a &+ 3b + c = 4 \end{aligned}$$

koeficienty zapíši do matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

sestrojím si inverzní matici

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

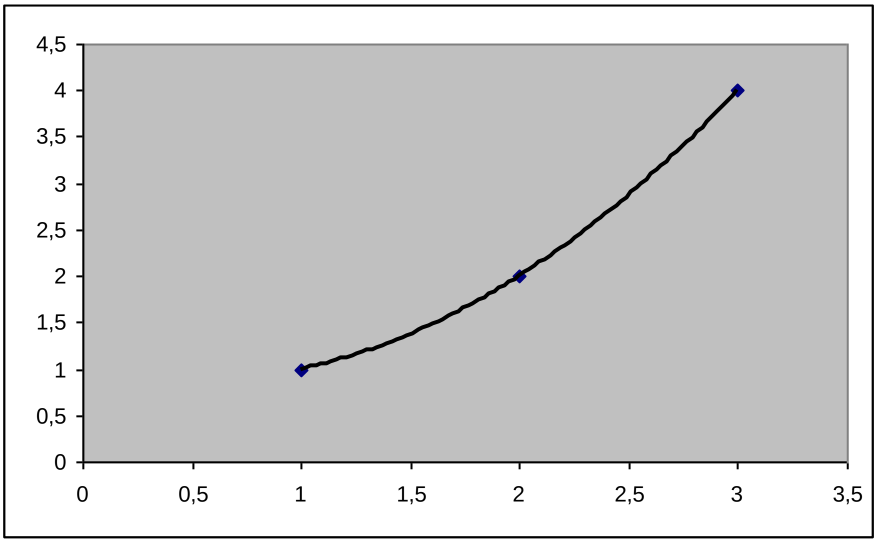
vynásobím

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

čímž jsem získala neznámé $a = 1, b = -3, c = 4$, $P_2(x) = x^2 - 3x + 4$

$$E(a,b,c) = (1 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 4 - 2)^2 + (1 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 - 2)^2 + (1 \cdot 3^2 - 3 * 3 + 4 - 4)^2 = 0$$

Graf 6: Aproximace polynomem druhého stupně pro 3 body



Zdroj: vlastní

2.2.2 Aproximace polynomem druhého stupně pro 4 body

Mějme čtyři body $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3], [x_4, x_4]$, které neleží na parabole, jelikož k aproximaci by stejně jako v předchozí podkapitole nedošlo.

Nyní budu minimalizovat funkci

$$E(a,b,c) = \left(ax_1^{\ 2} + bx_1 + c - y_1\right)^2 + \left(ax_2^{\ 2} + bx_2 + c - y_2\right)^2 + \left(ax_3^{\ 2} + bx_3 + c - y_3\right)^2 + \\ + \left(ax_4^{\ 2} + bx_4 + c - y_4\right)^2 .$$

parciální derivace

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\left(ax_1^{\ 2} + bx_1 + c - y_1\right)x_1^{\ 2} + 2\left(ax_2^{\ 2} + bx_2 + c - y_2\right)x_2^{\ 2} + 2\left(ax_3^{\ 2} + bx_3 + c - y_3\right)x_3^{\ 2} + \\ + 2\left(ax_4^{\ 2} + bx_4 + c - y_4\right)x_4^{\ 2} = 2\left(ax_1^4 + bx_1^{\ 3} + cx_1^2 - y_1x_1^{\ 2}\right) + 2\left(ax_2^4 + bx_2^{\ 3} + cx_2^2 - y_2x_2^{\ 2}\right) + \\ + 2\left(ax_3^4 + bx_3^{\ 3} + cx_3^2 - y_3x_3^{\ 2}\right) + 2\left(ax_4^4 + bx_4^{\ 3} + cx_4^2 - y_4x_4^{\ 2}\right) = 2a\left(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4\right) + \\ + 2b\left(x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} + x_3^{\ 3} + x_4^{\ 3}\right) + 2c(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - 2\left(x_1^{\ 2}y_1 + x_2^{\ 2}y_2 + x_3^{\ 2}y_3 + x_4^{\ 2}y_4\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2\left(ax_1^{\ 2} + bx_1 + c - y_1\right)x_1 + 2\left(ax_2^{\ 2} + bx_2 + c - y_2\right)x_2 + 2\left(ax_3^{\ 2} + bx_3 + c - y_3\right)x_3 +$$
$$+ 2\left(ax_4^{\ 2} + bx_4 + c - y_4\right)x_4 = 2ax_1^{\ 3} + 2bx_1^2 + 2cx_1 - 2y_1x_1 + 2ax_2^{\ 3} + 2bx_2^2 + 2cx_2 - 2y_2x_2 +$$
$$+ 2ax_3^{\ 3} + 2bx_3^2 + 2cx_3 - 2y_3x_3 + 2ax_4^{\ 3} + 2bx_4^2 + 2cx_4 - 2y_4x_4 = 2(ax_1^3 + bx_1^{\ 2} + cx_1 -$$
$$- y_1x_1) + 2\left(ax_2^3 + bx_2^{\ 2} + cx_2 - y_2x_2\right) + 2\left(ax_3^3 + bx_3^{\ 2} + cx_3 - y_3x_3\right) + 2(ax_4^3 + bx_4^{\ 2} + cx_4 -$$
$$- y_4x_4) = 2a\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3\right) + 2b\left(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2}\right) + 2c\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right) -$$
$$- 2\left(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = 2\left(ax_1^{\ 2} + bx_1 + c - y_1\right) + 2\left(ax_2^{\ 2} + bx_2 + c - y_2\right) + 2\left(ax_3^{\ 2} + bx_3 + c - y_3\right) + 2(ax_4^{\ 2} +$$
$$+ bx_4 + c - y_4) = 2ax_1^{\ 2} + 2bx_1 + 2c - 2y_1 + 2ax_2^{\ 2} + 2bx_2^{\ 2} + 2c - 2y_2 + 2ax_3^{\ 2} + 2bx_3 +$$
$$+ 2c - 2y_3 + 2ax_4^{\ 2} + 2bx_4 + 2c - 2y_4 =$$
$$= 2a(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2}) + 2b(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 8c - 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

derivace položím rovny nule

$$2a\left(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4\right) + 2b\left(x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} + x_3^{\ 3} + x_4^{\ 3}\right) + 2c(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) -$$
$$- 2\left(x_1^{\ 2}y_1 + x_2^{\ 2}y_2 + x_3^{\ 2}y_3 + x_4^{\ 2}y_4\right) = 0$$
$$2a\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3\right) + 2b\left(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2}\right) + 2c\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right) -$$
$$- 2\left(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4\right) = 0$$
$$2a(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2}) + 2b(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 8c - 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 0$$

upravím

$$ax_1^4 + ax_2^4 + ax_3^4 + ax_4^4 + bx_1^3 + bx_2^3 + bx_3^3 + bx_4^3 + cx_1^2 + cx_2^2 + cx_3^2 + cx_4^2 = x_1^{\ 2}y_1 + x_2^{\ 2}y_2 +$$
$$x_3^{\ 2}y_3 + x_4^{\ 2}y_4$$
$$ax_1^3 + ax_2^3 + ax_3^3 + ax_4^3 + bx_1^2 + bx_2^2 + bx_3^2 + bx_4^2 + cx_1 + cx_2 + cx_3 + cx_4 = x_1y_1 + x_2y_2 +$$
$$+ x_3y_3 + x_4y_4$$
$$ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + ax_4^2 + bx_1 + bx_2 + bx_3 + bx_4 + 8c = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

lze zobecnit na vzorce

$$a\sum_{i=1}^{4} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{4} x_i^{\ 3} + c\sum_{i=1}^{4} x_i^{\ 2} = \sum_{i=1}^{4} x_i^{\ 2} y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{4} x_i^{\ 3} + b\sum_{i=1}^{4} x_i^{\ 2} + c\sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{4} x_i^{\ 2} + b\sum_{i=1}^{4} x_i^{\ 1} + nc = \sum_{i=1}^{4} y_i$$

Př: $[1,2],[2,8],[3,6],[4,10]$

soustava rovnic sestrojená na základě předchozího vzorce

$$\begin{aligned} 354a &+ 100b &+ 30c &= 248 \\ 100a &+ 30b &+ 10c &= 76 \\ 30a &+ 10b &+ 4c &= 26 \end{aligned}$$

z koeficientů sestavím matici

$$\begin{pmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

sestrojím inverzní matici

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 & -1{,}25 & 1{,}25 \\ -1{,}25 & 6{,}45 & -6{,}75 \\ 1{,}25 & -6{,}75 & 7{,}75 \end{pmatrix}$$

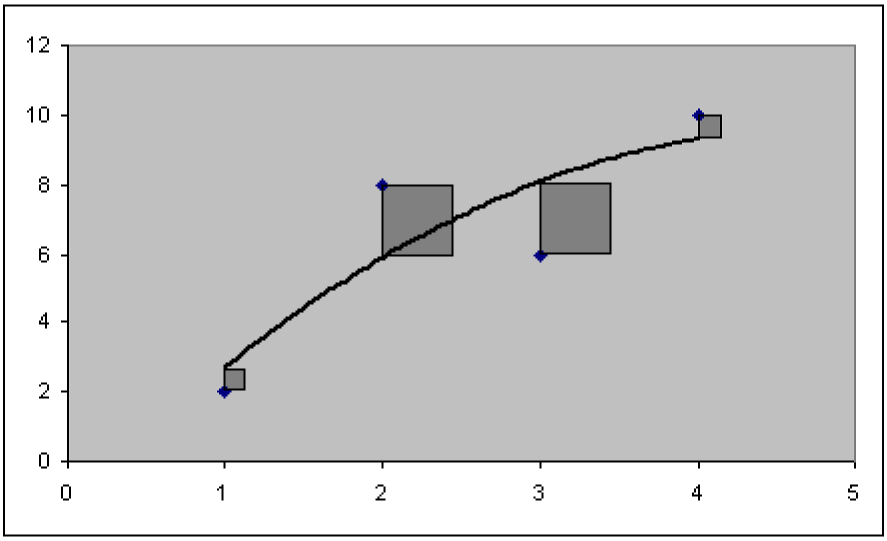
dopočítám neznámé

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 & -1{,}25 & 1{,}25 \\ -1{,}25 & 6{,}45 & -6{,}75 \\ 1{,}25 & -6{,}75 & 7{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 248 \\ 76 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 4{,}7 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

tím dostávám $a = -\frac{1}{2}, b = 4\frac{5}{7}, c = -1\frac{1}{2}$, $P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4\frac{5}{7}x - 1\frac{1}{2}$

$$E(a,b,c)=\left(-\frac{1}{2}\cdot 1^2-4\frac{5}{7}\cdot 1-1\frac{1}{2}-2\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\cdot 2^2-4\frac{5}{7}\cdot 2-1\frac{1}{2}-8\right)^2+$$
$$+\left(-\frac{1}{2}\cdot 3^2-4\frac{5}{7}\cdot 3-1\frac{1}{2}-6\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\cdot 4^2-4\frac{5}{7}\cdot 4-1\frac{1}{2}-10\right)^2=9\frac{4}{5}$$

Graf 7: Aproximace polynomem druhého stupně pro 4 body



Zdroj: vlastní

2.2.3 Aproximace polynomem druhého stupně pro n bodů.

Aproximační křivka má i v tomto případě tvar $P_2(x)=ax^2+bx+c$, nyní bude řešena pro n bodů. Mějme n bodů $[x_1,y_1],[x_2,y_2],..[x_n,y_n]$. Součet obsahů čtverců znázorňuje rovnice

$$E(a,b,c)=\left(ax_1{}^2+bx_1+c-y_1\right)^2+\left(ax_2{}^2+bx_2+c-y_2\right)^2+\ldots+\left(ax_n{}^2+bx_n+c-y_n\right)^2,$$

provedu parciální derivace pro každou neznámou

$$\frac{\partial E}{\partial a}=2\left(ax_1{}^2+bx_1+c-y_1\right)x_1{}^2+2\left(ax_2{}^2+bx_2+c-y_2\right)x_2{}^2+\ldots+2\left(ax_n{}^2+bx_n+c-y_n\right)x_n{}^2=$$
$$=2\left(ax_1^4+bx_1{}^3+cx_1^2-y_1x_1{}^2\right)+2\left(ax_2^4+bx_2{}^3+cx_2^2-y_2x_2{}^2\right)+\ldots+$$
$$+2\left(ax_n^4+bx_n{}^3+cx_n^2-y_nx_n{}^2\right)=$$
$$=2a\left(x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4\right)+2b\left(x_1{}^3+x_2{}^3+\ldots+x_n{}^3\right)+2c(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)-$$
$$-2\left(x_1{}^2y_1+x_2{}^2y_2+\ldots+x_n{}^2y_n\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2\left(ax_1{}^2 + bx_1 + c - y_1\right)x_1 + 2\left(ax_2{}^2 + bx_2 + c - y_2\right)x_2 + \ldots + 2\left(ax_n{}^2 + bx_n + c - y_n\right)x_n =$$
$$= 2ax_1{}^3 + 2bx_1^2 + 2cx_1 - 2y_1x_1 + 2ax_2{}^3 + 2bx_2^2 + 2cx_2 - 2y_2x_2 + \ldots + 2ax_n{}^3 + 2bx_n^2 + 2cx_n -$$
$$- 2y_nx_n =$$
$$= 2\left(ax_1^3 + bx_1{}^2 + cx_1 - y_1x_1\right) + 2\left(ax_2^3 + bx_2{}^2 + cx_2 - y_2x_2\right) + \ldots +$$
$$+ 2\left(ax_n^3 + bx_n{}^2 + cx_n - y_nx_n\right) =$$
$$= 2a\left(x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3\right) + 2b\left(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2\right) + 2c\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) -$$
$$- 2\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = 2\left(ax_1{}^2 + bx_1 + c - y_1\right) + 2\left(ax_2{}^2 + bx_2 + c - y_2\right) + \ldots + 2\left(ax_n{}^2 + bx_n + c - y_n\right) =$$
$$= 2ax_1{}^2 + 2bx_1 + 2c - 2y_1 + 2ax_2{}^2 + 2bx_2{}^2 + 2c - 2y_2 + \ldots + 2ax_n{}^2 + 2bx_n + 2c - 2y_n =$$
$$= 2a(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2) + 2b(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + 2nc - 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

derivace položím rovny nule

$$2a\left(x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4\right) + 2b\left(x_1{}^3 + x_2{}^3 + \ldots + x_n{}^3\right) + 2c(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) -$$
$$- 2\left(x_1{}^2y_1 + x_2{}^2y_2 + \ldots + x_n{}^2y_n\right) = 0$$
$$2a\left(x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3\right) + 2b\left(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2\right) + 2c\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) -$$
$$- 2\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right) = 0$$
$$2a(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2) + 2b(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + 2nc - 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = 0$$

po úpravě lze zobecnit na vzorce

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i{}^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 y_i$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i{}^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i{}^1 + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Př: $[1,2],[2,4],[3,7],[4,7],[5,6]$

soustava rovnic dle odvozeného vzorce

$$\begin{aligned} 979a &+ 225b + 55c = 343 \\ 225a &+ 55b + 15c = 89 \\ 55a &+ 15b + 5c = 26 \end{aligned}$$

sestavím matici z koeficientů

$$\begin{pmatrix} 979 & 225 & 55 \\ 225 & 55 & 15 \\ 55 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

inverzní matic k matici předcházející

$$\begin{pmatrix} 0{,}0714 & -0{,}4286 & 0{,}5000 \\ -0{,}4286 & -2{,}6714 & -3{,}3000 \\ 0{,}5000 & -3{,}3000 & 4{,}6000 \end{pmatrix}$$

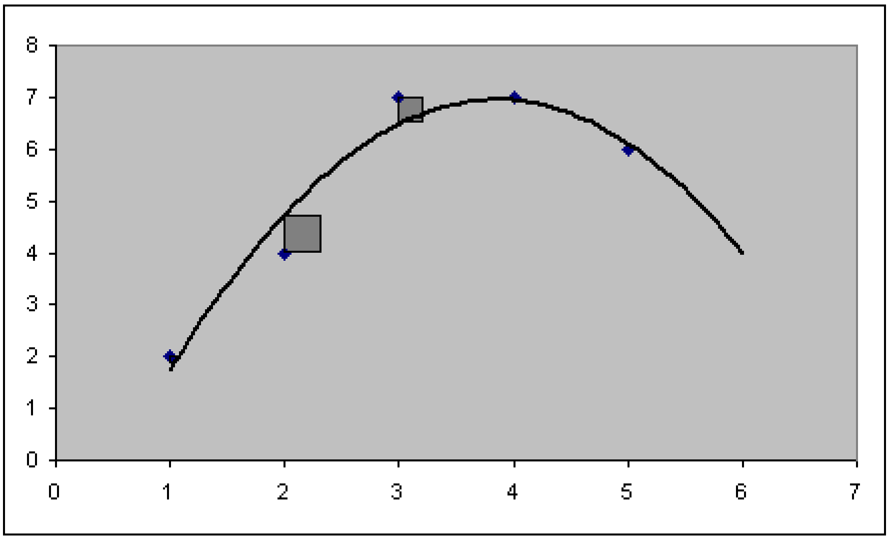
dopočítám neznámé

$$\begin{pmatrix} 0{,}0714 & -0{,}4286 & 0{,}5000 \\ -0{,}4286 & -2{,}6714 & -3{,}3000 \\ 0{,}5000 & -3{,}3000 & 4{,}6000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 343 \\ 89 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6429 \\ 4{,}9571 \\ -2{,}6000 \end{pmatrix}$$

čímž jsem získala (zaokrouhleno na čtyři desetinná místa)
$a = -0{,}6429, b = 4{,}9571, c = -2{,}6000$, $P_2(x) = -0{,}6429x^2 + 4{,}9571x - 2{,}6000$

$$\begin{aligned} &E(a,b,c) = \\ &= \left(-0{,}6429 \cdot 1^2 + 4{,}9571 \cdot 1 - 2{,}6000 - 2\right)^2 + \left(-0{,}6429 \cdot 2^2 + 4{,}9571 \cdot 2 - 2{,}600 - 4\right)^2 + \\ &+ \left(-0{,}6429 \cdot 3^2 + 4{,}9571 \cdot 3 - 2{,}6000 - 7\right)^2 + \left(-0{,}6429 \cdot 4^2 + 4{,}9571 \cdot 4 - 2{,}600 - 7\right)^2 + \\ &+ \left(-0{,}6429 \cdot 5^2 + 4{,}9571 \cdot 5 - 2{,}6000 - 6\right)^2 = 0{,}9143 \end{aligned}$$

Graf 8: Aproximace polynomem druhého stupně pro n bodů



Zdroj: vlastní

2.3 Aproximace polynomem m-tého stupně

Aproximace polynomem m-tého stupně má smysl pro alespoň pro $n = m+1$ bodů. Mějme tedy polynom $P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ a n bodů $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots, [x_n, y_n]$. .Snahou je minimalizovat funkci

$$E(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) = (a_m x_n{}^m + a_{m-1} x_n{}^{m-1} + \ldots + a_1 x_n{}^1 + a_0 x_n{}^0 - y_n)^2 + (a_m x_{n-1}{}^m + a_{m-1} x_{n-1}{}^{m-1} + \\ + \ldots + a_1 x_{n-1}{}^1 + a_0 x_{n-1}{}^0 - y_{n-1})^2 + \ldots + (a_m x_1{}^m + a_{m-1} x_1{}^{m-1} + \ldots + a_1 x_1{}^1 + a_0 x_1{}^0 - y_1)^2$$

provedu parciální derivace

$$\frac{\partial E}{\partial a_m} = 2(a_m x_n{}^m + a_{m-1} x_n{}^{m-1} + \ldots + a_1 x_n{}^1 + a_0 x_n{}^0 - y_n) x_n{}^n + 2(a_m x_{n-1}{}^m + a_{m-1} x_{n-1}{}^{m-1} + \ldots + \\ + a_1 x_{n-1}{}^1 + a_0 x_{n-1}{}^0 - y_{n-1}) x_{n-1}{}^n + \ldots + 2(a_m x_1{}^m + a_{m-1} x_1{}^{m-1} + \ldots + a_1 x_1{}^1 + a_0 x_1{}^0 - y_1) x_1{}^m = \\ = 2a_m (x_n{}^{2m} + x_{n-1}{}^{2m} + \ldots + x_1{}^{2m}) + 2a_{m-1}(x_n{}^{2m-1} + x_{n-1}{}^{2m-1} + \ldots + x_1{}^{2m-1}) + \ldots + 2a_0 (x_n{}^m + \\ + x_{n-1}{}^m + \ldots + x_1{}^m - 2(x_n{}^m y_n + x_{n-1}{}^m y_{n-1} + \ldots + x_1{}^m y_1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_{m-1}} = 2(a_m x_n{}^m + a_{m-1} x_n{}^{m-1} + \ldots + a_1 x_n{}^1 + a_0 x_n{}^0 - y_n) x_n{}^{m-1} + 2(a_m x_{n-1}{}^m + a_{m-1} x_{n-1}{}^{m-1} +$$

$$+ \ldots + a_1 x_{n-1}{}^1 + a_0 x_{n-1}{}^0 - y_{n-1}) x_{n-1}{}^{m-1} + \ldots + 2(a_m x_1{}^m + a_{m-1} x_1{}^{m-1} + \ldots + a_1 x_1{}^1 + a_0 x_1{}^0 -$$

$$- y_1) x_1{}^{m-1} = 2a_m (x_n{}^{2m-1} + x_{n-1}{}^{2m-1} + \ldots + x_1{}^{2m-1}) + 2a_{m-1}(x_n{}^{2m-2} + x_{n-1}{}^{2m-2} + \ldots + x_1{}^{2m-2}) +$$

$$+ \ldots + 2a_0 (x_n{}^{m-1} + x_{n-1}{}^{m-1} + \ldots + x_1{}^{m-1}) - 2(x_n{}^{m-1} y_n + x_{n-1}{}^{m-1} y_{n-1} + \ldots + x_1{}^{m-1} y_1$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial E}{a_0} = 2(a_m x_n{}^m + a_{m-1} x_n{}^{m-1} + \ldots + a_1 x_n{}^1 + a_0 x_n{}^0 - y_n) + 2(a_m x_{n-1}{}^m + a_{m-1} x_{n-1}{}^{m-1} + \ldots +$$

$$+ a_1 x_{n-1}{}^1 + a_0 x_{n-1}{}^0 - y_{n-1}) + \ldots + 2(a_m x_1{}^m + a_{m-1} x_1{}^{m-1} + \ldots + a_1 x_1{}^1 + a_0 x_1{}^0 - y_1)$$

$$= 2a_m (x_n{}^m + x_{n-1}{}^m + \ldots + x_1{}^m) + 2a_{m-1}(x_n{}^{m-1} + x_{n-1}{}^{m-1} + \ldots + x_1{}^{m-1}) + \ldots + 2a_0 (x_n{}^0 + x_{n-1}{}^0 +$$

$$+ \ldots + x_1{}^0) - 2(y_n + y_{n-1} + \ldots + y_1)$$

derivace položím rovny nule

$$2a_m (x_n{}^{2m} + x_{n-1}{}^{2m} + \ldots + x_1{}^{2m}) + 2a_{m-1}(x_n{}^{2m-1} + x_{n-1}{}^{2m-1} + \ldots + x_1{}^{2m-1}) + \ldots + 2a_0 (x_n{}^m +$$

$$+ x_{n-1}{}^m + \ldots + x_1{}^m) - 2(x_n{}^m y_n + x_{n-1}{}^m y_{n-1} + \ldots + x_1{}^m y_1) = 0$$

$$2a_m (x_n{}^{2m-1} + x_{n-1}{}^{2m-1} + \ldots + x_1{}^{2m-1}) + 2a_{m-1}(x_n{}^{2m-2} + x_{n-1}{}^{2m-2} + \ldots + x_1{}^{2m-2}) + \ldots +$$

$$+ 2a_0 (x_n{}^{m-1} + x_{n-1}{}^{m-1} + \ldots + x_1{}^{m-1}) - 2(x_n{}^{m-1} y_n + x_{n-1}{}^{m-1} y_{n-1} + \ldots + x_1{}^{m-1} y_1) = 0$$

$$\vdots$$

$$2a_m (x_n{}^m + x_{n-1}{}^m + \ldots + x_1{}^m) + 2a_{m-1}(x_n{}^{m-1} + x_{n-1}{}^{m-1} + \ldots + x_1{}^{m-1}) + \ldots + 2a_0 (x_n{}^0 + x_{n-1}{}^0 +$$

$$+ \ldots + x_1{}^0) - 2(y_n + y_{n-1} + \ldots + y_1) = 0$$

po úpravě dostávám

$$a_m (x_n{}^{2m} + x_{n-1}{}^{2m} + \ldots + x_1{}^{2m}) + a_{m-1}(x_n{}^{2m-1} + x_{n-1}{}^{2m-1} + \ldots + x_1{}^{2m-1}) + \ldots + a_0 (x_n{}^m +$$

$$+ x_{n-1}{}^m + \ldots + x_1{}^m) = x_n{}^m y_n + x_{n-1}{}^m y_{n-1} + \ldots + x_1{}^m y_1$$

$$a_m (x_n{}^{2m-1} + x_{n-1}{}^{2m-1} + \ldots + x_1{}^{2m-1}) + a_{m-1}(x_n{}^{2m-2} + x_{n-1}{}^{2m-2} + \ldots + x_1{}^{2m-2}) + \ldots +$$

$$+ a_0 (x_n{}^{m-1} + x_{n-1}{}^{m-1} + \ldots + x_1{}^{m-1}) = x_n{}^{m-1} y_n + x_{n-1}{}^{m-1} y_{n-1} + \ldots + x_1{}^{m-1} y_1$$

$$\vdots$$

$$a_m (x_n{}^m + x_{n-1}{}^m + \ldots + x_1{}^m) + a_{m-1}(x_n{}^{m-1} + x_{n-1}{}^{m-1} + \ldots + x_1{}^{m-1}) + \ldots + a_0 (x_n{}^0 + x_{n-1}{}^0 +$$

$$+ \ldots + x_1{}^0) = y_n + y_{n-1} + \ldots + y_1$$

což lze zobecnit na vzorce

$$\begin{array}{ccccccccc}
\sum x_n^{2m} a_m & \cdots & + & \sum x_n^{m+1} a_1 & + & \sum x_n^m a_0 & = & \sum y_n x_n^m \\
\vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\
\sum x_1^{m+1} a_m & \cdots & + & \sum x_1^2 a_1 & + & \sum x_1 a_0 & = & \sum y_i x_i \\
\sum x_0^m a_m & \cdots & + & \sum x_0 a_0 & + & n & = & \sum y_i
\end{array}$$

Př $[1,2],[2,5],[3,7],[4,6],[5,3]$

na základě předchozího vzorce sestavím soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrcr}
20\,515a_3 & +4\,425a_2 & +979a_1 & +225a_0 & = & 990 \\
4\,425a_3 & +979a_2 & +225a_1 & +55a_0 & = & 256 \\
979a_3 & +225a_2 & +55a_1 & +15a_0 & = & 72 \\
225a_3 & +55a_2 & +15a_1 & +5a_0 & = & 23
\end{array}$$

z koeficientů sestavím soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 20\,515 & 4\,425 & 979 & 225 \\ 4\,425 & 979 & 225 & 55 \\ 979 & 225 & 55 & 15 \\ 225 & 55 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

k předchozí matici si sestavím matici inverzní

$$\begin{pmatrix} 0{,}0694 & -0{,}6250 & 1{,}6389 & -1{,}1667 \\ -0{,}6250 & 5{,}6964 & -15{,}1786 & 11{,}0000 \\ 1{,}6389 & -15{,}1786 & 41{,}3492 & -30{,}8333 \\ -1{,}1667 & 11{,}0000 & -30{,}8333 & 24{,}2000 \end{pmatrix}$$

dopočítám neznámé

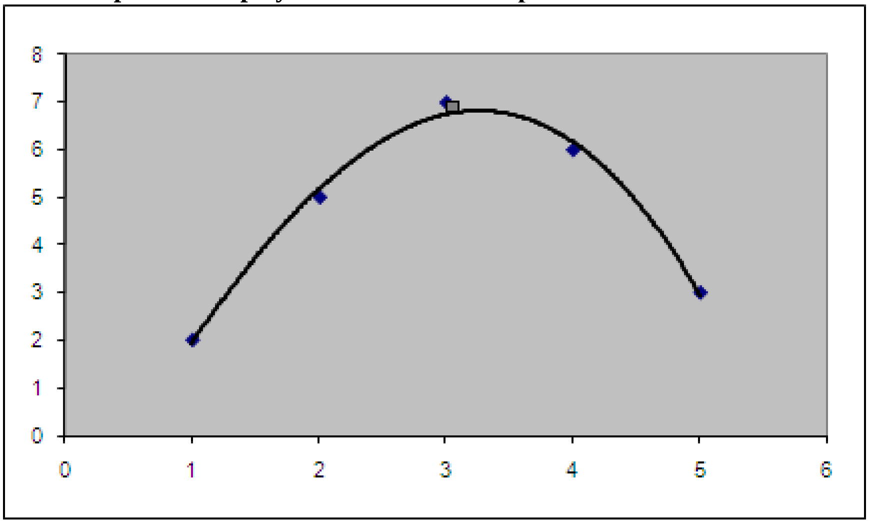
$$\begin{pmatrix} 0{,}0694 & -0{,}6250 & 1{,}6389 & -1{,}1667 \\ -0{,}6250 & 5{,}6964 & -15{,}1786 & 11{,}0000 \\ 1{,}6389 & -15{,}1786 & 41{,}3492 & -30{,}8333 \\ -1{,}1667 & 11{,}0000 & -30{,}8333 & 24{,}2000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 990 \\ 256 \\ 72 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0833 \\ -0{,}3214 \\ 4{,}7619 \\ -2{,}4000 \end{pmatrix}$$

výpočtem jsem získala $a_3 = -0{,}0833,\ a_2 = -0{,}3214,\ a_1 = 4{,}7619,\ a_0 = -2{,}4000$

$$P_3(a_3, a_2, a_1, a_0) = -0{,}0833x^3 - 0{,}3214x^2 + 4{,}7619x - 2{,}4000$$

$$\begin{aligned}
&E(a_3, a_2, a_1, a_0) = \\
&= (-0{,}0833 \cdot 1^3 - 0{,}3214 \cdot 1^2 + 4{,}7619 \cdot 1 - 2{,}4000 - 2)^2 + \\
&+ (-0{,}0833 \cdot 2^3 - 0{,}3214 \cdot 2^2 + 4{,}7619 \cdot 2 - 2{,}4000 - 5)^2 + \\
&+ (-0{,}0833 \cdot 3^3 - 0{,}3214 \cdot 3^2 + 4{,}7619 \cdot 3 - 2{,}4000 - 7)^2 + \\
&+ (-0{,}0833 \cdot 4^3 - 0{,}3214 \cdot 4^2 + 4{,}7619 \cdot 4 - 2{,}4000 - 6)^2 + \\
&+ (-0{,}0833 \cdot 5^3 - 0{,}3214 \cdot 5^2 + 4{,}7619 \cdot 5 - 2{,}4000 - 3)^2 = 0{,}1286
\end{aligned}$$

Graf 9: Aproximace polynomem m –tého stupně



Zdroj: vlastní

3 Příklad

V následujícím příkladě, porovnám jednotlivé druhy uvedených aproximací na jednom zadání, aby bylo vidět, jaké jsou součty nejmenších čtverců u jednotlivých stupňů polynomů.

Desetinná čísla jsou zaokrouhlena na čtyři desetinných míst a do grafů, pro přehlednost nezakresluji nejmenší čtverce.

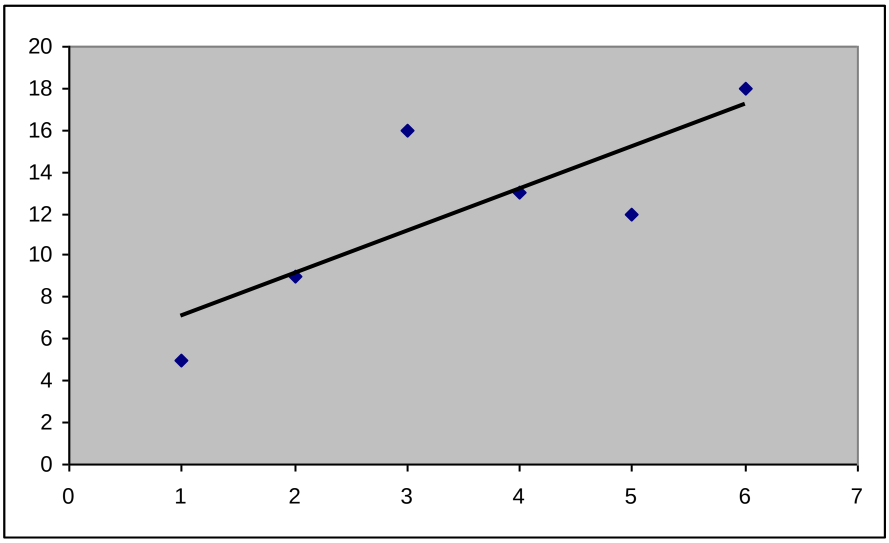
Zadání: Mějme body $[1,5],[2,9],[3,16],[4,13],[5,12],[6,18]$, které chceme proložit aproximační křivkou.

3.1 Aproximace polynomem prvního stupně

Při aproximaci polynomem prvního stupně má aproximační přímka tvar $y = 2{,}0286x + 5{,}0667$, nyní můžeme spočítat součet nejmenších čtverců:

$$E(a,b) =$$
$$= (2{,}0286 \cdot 1 + 5{,}0667 - 5)^2 + (2{,}0286 \cdot 2 + 5{,}0667 - 9)^2 + (2{,}0286 \cdot 3 + 5{,}0667 - 16)^2 +$$
$$+ (2{,}0286 \cdot 4 + 5{,}0667 - 13)^2 + (2{,}0286 \cdot 5 + 5{,}0667 - 12)^2 + (2{,}0286 \cdot 6 + 5{,}0667 - 18)^2 =$$
$$= 4{,}3878 + 0{,}0151 + 23{,}5157 + 0{,}0319 + 10{,}2829 + 0{,}5857 = 40{,}8471$$

Graf 10: Příklad – aproximace polynomem prvního stupně



Zdroj: vlastní

3.2 Aproximace polynomem druhého stupně

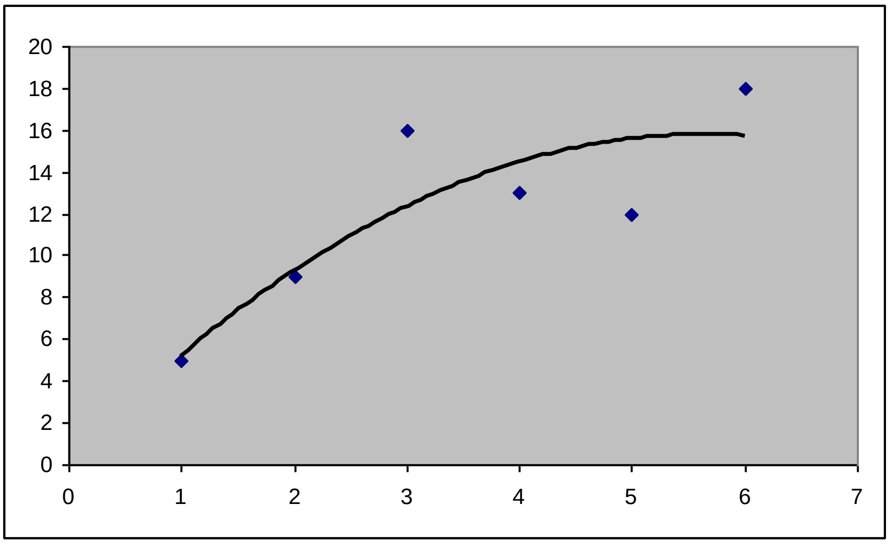
V tomto případě má aproximace tvar $y = -0{,}3929x^2 + 4{,}7786x + 1{,}4000$,

dosazením spočítám součet nejmenších čtverců

$$E(a,b,c) =$$
$$= (-0{,}3929 \cdot 1^2 + 4{,}7786 \cdot 1 + 1{,}4000 - 5)^2 +$$
$$+ (-0{,}3929 \cdot 2^2 + 4{,}7786 \cdot 2 + 1{,}4000 - 9)^2 +$$
$$+ (-0{,}3929 \cdot 3^2 + 4{,}7786 \cdot 3 + 1{,}4000 - 16)^2 +$$
$$+ (-0{,}3929 \cdot 4^2 + 4{,}7786 \cdot 4 + 1{,}4000 - 13)^2 +$$
$$+ (-0{,}3929 \cdot 5^2 + 4{,}7786 \cdot 5 + 1{,}4000 - 12)^2 +$$
$$+ (-0{,}3929 \cdot 6^2 + 4{,}7786 \cdot 6 + 1{,}4000 - 18)^2 =$$
$$= 0{,}617 + 0{,}1496 + 14{,}4218 + 1{,}5198 + 12{,}0965 + 4{,}2518 = 32{,}6647$$

Jak vidíme, aproximace polynomem druhého stupně je v tomto případě přesnější než prvního stupně, neboť $E(a,b,c)$ je menší než $E(a,b)$.

Graf 11: Příklad – aproximace polynomem druhého stupně



Zdroj: vlastní

3.3 Aproximace polynomem třetího stupně

Při aproximaci polynomem třetího stupně dostávám

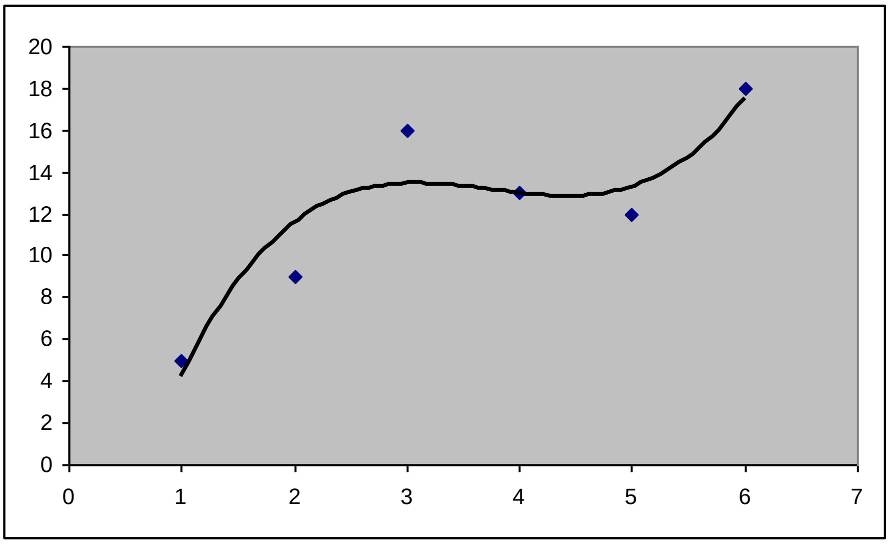
$$y = 0{,}5185x^3 - 5{,}8373x^2 + 21{,}2156x - 11{,}6667$$

následně dopočítám

$$E(a_1, a_2, a_3, a_4) =$$
$$= (0{,}5185 \cdot 1^3 - 5{,}8373 \cdot 1^2 + 21{,}2156 \cdot 1 - 11{,}6667 - 5)^2 +$$
$$+ (0{,}5185 \cdot 2^3 - 5{,}8373 \cdot 2^2 + 21{,}2156 \cdot 2 - 11{,}6667 - 9)^2 +$$
$$+ (0{,}5185 \cdot 3^3 - 5{,}8373 \cdot 3^2 + 21{,}2156 \cdot 3 - 11{,}6667 - 16)^2 +$$
$$+ (0{,}5185 \cdot 4 - 5{,}8373 \cdot 4^2 + 21{,}2156 \cdot 4 - 11{,}6667 - 13)^2 +$$
$$+ (0{,}5185 \cdot 5^3 - 5{,}8373 \cdot 5^2 + 21{,}2156 \cdot 5 - 11{,}6667 - 12)^2 +$$
$$+ (0{,}5185 \cdot 6^3 - 5{,}8373 \cdot 6^2 + 21{,}2156 \cdot 6 - 11{,}6667 - 18)^2 =$$
$$= 0{,}5927 + 6{,}5705 + 6{,}5336 + 0{,}0003 + 1{,}6675 + 0{,}2703 = 15{,}2423$$

Zde je vidět až poloviční hodnota součtu oproti předchozímu výsledku, aproximace polynomem třetího stupně se zatím jeví jako nejpřesnější.

Graf 12: Příklad – aproximace polynomem třetího stupně



Zdroj: vlastní

3.4 Aproximace polynomem čtvrtého stupně

Nyní je tvar aproximační rovnice

$$y = 0{,}3750x^4 - 4{,}7315x^3 + 19{,}1806x^2 - 25{,}2844x + 15{,}3333,$$

součet obsahů nejmenších čtverců

$$E(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) =$$

$$= (0{,}3750 \cdot 1^4 - 4{,}7315 \cdot 1^3 + 19{,}1806 \cdot 1^2 - 25{,}2844 \cdot 1 + 15{,}3333 - 5)^2 +$$

$$+ (0{,}3750 \cdot 2^4 - 4{,}7315 \cdot 2^3 + 19{,}1806 \cdot 2^2 - 25{,}2844 \cdot 2 + 15{,}3333 - 9)^2 +$$

$$+ (0{,}3750 \cdot 3^4 - 4{,}7315 \cdot 3^3 + 19{,}1806 \cdot 3^2 - 25{,}2844 \cdot 3 + 15{,}3333 - 16)^2 +$$

$$+ (0{,}3750 \cdot 4^4 - 4{,}7315 \cdot 4^3 + 19{,}1806 \cdot 4^2 - 25{,}2844 \cdot 4 + 15{,}3333 - 13)^2 +$$

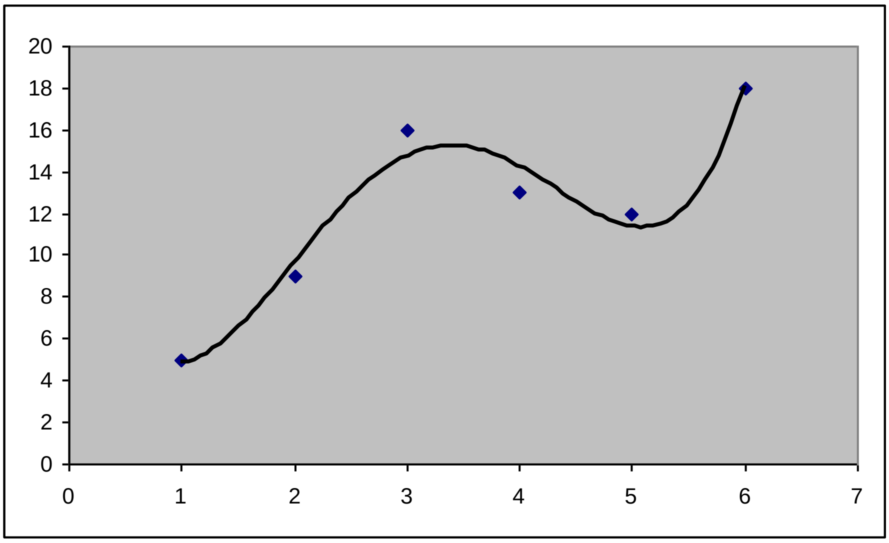
$$+ (0{,}3750 \cdot 5^4 - 4{,}7315 \cdot 5^3 + 19{,}1806 \cdot 5^2 - 25{,}2844 \cdot 5 + 15{,}3333 - 12)^2 +$$

$$+ (0{,}3750 \cdot 6^4 - 4{,}7315 \cdot 6^3 + 19{,}1806 \cdot 6^2 - 25{,}2844 \cdot 6 + 15{,}3333 - 18)^2 =$$

$$0{,}0161 2 + 0{,}4027 + 1{,}6124968533 + 1{,}6104 + 0{,}4051 + 0{,}0154 = 3{,}6709$$

Opět zde vidíme znatelný rozdíl oproti $E(a_1, a_2, a_3, a_4)$

Graf 13: Příklad – aproximace polynomem čtvrtého stupně



Zdroj: vlastní

3.5 Aproximace polynomem pátého stupně

V tomto případě má aproximace polynomem pátého stupně tvar

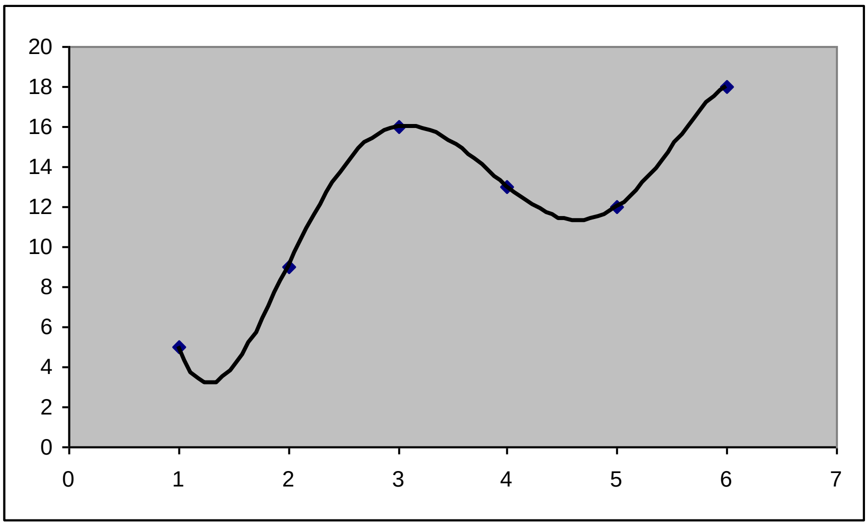
$$y = -0{,}2667x^5 + 5{,}0417x^4 - 35{,}2500x^3 + 110{,}9583x^2 - 149{,}4833x + 74{,}0000\,,$$

pro součet obsahů nejmenších čtverců dostávám $E(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = 0$ neboť je zřejmé, že křivka danými body prochází bez odchylky

Neustálé zvyšování stupně polynomu mě zavedlo až k interpolaci a tu mým záměrem není najít.

Jednoznačně lze říci, že čím vyšší bude stupeň polynomu, tím menší bude součet obsahů nejmenších čtverců.

Graf 14: Příklad – aproximace polynomem pátého stupně



Zdroj: vlastní

V předcházejících podkapitolám se věnuji mocninným funkcím, nicméně aproximovat data lze jakoukoli funkcí, například goniometrickou, exponenciální atd.

Nechť $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jsou pozorování a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ funkce k proměnným $x_1, x_2, \ldots, x_k$. U metody nejmenších čtverců se určují takové koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_k$, aby výraz $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_k)\right)^2$ byl minimální. Koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou řešení tzv. soustavy normálových rovnic. (Aplikovaná matematika, 1987)

4 Aplikace metody nejmenších čtverců

Rozhodla jsem se aplikovat metodu nejmenších čtverců na ukazatelích zahraničního obchodu, konkrétně na obratu, vývozu, dovozu a bilanci. K výpočtu budu vycházet z dat z následující tabulky.

V úvodu každé podkapitoly uvádím, pro jaký stupeň polynomu jsem se rozhodla a pro porovnání uvádím i aproximaci polynomem o stupeň nižším a vyšším.

Na závěr podkapitoly uvádím predikci jednotlivých hodnot na pět let dopředu.

Tabulka 1: Zahraniční obchod České republiky

	Obrat	Vývoz	Dovoz	Bilance	Změna proti předchozímu roku v %	
	v mld. Kč				vývoz	dovoz
1989	427,5035	216,5323	210,9712	5,5000	.	.
1990	447,9996	214,0602	233,9394	-19,7792	-1,1417	10,8869
1991	442,3750	233,5942	208,7808	24,8134	9,1255	-10,7543
1992	541,4889	248,0900	293,3989	-45,3089	6,2055	40,5296
1993	847,6850	421,6010	426,0840	-4,4830	69,9387	45,2234
1994	957,2194	458,8425	498,3769	-39,4344	8,8334	16,9668
1995	1 231,9109	566,1707	665,7402	-99,4695	23,3911	33,5817
1996	1 356,3000	601,6785	754,5650	-152,9869	6,2716	13,3423
1997	1 568,9721	709,2611	859,7110	-150,4499	17,8804	13,9195
1998	1 748,6864	834,2207	914,4657	-80,3450	17,6183	6,3690
1999	1 882,0246	908,7559	973,1687	-64,4128	8,9347	6,4194
2000	2 363,0227	1 121,0989	1 241,9238	-120,8249	23,3663	27,6165
2001	2 653,7000	1 268,1490	1 385,6194	-116,9856	13,1166	11,5704
2002	2 580,6109	1 254,8943	1 325,7166	-70,8223	-1,1830	-4,3232
2003	2 811,5531	1 370,9300	1 440,7231	-69,7931	9,3467	8,6750
2004	3 471,7526	1 722,6573	1 749,0953	-26,4380	25,6561	21,4040
2005	3 698,6476	1 868,5858	1 829,9618	38,6240	8,4711	4,6233
2006	4 249,3858	2 144,5734	2 104,8124	39,7610	14,7699	15,0195
2007	4 870,4525	2 479,2339	2 391,3186	87,9153	15,6050	13,6120
2008	4 880,2000	2 473,7000	2 406,5000	67,2000	-0,2000	0,6000

Zdroj: čsú

4.1 Analýza dat obratu metodou nejmenších čtverců

Vzhledem k charakteru dat obratu považuji za nejvhodnější aproximaci polynomem druhého stupně, jelikož o lineárním růstu nemůže být řeč a aproximační křivka třetího stupně je téměř totožná s aproximační křivkou druhého stupně, je zcela zbytečné využívat aproximace vyšších řádů, ale samozřejmě vždy záleží na účelu výpočtu.

Pro zajímavost lze uvést, že při aproximaci polynomem prvního stupně získám $P_1(x) = 242{,}051\,3x - 481\,588{,}047\,4$ a $E(a,b) = 1\,897\,290{,}539\,9$,

při aproximaci polynomem třetího stupně získám $P_3(x) = 0{,}207\,4x^3 - 1\,234{,}162\,5x^2 + 2\,448\,029{,}851\,2x - 1\,618\,660\,328{,}419\,1$

a $E(a,b,c,d) = 345\,551{,}329\,4$

Následující výpočet je řešen pro aproximaci polynomem druhého stupně.

Tabulka 2: Pomocné údaje pro výpočet polynomu druhého stupně pro data obratu (obrat uváděn v mld. Kč)

x	*y=obrat*	*x^2*	*x^3*	*x^4*	*xy*	*(x^2)y*
1989	427,5035	3 956 121	7 868 724 669	15 650 893 366 641	850 304,4615	1 691 255 573,9235
1990	447,9996	3 960 100	7 880 599 000	15 682 392 010 000	891 519,2040	1 774 123 215,9600
1991	442,3750	3 964 081	7 892 485 271	15 713 938 174 561	880 768,6250	1 753 610 332,3750
1992	541,4889	3 968 064	7 904 383 488	15 745 531 908 096	1 078 645,8888	2 148 662 610,4896
1993	847,6850	3 972 049	7 916 293 657	15 777 173 258 401	1 689 436,2050	3 367 046 356,5650
1994	957,2194	3 976 036	7 928 215 784	15 808 862 273 296	1 908 695,4836	3 805 938 794,2984
1995	1 231,9109	3 980 025	7 940 149 875	15 840 599 000 625	2 457 662,2455	4 903 036 179,7725
1996	1 356,3000	3 984 016	7 952 095 936	15 872 383 488 256	2 707 174,8000	5 403 520 900,8000
1997	1 568,9721	3 988 009	7 964 053 973	15 904 215 784 081	3 133 237,2837	6 257 074 855,5489
1998	1 748,6864	3 992 004	7 976 023 992	15 936 095 936 016	3 493 875,4272	6 980 763 103,5456
1999	1 882,0246	3 996 001	7 988 005 999	15 968 023 992 001	3 762 167,1754	7 520 572 183,6246
2000	2 363,0227	4 000 000	8 000 000 000	16 000 000 000 000	4 726 045,4000	9 452 090 800,0000
2001	2 653,7000	4 004 001	8 012 006 001	16 032 024 008 001	5 310 053,7000	10 625 417 453,7000
2002	2 580,6109	4 008 004	8 024 024 008	16 064 096 064 016	5 166 383,0218	10 343 098 809,6436
2003	2 811,5531	4 012 009	8 036 054 027	16 096 216 216 081	5 631 540,8593	11 279 976 341,1779
2004	3 471,7526	4 016 016	8 048 096 064	16 128 384 512 256	6 957 392,2104	13 942 613 989,6416
2005	3 698,6476	4 020 025	8 060 150 125	16 160 601 000 625	7 415 788,4380	14 868 655 818,1900
2006	4 249,3858	4 024 036	8 072 216 216	16 192 865 729 296	8 524 267,9148	17 099 681 437,0888
2007	4 870,4525	4 028 049	8 084 294 343	16 225 178 746 401	9 774 998,1675	19 618 421 322,1725
2008	4 880,2000	4 032 064	8 096 384 512	16 257 540 100 096	9 799 441,6000	19 677 278 732,8000
39 970	43 031,4906	79 880 710	159 644 256 940	319 057 015 568 746	86 159 398,1115	172 512 838 811,3170

Zdroj: vlastní

z výchozích dat získám soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrcr} 319\,057\,015\,568\,746a & +15\,964\,425\,6940b & +79\,880\,710c & = & 172\,512\,838\,811{,}317\,0 \\ 159\,644\,256\,940a & +79\,880\,710b & +39\,970c & = & 86\,159\,398{,}111\,5 \\ 79\,880\,710a & +39\,970b & +20c & = & 43\,031{,}490\,6 \end{array}$$

z koeficientů sestavím matici

$$\begin{pmatrix} 319\,057\,015\,568\,746 & 159\,644\,256\,940 & 79\,880\,710 \\ 159\,644\,256\,940 & 79\,880\,710 & 39\,970 \\ 79\,880\,710 & 39\,970 & 20 \end{pmatrix}$$

k předchozí matici sestavím matici inverzní

$$\begin{pmatrix} 0{,}000\,1 & -0{,}227\,7 & 227{,}498\,3 \\ -0{,}227\,7 & 910{,}002\,2 & -909\,313{,}585\,6 \\ 227{,}498\,3 & -909\,313{,}585\,6 & 908\,627\,039{,}145\,3 \end{pmatrix}$$

dopočítám neznámé

$$\begin{pmatrix} 0{,}000\,1 & -0{,}227\,7 & 227{,}498\,3 \\ -0{,}227\,7 & 910{,}002\,2 & -909\,313{,}585\,6 \\ 227{,}498\,3 & -909\,313{,}585\,6 & 908\,627\,039{,}145\,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 172512838811{,}3170 \\ 86159398{,}1115 \\ 43031{,}4906 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9{,}3438 \\ -37105{,}0491 \\ 36837191{,}3906 \end{pmatrix}$$

čímž jsem získala $a = 9{,}343\,8$, $b = -37\,105{,}049\,1$, $c = 36\,837\,191{,}390\,6$

$P_2(x) = 9{,}343\,8x^2 - 37\,105{,}049\,1x + 36\,837\,191{,}390\,6$

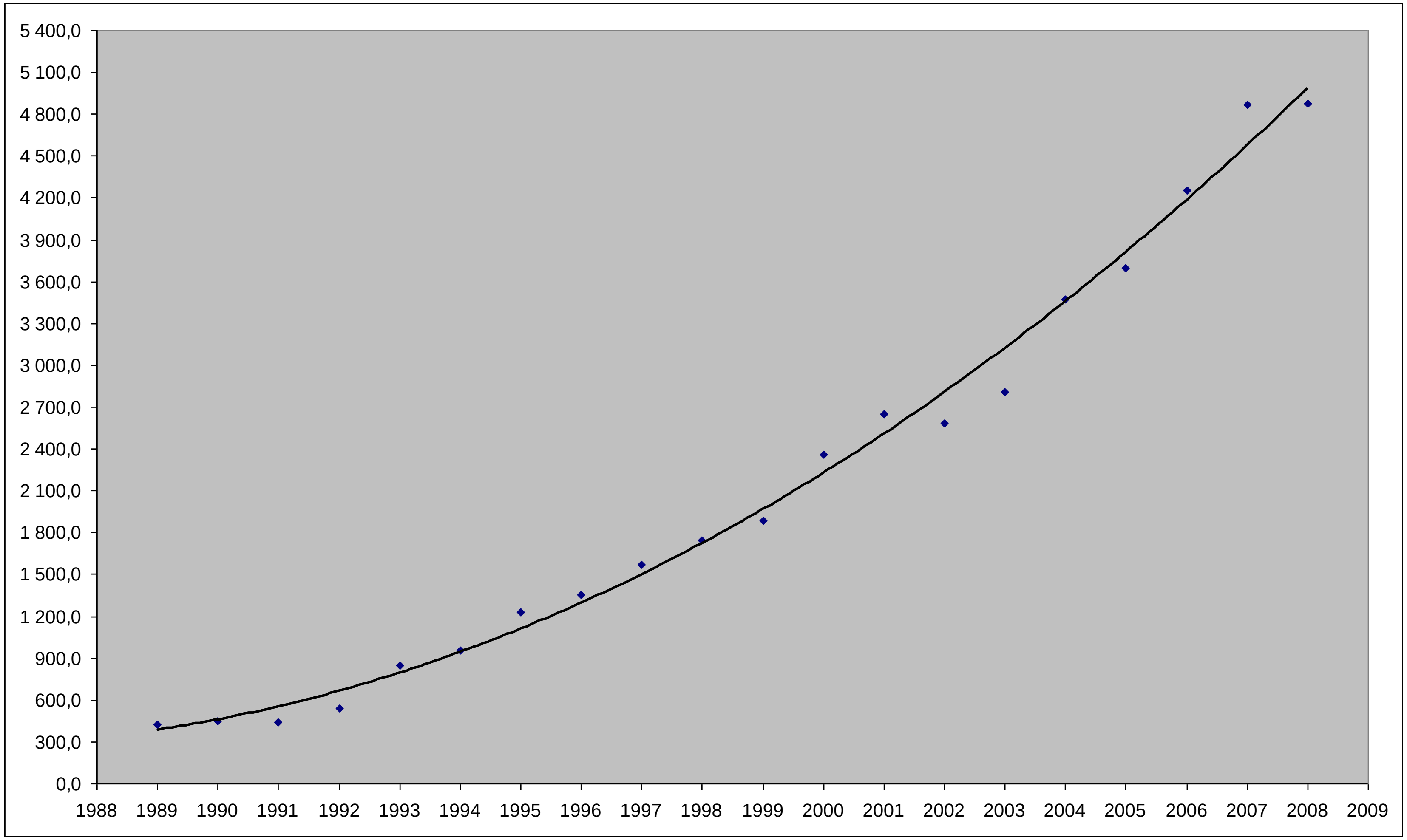
jelikož nyní znám aproximační polynom, mohu v případě stejného růstu obratu jako v předchozích letech, odhadnout hodnoty pro následující roky 2009 až 2013 (v mld. Kč)

$P_2(2009) = 9{,}343\,8 \cdot 2009^2 - 37\,105{,}049\,1 \cdot 2009 + 36\,837\,191{,}3906 = 5\,412{,}586\,6$

$$P_2(2010) = 9{,}3438 \cdot 2010^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 2010 + 36\,837\,191{,}3906 = 5\,860{,}2016$$
$$P_2(2011) = 9{,}3438 \cdot 2011^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 2011 + 36\,837\,191{,}3906 = 6\,326{,}5043$$
$$P_2(2012) = 9{,}3438 \cdot 2012^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 2012 + 36\,837\,191{,}3906 = 6\,811{,}4946$$
$$P_2(2013) = 9{,}3438 \cdot 2013^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 2013 + 36\,837\,191{,}3906 = 7\,315{,}1725$$

$$
\begin{aligned}
&E(a,b,c) = \\
&= (9{,}3438 \cdot 1989^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 1989 + 36\,837\,191{,}3906 - 427{,}5035)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 1990^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 1990 + 36\,837\,191{,}3906 - 447{,}9996)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 1991^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 1991 + 36\,837\,191{,}3906 - 442{,}3750)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 1992^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 1992 + 36\,837\,191{,}3906 - 541{,}4889)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 1993^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 1993 + 36\,837\,191{,}3906 - 847{,}6850)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 1994^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 1994 + 36\,837\,191{,}3906 - 957{,}2194)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 1995^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 1995 + 36\,837\,191{,}3906 - 1\,231{,}9109)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 1996^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 1996 + 36\,837\,191{,}3906 - 1\,356{,}3000)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 1997^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 1997 + 36\,837\,191{,}3906 - 1\,568{,}9721)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 1998^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 1998 + 36\,837\,191{,}3906 - 1\,748{,}6864)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 1999^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 1999 + 36\,837\,191{,}3906 - 1\,882{,}0246)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 2000^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 2000 + 36\,837\,191{,}3906 - 2\,363{,}0227)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 2001^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 2001 + 36\,837\,191{,}3906 - 2\,653{,}7000)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 2002^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 2002 + 36\,837\,191{,}3906 - 2\,580{,}6109)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 2003^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 2003 + 36\,837\,191{,}3906 - 2\,811{,}5531)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 2004^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 2004 + 36\,837\,191{,}3906 - 3\,471{,}7526)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 2005^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 2005 + 36\,837\,191{,}3906 - 3\,698{,}6476)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 2006^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 2006 + 36\,837\,191{,}3906 - 4\,249{,}3858)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 2007^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 2007 + 36\,837\,191{,}3906 - 4\,870{,}4525)^2 + \\
&+ (9{,}3438 \cdot 2008^2 - 37\,105{,}0491 \cdot 2008 + 36\,837\,191{,}3906 - 4\,880{,}2000)^2 = \\
&= 364\,534{,}2088
\end{aligned}
$$

Graf 15: Aproximace dat obratu



Zdroj: vlastní

4.2 Analýza dat vývozu metodou nejmenších čtverců

Pro aproximaci dat vývozu považuji za dostačující aproximaci polynomem druhého řádu, důvody jsou stejné jako v předchozím případě.

Při aproximaci polynomem prvního stupně, bych dostala $P_1(x) = 122{,}638\,5x - 244\,037{,}121\,7$ a $E(a,b) = 650\,578{,}408\,9$,

při aproximaci polynomem třetího stupně
$P_3(x) = 0{,}1218x^3 - 724{,}652\,3x^2 + 1\,437\,072{,}072\,8x - 949\,980\,695{,}1941$
a $E(a,b,c,d) = 8\,6631{,}635\,6$

Následující výpočet je řešen pro aproximaci polynomem druhého stupně.

Tabulka 3: Pomocné údaje pro výpočet polynomu druhého stupně pro data vývozu (vývoz uváděn v mld. Kč)

x	*y=vývoz*	*x^2*	*x^3*	*x^4*	*xy*	*(x^2)y*
1989	216,5323	3 956 121	7 868 724 669	15 650 893 366 641	430 682,7447	856 627 979,2083
1990	214,0602	3 960 100	7 880 599 000	15 682 392 010 000	425 979,7980	847 699 798,0200
1991	233,5942	3 964 081	7 892 485 271	15 713 938 174 561	465 086,0522	925 986 329,9302
1992	248,0900	3 968 064	7 904 383 488	15 745 531 908 096	494 195,2800	984 436 997,7600
1993	421,6010	3 972 049	7 916 293 657	15 777 173 258 401	840 250,7930	1 674 619 830,4490
1994	458,8425	3 976 036	7 928 215 784	15 808 862 273 296	914 931,9450	1 824 374 298,3300
1995	566,1707	3 980 025	7 940 149 875	15 840 599 000 625	1 129 510,5465	2 253 373 540,2675
1996	601,6785	3 984 016	7 952 095 936	15 872 383 488 256	1 200 950,2860	2 397 096 770,8560
1997	709,2611	3 988 009	7 964 053 973	15 904 215 784 081	1 416 394,4167	2 828 539 650,1499
1998	834,2207	3 992 004	7 976 023 992	15 936 095 936 016	1 666 772,9586	3 330 212 371,2828
1999	908,7559	3 996 001	7 988 005 999	15 968 023 992 001	1 816 603,0441	3 631 389 485,1559
2000	1 121,0989	4 000 000	8 000 000 000	16 000 000 000 000	2 242 197,8000	4 484 395 600,0000
2001	1 268,1490	4 004 001	8 012 006 001	16 032 024 008 001	2 537 566,1490	5 077 669 864,1490
2002	1 254,8943	4 008 004	8 024 024 008	16 064 096 064 016	2 512 298,3886	5 029 621 373,9772
2003	1 370,9300	4 012 009	8 036 054 027	16 096 216 216 081	2 745 972,7900	5 500 183 498,3700
2004	1 722,6573	4 016 016	8 048 096 064	16 128 384 512 256	3 452 205,2292	6 918 219 279,3168
2005	1 868,5858	4 020 025	8 060 150 125	16 160 601 000 625	3 746 514,5290	7 511 761 630,6450
2006	2 144,5734	4 024 036	8 072 216 216	16 192 865 729 296	4 302 014,2404	8 629 840 566,2424
2007	2 479,2339	4 028 049	8 084 294 343	16 225 178 746 401	4 975 822,4373	9 986 475 631,6611
2008	2 473,7000	4 032 064	8 096 384 512	16 257 540 100 096	4 967 189,6000	9 974 116 716,8000
39 970	21 116,6297	79 880 710	159 644 256 940	319 057 015 568 746	42 283 139,0283	84 666 641 212,5711

Zdroj: vlastní

podle výchozích dat sestavím soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
319\,057\,015\,568\,746a &\quad +159644\,256\,940b &\quad +79\,880\,710c &\quad = &\quad 84\,666\,641\,212{,}5711 \\
159\,644\,256\,940a &\quad +79\,880\,710b &\quad +39\,970c &\quad = &\quad 42\,283139{,}028\,3 \\
79\,880\,710a &\quad +39\,970b &\quad +20c &\quad = &\quad 21116{,}629\,7
\end{aligned}$$

následně z koeficientů sestavím matici

$$\begin{pmatrix} 319\,057\,015\,568\,746 & 159\,644\,256\,940 & 79\,880\,710 \\ 159\,644\,256\,940 & 79\,880\,710 & 39\,970 \\ 79\,880\,710 & 39\,970 & 20 \end{pmatrix}$$

k předchozí matici sestavím matici inverzní

$$\begin{pmatrix} 0{,}000\,1 & -0{,}227\,7 & 227{,}498\,3 \\ -0{,}227\,7 & 910{,}002\,2 & -909\,313{,}585\,6 \\ 227{,}498\,3 & -909\,313{,}585\,6 & 908\,627\,039{,}145\,3 \end{pmatrix}$$

dopočítám neznámé

$$\begin{pmatrix} 0{,}000\,1 & -0{,}227\,7 & 227{,}498\,3 \\ -0{,}227\,7 & 910{,}002\,2 & -909\,313{,}585\,6 \\ 227{,}498\,3 & -909\,313{,}585\,6 & 908\,627\,039{,}145\,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 84\,666\,641\,212{,}5711 \\ 42\,283139{,}028\,3 \\ 21116{,}629\,7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5{,}634\,7 \\ -22\,399{,}190\,8 \\ 22\,260\,713{,}437\,5 \end{pmatrix}$$

výpočtem jsem získala neznámé

$a = 5{,}634\,7, b = -22\,399{,}190\,8, c = 22\,260\,713{,}437\,5$

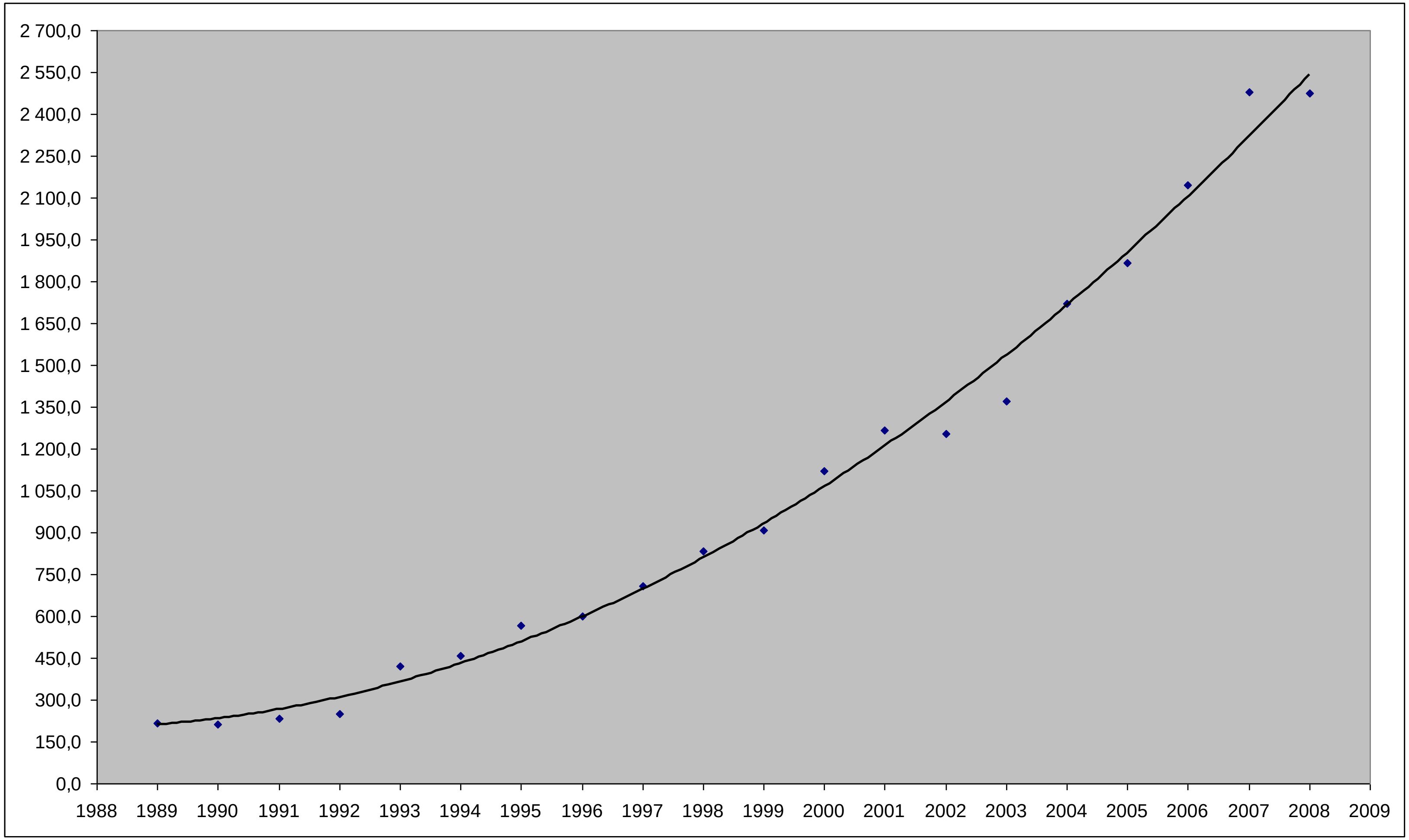
$P_2(x) = 5{,}634\,7x^2 - 22\,399{,}190\,8x + 22\,260\,713{,}437\,5$

vzhledem k tomu, že nyní znám aproximační polynom, mohu v případě stejného růstu vývozu jako v předchozích letech, odhadnout hodnoty pro následující roky 2009 až 2013 (v mld. Kč)

$$P_2(2009) = 5{,}634\,7 \cdot 2009^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2009 + 22\,260\,713{,}437\,5 = 2\,777{,}402\,3$$
$$P_2(2010) = 5{,}634\,7 \cdot 2010^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2010 + 22\,260\,713{,}437\,5 = 3\,024{,}003\,8$$
$$P_2(2011) = 5{,}634\,7 \cdot 2011^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2011 + 22\,260\,713{,}437\,5 = 3\,281{,}874\,6$$
$$P_2(2012) = 5{,}634\,7 \cdot 2012^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2012 + 22\,260\,713{,}437\,5 = 3\,551{,}0148$$
$$P_2(2013) = 5{,}634\,7 \cdot 2013^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2013 + 22\,260\,713{,}437\,5 = 3\,831{,}424\,4$$

$$\begin{aligned}
&E(a,b,c) = \\
&= (5{,}634\,7 \cdot 1989^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 1989 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 216{,}532\,3)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 1990^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 1990 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 214{,}060\,2)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 1991^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 1991 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 233{,}594\,2)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 1992^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 1992 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 248{,}090\,0)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 1993^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 1993 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 421{,}601\,0)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 1994^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 1994 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 458{,}842\,5)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 1995^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 1995 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 566{,}170\,7)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 1996^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 1996 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 601{,}678\,5)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 1997^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 1997 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 709{,}2611)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 1998^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 1998 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 834{,}220\,7\,)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 1999^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 1999 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 908{,}755\,9)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 2000^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2000 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 1121{,}098\,9)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 2001^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2001 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 1\,268{,}149\,0)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 2002^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2002 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 1\,254{,}894\,3)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 2003^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2003 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 1\,370{,}930\,0)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 2004^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2004 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 1\,722{,}657\,3)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 2005^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2005 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 1\,868{,}585\,8)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 2006^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2006 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 2\,144{,}573\,4)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 2007^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2007 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 2\,479{,}233\,9)^2 \\
&+ (5{,}634\,7 \cdot 2008^2 - 22\,399{,}190\,8 \cdot 2008 + 22\,260\,713{,}437\,5 - 2\,473{,}700\,0)^2 \\
&= 93178{,}798\,8
\end{aligned}$$

Graf 16: Aproximace dat vývozu



Zdroj: vlastní

4.3 Analýza dat dovozu metodou nejmenších čtverců

Jako postačující považuji opět aproximaci polynomem druhého stupně.

U aproximace polynomem prvního stupně dostanu $P_1(x) = 119{,}4143x - 237\,553{,}6667$

a $E(a,b) = 341494{,}7481$ při aproximaci polynomem třetího stupně, je tvar polynomu $P_3(x) = 0{,}0856x^3 - 509{,}3820x^2 + 1\,010\,701{,}0964x - 668\,508\,288{,}9632$

a $E(a,b,c,d) = 96701{,}7410$

Tabulka 4: Pomocné údaje pro výpočet polynomu druhého stupně pro data dovozu (dovoz uváděn v mld. Kč)

x	*y=dovoz*	*x^2*	*x^3*	*x^4*	*xy*	*(x^2)y*
1989	210,9712	3 956 121	7 868 724 669	15 650 893 366 641	419 621,7168	834 627 594,7152
1990	233,9394	3 960 100	7 880 599 000	15 682 392 010 000	465 539,4060	926 423 417,9400
1991	208,7808	3 964 081	7 892 485 271	15 713 938 174 561	415 682,5728	827 624 002,4448
1992	293,3989	3 968 064	7 904 383 488	15 745 531 908 096	584 450,6088	1 164 225 612,7296
1993	426,0840	3 972 049	7 916 293 657	15 777 173 258 401	849 185,4120	1 692 426 526,1160
1994	498,3769	3 976 036	7 928 215 784	15 808 862 273 296	993 763,5386	1 981 564 495,9684
1995	665,7402	3 980 025	7 940 149 875	15 840 599 000 625	1 328 151,6990	2 649 662 639,5050
1996	754,5650	3 984 016	7 952 095 936	15 872 383 488 256	1 506 111,7400	3 006 199 033,0400
1997	859,7110	3 988 009	7 964 053 973	15 904 215 784 081	1 716 842,8670	3 428 535 205,3990
1998	914,4657	3 992 004	7 976 023 992	15 936 095 936 016	1 827 102,4686	3 650 550 732,2628
1999	973,1687	3 996 001	7 988 005 999	15 968 023 992 001	1 945 364,2313	3 888 783 098,3687
2000	1 241,9238	4 000 000	8 000 000 000	16 000 000 000 000	2 483 847,6000	4 967 695 200,0000
2001	1 385,6194	4 004 001	8 012 006 001	16 032 024 008 001	2 772 624,4194	5 548 021 463,2194
2002	1 325,7166	4 008 004	8 024 024 008	16 064 096 064 016	2 654 084,6332	5 313 477 435,6664
2003	1 440,7231	4 012 009	8 036 054 027	16 096 216 216 081	2 885 768,3693	5 780 194 043,7079
2004	1 749,0953	4 016 016	8 048 096 064	16 128 384 512 256	3 505 186,9812	7 024 394 710,3248
2005	1 829,9618	4 020 025	8 060 150 125	16 160 601 000 625	3 669 073,4090	7 356 492 185,0450
2006	2 104,8124	4 024 036	8 072 216 216	16 192 865 729 296	4 222 253,6744	8 469 840 870,8464
2007	2 391,3186	4 028 049	8 084 294 343	16 225 178 746 401	4 799 376,4302	9 632 348 495,4114
2008	2 406,5000	4 032 064	8 096 384 512	16 257 540 100 096	4 832 252,0000	9 703 162 016,0000
39 970	21 914,8728	79 880 710	159 644 256 940	319 057 015 568 746	43 876 283,7776	87 846 248 778,7108

Zdroj: vlastní

z výchozích dat získám soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
319\,057\,015\,568\,746a &+ 159\,644\,256\,940b &+ 79\,880\,710c &= 87\,846\,248\,778{,}7108\\
159\,644\,256\,940a &+ 79\,880\,710b &+ 39\,970c &= 43\,876\,283{,}7776\\
79\,880\,710a &+ 39\,970b &+ 20c &= 21\,914{,}8728
\end{aligned}$$

z koeficientů sestavím matici

$$\begin{pmatrix} 319\,057\,015\,568\,746 & 159\,644\,256\,940 & 79\,880\,710 \\ 159\,644\,256\,940 & 79\,880\,710 & 39\,970 \\ 79\,880\,710 & 39\,970 & 20 \end{pmatrix}$$

k předchozí matici sestavím matici inverzní

$$\begin{pmatrix} 0{,}0001 & -0{,}2277 & 227{,}4983 \\ -0{,}2277 & 910{,}0022 & -909\,313{,}5856 \\ 227{,}4983 & -909\,313{,}5856 & 908\,627\,039{,}1453 \end{pmatrix}$$

nyní mi zbývá dopočítat výsledek

$$\begin{pmatrix} 0{,}0001 & -0{,}2277 & 227{,}4983 \\ -0{,}2277 & 910{,}0022 & -909\,313{,}5856 \\ 227{,}4983 & -909\,313{,}5856 & 908\,627\,039{,}1453 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 87846248778{,}7108 \\ 43876283{,}7776 \\ 21914{,}8728 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3{,}7094 \\ -14\,706{,}9221 \\ 14\,577\,539{,}6250 \end{pmatrix}$$

výpočtem jsem získala $a = 3{,}7094, b = -14706{,}9221, c = 14\,577\,539{,}6250$
$P_2(x) = 3{,}7094x^2 - 14\,706{,}9221x + 14\,577\,539{,}6250$

pomocí aproximačního polynomu, mohu v případě stejného růstu dovozu jako v předchozích letech, odhadnout hodnoty pro následující roky 2009 až 2013 (v mld. Kč)

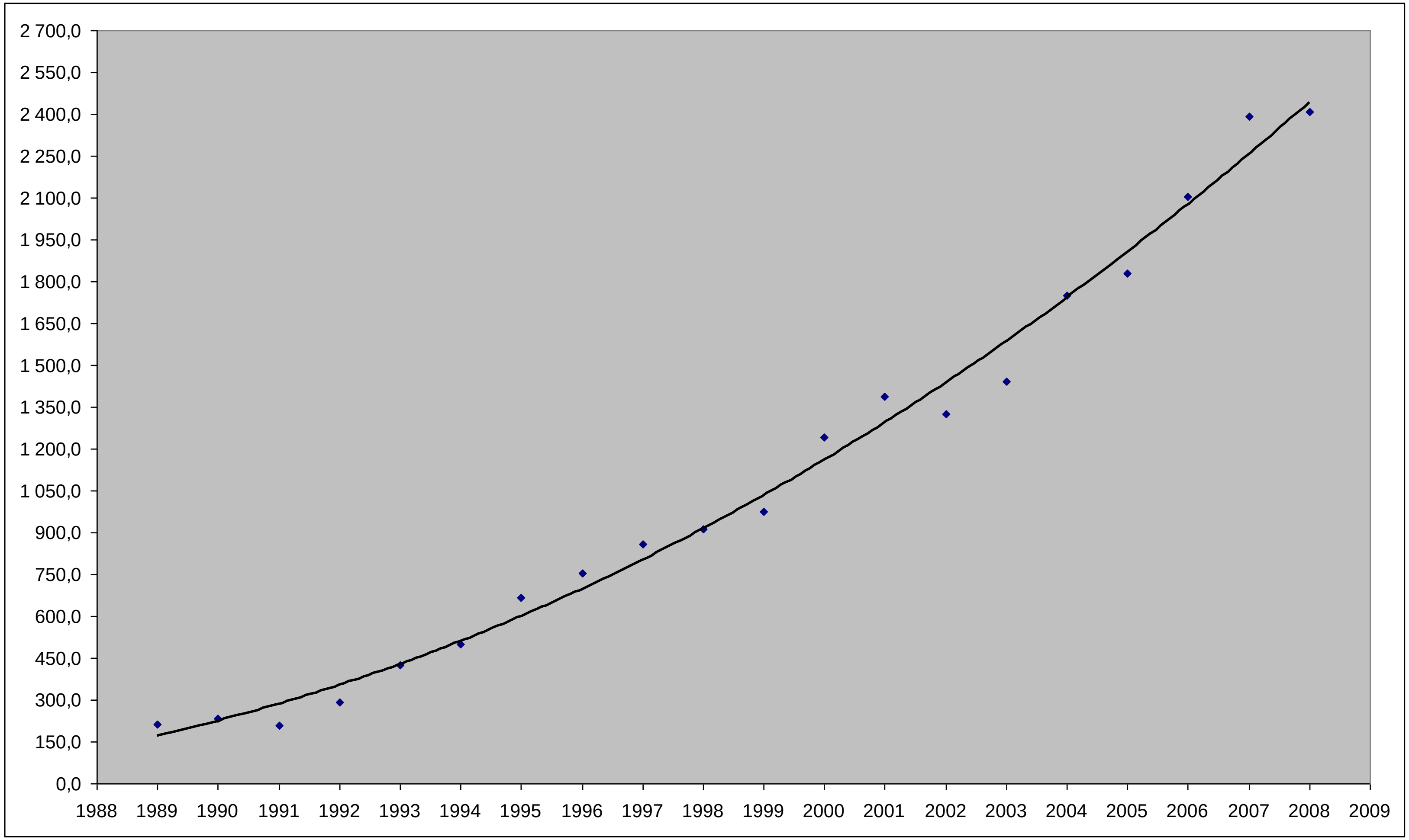
$P_2(2009) = 3{,}7094 \cdot 2009^2 - 14\,706{,}9221 \cdot 2009 + 14\,577\,539{,}6250 = 2\,635{,}2236$

$P_2(2010) = 3{,}7094 \cdot 2010^2 - 14\,706{,}9221 \cdot 2010 + 14\,577\,539{,}6250 = 2\,836{,}2439$

$$P_2(2011) = 3{,}709\,4 \cdot 2011^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 2011 + 14\,577\,539{,}625\,0 = 3\,044{,}682\,9$$
$$P_2(2012) = 3{,}709\,4 \cdot 2012^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 2012 + 14\,577\,539{,}625\,0 = 3\,260{,}540\,7$$
$$P_2(2013) = 3{,}709\,4 \cdot 2013^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 2013 + 14\,577\,539{,}625\,0 = 3\,483{,}817\,3$$

$$\begin{aligned}
&E(a,b,c) = \\
&= (3{,}709\,4 \cdot 1989^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 1989 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 210{,}971\,2)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 1990^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 1990 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 233{,}939\,4)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 1991^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 1991 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 208{,}780\,8)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 1992^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 1992 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 293{,}398\,9)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 1993^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 1993 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 426{,}084\,0)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 1994^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 1994 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 498{,}376\,9)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 1995^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 1995 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 665{,}740\,2)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 1996^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 1996 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 754{,}5650\,)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 1997^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 1997 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 859{,}711\,0)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 1998^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 1998 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 914{,}465\,7)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 1999^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 1999 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 973{,}168\,7)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 2000^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 2000 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 1\,241{,}923\,8)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 2001^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 2001 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 1\,385{,}619\,4)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 2002^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 2002 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 1\,325{,}716\,6)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 2003^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 2003 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 1\,440{,}723\,1)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 2004^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 2004 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 1\,749{,}095\,3)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 2005^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 2005 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 1\,829{,}961\,8)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 2006^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 2006 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 2\,104{,}812\,4)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 2007^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 2007 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 2\,391{,}318\,6)^2 + \\
&+ (3{,}709\,4 \cdot 2008^2 - 14\,706{,}922\,1 \cdot 2008 + 14\,577\,539{,}625\,0 - 2\,406{,}500\,0)^2 + \\
&= 99\,933{,}624\,3
\end{aligned}$$

Graf 17: Aproximace dat dovozu



Zdroj: vlastní

4.4 Analýza dat bilance metodou nejmenších čtverců

Vzhledem k povaze dat, považuji za nejvhodnější použít v tomto případě aproximaci polynomem čtvrtého stupně. Jelikož soustava rovnic bude začínat x^8, rozhodla jsem se nahradit hodnoty 1989 - 2008 za 1 - 20, abych se vyhnula zbytečně vysokým hodnotám.

Pro porovnání vhodnosti použitého stupně polynomu uvádím tvar aproximace polynomem třetího stupně $P_3(x) = 0{,}0361x^3 + 0{,}7865x^2 - 27{,}3983x + 55{,}2594$ v tomto případě je $E(a,b,c,d) = 21042{,}8787$, polynom pátého stupně má tvar $P_5(x) = 0{,}0002x^5 - 0{,}0110x^4 + 0{,}7872x^3 - 10{,}8410x^2 + 33{,}2284x - 24{,}4291$ součet kvadratických odchylek je roven $E(a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1) = 15069{,}4380$

Tabulka 5: Pomocné údaje pro výpočet polynomu druhého stupně pro data bilance (obrat uváděn v mld. Kč), 1.část

x	y=bilance	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	xy
1	5,5000	1	1	1	1	1	1	1	5,5000
2	-19,7792	4	8	16	32	64	128	256	-39,5584
3	24,8134	9	27	81	243	729	2 187	6 561	74,4402
4	-45,3089	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536	-181,2356
5	-4,4830	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625	-22,4150
6	-39,4344	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616	-236,6064
7	-99,4695	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801	-696,2865
8	-152,9869	64	512	4 096	32 768	262 144	2 097 152	16 777 216	-1 223,8952
9	-150,4499	81	729	6 561	59 049	531 441	4 782 969	43 046 721	-1 354,0491
10	-80,3450	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000	-803,4500
11	-64,4128	121	1 331	14 641	161 051	1 771 561	19 487 171	214 358 881	-708,5408
12	-120,8249	144	1 728	20 736	248 832	2 985 984	35 831 808	429 981 696	-1 449,8988
13	-116,9856	169	2 197	28 561	371 293	4 826 809	62 748 517	815 730 721	-1 520,8128
14	-70,8223	196	2 744	38 416	537 824	7 529 536	105 413 504	1 475 789 056	-991,5122
15	-69,7931	225	3 375	50 625	759 375	11 390 625	170 859 375	2 562 890 625	-1 046,8965
16	-26,4380	256	4 096	65 536	1 048 576	16 777 216	268 435 456	4 294 967 296	-423,0080
17	38,6240	289	4 913	83 521	1 419 857	24 137 569	410 338 673	6 975 757 441	656,6080
18	39,7610	324	5 832	104 976	1 889 568	34 012 224	612 220 032	11 019 960 576	715,6980
19	87,9153	361	6 859	130 321	2 476 099	47 045 881	893 871 739	16 983 563 041	1 670,3907
20	67,2000	400	8 000	160 000	3 200 000	64 000 000	1 280 000 000	25 600 000 000	1 344,0000
210	-797,7198	2 870	44 100	722 666	12 333 300	216 455 810	3 877 286 700	70 540 730 666	-6 231,5284

Zdroj: vlastní

Tabulka 6: Pomocné údaje pro výpočet polynomu druhého stupně pro data bilance (obrat uváděn v mld. Kč), 2.část

(x^2)y	*(x^3)y*	*(x^4)y*
5,5000	5,5000	5,5000
-79,1168	-158,2336	-316,4672
223,3206	669,9618	2 009,8854
-724,9424	-2 899,7696	-11 599,0784
-112,0750	-560,3750	-2 801,8750
-1 419,6384	-8 517,8304	-51 106,9824
-4 874,0055	-34 118,0385	-238 826,2695
-9 791,1616	-78 329,2928	-626 634,3424
-12 186,4419	-109 677,9771	-987 101,7939
-8 034,5000	-80 345,0000	-803 450,0000
-7 793,9488	-85 733,4368	-943 067,8048
-17 398,7856	-208 785,4272	-2 505 425,1264
-19 770,5664	-257 017,3632	-3 341 225,7216
-13 881,1708	-194 336,3912	-2 720 709,4768
-15 703,4475	-235 551,7125	-3 533 275,6875
-6 768,1280	-108 290,0480	-1 732 640,7680
11 162,3360	189 759,7120	3 225 915,1040
12 882,5640	231 886,1520	4 173 950,7360
31 737,4233	603 011,0427	11 457 209,8113
26 880,0000	537 600,0000	10 752 000,0000
-35 646,7848	158 611,4726	12 112 909,6428

Zdroj: vlastní

soustava rovnic v tomto případě vypadá takto

$$
\begin{array}{rrrrrcr}
70\,540\,730\,666a_5 & +3\,877\,286\,700a_4 & +216\,455\,810a_3 & +12\,333\,300a_2 & +722\,666a_1 & = & 12\,112\,909{,}642\,8 \\
3\,877\,286\,700a_5 & +216\,455\,810a_4 & +12\,333\,300a_3 & +722\,666a_2 & +44\,100a_1 & = & 158\,611{,}472\,6 \\
216\,455\,810a_5 & +12\,333\,300a_4 & +722\,666a_3 & +44\,100a_2 & +2\,870a_1 & = & -35\,646{,}784\,8 \\
12\,333\,300a_5 & +722\,666a_4 & +44\,100a_3 & +2\,870a_2 & +210a_1 & = & -6\,231{,}528\,4 \\
722\,666a_5 & +44\,100a_4 & +2\,870a_3 & +210a_2 & +20a_1 & = & -797{,}719\,8
\end{array}
$$

následně sestavím matici

$$
\begin{pmatrix}
70\,540\,730\,666 & 3\,877\,286\,700 & 216\,455\,810 & 12\,333\,300 & 722666 \\
3\,877\,286\,700 & 216\,455\,810 & 12\,333\,300 & 722\,666 & 44\,100 \\
216\,455\,810 & 12\,333\,300 & 722\,666 & 44\,100 & 2\,870 \\
12\,333\,300 & 722\,666 & 44\,100 & 2\,870 & 210 \\
722\,666 & 44\,100 & 2\,870 & 210 & 20
\end{pmatrix}
$$

a z této matice sestavíme matici inverzní

$$
\begin{pmatrix}
0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,1 & -0{,}000\,3 & 0{,}000\,3 \\
0{,}000\,0 & 0{,}000\,2 & -0{,}002\,3 & 0{,}011\,7 & -0{,}015\,4 \\
0{,}000\,1 & -0{,}002\,3 & 0{,}033\,2 & -0{,}173\,3 & 0{,}237\,6 \\
-0{,}000\,3 & 0{,}011\,7 & 0{,}173\,3 & 0{,}948\,1 & -1{,}399\,4 \\
0{,}000\,3 & -0{,}015\,4 & 0{,}237\,6 & -1{,}399\,4 & 2{,}426\,9
\end{pmatrix}
$$

dopočítám výsledek

$$\begin{pmatrix} 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0001 & -0{,}0003 & 0{,}0003 \\ 0{,}0000 & 0{,}0002 & -0{,}0023 & 0{,}0117 & -0{,}0154 \\ 0{,}0001 & -0{,}0023 & 0{,}0332 & -0{,}1733 & 0{,}2376 \\ -0{,}0003 & 0{,}0117 & 0{,}1733 & 0{,}9481 & -1{,}3994 \\ 0{,}0003 & -0{,}0154 & 0{,}2376 & -1{,}3994 & 2{,}4269 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12\,112\,909{,}6428 \\ 158\,611{,}4726 \\ -35\,646{,}7848 \\ -6\,231{,}5284 \\ -797{,}7198 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}0235 \\ 1{,}0245 \\ -12{,}7848 \\ 39{,}6682 \\ -30{,}4727 \end{pmatrix}$$

výpočtem jsem získala

$a_5 = -0{,}0235,\ a_4 = 1{,}0245,\ a_3 = -12{,}7848,\ a_2 = 39{,}6682,\ a_1 = -30{,}4727$

$P_4(x) = -0{,}0235x^4 + 1{,}0245x^3 - 12{,}7848x^2 + 39{,}6682x^1 - 30{,}4727$

dosazením do aproximačního polynomu, mohu v případě stejného růstu bilance jako v předchozích letech, odhadnout hodnoty pro následující roky 2009 až 2013 (v mld. Kč)

$P_4(21) = -0{,}0235 \cdot 21^4 + 1{,}0245 \cdot 21^3 - 12{,}7848 \cdot 21^2 + 39{,}6682 \cdot 21^1 + 30{,}4727 =$
$= 82{,}0537$

$P_4(22) = -0{,}0235 \cdot 22^4 + 1{,}0245 \cdot 22^3 - 12{,}7848 \cdot 22^2 + 39{,}6682 \cdot 22^1 + 30{,}4727 =$
$= 58{,}2445$

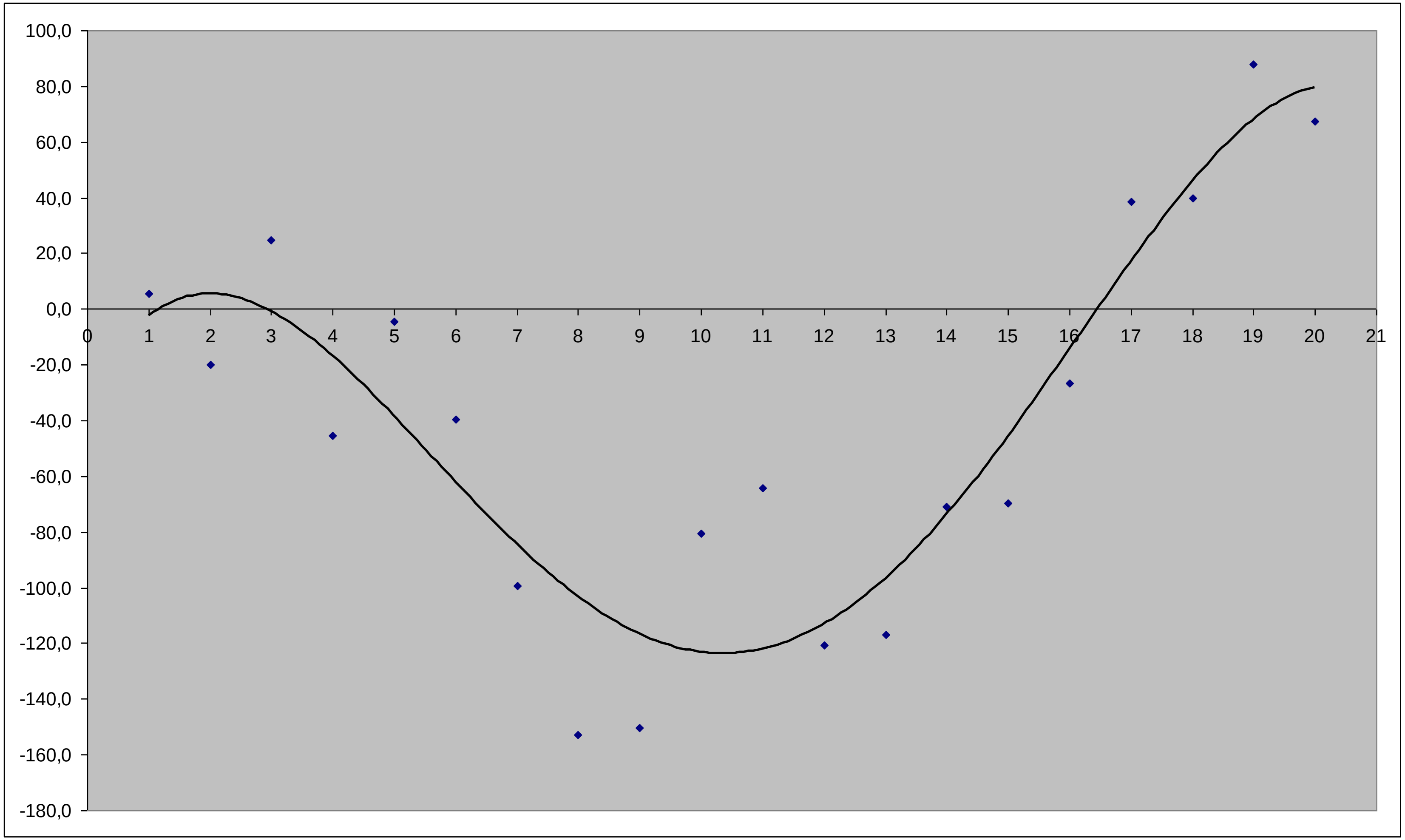
$P_4(23) = -0{,}0235 \cdot 23^4 + 1{,}0245 \cdot 23^3 - 12{,}7848 \cdot 23^2 + 39{,}6682 \cdot 23^1 + 30{,}4727 =$
$= 7{,}5647$

$P_4(24) = -0{,}0235 \cdot 24^4 + 1{,}0245 \cdot 24^3 - 12{,}7848 \cdot 24^2 + 39{,}6682 \cdot 24^1 + 30{,}4727 =$
$= -76{,}5287$

$P_4(25) = -0{,}0235 \cdot 25^4 + 1{,}0245 \cdot 25^3 - 12{,}7848 \cdot 25^2 + 39{,}6682 \cdot 25^1 + 30{,}4727 =$
$= -201{,}1427$

$$
\begin{aligned}
&E(a_5,a_4,a_3,a_2,a_1)= \\
&=(-0,0235\cdot 1^4+1,0245\cdot 1^3-12,7848\cdot 1^2+39,6682\cdot 1^1+30,4727-5,5000)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 2^4+1,0245\cdot 2^3-12,7848\cdot 2^2+39,6682\cdot 2^1+30,4727+19,7792)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 3^4+1,0245\cdot 3^3-12,7848\cdot 3^2+39,6682\cdot 3^1+30,4727-24,8134)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 4^4+1,0245\cdot 4^3-12,7848\cdot 4^2+39,6682\cdot 4^1+30,4727+45,3089)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 5^4+1,0245\cdot 5^3-12,7848\cdot 5^2+39,6682\cdot 5^1+30,4727+4,4830)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 6^4+1,0245\cdot 6^3-12,7848\cdot 6^2+39,6682\cdot 6^1+30,4727+39,4344)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 7^4+1,0245\cdot 7^3-12,7848\cdot 7^2+39,6682\cdot 7^1+30,4727+99,4695)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 8^4+1,0245\cdot 8^3-12,7848\cdot 8^2+39,6682\cdot 8^1+30,4727+152,9869)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 9^4+1,0245\cdot 9^3-12,7848\cdot 9^2+39,6682\cdot 9^1+30,4727+150,4499)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 10^4+1,0245\cdot 10^3-12,7848\cdot 10^2+39,6682\cdot 10^1+30,4727+80,3450)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 11^4+1,0245\cdot 11^3-12,7848\cdot 11^2+39,6682\cdot 11^1+30,4727+64,4128)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 12^4+1,0245\cdot 12^3-12,7848\cdot 12^2+39,6682\cdot 12^1+30,4727+120,8249)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 13^4+1,0245\cdot 13^3-12,7848\cdot 13^2+39,6682\cdot 13^1+30,4727+116,9856)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 14^4+1,0245\cdot 14^3-12,7848\cdot 14^2+39,6682\cdot 14^1+30,4727+70,8223)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 15^4+1,0245\cdot 15^3-12,7848\cdot 15^2+39,6682\cdot 15^1+30,4727+69,7931)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 16^4+1,0245\cdot 16^3-12,7848\cdot 16^2+39,6682\cdot 16^1+30,4727+26,4380)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 17^4+1,0245\cdot 17^3-12,7848\cdot 17^2+39,6682\cdot 17^1+30,4727-38,6240)^2+ \\
&+(0,0235\cdot 18^4+1,0245\cdot 18^3-12,7848\cdot 18^2+39,6682\cdot 18^1+30,4727-39,7610)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 19^4+1,0245\cdot 19^3-12,7848\cdot 19^2+39,6682\cdot 19^1+30,4727-87,9153)^2+ \\
&+(-0,0235\cdot 20^4+1,0245\cdot 20^3-12,7848\cdot 20^2+39,6682\cdot 20^1+30,4727-67,2000)^2= \\
&=15\,085,04810
\end{aligned}
$$

Graf 18: Aproximace dat bilance



Zdroj: vlastní

5 Závěr

Cílem mé bakalářské práce byl popis a teoretické odvození metody nejmenších čtverců. Ve své práci se věnuji odvození metody nejmenších čtverců s výhradním zaměřením na funkce mocninné. Tato metoda byla následně aplikována na ukazatelích zahraničního obchodu, konkrétně na vývozu, dovozu a bilanci. Zdrojem dat pro aplikaci byl Český statistický úřad.

Při odvození metody nejmenších čtverců jsem se postupně věnovala polynomu prvního, druhého až m-tého stupně. Cílem metody nejmenších čtverců je minimalizovat kvadratickou odchylku, tedy vzdálenost bodu od aproximované přímky na druhou, toto minimum se nalezne pomocí parciálních derivací.

V případě polynomu prvního stupně pro jeden a dva body k žádné aproximaci nedochází, neboť aproximovaná přímka prochází danými body přesně. Pro polynom prvního stupně lze aproximační přímku, aby odchylka nebyla nulová, odvodit minimálně pro tři body, které neleží na přímce. Do grafu jsou pro tento případ zakresleny nejmenší čtverce a na základě doplnění souřadnic bodů do aproximační rovnice je dopočítán obsah těchto čtverců. Na závěr jsem odvodila vzorec pro metodu nejmenších čtverců, při aplikaci polynomu prvního stupně.

U polynomu druhého stupně nedochází k aproximaci pro tři a méně bodů, jelikož parabola prochází danými body přesně. K aproximaci dojde v případě čtyř a více bodů, které neleží na parabole. Na základě těchto výpočtů je závěrem odvozen obecný vzorec pro metodu nejmenších čtverců v případě polynomu druhého stupně.

Na závěr kapitoly odvození metody nejmenších čtverců se věnuji polynomu m-tého stupně. Tento polynom v sobě zahrnuje všechny předešlé a slouží k použití polynomu jakéhokoli stupně.

V praktické části aplikuji znalosti a vzorce z předchozí kapitoly na ukazatelích zahraničního obchodu. Přínosem metody nejmenších čtverců je určení funkce, která popisuje trend vývoje ukazatele a na jejímž základě se dá určit odhad jeho budoucího vývoje.

Tato bakalářská práce je pro mě velkým přínosem a umožnila mi využít nejrůznějších teoretických znalostí, získaných během studia, do praxe.

6 Summary

The aim of my bachelor thesis was the description and the theoretical deduction of the method of least squares. In my work I attend to the deduction of least-squares with an exclusive focus on power functions. This method was applied to the indicators of foreign trade, specifically turnover, exports, imports and balance. The source of data for use is the Czech Statistical Office.

The deduction of the method of least squares, I gradually attend to polynomial of the first, the second to the m-th power. The objective of least-squares method assumes that the best-fit curve of a given type is the curve that has the minimal sum of the deviations squared.

In the case of the Least-Squares Line problem to approximate the given set of data, I need at least three points, which are not on the same line, so that deviation is not zero. I sum it up, I deduce a formula for the method of least squares, applying Least-Squares Line.

The Least-Squares Parabola uses a second degree curve for up to three points, in three points case a parabola comes through given points exactly. The approximation occurs when four or more points do not lie on the parabola. A general formula for the Least-Squares Parabola is based on these calculations.

At the end of this chapter the deduction of the Least-Squares *m*-th Degree Polynomials generalized a previous part. This polynomial approximation can be used for any degree of polynomial.

Keywords: least-squares, power function, foreign trade, Least-Squares Line, Least-Squares Parabola, Least-Squares *m*-th Degree Polynomial

7 Seznam tabulek a grafů

<u>Seznam grafů:</u>

<u>Seznam tabulek:</u>

8 Seznam literatury

DLOUHÝ, Zbyněk; HRUŠA, Karel; KŮST, Jiří. *Úvod do matematické analýzy: učebnice pro pedagogické fakulty*. Vyd. 1. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1965. 469 s..

JUDD, Kenneth L. *Numerical methods in economics.* Massachusetts : The MIT, 1998. 633 s.
ISBN 0-262-10071-1.

HOROVÁ, Ivana; ZELINKA, Jiří. *Numerické metody*. Vyd. 2., rozš. Brno : Masarykova univerzita v Brně, 2008. 285 s. ISBN 978-80-210-3317-7 (brož.).

RALSTON, Anthony. *Základy numerické matematiky*. Praha : Academia, 1978. 635 s.

REKTORYS, Karel. et al. *Přehled užité matematiky. II*. 5. nezm. vyd. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1988. 608-1137 s.

VITÁSEK, Emil. *Numerické metody*. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1987. 512 s. Technický průvodce (SNTL - Nakladatelství technické literatury) ; Sv. 67.

Aplikovaná matematika II, M až Ž. Vyd.1. Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1978. 2382 s.

Internetové zdroje:
ČESKÝ STATISTICKÝ ÚŘAD. *ČR od roku 1989 v číslech - zahraniční obchod*. [online]. 2009 [cit.15.března.2009]. Dostupné na WWW:
<http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/cr_od_roku_1989#06>.