

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky



Fraktály
Diplomová práce

Knihovna JU - PF



3 1 1 5 1 7 1 6 9 3

Autor práce: Soňa Korandová
Vedoucí práce: Doc. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.
Konzultanti: RNDr. Helena Binterová
Mgr. Růžena Korandová
Školní rok: 2005/2006

Anotace

Zadání diplomové práce zní matematika a umění. Obsažné téma jsem zúžila na téma fraktály a chaos – zástupce jak matematiky, tak umění.

V úvodu práce se zabývám historickým vývojem a vznikem fraktálů. Uvádím významné představitele. Největším zástupcem je Benoît Mandelbrot, který vytvořil pracovní listy a celý život věnuje studii fraktálů a chaosu. Dal mé práci směr, neméně podnětů.

V dalších kapitolách uvádím dělení fraktálů spolu s obrazovými ukázkami. Nejobsažnější téma tvoří vytvoření Modrých pracovních listů, které byly vytvořeny se záměrem didaktické pomůcky. Listy byly použity v praxi a jejich didaktický význam je zmíněn v závěrečných kapitolách.

Na závěr mé práce uvádím vyhodnocení použití listů v praxi. Zmiňuji i spojení s učebním plánem a možnost zařazení mé práce do Rámcového vzdělávacího plánu.

Annotation

The assignment of my presented diploma thesis is "The Mathematics and the Art". In my particular diploma thesis I have concentrated this very extensive subject to the fundamental topic – the fractals and chaos – which have their connections both to the mathematics and the art.

In the opening part I have concerned with the historical overview, the origin and later progress of fractals. I have mentioned the significant representatives of the subject. The most outstanding representative is *Benoît Mandelbrot*, who has created many practical worksheets and has studied the problems of the fractals and chaos during all his life. In my diploma thesis and work I have been inspired and stimulated with his work.

In the following chapters of my diploma thesis I have presented the division of various kind of the fractals together with the sample illustrations.

The principal part of my diploma thesis was the creation of the "Blue worksheets", which have been developed with the respect of the useful application in didactical practice. The developed worksheets have been utilized in practice and their didactical significance has been studied.

In the conclusion of my diploma thesis I have presented the evaluation of the didactical study. I have also mentioned the connection with the standard tutorials and the possibility of the incorporation of my diploma thesis into the general tutorial.

Obsah

1.	Úvod	1
2.	Zrod „chaotické vědy“	2
2.1.	Pojednání o chaosu	4
2.2.	Jak matematika popsala chaos	9
2.3.	Chaos	10
3.	Fraktály	12
3.1.	Historie zkoumání fraktálů	14
3.2.	Dělení fraktálů	16
3.2.1.	L – systémy	17
3.2.2.	Iterační funkční systémy (IFS)	18
3.2.3.	Polynomické fraktály	24
3.2.4.	Náhodné fraktály	24
4.	Fraktály a učební plán	31
4.1.	Vznik Modrých pracovních listů	32
4.2.	Modré pracovní listy a jejich využití	33
5.	Modré pracovní listy (MPL)	34
5.1.	Hlavní cíle, pojmy a souvislosti	34
5.2.	Návaznost na osnovy (učební plán)	34
5.3.	Významné pojmy	34
5.4.	Matematické pozadí	35
6.	Spojení MPL s učebním plánem	40
7.	Stručný průvodce jednotlivými kapitolami	41
8.	Zhodnocení výsledků použití publikovaných MPL	47
9.	Závěr	50
10.	Seznam použité literatury	52

1. Úvod

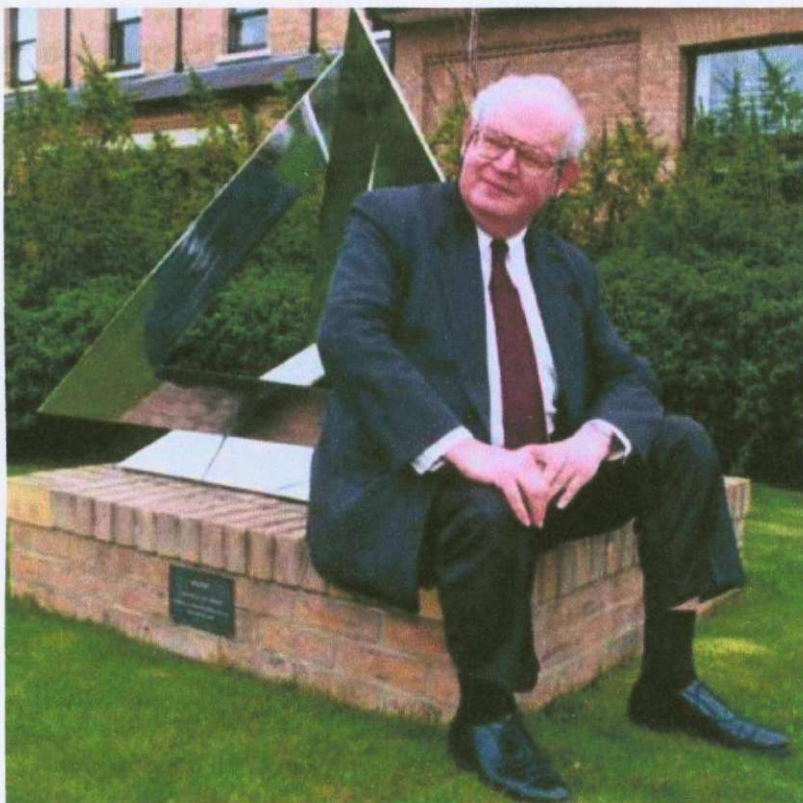
Eukleidovská geometrie, která se učí na školách, je ve své podstatě velice jednoduchá. Učí nás pár vzorečků pro nemnoho objektů či tvarů a je už jedno kolika rozměrných. Každý si dovede představit krychli, kruh, čtverec a případně je i nakreslit a dokonce narýsovat. Staří Řekové, pomocí jí, popsali Platónský svět idejí, statický a vlastnící oněch pár tvarů. Přesto tvrdili, že se tak dá popsat celý svět. Podobné tendence zaznamenáváme za těch 2500 let i v umění (obrazy, hudba – zejména v baroku a klasicismu a to i přesto, že vyjádřit míru determinismu v hudbě je velice těžký úkol a obecným ideálem krásy se většinou stane, maximálně mírně nesymetrický eukleidovský objekt). Podívejte se ale tak 20 cm nad monitor. Co vidíte? To je celkem jedno, ale pokud se díváte třeba z okna skrz záclony, zkuste si je popsat jako soustavu pólů a křivek. Patrně se vám to nikdy nepodaří naprosto přesně. Když totiž budete zjemňovat měřítko, uvidíte další a další podrobnosti (např. otřepy na nitích). Musíte se spokojit s aproximací, která je ovšem ztrátová. Nakonec se ukazuje, že v přírodě je velice těžké na každém kroku nenarazit na fraktální útvar.

K popisu těchto útvarů se používá *fraktální geometrie*, bez níž by některé přírodní úkazy, útvary byly nepochopitelné (např. turbulence). Fraktály mají ovšem širší využití. Predikce (předpověď) počasí je toho nejlepším důkazem. Dále predikce v oblasti, která je přírodě odlišná, tedy v oblasti ekonomiky.

Hlavními úkoly předkládané diplomové práce byly: vytvořit pracovní listy, které obsahují jednoduché i složitější úlohy a pracovní postupy. Na jejich podkladě se seznámíme se Sierpinským trojúhelníkem, Pascalovým trojúhelníkem a dalšími obrazci, které se souhrnně nazývají *fraktály*. Úlohy jsou určeny pro žáky základních a středních škol, neboť na jejich podkladě si sami žáci uvědomí nekonečno, pracují s čísly, procvičí si zlomky, a své vlastní domněnky si mohou ověřit a dokázat. Pracovní listy jsou určeny i pro pedagogy, kteří budou chtít dětem vysvětlit řadu zákonitostí na základě *Eukleidovské geometrie* resp. *fraktální geometrie*. Pro pedagogy, kteří budou chtít v hodinách matematiky použít tvůrčí práci, při které bude dětem nenásilně „vnucena“ probíraná látka.

2. Zrod “chaotické vědy”

Benoît Mandelbrot



se narodil roku 1924 ve Varšavě, ale v roce 1936 se přestěhoval do Paříže a později do Tully. Studoval na École Normale a École Polytechnique, stal se absolventem polytechniky a doktorem matematických věd. Pracoval u IBM, kde se poprvé setkal s fraktály při studiu vývoje cen bavlny a při problému odstraňování šumu při datových přenosech. Cena bavlny byla sice nepředvídatelná, ale stejná posloupnost změn se dala vysledovat v různých měřítkách. Podobný problém odhalil i při sledování poruch na telekomunikačních linkách. První černobílé obrázky Mandelbrotovy množiny nastartovaly novou vědní disciplínu, která se vyvíjí velice chaoticky a bouřlivě. M-set (anglické jméno) budu podrobněji diskutovat dále v textu.

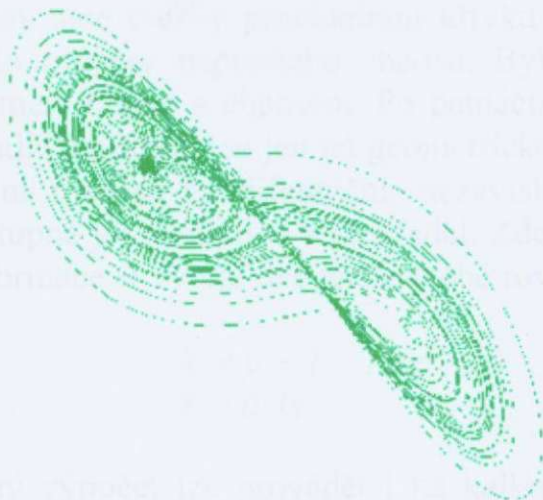
V současné době je členem American Academy of Arts and Sciences, U.S. National Academy of Sciences, norské akademie. Kromě Wolffovy ceny za fyziku v r. 1993 a japonské ceny za rok 2003, obdržel četné doktoráty honoris causa a mnohá vyznamenání, například Barnardovu, Franklinovu, Steinmetrovu

a Richardsonovu medaili, medaili města Paříže, ceny Harvey, Humboldt, Honda, věd a umění, Berggren, Scott a Procter.

K jeho hlavním dílům patří kniha *Fraktály: tvar, náhoda a dimenze* (1975). Nositel Nobelovy ceny za fyziku z roku 1993, slavný belgický matematik, objevitel tzv. "*fraktální geometrie*" (poprvé v roce 1975), autor nespočtu vědeckých prací a mnoha knih, přednášel v Praze v listopadu 1996 jak na konferenci "Nový prostor pro kulturu a společnost – nové ideje ve vědě a umění", tak na matematicko-fyzikální fakultě.

2.1. Pojednání o chaosu

Pod pojmem chaos si většina lidí představí něco naprosto neuspořádaného, neorganizovaného či amorfního. Ovšem není chaos jako chaos. Tento text pojednává o deterministickém chaosu, který vychází z definice – *stav, kdy jednoduchý systém má složité, ale deterministické chování*. Potřebujeme pouze tři nelineární diferenciální rovnice. O tom se již přesvědčil Edward Lorenz, který je znám svým Lorenzovým atraktorem – efekt motýlího křídla.



Obr. 1 Efekt motýlího křídla

Edward Lorenz vytvořil model počasí právě o třech rovnicích. Byl tak nepředvídatelný, že jeho kolegové uzavírali sázky, co udělá příště. Lorenzův objev byl náhodný a vědci zabývající se chaosem museli překonat mnoho obtíží – jejich závěry si odporovaly s tehdejší fyzikální vnímáním světa, naznačovaly omezení snahy člověka ovládnout přírodu. Byl tu ještě jeden problém – pro matematiky byly jejich teorie moc fyzikální a pro fyziky naopak moc abstraktní.

Stepnem Smale, z kalifornské univerzity v Berkley, se zabýval fázovým prostorem. Pokoušel se jej různě ohýbat a z toho vznikla Smaleova podkova: prostor je v jednom místě protažen a ve druhém stlačen. Poté se prostor složí.

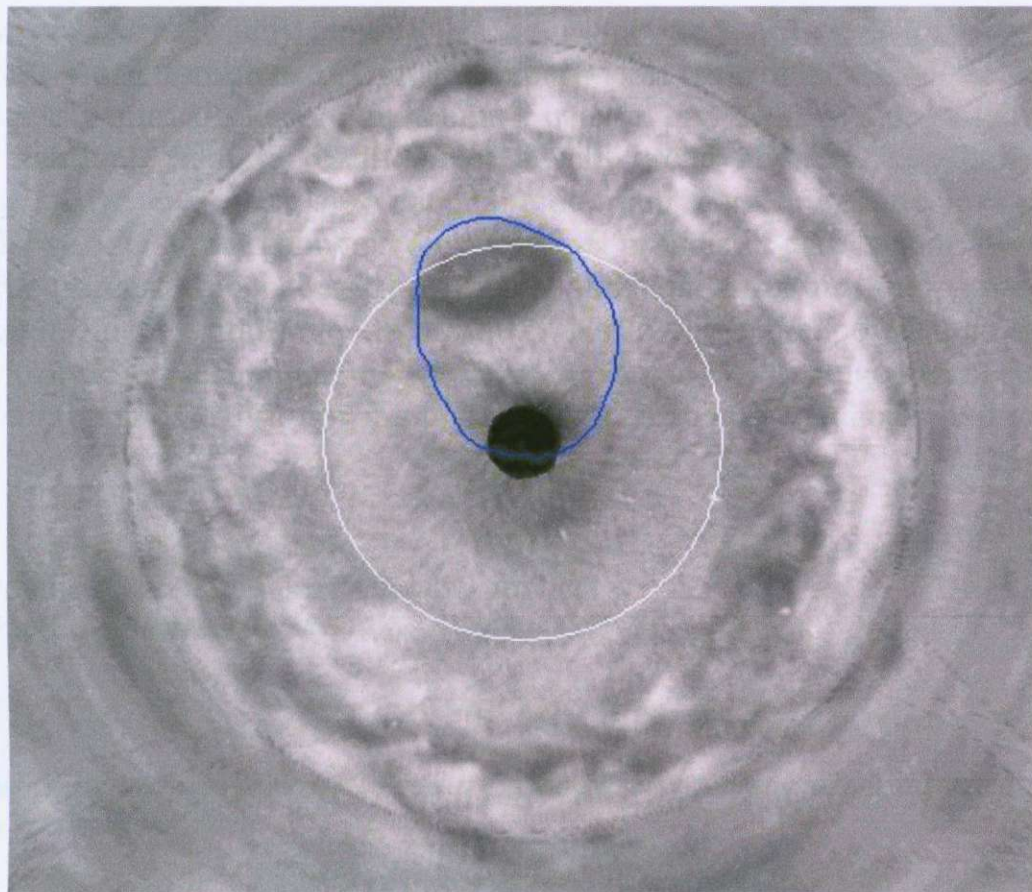
Vznikne útvar podobný podkově. V transformacích pokračujeme a to tak, že „uřežeme“ nohy podkovy a představíme si je jako nový fázový prostor. Přestože je Smaleova podkova příliš matematický objekt a fyzice reálného světa má daleko, přispěl k lepšímu pochopení pohybu. Smale doufal, že takto lze vysvětlit všechny dynamické systémy, tedy jen pomocí smršťování, ohýbání a natahování. Podobný způsob práce s fázovým prostorem si zvolil Hénon. Tento astronom se zabýval modelováním oběžné dráhy hvězd. Místo toho, aby opisovaly úhledné elipsy, získávají jejich oběžné dráhy trojdimenzionální

charakter. Těžko zakreslit na dvojrozměrný papír trojrozměrnou dráhu, a tak Hénon použil podobnou meteoru jako Poincarého vytváření map. Představil si plochou rovinu na jednom konci galaxie tak, aby jí každá oběžná dráha protínala a pak zaznamenal bod, kde k protnutí došlo. Zprvu se body objevovaly jakoby náhodně, ale po vynesení desítek bodů se začínala objevovat vejčitá křivka. Tyto dráhy se sice neuzavírají, ale zdaleka nejsou chaotické a dají se velice dobře předvídat. Kdyby skončili u tohoto, tak by tato pasáž neměla co dělat na tomto místě. Ale se svým diplomantem, Carlem Heilesem, přišli na něco neočekávaného. Když postupně zvyšovali hladinu energie, nejprve se dráhy rozvětvovaly do složitějších smyček. Při dalším zvětšování energetické hladiny, některé body sice tvořily pravidelnou křivku (či se dala odhadnout), jiné se ukázaly jako projevy naprostého chaosu. Byl to unikátní pohled na přechodné stadium mezi řádem a chaosem. Po patnáctileté přestávce se Hénon k problému opět vrátil. Soustředil se jen na geometrickou podstatu věci, a proto vyměnil diferenciální rovnice za diferenční, nezávislé na čase. Na papír si nakreslil ovál a postupně jej natahoval a překládal. Zde máme Smaleův princip podkovy. Pro transformace si vybral dvě jednoduché rovnice:

$$\begin{aligned} X &= y + 1 - 1,4x^2 \\ Y &= 0,3x \end{aligned}$$

Takto jednoduchý výpočet lze provádět i na kalkulačce. Hénon vynesl na grafický displej 5 miliónu bodů a co neviděl: nejprve body naskakovaly jakoby náhodně, ale pak se zdálo, že část křivky má tloušťku. To byl také jen přechodný jev, zde se křivka rozdělila na dvě, čtyři části atd. Tento útvar je znám jako Hénonův atraktor. Můžeme jej stále zvětšovat aniž by se změnila jeho struktura. Jinými slovy, je to fraktál.

Další příklad je také z astronomie. Týká se chlouby Jupitera, jeho velké rudé skvrny. Odedávna lidé vymýšleli teorie, co by to mohlo být.



Obr. 2 Jupiterova Velká tmavá skvrna

Díky sondě Voyager víme, že je to obrovský uragán. Místo toho, aby jeho mise zodpověděla všechny otázky, přinesla spoustu nových. Jak se může udržet pohromadě, když okolo vznikají a zanikají menší víry. Marcus dospěl k závěru, že skvrna je stabilní chaos. Skvrna připomíná další záhadu. Tou je turbulence.

Turbulence je něco jako svatý grál fyziky. Zabývali se jí snad všichni slavní fyzikové a o její nepochopitelnosti svědčí výrok Wernera Heisenberga na smrtelné posteli: "Na Boha budu mít dvě otázky: proč relativita a proč turbulence". Fyzika měla do sedmdesátých let teorii turbulence. Jejím autorem byl ruský fyzik Lev D. Landau. Podle této teorie si můžeme turbulenci představit jako mnoho navzájem nesouhlasných rytmů. Nejprve se má objevit jeden, ale se zvyšující se rychlostí by měly přibývat další. Nikdo ji nedokázal experimentálně potvrdit a také se podle ní nedalo nic spočítat. Přesto s ní fyzikové mlčky souhlasili. V roce 1973 se ji pokusili potvrdit badatelé Swiney a Gollub. Vytvořili zařízení velikosti plechovky na tenisové míčky. Mělo tvar válce, uvnitř kterého se otáčel další válec. Jak postupně zvyšovali rotační energii, objevila se první frekvence. S dalším zvyšováním energie by se měly objevovat další a další rytmy a měly by vytvořit onu složitou turbulenci. Až do té doby byla Landauova teorie platná. Jak dále zvyšovali rychlost, nedokázali rozlišit další frekvence – místo postupně se objevujících frekvencí nastal chaos.

Landauova teorie je tedy chybná. Swiney a Gollub ovšem nedokázali vytvořit správnou teorii turbulence. Odlišný experiment provedl například Libchaber. Ten experimentoval s kapalným heliem a uzavřel ho v jedné nádobě a tu zezdola nírně zahříval. Jakmile rozdíl teplot dosáhl určité hodnoty, kapalina začala proudit. Když dvě pisátka ovládaná teplotními sondami zakreslovala graf, ukázalo se, že čírou náhodou šlo o stejné proudění, jaké svými rovnicemi vyjádřil Lorenz. Libchaber zjistil ještě složitější strukturu než si dokázal představit. Zjistil v grafu mnoho bifurkací. Nešlo vůbec předpovídat, co se stane příště. Copak je všechno tak neuspořádané? Ano, ale když Feigenbaum studoval *bifurkaci* (budu dále diskutovat v textu), vybral si zdánlivě jednoduchou rovnici:

$$X = r \cdot (x - x^2)$$

Tato rovnice je známa jako populační funkce.

Po vytknutí *x*, dostaneme rovnici:

$$X = rx \cdot (1 - x)$$

Parametr *r* představuje rychlost růstu a *x* je počet jedinců vyjádřený jako podíl současného stavu a maximálního stavu.

	<i>r</i> = 2,4 a počáteční <i>x</i> = 0,5
<i>x</i> = <i>rx</i> · (1 - <i>x</i>)	0,6
	0,576
	0,586
	0,582
	0,583
	0,583

Tab. 1

Systém se dostal do rovnováhy. Když, ale parametr inkrementuje, najednou se stane, že systém začne oscilovat.

	<i>r</i> = 3,5 a počáteční <i>x</i> = 0,5
<i>x</i> = <i>rx</i> · (1 - <i>x</i>)	0,875
	0,383
	0,827
	0,501
	0,875
	0,383
	0,827
	0,501

Tab. 2

Systém nám začíná oscilovat.

Tomuto jevu se říká *bifurkace*. Když parametr dále zvyšujeme, dostaneme ne 4, ale 8, pak 16 ... bifurkací. Pro dostatečně velký parametr je graf chaotický – přestože by se perioda měla stále zdvojovat, můžeme v grafu pozorovat i periodu tři ϕ . To už před Fiegenbaumem zjistil May. Fiegenbaum pochopil, že systém skrýval neočekávanou pravidelnost – zdvojení přicházela stále rychleji, ale konstantním zrychlením, vyjádřeným číslem 4,669. To už by sám o sobě mohl být objev, ale Feigenbaum zkoumal ještě rovnici

$$x_{t+1} = r \cdot \sin(x_t)$$

Zdvojení nastávala přesně tím samým zrychlením – složitější a odlišná funkce vykazoval stejnou pravidelnost jako její jednodušší sestra! To nedokázala vysvětlit žádná známá matematická či fyzikální teorie. Do příštího dne získal číslo s lepší přesností – jeho hodnota je přibližně 4,669 201 090. Tento objev vešel do dějin pod názvem *univerzalita*.

2.2. Jak matematika popsala chaos

K dobrému tónu v „intelektuální“ společnosti patří řada myšlenkových klišé. Mezi nejoblíbenější zcela jistě patří zdůraznění faktu, že řečník či dotázaný „nikdy nerozuměl matematice“. Ponechme nyní stranou, proč právě matematice se dostalo této „výsady“: dotyčný by asi stejně bezstarostně neprezentoval, že „nikdy nepochopil, kde je Austrálie“ nebo že „nikdy nerozuměl jazyku českému“, byť poslední fakt by, z úst řady příslušníků mladší generace, zněl velmi věrohodně.

Abychom však byli objektivní, je nutno uznat, že jeden z důvodů zmíněného faktu spočívá mnohdy ve způsobu, jímž je matematika na základních a středních školách prezentována. Ne jako působivý nástroj vidění a popisu světa, ale jako nezáživná sbírka formulek a postupů: ne jako návod ke kritickému myšlení, ale biflování nesrozumitelných pouček. A tak dochází k tomu, že místo toho, aby poznávání matematiky napomáhalo propojení exaktního a humanitního vzdělání, dochází i na „univerzitní“ úrovni leckdy k jejich vzájemnému odcizení. Učitel kreslení či dějepisu pak bohorovně pronáší výše zmíněnou sentenci o matematice a přitom by měl vědět, že obrazu v galerii nemůže porozumět ten, kdo nemá ani ponětí o perspektivě či kompozici a neví, co to je zlatý řez nebo že pro pochopení vývoje lidstva v 17. století je důležitější zvrát v lidském myšlení, který znamenalo například dílo Newtonovo než znalost data, kdy se stal ruským carem Fjodor III.

Toto konstatování je však naprosto symetrické, pokud jde o vzájemné vztahy exaktních a humanitních věd. Matematiku nemůže dobře učit ten, kdo se v životě nezažíval na obraz v galerii nebo alespoň do knihy o výtvarném umění, matematik nemůže správně pochopit Eukleidovy *Základy*, docenit jejich velikost a geniální stavbu, neví-li nic o Aristotelovi a Platonovi a neumí-li se orientovat v epochálním antickém období.

Pokusme se nyní na jednom příkladě z posledních desetiletí dokumentovat, že matematika je v tom nejkrásnějším slova smyslu dobrodružstvím poznávání a že může svými metodami a výsledky zcela zásadně ovlivnit jiné vědní disciplíny neočekávaným způsobem.

2.3. Chaos

V některých oblastech je využití matematiky samozřejmé i pro naprostého laika: máme-li vypočítat objem nějakého tělesa, spočítat úroky v bance či určit dobu, za niž doletí raketa k Měsíci, je zřejmé, že využijeme nějaké matematické vztahy. Několikrát v historii vědy však nastala situace, kdy se matematické zákonitosti projeví v oblastech zcela nečekaných. Zkusme si jen představit, jak překvapující muselo v 17. století být, když se v díle Fermata, Pascala a dalších začala formovat teorie pravděpodobnosti a když se ukázalo, že matematickým zákonitostem je podrobena to, co se již svým pojmenováním zákonitosti vzpírá – a to *náhoda*.

Od středověku bylo v podstatě samozřejmé, že matematika nalézá uplatnění v přírodních vědách, především pak ve fyzice. V posledním století však matematika postupně pronikala i do řady vědních disciplín, kde se její využití dříve zdálo takřka vyloučené – do lingvistiky, hudební teorie, psychologie apod. Přesto však existovaly oblasti, kde se zdálo, že matematické metody jsou nepoužitelné. Jejich společným jmenovatelem byl jediný pojem: *chaos*.

Tam, kde začíná chaos, tam končí klasická věda. Chaos představoval náhodnou, nepředstavitelnou a nepředvídatelnou tvář přírody, vzpírající se kauzalitě a všem známým zákonitostem. Ze školních let si jistě všichni vzpomínáme na *Brownův pohyb*. Mikroskopické částičky se trhavě pohybují v nepředvídatelných kličkách. Jako by v jejich klikatém pohybu byl jistý řád a přesto je pohyb jednotlivých částíček zcela nepředvídatelný.

Uvedme nyní tři příklady navzájem rozdílných chaotických jevů, které na první pohled nemají nic společného. Jak se však posléze ukázalo, právě matematická teorie našla jejich společné rysy a umožnila pochopení alespoň některých zákonitostí.

Typickým příkladem chaotického chování jsou již zmiňované *turbulence*, které představují vážné problémy pro konstruktéry letadel a ponorek, pro lékaře i atomové fyziky.

Pro druhý příklad sáhneme do živočišné říše. Biologové pro zkoumání populačního vývoje pracovali (a pracují) se zjednodušeným modelem známým pod názvem „dravec a kořist“. Je-li dostatek kořisti, dravci se množí a kořisti se začíná nedostávat. Populace dravců klesá, kořist začíná mít příznivější podmínky k množení a přibývá jí, na což dravci reagují zvyšováním svého stavu a tak stále dokola. Tyto procesy popisuje tzv. *logistická rovnice*. Popisy jednotlivých situací se liší různou hodnotou jistého parametru, který v této rovnici vystupuje. Ukázalo se však, že při některých hodnotách tohoto parametru systém spějí k jistému víceméně stabilnímu stavu, při jiných hodnotách hodnoty populace oscilují mezi několika významně odlišnými hodnotami a pro některé hodnoty se systém chová naprosto chaoticky, nepředvídatelně. Důvody tohoto stavu a nějaké zákonitosti těchto jevů se však nedařilo nalézt.

Pro třetí příklad se obraťme k chování počasí. Předpověď počasí se po dlouhá staletí pravděpodobně řídila vypozerovanou analogií. Přestože bylo samozřejmé, že je vývoj počasí podroben stejným fyzikálním zákonitostem jako ostatní přírodní procesy, bylo chování počasí natolik složité a podřízeno tolika faktorům, že teprve zhruba od poloviny dvacátého století se začalo pracovat na modelech jeho vývoje. Že je však tento vývoj deterministický bylo samozřejmé a tak se zdálo, že zlepšování prognóz je jen otázkou dostatečně rychlého zpracování dostatečně přesných vstupních údajů. Jak to psal Pierre Simon de Laplace již v 18. století ve svých úvahách o „nejvyšší inteligenci“ a kauzálním vývoji světa“ *Tato inteligence by stejným způsobem uchopila pohyby největších vesmírných těles, jako i nejlehčích atomů, neboť nic by nebylo ponecháno nejistotě a budoucnost bychom měli přede očima stejně jako minulost.*

Modely vývoje počasí se výrazně vylepšily, počítače nám umožňují v nepředstavitelně krátkém čase vypočítat dříve netušené množství výsledků a přesto se nám mnohdy oprávněně zdá, že s námi příroda přímo laškuje. V matematické teorii, která se v této souvislosti vyvinula a která rozbourala dřívější naivní představy o možném zpřesňování výsledků, které přinese pouhé zpřesňování vstupních údajů, se ustálil termín *efekt motýlího křídla*. Obrazně řečeno: vzletnutí motýla v povodí Amazonky může ve svých důsledcích o týden později způsobit řádění uragánu na Floridě.

3. Fraktály

Úvodem k pochopení fraktálů si nejprve položíme otázku, zda může mít nějaký geometrický útvar stejný tvar, i když jej prohlížíme zblízka. Této vlastnosti se začalo nedávno říkat soběpodobnost. Zdá se to být vlastnost odivná, jenže právě ona se stala semínkem, z něhož rozkvetla celá nová geometrie. Podivná je i při použití na ideální přímku či rovinu, což jsou příklady oběpodobnosti, které zná téměř každý. Kulová plocha naproti tomu oběpodobná není: prohlížíme-li ji zblízka, zdá se být rovinou, z dálky se pak eví – jako každý ohraničený předmět – jako bod.

Před sto lety, v době mezi lety 1875 a 1925, si matematici uvědomili existenci řady kuriozit či monster, útvarů, které se zdály být nové a jimž v přírodě nic neodpovídalo, ba dokonce odporovaly geometrické intuici. Některé z těchto útvarů byly soběpodobné a právě tato vlastnost je dovozovala popsat nejjednodušším způsobem. Mnohem později je Benoît Mandelbrot nazval „fraktály“.

Benoît Mandelbrot se nořil hlouběji a hlouběji do struktury přenosu signálů a uvědomil si analogii se situací, kdy se zabýval ekonomickými aplikacemi a studoval vývoj cen na burze. Ceny střídavě rostly a hlesaly, v každém delším úseku s růstem cen se však vyskytovaly kratší úseky, kdy cena klesala a naopak. Oba tyto případy připomínaly jistou matematickou strukturu známou v čisté matematice, tzv. *Cantorovo diskontinuum*.

Zakladatel teorie množin, německý matematik Georg Cantor, studoval tuto množinu, samozřejmě ze zcela jiných důvodů, na sklonku 19. století. Diskontinuum vznikne tak, že se z úsečky o délce 1 vyjme prostřední třetina. V každé ze zbylých dvou úseček se opět vyjme prostřední třetina atd. Cantorovo diskontinuum je množina bodů, které zůstanou z původní úsečky po provedení nekonečně mnoha popsanych kroků. Tato množina má řadu pozoruhodných vlastností a pro Mandelbrota se stala odrazovým můstkem pro další úvahy.

Zhruba ve stejné době se B. Mandelbrotovi dostal do rukou článek jistého anglického vědce z první poloviny 20. století, Lewise F. Richardsona, který si povšimnul řady nesrovnalostí v různých pramenech o délce vzájemné hranice některých evropských států. Richardsonovy výsledky Benoîta Mandelbrota inspirovaly k úvahám o délce pobřeží Velké Británie. Přes zdánlivou banalitu je v této otázce skryt velký problém: v jistém smyslu je délka tohoto pobřeží nekonečná. Jak ji totiž můžeme měřit? Představme si, že si vezmeme do ruky metrovou tyč a celé pobřeží s ní obejdeme. Naměřená délka je samozřejmě jen aproximací skutečné délky, protože při kladení metrové tyče řadu zákoutí a jiných nepravidelností přehlédneme a zanedbáme. Při měření decimetrovou tyčkou bychom zřejmě přišli k jinému výsledku. A jaký je vlastně tvar tohoto pobřeží? Při pohledu z družice bychom zřejmě viděli něco jiného než při chůzi a ještě jinak by to vše vnímal mravenec, který by pečlivě obkroužil každý oblázek a každou nerovnost. Přesto však něco blíže nespecifikovaného při změně

zůstávají zachovány některé rysy přenosu signálů nebo vývoje cen na burze: analogickou „soběpodobnost“ však lze nalézt ve spoustě jiných příkladů, které si Benoît Mandelbrot začal vybavovat – záznam EKG, historické záznamy o záplavách na Nilu, stavba vesmíru, tvar mraků na obloze aj. Reálný svět je odlišný od světa klasické eukleidovské geometrie, která zkoumá úsečky, přímky, roviny, koule, jehlany a obdobné plochy a tělesa. Mrak však není koule, blesk se nešíří po přímce, hory nejsou kužele – reálný svět je jiný než svět klasické geometrie. Jak však tuto stavbu světa popsat?

Východiskem se Mandelbrotovi stal v matematice dobře známý pojem dimenze. Čtenáři je jistě zřejmé, co rozumíme tím, když říkáme, že přímka má dimenzi 1, rovina dimenzi 2 a prostor, v němž žijeme, má (alespoň doufáme) dimenzi 3. Jaká je však dimenze takových podivných množin, jako je výše zmíněné Cantorovo diskontinuum? Odpověď na tuto otázku nabídl již na počátku 20. století německý matematik Felix Hausdorff, který zavedl pojem dimenze tak, že mohla nabývat i neceločíselných hodnot. Tento Hausdorffův pojem Mandelbrotovi umožnil přesně matematicky popsat řadu podivuhodných struktur, které v průběhu let zkoumal a pro které se vžilo pojmenování *fraktály*.

Fraktální geometrie se v posledních třech desetiletích intenzívně rozvíjela a umožnila popsat řadu struktur, které vzdorovaly klasické matematice. Teorie fraktálů se tak stala jedním z nejvýznamnějších výsledků moderní matematiky konce 20. století. Obrázky uměle vytvořených fraktálů jsou navíc neobyčejně esteticky působivé, a tak se začaly objevovat na obálkách knih, v kalendářích, reklamách a jinde, aniž si vůbec jejich tvůrci a diváci uvědomovali, že se dívají na matematické objekty.

1. Historie zkoumání fraktálů

Fraktálnost je v přírodě téměř pravidlem. Někdy se dotýká podstatného, jindy zabývá jen detaily. Tato odvážná a interdisciplinární teze vyvolává nedůvěru a třeba ji upřesnit a učinit „přirozenou“. Podstatné zde je, že přímka a rovina jsou dokonale hladké. Zpravidla se však věci hodně vzdalují tomuto ideálu: jsou hladké, nýbrž v detailech či v podstatně hrubé.

Pomysleme nyní na soubor zpráv, které dostáváme od našich smyslů. Zprávy o zraku a sluchu, pokládané za velmi jemné, byly nejdříve i nejlépe zkoumány. To je možná způsob, jak říci, že byly (mluveno velmi relativně!) zkoumatelné nejsnadněji.

Na druhém konci zůstával smysl hladkosti či drsnosti vně věd. Náležel světu praktické mechaniky, v němž se inženýři snažili zbavit tření, které se nezdálo být možné zvládnout nějakým obecným pojetím. Otázky kladené drsností byly hloupé, nýbrž nezvládnutelné. Protože nebylo k dispozici nic lepšího, byly odpovědi na tyto otázky vyhýbavé a nepřiměřené. Pomyslete například na takové nevyhnutelné otázky jako:

„Jak změřit pobřeží Bretaně?“

„Jak charakterizovat tvar pobřeží, řeky, povodí či hranici vodní nádrže, ať už v kontextu hydrauliky či dynamických systémů?“

„Jaký tvar má oblak, plamen či svár?“

Na všechny tyto otázky dala první uspokojivé odpovědi fraktální geometrie (pokračující jako geometrie multifraktální). V každém případě se tyto odpovědi zakládají na překvapivém pozorování, že hrubost je často fraktální. V četných případech – ať už jde o přírodní jevy nebo o lidské výtvoř (burza nebo internet) – se fraktální geometrie stává startovací rampou první teorie „jednoduché“ hrubosti. Tato nová geometrie se zrodila z propojení jisté ezoterické matematiky s nejhrubším z našich smyslů. Trvala, stávala se plodnou, prosazovala se a nikdy jí nechyběly problémy k řešení.

Díla Benoîta Mandelbrota nalezla četné čtenáře ze všech oblastí a vyvolala záplavu rozmanitých a poučných dopisů. V dějinách fraktálů zůstává období 1875 – 1925 významnou etapou.

Fraktály jsou tvary, u nichž detail reprodukuje část a část reprodukuje celek. Abychom se o tom přesvědčili, používají se různé postupy, které začínají kreslením hrubých linií nějakého útvaru a pak aplikují generátor vytvářející stále menší detaily. Podstatná je nekončící perspektiva. Zjistíme však, že jde o myšlenku běžné známou teologům. V zenbuddhismu nacházíme téma (obnovené Leibnizem) kapky rosy, v níž je jako v miniatuře obsažena celá replika světa včetně kapek rosy a tak do nekonečna. Tato geologie kapky vody nachází

zvěnu v četných tibetských mandalách s jejich Buddhy všech velikostí a acházíme ji rovněž ve Velké vlně malíře Hokusai.

Změníme – li kontinent i oblast, nalezneme téma generátoru v Cantově esmíru (galaxie seskupené do shluků, super-shluků a tak dále donekonečna), ve avných „fontánových“ kresbách Leonarda da Vinci s jejich na sebe kladenými ýry, v Andělu Gustava Dobrého, uděláno z menších andělů, nemluvě o tváři mrti Salvadora Dalího.

A změníme-li ještě jednou kontinent: umělecké tradice četných afrických árodů – jak jsme se nedávno dozvěděli – oplývají fraktály naplněnými mnými významy.

Přejdu-li k písemným záznamům umělců, co by mohlo být ještě krásnější než lova Eugéna Delacroixe v díle Swedenborg, který ve své teorii přírody tvrdí, že olíce sestávají z mnoha menších plic, játra z menších jater, slezina z menších lezin atd. Větve stromu jsou samy malými úplnými stromy, úlomky skal se odobají skalním masivům, částčky půdy obrovským shlukům půdy. Je řada dalších analogií. Ptačí péro je složeno z milionů per.

Neopeřený dvojnožec se stal člověkem, až když ovládl oheň a vzrušení, až si vyzdobil své tělo, domov i chrám. V průběhu tisíciletí se dekorační motivy zjemňovaly. Některé – stavby, brože a náhrdelníky – napomohly ke zrodu geometrie, která byla modifikována Eukleidem a mnohem později se stala zásadním nástrojem mnohých věd.

2. Dělení fraktálů

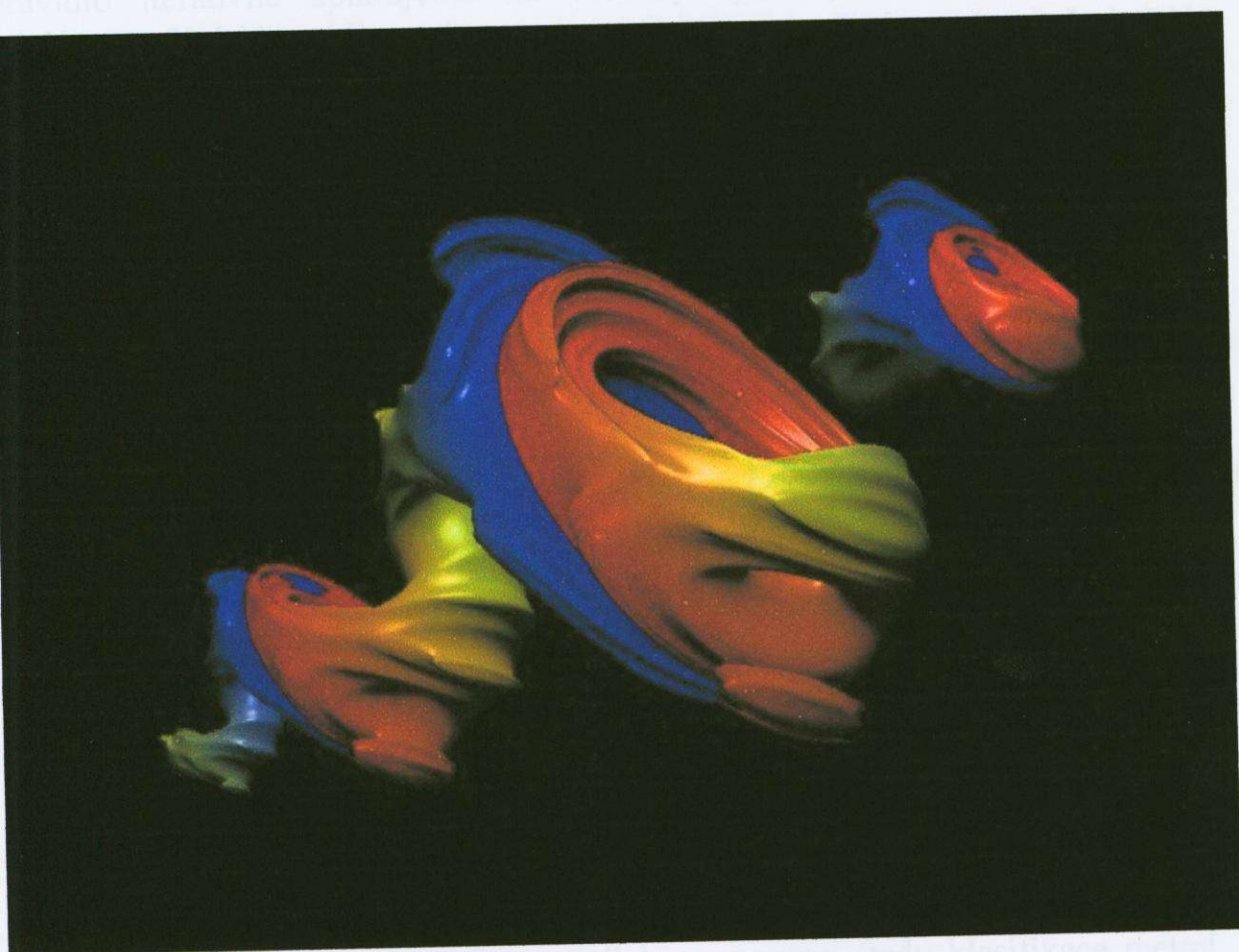
Na základě generování fraktálů rozeznáváme některé jejich typy:

– Systémy

– Iterační funkční systémy (IFS)

– Polynomicke fraktály (TEA)

– Náhodné fraktály

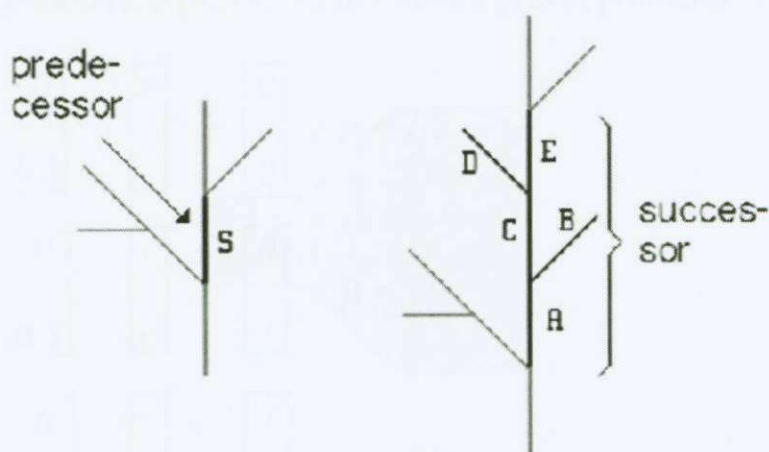


Obr. 3

Ukázka jednoho z mnoha fraktálů, názvem: “Tak toto na ulici nenajdete”!

3.2.1. L - Systémy

L - Systémy byly poprvé použity botanikem Aristidem Lindenmayerem (1968) pro simulaci vývoje mnohobuněčných organismů. Pro L-systémy se někdy používá označení *fraktální křivky*. Pravidla sloužící ke generování fraktálu necht' jsou nazvána parametry. Množina všech parametrů necht' se nazývají abecedou příslušného L - systému. Jednotlivé parametry jsou označeny jedinečným symbolem. Počáteční symbol nebo množina symbolů, který je základem pro generování fraktálních křivek se nazývá axiom (iniciátor). Ten představuje většinou velice jednoduchý nefraktální obrazec, např. trojúhelník, čtverec, přímka, krychle... . A nyní přikročíme ke konstrukci. Pravidlo, které ji popisuje (transformační pravidlo) se nazývá L - pravidlo, či generátor. Toto pravidlo iterativně aplikujeme na všechny symboly, které jsou součástí iniciátoru. Každé stádium konstrukce fraktálu spočívá v přeměně každé předcházející linie v příslušnou kopii generátoru. Pro stádium konstrukce fraktálu před danou transformací se používá název předchůdce (predecessor) a pro stádium po dané transformaci se používá název nástupce (successor).



Obr. 4

Postupem popsaným výše vzniká např. *Kochova křivka*. Samozřejmě, že existuje více druhů L-systémů. Obecná klasifikace L-systémů nebyla dosud zavedena. Pokusy o ní stále vycházejí z konkrétních oborů, kde jsou L-systémy používány. Za nejpřesnější a nejobecnější metodu jejich třídění můžeme považovat rozdělení podle způsobu jejich generování (tedy klasifikace metod k tomu použitých). Nejhlavnější jsou parametrické L-systémy, kontextově senzitivní L-systémy (endogenní L- systémy) a L - systémy environmentálně senzitivní. L-systémy jsou využívány v biologii, geologii a podobných přírodních vědách. Jejich plné využití zatím brání nedostatek údajů přesně popisujících morfologii přírodních objektů.

3.2.2. Iterační funkční systémy (IFS)

Existuje několik metod konstruování. První je stochastická cesta. Máme libovolný počáteční bod a na něj použijeme sadu transformačních pravidel. Jednotlivým pravidlům ovšem přiřadíme určitou pravděpodobnost, tzn. že příslušné pravidlo se vybírá náhodou (stochastickou) cestou. Obecně si vyjádříme jednotlivá transformační pravidla jako funkce $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$.

Každé přiřadíme pravděpodobnost $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

Jejich součet dává 1. Transformace mají afinní povahu tzn.,

$$w \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

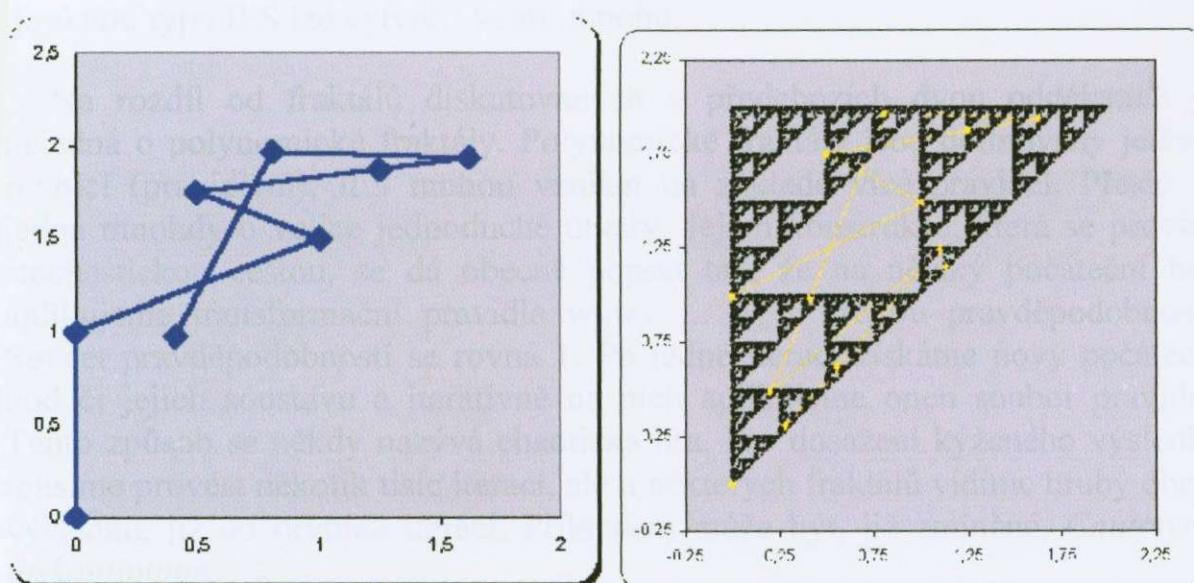
Nový bod se stává opět počátkem pro další transformaci. Výsledek získáme po několika tisících iterací. Tuto chaotickou hru, jak se popsany postup někdy nazývá, si ukážeme na příkladu Sierpinského trojúhelníka. Při jeho vytváření stačí zavést tři jednoduchá pravidla s třetinovou pravděpodobností.

$$w_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; p = 1/3$$

$$w_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; p = 1/3$$

$$w_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; p = 1/3$$

Zde vidíme vývoj několika prvních iterací a po 10 000 iteracích.



Obr. 5

Další způsob je na představení mnohem jednodušší. Jedná se o iterační metodu. Spočívá v tom, že máme nějaký základní obrazec (trojúhelník, čtverec...) a na něj aplikujeme nějaké geometrické pravidlo. Jako příklad vezměme opět Sierpinského trojúhelník. Nejprve tedy máme obecný, nejlépe ale rovnostranný, rovnoramenný nebo pravoúhlý trojúhelník. Nyní označíme středy jeho stran a spojíme je úsečkou (narýsujeme střední příčky). Počáteční trojúhelník je rozdělen na 4 části a my prostřední vyjmeme. Získáme tři trojúhelníky (kopie toho původního) a na ně aplikujeme stejné pravidlo. Po dostatečném počtu iterací (nekonečném) dostaneme fraktální útvar. Metoda je triviální a je názornější, protože už od počátku vidíme obrysy cíle. IFS fraktálů je samozřejmě mnoho, například Hausdorffova dimenze (D_H)

$$D_H = \log(3)/\log(2) = 1,585$$

jako další příklady lze uvést např. Sierpinského kobereček

$$D_H = \log(8)/\log(3) = 1,8928$$

Cantorovo diskontinuum

$$D_H = \log(2)/\log(3) = 0,6309$$

Hilbertova křivka

$$D_H = 2$$

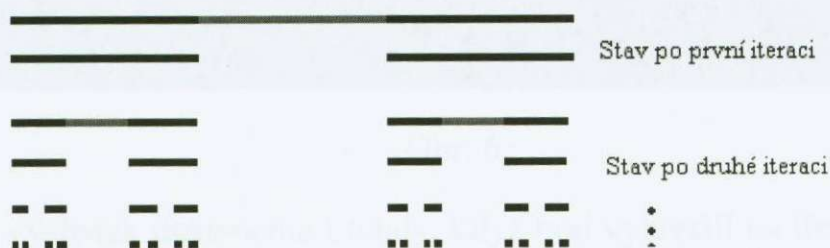
kapradí a spousta dalších.

Fraktálů typu IFS lze vytvořit velmi mnoho.

Na rozdíl od fraktálů diskutovaných v předchozích dvou odděleních se nejedná o polynomicke fraktály. Polynomicke fraktály jsou definovány jednou rovnicí (pravidlem), IFS mohou vznikat na základě více pravidel. Přesto se jedná mnohdy o velice jednoduché útvary. Jejich konstrukce, která se provádí stochastickou cestou, se dá obecně popsat tak, že na nějaký počáteční bod aplikujeme transformační pravidla $w_1, w_2, \dots, w_n$ s určitou pravděpodobností. Součet pravděpodobností se rovná 1. Po jedné iteraci získáme nový počáteční bod či jejich soustavu a iterativně na nich aplikujeme onen soubor pravidel. Tento způsob se někdy nazývá chaotická hra. Pro dosažení kýženého výsledku musíme provést několik tisíc iterací, ale u některých fraktálů vidíme hrubý obrys výsledku, již od prvních iterací. Příkladem může být, již zmíněné, *Cantorovo diskontinuum*.

Cantorovo diskontinuum

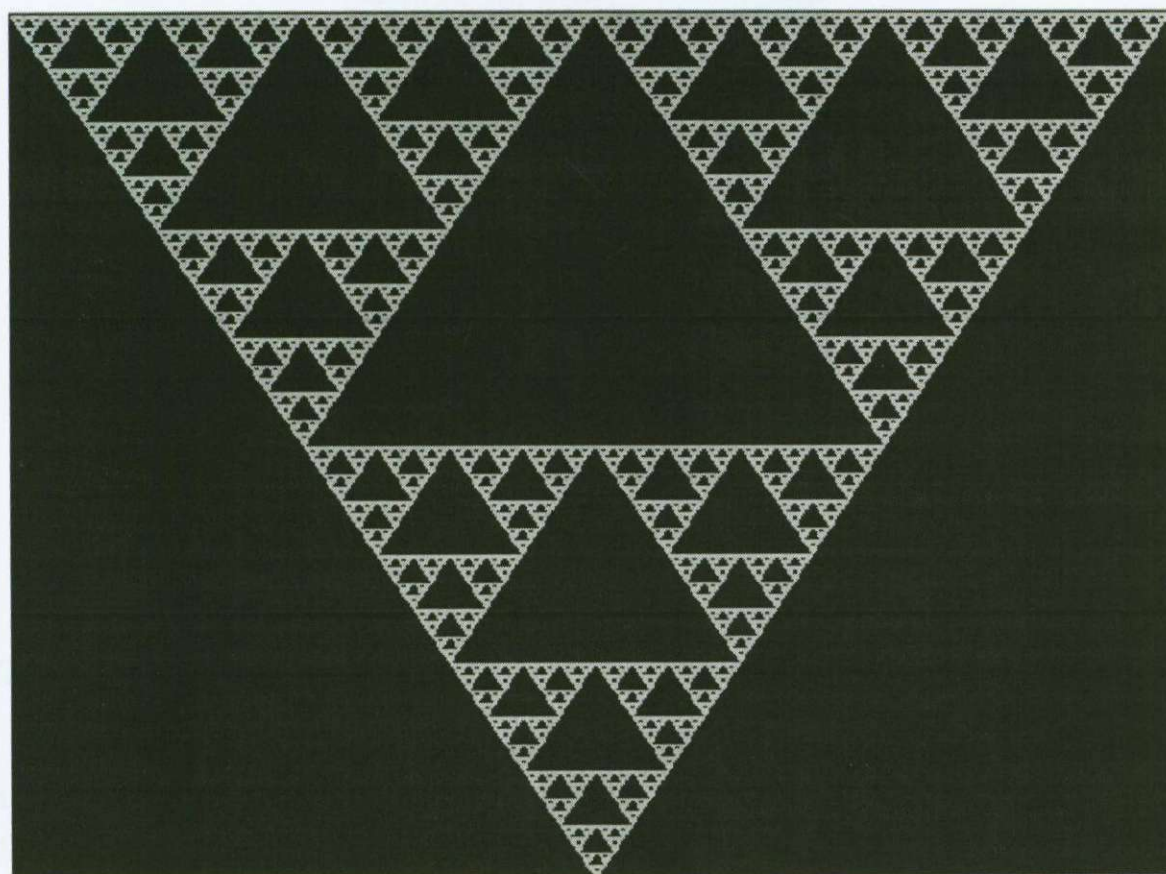
Jedná se patrně o nejjednodušší fraktál vůbec a asi pro vás nebude těžké uhádnout, že je to iterační funkční systém. Vychází z úsečky. Na ni iterativně aplikujeme jen jedno pravidlo - rozdělíme úsečku na tři části a vyjmemme tu prostřední.



Sierpinského trojúhelník

reprezentant IFS fraktálů. Výchozí bod zde představuje trojúhelník (nejlépe rovnostranný či rovnoramenný). Může se vytvářet několika způsoby, nejnázornější je tento: máme tedy trojúhelník a rozdělíme jej na 4 stejné části (podle středních příček). Prostřední části vyjmemme. Toto pravidlo aplikujeme na zbylé 3 trojúhelníky, pak na zbylých 9, 27, 81 (co přijde asi pak?). Výhoda této metody je jak už jsem uvedl v názornosti (už od začátku vidíme stále se zpřesňující torzo výsledku), ale bohužel se nejedná o chaotickou hru. Jak na ní? U trojúhelníku máme pochopitelně tři vrcholy A, B, C a ještě potřebujeme náhodně zvolený bod Z na obvodu trojúhelníku. Od tohoto bodu vedeme pomyslnou úsečku k náhodně zvolenému vrcholu. Úsečku nezakresluje, ale v

jejím středu zakreslíme bod Z. Od něho znovu vedeme úsečku k náhodnému vrcholu a opět zakreslíme jen její střed. Po několika tisících iteracích se nám začne z bodů skládat výsledek:



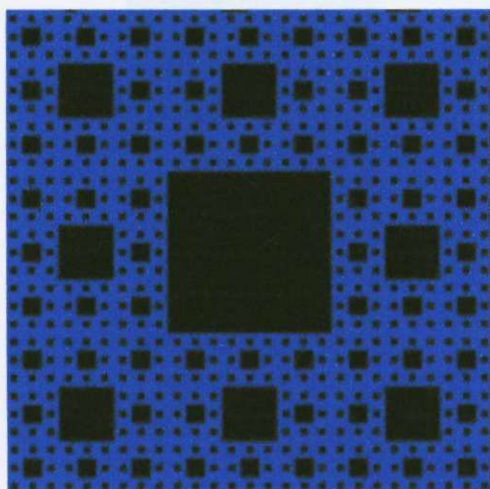
Obr. 6

Podobný výsledek dostaneme i tehdy, když bod vykreslil na třetině, čtvrtině, pětině ... úsečky. Podobný obrázek dostaneme dokonce i tehdy, když vykreslím bod úplně mimo úsečku (ale podle neměnných pravidel)! Počáteční bod nemusí dokonce ležet ani na obvodu trojúhelníka. Podobné experimenty dokazují, že ač je tento postup hrou na chaos, je neobyčejně stabilní. Dále se nabízí možnost aplikovat chaotickou hru na čtverec či n -úhelníky.

Sierpinského kobereček

Sierpinsky se neomezil jenom na trojúhelník, ale experimentoval i s jinými útvary. V tomto případě se čtvercem. Způsob generování tohoto fraktálu je také velice jednoduchý. Jako počáteční bod si zvolíme čtverec. Na každé jeho straně vyznačíme jejich třetiny. Protilehlé body spojíme. Uprostřed původního čtverce tak vznikne nový čtverec - délka jeho strany se rovná třetině délky strany původního čtverce a nachází se uprostřed původní čtvercové plochy. Vyjmeme

jej, zůstane nám tedy 8 těchto třetinových čtverců. Na ty aplikujeme stejné pravidlo.



Obr. 7

$$D_H = \log(8) / \log(3) = 1.8928$$

Kapradí

IFS fraktály se neomezují jen na jednoduché geometrické útvary. IFS fraktál můžete vytvořit prakticky z čeho chcete. Například z kapradí. Konečně se dostáváme k dvěma afinním transformacím. Jsou definovány jako parametrické rovnice:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= ax_i + by_i + e \\ y_{i+1} &= cx_i + dy_i + f \end{aligned}$$

kde parametry a, b, c, d, e, f, p jsou definovány takto:

Parametr	a	b	c	d	e	f	p
	0	0	0	0,16	0	0	328
	0,2	-0,26	0,23	0,22	0	1,6	2621
	-0,15	0,28	0,26	0,24	0	0,44	4915
	0,755	0,04	-0,04	0,85	0	1,6	32767

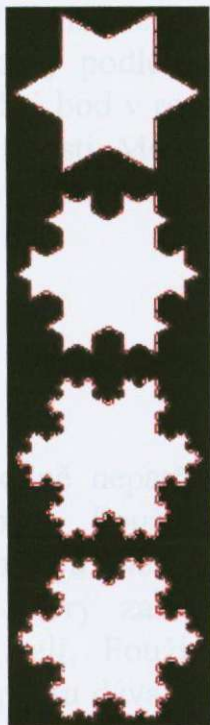
Tab. 3



Obr. 8

Kochova vločka

Další dobře známý fraktál vzniká také pomocí velmi jednoduchých transformací. Počáteční bod tvoří rovnostranný trojúhelník. Doprostřed každé strany přidáme další rovnostranný trojúhelník a tak pořád dokola. Výsledek vidíte na obrázku.



Obr. 9

fraktály jsou velice user-friendly skupinou fraktálů - lehce se generují (samozřejmě existují i složité IFS), dobře vypadají a každý si může vymyslet ten svůj. V tomto textu jsou uvedeny čtyři druhy, ale lepší by bylo říci čtyři třídy fraktálů. Na většinu útvarů lze vymyslet nějakou tu afinní transformaci. Těžko je vytvoříte IFS na základě kruhu. Jediná možnost je iterativně zmenšovat kruh, ale tím fraktál neuděláte. Z kruhu těžko vytvoříte kopie jeho samého. Také většinu fraktálů (např. přírodních objektů) nepůjde použít jako výchozí bod pro IFS. Nejjednodušší IFS vznikají z $n=1$ až nekonečno rozměrných geometrických útvarů.

3.2.3. Polynomické fraktály

Na rozdíl od předešlých dvou typů je nelze většinou použít pro zkoumání přírodních objektů. Často ale vytvářejí fascinující obrazce, a proto jsou nejznámější. vytvářejí se mapováním oblastí přitažlivosti pro různá řešení nelineárního systému. V soustavě souřadnic (často komplexních) testujeme různé hodnoty, které dosazujeme do původní rovnice. Na její výsledek aplikujeme iterativně stejné pravidlo. Pravou stranu dosadíme do levé a tak stále pokračujeme. Z toho vyplývá, že výsledku bychom se dobrali až v nekonečném čase. V praxi se tedy stanoví limitní hranice pro počet iterací. Generování těchto fraktálů tedy není zcela exaktní, závisí na počtu iterací. Čím větší kvalitu požadujeme, tím větší nároky klademe na hardware počítače. Jejich výpočet je časově velmi náročný proces, který podle současných znalostí nejde urychlit. Bez výpočtu nelze zjistit pro žádný bod v rovině (či 3D, 4D, ... nD prostoru) zda patří, či ne do dané oblasti přitažlivosti. Mezi polynomické fraktály řadíme např. Mandelbrotovu množinu, Juliovy množiny a variace na rovnice, které je popisují.

3.2.4. Náhodné fraktály

Mezi náhodné fraktály rozhodně nepatří všechny ostatní. Je to ale velmi rozsáhlá a neuspořádaná skupina. Používá se hlavně pro zobrazování a modelování přírodních objektů a dějů. Některé vznikají velice jednoduše, např. náhodným přesouváním bodu, který zanechává za sebou stopu (Brownův pohyb). Jiné vykreslí hlávku zelí. Používají se tedy zejména pro popis přírodních objektů, neboť do výpočtu dávají prvek náhody. Náhodnými fraktály se budu zabývat jen velice okrajově.

Mandelbrotova množina

dná se o polynomický nelineární deterministický fraktál. Je to patrně i méně známější fraktál vůbec. Objevil jej Benoît Mandelbrot v 70. letech 20. století okusou o nalezení jakéhosi "katalogu" Juliových množin. Vzniká iterativně, definován rovnicí $z = z^2 + c$, kde z i c jsou komplexní čísla. Je to potvrzení toho, že i velice jednoduché systémy mohou vykazovat chaotické chování. V Mandelbrotově množině je c konstanta a zároveň pozice vykreslovaného bodu. Počáteční hodnota z je $[0;0]$ a slouží de facto k uchování hodnoty. Správně by se mělo vyzkoušet všechny body roviny (dosadit je za c), ale pro $|z|$ systém konverguje. Jak to můžeme tvrdit? Použijeme důkaz, který využívá úhelníkové nerovnosti pro komplexní čísla $|a+b| \geq |a|-|b|$, kde za a budeme považovat z^2 a za b konstantu c . Tedy

$$|z^2 + c| = |z^2| - |c|.$$

Nyní je nutné najít minimální hodnotu $|z|$, při jejímž překročení je

$$|z^2 + c| > |z|.$$

Nazvěme tuto hodnotu třeba r . Potom $r^2 - |c| = r$ a když převedeme vše na levou stranu, dostaneme

$$r^2 - r - |c| = 0.$$

Z rovnice vyplývá, že

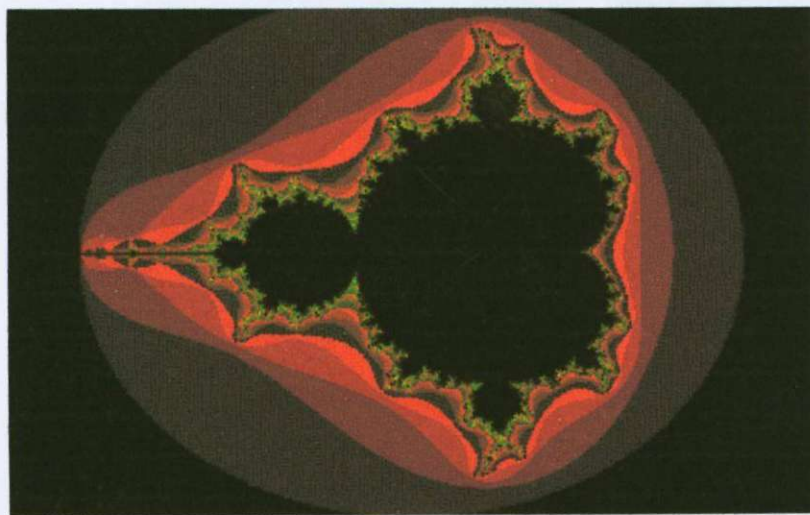
$$r = (1 + (1 + 4|c|)^{1/2}) / 2.$$

Známe tedy hodnotu r . Vzhledem k tomu, že před první iterací $z=0$, tak po ní $z=c$. V předchozích vzorcích můžeme tedy r nahradit $|c|$.

$$|c|^2 - 2|c| = 0 \text{ tzn. } |c| = 2.$$

Nyní můžeme bez obav vypustit z výpočtu všechny body, které nepatří do kružnice o poloměru 2 se středem v bodě $[0,0]$. Pro případ, kdy $|z|$ konverguje k nule, neexistuje žádný důkaz, a proto musíme poctivě vyzkoušet všechny body kruhu o poloměru 2. Všechny body vně a některé uvnitř, které divergují, nepatří do množiny, ostatní ano. Mandelbrotova množina je souměrná podle osy x . Hranice mezi dvěma oblastmi přitažlivosti je nekonečně tenká, ale také nekonečně členitá. Její Hausdorffova dimenze je rovna 2, jedná se tedy o nejčlenitější útvar v ploše o omezeném obsahu. V základní množině nejsou pochopitelně patrné všechny detaily, a proto se provádí zoomování. Mandelbrotovu množinu můžeme zvětšovat donekonečna a stále objevujeme

vé a nové detaily. Jednotlivé body můžeme obarvit podle libovolné palety, a z ze zdánlivě stejného obrázku dostaneme různé variace.



Obr. 10

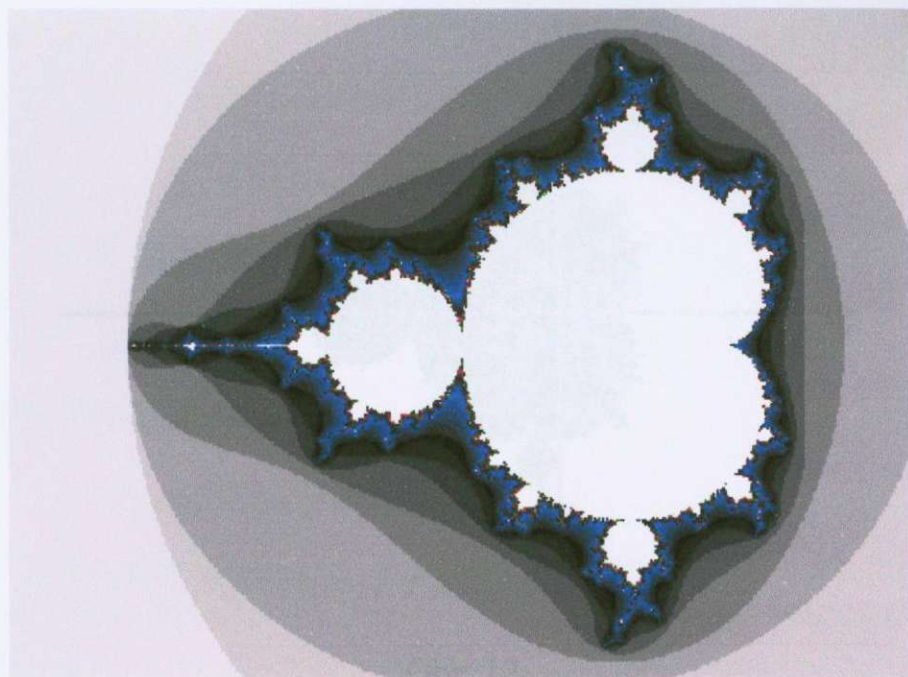
Zajímavé útvary netvoří jen rovnice

$$z = z^2 + c.$$

Známe různé variace dané např. změnou exponentu, či úpravou původního vzorce

$$z = \sin(z^2) + c, \quad z = \cos(z^2) + c$$

Ještě zajímavější fraktály vzniknou, jestliže mocníme z konvexním exponentem. Pak začnou vznikat čtyřrozměrné útvary.



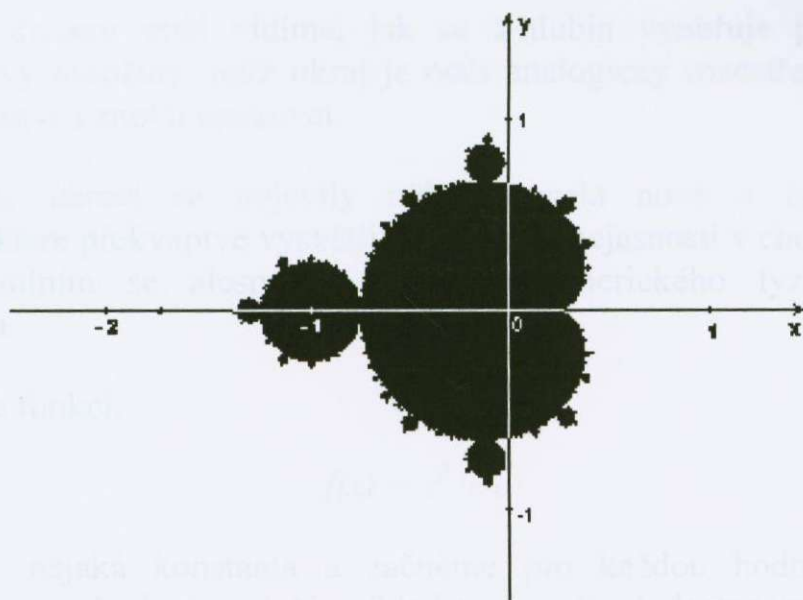
Obr. 11

Uvážíme-li funkci $f(z) = z^2 + c$, kde c je nějaká konstanta a vyjdeme z bodu z_0 , dostaneme pro každé c posloupnost postupně počítaných hodnot. Znáznorníme-li si část roviny na počítači, může se stát, že některé posloupnosti prvních tisíce hodnotách „utečou“ z obrazovky ven (hodnoty se rychle zvětšují), některé posloupnosti zůstanou celé na obrazovce. Takto v každém bodě obrazovky spočítáme prvních tisíc hodnot. Výchozí body posloupností, které z obrazovky utečou, vybarvíme bíle, výchozí body druhého typu černě.

Na obr. 12, vidíme výsledek tohoto procesu, již uváděnou tzv. Mandelbrotovu množinu.

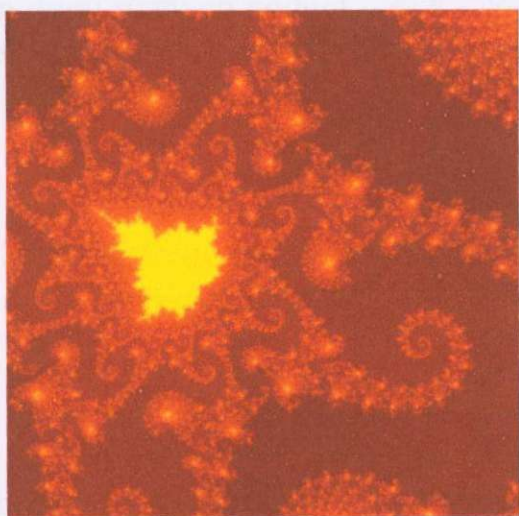


Obr. 12



Obr. 12

Bílá a černá plocha sama o sobě není nijak zajímavá: to podstatné se odehrává na rozhraní černé a bílé barvy. To, co na obr. 12 vypadá jako mírné roztřepení okrajů, se při podrobnějším zkoumání ukazuje jako tajuplný propletenec nejružnějších tvarů, jako podivuhodná fraktálová struktura, jejíž tajuplnosti nejsou dodnes úplně odhaleny. Jen na ukázkou: po nepředstavitelně velkém zvětšení malého kousku tohoto rozhraní obdržíme strukturu znázorněnou na obr. 13.



Obr. 13

V tomto kousku opět vidíme, jak se z hlubin vynořuje původní obraz Mandelbroty množiny, jejíž okraj je opět analogicky rozostřený, takže celý proces lze znovu a znovu opakovat.

Při studiu iterací se objevily některé zcela nové a nepředvídatelné skutečnosti, které překvapivě vysvětlily například nejasnosti v chování zvířecích populací. Zmíním se alespoň o výsledku amerického fyzika Mitchella Feigenbauma.

Uvažujme funkci,

$$f(x) = x^2 + c$$

kde c je nějaká konstanta a začneme pro každou hodnotu c počítat posloupnost s prvním bodem 0. Například pro $c = 1/4$ tak dostaneme posloupnost

$$0, 1/4, 5/16, 86/256, \dots$$

jejíž hodnoty rychle konvergují k číslu $1/2$.

Zmenšujeme-li postupně hodnotu konstanty c , chovají se analogicky vytvořené posloupnosti velmi podobně: funkční hodnoty k jednomu číslu. Při hodnotě

$$c = -13/16$$

však dojde ke kvalitativnímu zvratu, k tzv. *bifurkaci*: hodnoty posloupnosti začnou oscilovat kolem dvou různých hodnot $-3/4$ a $-1/4$. Při dalším zmenšování hodnoty konstanty c se posloupnosti zase chovají analogicky – oscilují mezi dvěma hodnotami. Až při hodnotě

$$c = -1,3$$

dojde k nové bifurkaci, posloupnost začne oscilovat mezi čtyřmi různými hodnotami. Takto se nové bifurkace objevují stále rychleji a rychleji, až při hodnotě

$$c = -1,8$$

dojde k novému kvalitativnímu zvratu – posloupnost se začne chovat zcela chaoticky.

Feigenbaum se pokusil najít nějakou zákonitost v nástupu nových bifurkací. Když vydělil délky dvou po sobě jdoucích úseků bez bifurkací, dostával neustále jedno číslo, přibližně 4,669. Překvapivě totéž číslo hrálo důležitou roli

v úvahách australského biologa Roberta Maye, který studoval problematiku zvířecích populací. Jak to bylo možné? Feigenbaum vyzkoušel hledat bifurkace i u jiných funkcí. A zjistil, že u všech studovaných funkcí, včetně té, která vystupuje v logistické rovnici popisující chování zvířecích populací, se nástup nových bifurkací řídí stejným pravidlem: nastupují tak, že podíl délek jednotlivých intervalů je cca 4,669. Teorie bifurkací pomohla odhalit mnohé zákonitosti, které se původně jevily jako zcela neprůhledné a nevysvětlitelné.

4. Fraktály a učební plán

Žáci na základní škole pojem *fraktál* často neznají a neví, co si mají pod tímto termínem představit. Často se ptají na otázku: „A k čemu vlastně ta matematika je?, Kde se s ní v praktickém životě setkáme?, Bude mi vůbec k něčemu?“ Fraktál nabízí příhodnou odpověď – spojení matematiky a umění.

Při hodině výpočetní techniky jsem učila žáky kopírování souborů a obrázků. Pro názornou ukázkou jsem najela na internetové stránky www.fraktaly.cz, už při zmínce slova „fraktály“ zazněl třídou šum. Navedla jsem je tedy na tyto stránky, přiměla je, aby si vybrali jakýkoliv obrázek a ten jsme pak zkopírovali do programu Microsoft Word. Tato práce je zaujala, ale více než vlastní proces kopírování, je zaujaly obrázky, barvy a neznámé obrazce.

Následnou otázkou mnoha žáků: „Co to vlastně jsou fraktály“, jsem byla mile překvapena a uvedla je do tajů těchto zvláštních obrazců.

Pro zájemce o toto téma jsem vyčlenila dvouhodinovku (ze které se nakonec stala tříhodinová), do které jsme přinesla Modré pracovní listy (viz Příloha) a začali jsme pracovat.

4.1. Vznik Modrých pracovních listů

Mandelbrot vytvořil skripta s názvem *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume One*.

Po přeložení a pochopení této zdařilé práce jsem začala vytvářet Modré pracovní listy, které jsou určené žákům základních škol. Na tyto pracovní listy navazují Červené pracovní listy, které jsou příliš složité, ale jejich užití najde uplatnění na středních školách a v zájmových kroužcích. Poslední pracovní listy jsou teprve ve svých začátcích, jsou více odborné, ale jejich pochopení vede k vytvoření vlastních obrazců a vlastní vědecké činnosti. Tyto poslední listy jsou určeny pro zájemce o toto široké spektrum barev a obrazců, kteří mají pokročilé znalosti matematických zákonitostí. V této diplomové práci jsou předloženy Modré pracovní listy.

Tabulka, která je uvedena v příloze je důkazem propojení jednotlivých matematických disciplín. Studenti zde najdou spojení s procenty, číselnými vzorci, geometrickými vzorci, geometrickou posloupností, Pascalovým trojúhelníkem, podobností, obsahem atd.

Modré pracovní listy nejsou přesnou přeloženou kopií původních listů Mandelbrota. Jeho práce mi byla inspirací a osnovou, ale obávám se, že dnešní studenti by jednotlivé kroky a úkoly nepochopili. Začala jsem tedy pracovat na jejich podrobném „osnování“ a rozvržení. Žáci mají přesně zadané úkoly, řídí se pokyny a pracují krok po kroku, bod po bodu. Jednotlivými body je vedu ke konečnému výsledku, kde použijí vlastní komentáře, do jisté míry i vlastní představivost. Celá práce má však odborný základ a tedy studenty drží v matematických mezích. Na otázky, které jsou jim pokládány, najdou své vlastní řešení, které si mohou i dokázat. Pokud dojde k nepochopení, pracovní listy obsahují sekci „Výsledky, která je navede správným směrem.“

4.2. Modré pracovní listy a jejich využití

Pracovní listy byly předloženy žákům 7. ročníků ZŠ v Jindřichově Hradci. Většina žáků s jejich vypracováním neměla problémy, ale u některých žáků se objevily problémy s nepochopením úkolů a jejich následným vyřešením.

Časová dotace věnovaná tomuto tématu byla 3 hodiny a dovoluji si říci, že i tyto 3 hodiny byly pro mnohé žáky nedostačující. Uvažování nad touto látkou je zaujalo, ale plnou pozornost zaujali pouze první dvě hodiny, třetí hodinu již ztráceli zájem a soustředěnost.

Doporučuji tedy použít, při hodinách matematiky jen vybrané kapitoly, které jsou příjemným doplňkem probírané látky. Velké uplatnění najdou i u žáků, kteří mají rozšířenou výuku matematiky, či navštěvují zájmové matematické kroužky.

Na práci se podílelo 55 žáků 7. ročníků ZŠ v Jindřichově Hradci.

5. Modré pracovní listy (MPL)

5.1. Hlavní cíle, pojmy a souvislosti

Aktivity, obsažené v těchto pracovních listech, ukazují dynamickou souhru mezi číselnými a geometrickými modely. Specifické detaily zavedené v této kapitole vytváří pojem „soběpodobnosti“, anglickým názvem - „self-similarity“. Soběpodobnost, tedy vlastnost, která je vlastní mnoha fraktálům. Některé výsledky se jeví jako by byly vytvářeny úplně náhodnými procedurami (postupy). Tyto náhodné procesy mohou vytvářet překvapivé výsledky ve formě vysoce strukturovaných vzorů poukazujících na estetické aspekty krásy soběpodobnosti.

5.2. Návaznost na osnovy (učební plán)

Materiál, obsažený v těchto strategických aktivitách, tvoří nedílnou součást programu současné matematiky. Tyto aktivity mohou být zahrnuty do samostatné oblasti nebo integrovány do stávajícího učebního plánu (RVP) prostřednictvím oborů kterých se týkají.

Primární souvislosti

Shoda	Podobnost
Poměry	Plocha, obsah
Číselné modely	Pascalův trojúhelník
Geometrický model	Teorie limity

Sekundární souvislosti

Představivost	Modulární aritmetika
Logika a pravdivostní tabulky	

5.3. Významné pojmy

Soběpodobnost

Jestliže částí obrazu obsahují malé reprodukce (přesné kopie) celku, pak se obrázek nazývá *soběpodobný*. Pokud obraz může být rozložen do částí, které jsou přesnými kopiemi celku, pak se obraz nazývá *přesně soběpodobný*. Každá část, přesně soběpodobné struktury, obsahuje přesnou kopii celku.

Pascalův trojúhelník

Pascalův trojúhelník je pole čísel, která jsou všeobecně známa jako koeficienty binomického rozvoje.

Cellular Automata (buněčná schémata)

Cellular automata je systém nebo proces ve kterém je prvek následující úrovně systému odvozen od přímého předchůdce na předešlé úrovni systému podle určitého automaticky formulovaného pravidla.

5.4. Matematické pozadí

Největší obrázky

V určitém smyslu je žalud celek stromu, který z něho roste. Podstatné vlastnosti stromu jsou odvozeny z kódu, který je obsažen v buňkách žaludu. Avšak některé rostliny se vyznačují nezávislostí svých částí ve spíše grafickém smyslu. Například velká větev stromu obsahuje menší větve. Tyto menší větve obsahují větvičky a tyto větvičky obsahují ještě menší části podobného typu. V jednom smyslu je velká větev spíše dobrou kopií celého stromu, právě tak jako větvička je opodstatnělou kopií větve. Tento druh soběpodobnosti části k celku u určitých rostlin naznačuje, že toto „kopírování“ je více než náhodné. Skutečně, typ automatického přenosu buněk z větve na rostoucí větvičky předurčuje, že určitá vlastní struktura je nesena a přeposílána k další generaci větvení. Zkráceně, dub plodí dubové větve s vlastními jedinečnými modely větvení, nikoliv jalovcové větve s jinými modely větvení.

Hlavní myšlenka soběpodobnosti je intuitivní a může tedy být jednoduše pochopena z vhodných geometrických návrhů a přírodních jevů jako je větvení stromu. Avšak přesný rigorózní popis ukazuje blízkou souvislost s teorií limity a požaduje značné matematické znalosti.

Soběpodobnost a její intuitivní přístup k ní

Jeden z přístupů pro pochopení pojmu soběpodobnosti zahrnuje schopnost použít iterativní pravidlo (pravidlo opakování) v geometrickém

uspořádání. Předpokládejme, že začneme s pravidlem, které poskytuje metodu pro opakovatelné rozdělování mnohoúhelníku na vybrané menší a menší podobné mnohoúhelníky. V každé fázi procesu je toto pravidlo aplikováno na každý zbývajících mnohoúhelník. Následné fáze postupně generují menší a menší podobné mnohoúhelníky, tak jak je proces opakován do nekonečna. Náš zájem se soustřeďuje na vlastnosti obrazu, které se objeví také nekonečně mnoha opakování procesu.

Sierpinského trojúhelník

Hlavní vlastnost Sierpinského trojúhelníku je jeho *přesná soběpodobnost*. Kompletní Sierpinského trojúhelník se přirozeně rozkládá do tří trojúhelníkových částí, horního dílu a dvou dolních dílů. Každá z těchto částí je přesnou kopií celého původního obrazu. Podobně, každá z těchto tří částí může být dále rozložena na tři menší trojúhelníky, které jsou opět přesnými kopiemi původního trojúhelníku. Pokud má obraz tuto vlastnost tzv. replikace (podobnosti) části k celku, říkáme, že obraz je soběpodobný. Protože každá část Sierpinského trojúhelníku má tuto vlastnost, je také přesně soběpodobný.

„Přihrádková“ soběpodobnost

Abychom dali, vlastnosti soběpodobnosti, pracovní smysl, musíme se omezit na práci s konečnými přiblíženími limitního obrazu. Toho je docíleno metodou, kterou budeme nazývat „*přihrádková*“ *soběpodobnost*, kde měření jsou prováděna na konečných stádiích obrazu s použitím sítí různých velikostí.

Základní myšlenkou je, že v každé konečné fázi vytváření soběpodobného obrazu dosažený bod zkoumaný sítí s jemnějším rozlišením, nedává další odlišnosti v obrazu.

Další pohled na tuto vlastnost, představme si umístění průhledné sítě čtverců nebo bodů nad dané

stadium obrazu. Vystínujeme a spočítáme každý bod, který obsahuje libovolnou část obrazu. Na oddělené síti vystínujeme a spočítáme body, které obsahují libovolnou část vhodně zvětšené části obrazu. Opakujeme proces v následní fázi obrazu. Aby byla konečná verze obrazu soběpodobná, musíme být schopni dosáhnout fáze, kde tyto uvedené dva počty bodů a vystínování, budou shodné bez ohledu na velikost vybrané sítě.

Pascalův trojúhelník

Pascalův trojúhelník je všeobecně znám jako trojúhelníkové pole číselných koeficientů binomického rozvoje, kde exponent roste od 0 do n .

Jednoduchý iterativní algoritmus pro generování čísel v Pascalově trojúhelníku představuje sečíst dvě čísla v řádku nad počítaným číslem. Například číslo 36 zobrazené na obrázku ve spodním řádku je součtem dvou čísel 28 a 8 právě nad počítaným číslem. Bohužel čísla, v dalších řádcích Pascalova trojúhelníku, jsou velmi velká a to činí proces numerické iterace velmi pracný.

Do Pascalova trojúhelníku můžeme zavést barvící proceduru, která nezávisí na velikosti čísel, ale jen na znalosti, které vstupy do schématu jsou liché a které sudé.

Nejprve můžeme zjednodušit zápis označením 0 pro všechny vstupy, které jsou sudé, a 1 pro všechny vstupy, které jsou liché. Generování nových vstupů na následující úrovni vyžaduje pouze znalost, jak se lichá a sudá čísla kombinují při součtu.

$$\text{sudé} + \text{sudé} = \text{sudé}$$

$$\text{sudé} + \text{liché} = \text{liché}$$

$$\text{liché} + \text{sudé} = \text{liché}$$

$$\text{liché} + \text{liché} = \text{sudé}$$

Součet čísel ve smyslu nul a jedniček, který je ukázán výše, je znám jako sčítání „modulo 2“. Barvicí pravidlo se snadno aplikuje. Jednoduše se obarví každá pozice ve schématu bíle, pokud obsahuje 0, a černě, pokud obsahuje 1. Pro rozšíření vzoru na nové pozice v následující řadě je potřeba podívat se na obarvení dvou pozic přímo nad nově obarvovanou pozicí a použít jedno ze 4 pravidel uvedených výše. Zjednodušeně lze říci:

„Jestliže dvě pozice přímo nad nově obarvovanou pozicí jsou obarveny stejně, obarvíme novou pozici bíle. Jestliže tyto dvě pozice jsou obarveny různě, obarvíme novou pozici černě.“

Pokračování obarvovacího vzoru vede k dalšímu překvapení. Neočekávaně, pole černých pozic vytvoří trojúhelník. Postupně jak je přidáváno více a více řádků Pascalova trojúhelníka, Sierpinskiho vzor je patrný více a více ve výsledném obrazu.

Obarvovací zkratka

Vytváření barevného schématu Pascalova trojúhelníka iterativním pravidlem, řadu po řadě pro více úrovní, je velmi nepraktické. Ale použitím adresovacího systému podobného adresování v síti ulic města můžeme okamžitě nalézt, která barva přísluší libovolné dané pozici. Každá pozice ve schématu může být popsána dvojicí souřadnic.

Při použití naznačených souřadných os má vystínovaná buňka souřadnice $(2,5)$.

Nyní můžeme každou souřadnici převést do dvojkové soustavy. Souřadnice $(2,5)$ budou mít ve dvojkové soustavě tvar $(010,101)$. Nyní napíšeme souřadnice označené buňky ve dvojkové soustavě nad sebe. Jestliže nějaký takto vytvořený sloupec obsahuje

dvě jedničky, potom je tato buňka vybarvena bíle. V ostatních případech je tato buňka vybarvena černě. Buňka v příkladu na obrázku je vybarvena černě, protože žádný sloupec vytvořený z příslušných souřadnic ve dvojkové soustavě neobsahuje dvě jedničky.

010

101

Porovnávání souřadnic ve dvojkové soustavě tímto způsobem je ekvivalentní logické operaci „a“, kde obě souřadnice musí mít „pravdivou“ hodnotu, aby měl výsledek také „pravdivou“ hodnotu.

Pravda a pravda je pravda	1 a 1 dává 1
Pravda a nepravda je nepravda	1 a 0 dává 0

Nepravda a pravda je nepravda	0 a 1 dává 0
Nepravda a nepravda je nepravda	0 a 0 dává 0

Na ilustraci Pascalova trojúhelníku jsme viděli, že obarvovací pravidla mohou být vyjádřena také početně (numericky). Další přístup je možno nalézt v aplikacích počítačové grafiky a současných metod numerického modelování. „Cellular automata“ používá obarvovací tabulky, které vizuálně specifikují jak má být buňka na další úrovni obarvena na základě jejích předchůdců na předchozí úrovni. Pracovní listy zahrnují cellular automata obarvovací tabulky, které generují stejné Sierpinského trojúhelníky, které jsme viděli při obarvování Pascalova trojúhelníka.

7. Stručný průvodce jednotlivými kapitolami MPL

1.1 Sierpinského trojúhelník a jeho alternativa

Specifické směry

Principem iterativního algoritmu v odstavci 1.1A je spojování středů stran rovnostranných trojúhelníků a ponechání pouze třech menších rohových trojúhelníků. Proces je opakován na postupně všechny vzniklé trojúhelníky. Geometricky, z jednoho trojúhelníka je takto vytvořeno 3, 9, 27 a potom 81... menších a menších trojúhelníků během prvních 4 fází opakování procesu. Odstavec 1.1B vytváří alternativu Sierpinskému trojúhelníku.

Implicitní zjištění

V každé fázi opakování procesu jsou všechny tvořené menší trojúhelníky shodné. Jak roste počet opakování v iterativním procesu, plochy zbývající z původního obrazu se limitně blíží nule. Každá aktivita má algoritmus který pokud se opakuje do nekonečna vede k deterministickému fraktálu. V aktivitě 1.1A obraz dosahuje Sierpinského trojúhelníka, obzvlášť zajímavý fraktál, který je základem pro všechny aktivity v této kapitole.

Vrcholy trojúhelníků vytvářených v každé fázi těchto aktivit tvoří identifikační body, které zůstávají částí výsledného fraktálu. Je nezbytné vidět tyto iterativní geometrické procesy jako kontinuální pokračování donekonečna a znázornit výsledné obrazy.

1.2 Číselné vzorce

Specifické směry

Použijeme čísla pro kontrolu konstrukce z poslední aktivity a vytvoříme vizuální citění pro geometrické změny při procházení následujícími úrovněmi. V této aktivitě se zaměříme na příslušné číselné změny.

Použijeme kresby pro vytvoření obrazců, které mohou být rozšířeny a zobecněny.

Implicitní zjištění

Srovnáme dvě sady tabulkových vstupů na každém listu do geometrické řady. V pracovním listě 1.2A je počet trojúhelníků opakovaně násoben třemi při procházení jednotlivými úrovněmi. Příslušná geometrická řada má kvocient 3. Protože tento kvocient je větší než 1, je tato geometrická řada divergentní. Na druhou stranu, plocha obrazu je na každé úrovni opakovaně násobena kvocientem $3/4$. Tato geometrická řada obsahu plochy obrazců má tedy kvocient $3/4$, tento kvocient je menší než 1 a n -tý člen tedy konverguje k 0.

Další poznatek obzvláště důležitý pro postup v této celé kapitole je opakované použití iterativního procesu do nekonečna. Nemůžeme získat Sierpinského trojúhelník nebo konečný čtverec, pokud proces zastavíme na určité úrovni. Podobný je rozdíl mezi nekonečnou geometrickou řadou a nějakou její konečnou částí. Jejich součty nejsou nikdy stejné.

Doplňek: dokončete číselnou a obsahovou tabulku trojúhelníku s použitím algoritmu, který používá jenom středový trojúhelník v každé fázi a nepoužívá rohové trojúhelníky.

V tomto případě je geometrický a algebraický přístup názorně sjednocen.

1.3 „čtvercový“ koberec

Specifické směry

Tato aktivita vytváří variaci Sierpinského trojúhelníku. Čtvercová síť bodů vytváří geometrický obraz založený na čtvercích. V každé fázi procesu je použito jen osm čtverců po obvodu pro následující fázi procesu. Iterativní proces začíná s jedním čtvercem a následně je vytvořeno 8, 64, a poté 512 menších a menších čtverců.

Implicitní zjištění

V každé fázi této aktivity jsou nově vytvořené čtverce shodné. Jak se zvyšuje počet kroků iterativního procesu plocha zbývající z původního obrázku limitně klesá k 0.

Podobně v jako pracovním listě 1.1 vede tento algoritmus, který je opakován do nekonečna, k deterministickému fraktálu.

Doplňek:

1. Myšlenkově rozšíříme iterativní proces na čtvercový koberec a zamyslíme se nad podstatou výsledného tvaru v následující fázi procesu, fází 4, a počtem děr, které bude obsahovat výsledný tvar.
2. Prostudujeme číselné schéma vytvořené pro čtvercový koberec, zda iterativní proces bude využívat jen u rohových čtverců v každé následující fázi procesu.

1.4 Sierpinského čtyřstěn

Specifické směry

✓ této aktivitě bude rozvíjena velmi důležitá dovednost třídimenzionální vizualizace. Různí lidé budou na původním obrázku v pracovním listě 1.4 vidět různé věci.

Musíme si být jisti, že přesně počítáme body potřebné pro nakreslení středových segmentů v následující fázi obrázku. Je nutno viditelně spojovat tyto středové body. Výsledný obrázek je vnímám jako pyramida vytvořená z hromady malých čtyřstěnů, 9 čtyřstěnů dole, 2 vrstvy po 3 čtyřstěnech uprostřed, a jeden na vrcholu. Pokud vystínujeme všechny pravé stěny čtyřstěnu jedním odstínem a všechny levé stěny čtyřstěnu odlišným odstínem, bude se výsledný obraz jevit jako přirozený objekt.

Implicitní zjištění

Aktivita zahrnuje porozumění iterativního procesu, který je geometrický.

V každé fázi procesu určitý čtyřstěn je nahrazen čtyřmi menšími, které mají poloviční výšku. Zbývající prostor, osmistěn, není použit v žádné fázi. Vlastní tomuto opakovanému geometrickému procesu je geometrická řada s kvocientem $r = 4$, která počítá čtyřstěny v každé fázi.

$$1 \quad 4 \quad 16 \quad 64 \quad 256 \dots 4^n$$

Tak jak je iterativní proces opakován dále, počet čtyřstěnů se zvětšuje do nekonečna, zatímco prostor, který tyto čtyřstěny zabírají, se limitně blíží k nule. Pouze v limitním případě je vytvořen úplný Sierpinského čtyřstěn. Tento čtyřstěn je doslova plný děr a je třírozměrnou obdobou dvourozměrného Sierpinského trojúhelníku.

Doplňek:

1. Slovně popíšeme tvar a pojmenujeme obraz odstranění v každé fázi iterativního procesu.
2. Zjišťujeme příslušná číselná schémata, jako jsou objemy v po sobě jdoucích fázích. V limitním případě Sierpinského čtyřstěn zabírá 3-rozměrný prostor s nenulovou délkou šířkou a hloubkou, ale s nulovým objemem.

1.5 Stromy

Specifické směry

Zajistíme, aby větve byly kresleny ve správné délce a směru v každé fázi procesu. Pro konstrukci je vhodný papír s trojúhelníkovou sítí bodů. V každé následující fázi se obraz rozšiřuje o 60° doleva a 60° doprava oproti předešlé

ázi. Úhly mezi každým párem segmentů ze společných koncových bodů jsou 20 stupňů.

/šimněme si, že ačkoliv se strom dále rozšiřuje, nikdy se nerozšíří mimo okraj estiúhelníku.

Implicitní zjištění

Kompletní strom, v jeho limitní fázi, má některé velmi zajímavé vlastnosti. Každý segment může být vnímán jako kmen svého vlastního stromu, který je opět omezen do plochy svého malého šestiúhelníku. Podívejte se na tyto následné menší, ale kompletní stromy v uzavřených následných menších šestiúhelnících. Všechny tyto stromy jsou *přesným obrazem* původního stromu. Všechny stromy stejné velikosti na tomto obrázku mají stejný počet větví. Zvolená cesta skrz kompletní strom má také pozoruhodné vizuální vlastnosti. Obzvláště, spirály, které se vždy točí buď ve směru hodinových ručiček nebo proti směru hodinových ručiček mají délky úseku odpovídající geometrickým řadám. Jejich počet také odpovídají geometrickým řadám. U kořene stromu začínají dvě spirály. Z bodu prvního větvení začínají čtyři spirály, z bodů druhého větvení začíná osm spirál, atd.

1.6 a 1.7 Soběpodobnost

Specifické směry

Povšimněte si obálky knihy, na které je obraz ruky držící knihu. Obal knihy na tomto obrázku obsahuje tu stejnou ruku držící tu samou knihu atd. Jak se díváme hlouběji a hlouběji na tuto danou scénu, vždy vidíme další a další obálku knihy, která je přesně stejná jako každá obálka před ní a za ní. Toto je ilustrace vlastnosti *soběpodobnosti*. Podobná situace nastává když držíte zrcadlo, které odráží další zrcadlo a díváte se na scénu, kdy je váš obraz odrážen zpět a dopředu.

Tato soběpodobnost je vlastnost všech fraktálů.

Objevuje se také v přírodě. Malý vrchol stopky kvěťáku nebo brokolice vypadá stejně jako vrchol celé hlavy toho kvěťáku nebo brokolice. Použijte zrcadla nebo brokolici pro ověření vlastnosti soběpodobnosti.

Implicitní zjištění

Tak jako úplný Sierpinského trojúhelník je vytvořen pouze v konečné fázi procesu je také strom kompletní v konečné fázi. To znamená, že každá větev vypadá podobně jako příslušná větší a menší větev při čemž jsou přesnými kopiemi celku pouze ve finální fázi procesu, který je opakován do nekonečna. Protože finální fáze je mnohem jemnější než dovoluje přesné kreslení tužkou,

řesnost požadovaná pro soběpodobnost musí být nakonec představena pouze nyšlenkově. Postupně, jak strom roste při vytváření dalších a dalších vstupních procesů, je jeho výška a šířka omezena v určitých přesných hranicích, celková délka větví je větší a větší.

Doplňk:

Porovnejme geometrickou iteraci růstu stromu s geometrickou řadou. Předpokládejme, že počáteční vertikální kmen stromu ve fázi 0 růstu stromu má délku 4 jednotky.

1. V které fázi procesu bude délka nejmenší větve menší než jedna tisícina jednotky?
2. Jaká je maximální výška stromu, který roste výše popsáním způsobem?

1.8 Přihrádková soběpodobnost

Specifické směry

V pracovním listě 1.8A, vystínujeme podle uvedených instrukcí uvedené obrázky v levém sloupci. Poté uděláme to samé pro střední sloupec obrázku a na konec pro pravý sloupec obrázku. V pracovním listě 1.8B vystínujeme síť ve fázi 1 pro oba obrázky, před tím než budeme pokračovat ve fázi 1, fázi 2, fázi 4, fázi 4....atd. Učiníme to samé v pracovním listě 1.8C a 1.8D.

Implicitní zjištění

Dva testy používající přihrádkové počítání mohou být použity pro ověření, zda obrázek je *přesně soběpodobný*. První test používá stále jemnější síť na následující fázi procesu. Jestliže každá fáze je kopií části následující fáze, potom je přihrádkové počítání, jak je uvedeno v pracovním listě 1.8A. Určuje fázi procesu ve které je velikost dané sítě nedostatečná pro zjištění rozdílů následujících ve spod ležících obrázcích. Toto se objeví nezávisle na zvolené velikosti sítě.

1.9- 1.11 Pascalův trojúhelník a Sierpinského trojúhelník

Specifické směry

Znovu si prohlédněme iterativní proces počítání čísel v Pascalově trojúhelníku. Algoritmus funguje v každé fázi procesu, ale vypočítaná čísla rychle rostou. Potřebujeme pouze vědět, zda dané číslo má být liché nebo sudé, abychom našli vztah mezi Pascalovým a Sierpinského trojúhelníkem. Zdůrazněme obdobu mezi sčítáním sudých a lichých čísel, a sčítání 0 a 1 modulo 2. Přechod od čísel k pozicování se provádí obarvováním. Bílá barva pro 0 (sudá čísla), černá barva pro 1 (lichá čísla).

Prozkoumáme jak rozšířit obarvovací vzorec z řady na řadu bez vztahu na 0 a 1, nebo sudá a lichá čísla. Pokuste se objevit obarvovací pravidlo a použít ho pro rozšíření druhého pole v pracovním listě 1.9B.

íže dvě buňky přesně nad uvažovanou buňkou mají stejnou barvu, pak víme tuto uvažovanou buňku bíle. V opačném případě obarvíme uvažovanou buňku černě.

licitní zjištění

Može Pascalův trojúhelník má geometrický vztah k Sierpinskému úhelníku, lichost a sudost čísel musí mít podobný iterativní vzorec jako omnost nebo nepřítomnost menších podtrojúhelníků Sierpinského trojúhelníku. Tento vzorec může být použit z řady na řadu s použitím jednoduchého obarvovacího pravidla. Proto spojuje pole Pascalova trojúhelníka obarvovací pole „cellular automata“, která je obsažena v následujícím pracovním listě.

úplněk:

Počítejme počet sudých lichých čísel v každé řadě Pascalova trojúhelníku. Předhadněme pravidlo, které vypočítává tyto počty. Pravidlo je následující. Počet lichých čísel v řadě n je vždy mocnina dvou. Exponent této mocniny je stejný jako počet jedniček v zápisu této řady n ve dvojkové soustavě. Například, v řadě jsou čtyři lichá čísla, protože ve dvojkovém zápisu čísla řady 6, který je 110, jsou dvě jedničky. V řadě 13 je osm lichých čísel, protože zápis čísla 13 ve dvojkové soustavě je 1101. Vytvořte graf závislosti počtu lichých čísel na číslu řádku a diskutujte vlastnosti měřítka tohoto grafu.

1.12 Cellular automata

Specifické instrukce

Znovu si prohlédněme vztahy v Pascalově trojúhelníku, kde každé následné číslo se počítá z hodnot dvou čísel přímo nad ním. „Cellular automata“ sleduje podobná pravidla, kde buňky v polích jsou obarvovány podle pravidel na základě obarvení specifických buněk nad nimi.

Barva každé buňky v následující řadě se určí použitím správné obarvovací volby z obarvovací tabulky. Ujistíme se o rozpoznání vztahu mezi úplným obarveným polem a polem z Pascalova trojúhelníka.

Implicitní zjištění

Tyto tabulky odrážejí vlastnosti uvedené dříve. Některé vzorce vytvořené touto metodou se jeví jako náhodné, zatímco jiné mají určitý řád. Proces je závislý i na malých změnách počátečních podmínek.

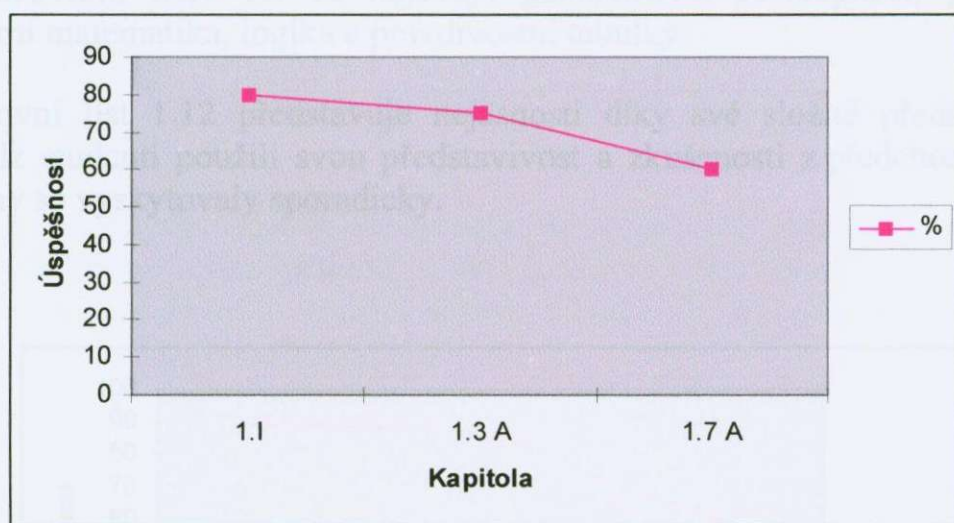
Rozšíření:

Zvolíme si obarvení buňky v počáteční řadě a v pravých a levých koncových buňkách. Vytvoříme si vlastní obarvovací tabulku a budeme sledovat co se stane. Srovnáme výsledky, zjišťujeme a objasňujeme za jakých podmínek jsou obrazce pravidelné a za jakých podmínek náhodné.

8. Zhodnocení výsledků publikovaných MPL

Graf 1 ukazuje procenta úspěšnosti při plnění úkolů v jednotlivých kapitolách. Studenti měli nejmenší problémy s kapitolou 1.1. Zde se nechali vést jednotlivými kroky a na základě nich plnili úkoly.

Přínos: v aktivitách 1.1 a 1.3 A se pracuje s rovnostranným trojúhelníkem, studenti si tedy zopakují pravidla, uvědomí si zákonitosti rovnostranného trojúhelníka a začínají objevovat Sierpinského trojúhelník. V aktivitě 1.7A nenásilnou formou procvičí svou vlastní představivost a podílí se na vytvoření představy geometrického vzorce. Na tuto aktivitu bych chtěla upozornit i z toho důvodu, že se zde studenti přibližují k pojetí limity, uvědomí si nekonečno.



Graf 1

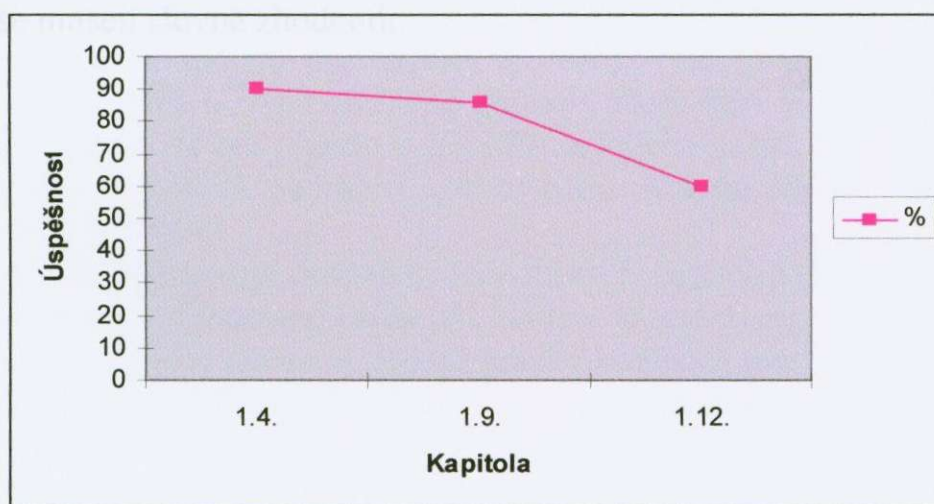
Graf 2 znázorňuje úlohy, se kterými měli studenti největší problémy, často nedošlo k jejich úplnému vyřešení, kterému předcházelo nepochopení daného úkolu.

Přínos: Pracovní list 1.4 A činil žákům velké problémy, podle mého uvážení je to do jisté míry chyba tvůrce, tedy má. Úlohy jsou složité na představivost, která je u žáků méně rozvinutá, ale pokud se jim nastínilo a pomohlo představit jednotlivé čtyřstěny, práce jim šla o poznání lépe. Na základě tohoto poznání jsem udělala korekci původních pracovních listů a nastínila jim podrobněji jak mají postupovat a pomohla jim v jejich představivosti. Problémy zde nastaly i díky rychlému přesunu z dvojrozměrné dimenze do třírozměrné, tedy do prostoru. Též si zde uvědomili Sierpinského trojúhelník z jiného pohledu a uvědomili si pojetí limity.

Pracovní list 1.9 činil opět velké problémy. Podle mého úsudku je příčinou tím odborný název Pascalův trojúhelník, který je pro studenty, do této doby, neznámý a tak hledají nepřiměřené složitosti. Pokud se oprostili od tohoto odborného termínu, úlohy jim nečinily problémy. Naopak, práce s čísly algoritmicky seřazenými do trojúhelníku, učinila tuto aktivitu zajímavější a pro většinu žáků představovaly tyto úkoly HRU. Vzala jsem si ponaučení, ale oficiální verzi pracovních listů nebudu měnit a tyto odborné termíny ponechám. Studenti si buď tento pojem uchovají a v budoucnu osvěží, nebo ho rezignovaně zapomenou. Jakým překvapením ale bylo, když zjistili spojitost Pascalova trojúhelníku se Sierpinským trojúhelníkem. Toto objevené spojení pro ně znamenalo nadšení a optimismus do další práce.

V pracovním listě 1.9 se objevuje geometrická posloupnost, představa, modulární matematika, logika a pravdivostní tabulky.

Pracovní list 1.12 představuje nejasnosti díky své složité představě, ale poněvadž studenti použili svou představivost a zkušenosti z předchozích listů, problémy se vyskytovaly sporadicky.



Graf 2

ecné přínosy všech kapitol:

Za největší přínos považují samostatnou tvůrčí práci, která nenásilnou formou procvičuje probíranou látku a seznámí studenty s novými pojmy.

Každou kapitolou prostupují geometrické vzorce, které studenti objeví sami. Učí se použít daný algoritmus ve změněných podmínkách, učí se hledat souvislosti, klást si otázky a hledat na ně odpovědi.

V kapitolách 1.2, 1.3, 1.5 tvoří studenti číselné vzorce, přichází na daný algoritmus. Setkávají se s pojetím limity a uvědomují si nekonečno. Jejich práce jim pomůže k představivosti a nadhledu.

4. Pracují se zlomky, především v pracovním listě 1.5. Nejen, že se naučí tvořit zlomek pomocí části celku a celku, ale naučí se s nimi i pracovat. „Strom“ jim pomůže k představě a bude jejich vlastní korekcí. Opět se setkáme s pojetím limity.
5. Studenti sami objevují své chyby. Jakmile dojde k chybnému vybarvení pole, obrázek ztrácí svou podobu a nemá žádnou souvislost se Sierpinským trojúhelníkem. Jakmile studenti tuto chybu odhalili, pracovali na její nápravě, ale vše museli slovně zhodnotit.

9. Závěr

Podle stanoveného zadání diplomové práce byly vypracované jednotlivé úkoly, které jako celek směřovaly ke komplexnímu využití spojení matematiky a umění při výuce matematiky, pomocí fraktálů.

Nejprve jsem v kapitole 2 popsala zrod „chaotické vědy“, uvedla významného představitele Benoîta Mandelbrota a zmínila přínos jeho vědecké práce.

V kapitole 3 jsem se zabývala samotnými fraktály, jejich významem a vznikem. K úplnější názornosti a představivosti jsem uvedla rozdělení fraktálů a ke každé kategorii uvedla obrazovou ukázkou. Obrazový materiál jsem čerpala z uvedené literatury. Inspirací mi byly i internetové odkazy s fraktálovými strukturami.

Na tuto kapitolu jsem navázala kapitolou 4 s názvem Fraktály a učební plán. Pro vlastní spojení matematiky a fraktálové umění jsem nejdříve musela hledat inspiraci v pracovních listech vydané, již zmiňovaným autorem, B. Mandelbrotem s názvem *Fractals for the Classroom*. Tyto listy jsou vydané pouze v anglickém jazyce, tedy jsem je musela přeložit a poté zpracovat. Zpracovat, znamenalo zpřístupnit tyto listy žákům na základních školách a dalším zájemcům o toto téma. Materiál se stal i didaktickou pomůckou pro plnění učebního plánu, pro názorné řešení jednotlivých úkolů a především se stal názornou ukázkou spojení matematiky a umění. Tyto listy mají název Modré pracovní listy (MPL). V již zmíněné kapitole jsem dále uvedla spojení MPL s učebním plánem. Je zde popsán vznik MPL a jejich využití.

V kapitole 5 uvádím podrobný rozbor MPL. Vlastní Modré pracovní listy jsou uvedeny v Příloze.

Kapitola 6 představuje propojení jednotlivých kapitol MPL a jejich spojení s učebním plánem. Důraz mé práce byl kladen na didaktický přínos. Jednotlivé kapitoly MPL na sebe navazují, ale při práci v hodinách matematiky se dají tyto listy použít samostatně. Je zde kladen důraz na samostatnou tvůrčí práci žáků, která rozvíjí jejich představivost. Žáci si uvědomí a představí nekonečno. Naučí se dokazovat své domněnky a slovně hodnotit svou práci. Při práci je kladen důraz na pečlivé čtení a pochopení jednotlivých úkolů.

V kapitole 7 uvádím podrobný průvodce vlastními kapitolami MPL.

MPL byly použity v praxi na základní škole. Obrazová příloha uvádí fotografickou dokumentaci žáků při práci s těmito listy. V kapitole 8 jsem vyhodnotila výsledky práce žáků a především poukázala na význam publikovaných MPL.

Závěrem mohu konstatovat, že byl splněn úkol zadání diplomové práce. Spojení matematiky a umění přináší didaktice matematiky pomoc při řešení jednotlivých didaktických problémů.

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala mému školiteli Doc. RNDr. Pavlu Tlustému CSc., RNDr. Heleně Binterové a Mgr. Jiřímu Vodáčkovi za všestrannou pomoc a podporu při řešení úkolů diplomové práce, za věnovaný čas a příjemnou společnost při řešení jednotlivých částí dílčích úkolů předložené diplomové práce. Dále bych ráda poděkovala Mgr. Růženě Korandové za cenné konzultace a pomoc při předložení Modrých pracovních listů na 3. a 2. ZŠ v Jindřichově Hradci a v neposlední řadě opět Doc. RNDr. Pavlu Tlustému za pomoc při řešení technické stránky této práce.

10. Seznam použité literatury

1. Mandelbrot, B.: **Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume One**, New York, 1991.
2. Mandelbrot, B.: **Fraktály – Tvar, náhoda a dimenze**, Mladá fronta, Praha, 2003.
3. Beneš, B., Felkel P., Sochor J. and Žára J.: **Vizualizace**, Skripta ČVUT, Praha, 1997.
4. Ewing, J. H., Schober, G.: **The area of the Mandelbrot Set Numer. Math.**, 1992.
5. Sobota, B. a kol.: **Grafické formáty Kopp**, České Budějovice, 1996.
6. Gleick, J.: **Chaos Ando Publishing**, Brno, 1996.
7. Barrallo, J.: **"Fractal Geometry"**, Anaya Multimedia, Madrid, 1992.
8. Peitgen, H.-O., Richter, P. H.: **"The Beauty of Fractals"**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1986.
9. Weisstein, E. W.: **"Self-Similarity"**.
10. Žára, J. Beneš B. Felkel P.: **Moderní počítačová grafika** Computer Press, 1998.
11. Žára, J. a kol.: **Počítačová grafika principy a algoritmy** Grada, Praha, 1992.

Modré pracovní listy

Soňa Korandová

1.1 A PRACOVNÍ LIST

SIERPINSKÉHO TROJÚHELNÍK A JEHO VARIACE

Konstrukce:

1. Na obr.1 je dán rovnostranný trojúhelník v pravidelné síti bodů. Středů stran u tohoto trojúhelníku jsou spojeny úsečkami.
2. Kolik nových rovnostranných trojúhelníků jsme tímto postupem získali?

3. Obsahuje každý, nově vzniklý trojúhelník, stejný počet vnitřních bodů? Pokud ano, spočítej je a zapiš.

4. Prostřední trojúhelník vybarvi modře, dále s ním nepracuj.
5. Konstrukční postup (spoj středy stran) použij i u třech nově vzniklých rohových rovnostranných trojúhelníků.
6. Kolik nových rovnostranných trojúhelníků jsi nyní získal?

7. Kolik vnitřních bodů obsahuje každý nově vzniklý rovnostranný trojúhelník?

8. Vybarvi modře prostřední rovnostranné trojúhelníky, opět s nimi dále nepracuj.
9. U nevybarvených rovnostranných trojúhelníků opět spoj středy stran.
10. Kolik nových rovnostranných trojúhelníků jsi tímto procesem získal?

11. Kolik vnitřních bodů má každý nově vzniklý rovnostranný trojúhelník?

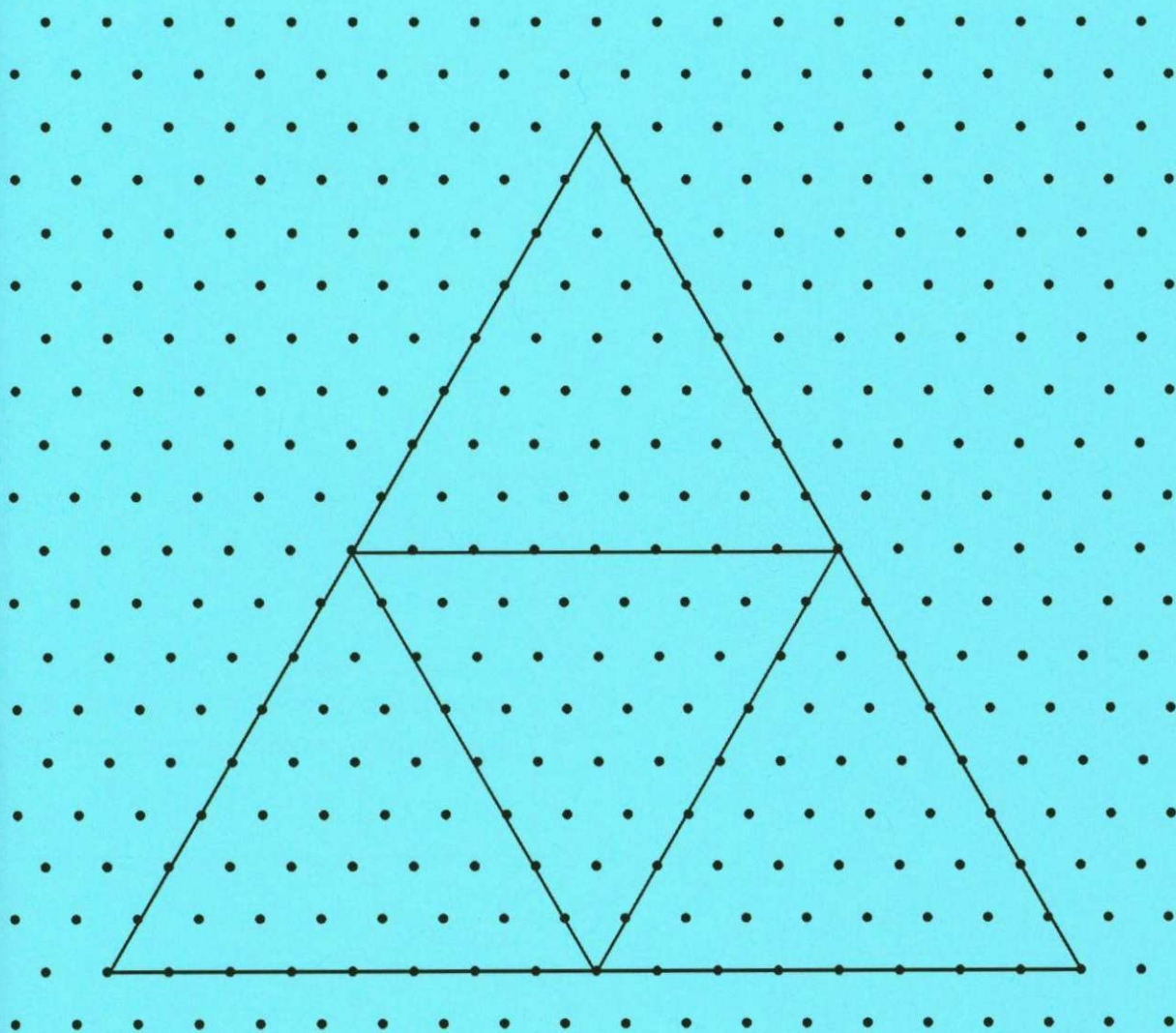
12. Vybarvi modře nově vzniklé prostřední trojúhelníky.

13. U bílých trojúhelníků použij opět proces, kdy spojíš středy stran.

14. Kolik rovnostranných trojúhelníků ti nyní vzniklo?

15. Kolik bodů obsahuje každý nově vzniklý trojúhelník?

16. Vybarvi modře prostřední nově vzniklé trojúhelníky.



Obr. 1

Úkoly:

1. Postup budeme opakovat do nekonečna, popište jak se změní obrázek?

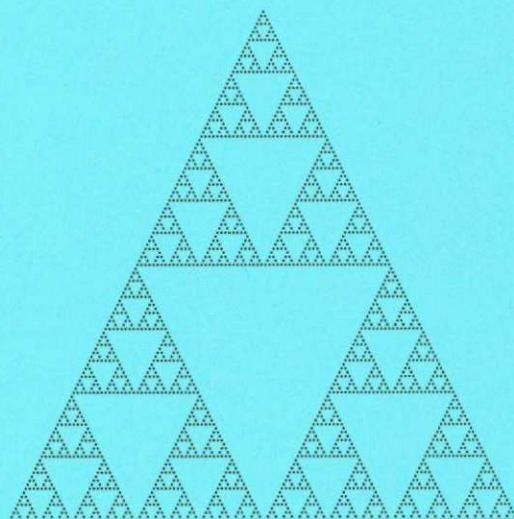
.....
.....

2. Co zbude z původního velkého trojúhelníku po čtvrtém opakování postupu, jestliže je postup změněn tak, že místo rohových tří trojúhelníků budeme naopak zanechávat vždy prostřední trojúhelník?

Tedy naopak, modře vždy vybarvíme rohové rovnostranné trojúhelníky.

.....
.....
.....

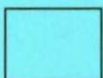
Na obrázku si můžeš prohlédnout příklad Sierpinského trojúhelníku.



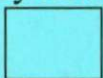
1.1 B PRACOVNÍ LIST TROJÚHELNÍKOVÉ VARIACE

Pokud budeme konstrukci stále opakovat, následné variace konstrukce vytvoří další zajímavé obrazce.

1. Na obr. 2 je dán opět rovnostranný trojúhelník, třetiny jeho stran jsme spojili úsečkami.
2. Kolik rovnostranných trojúhelníků jsme tímto postupem získali?



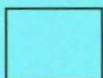
3. Kolik vnitřních bodů obsahuje každý nově vzniklý rovnostranný trojúhelník?



4. Ponechej 6 okrajových trojúhelníků, vnitřní 3 trojúhelníky vybarvi modře.

5. Spoj body ve třetinách stran u 6-ti nově vzniklých trojúhelníků.

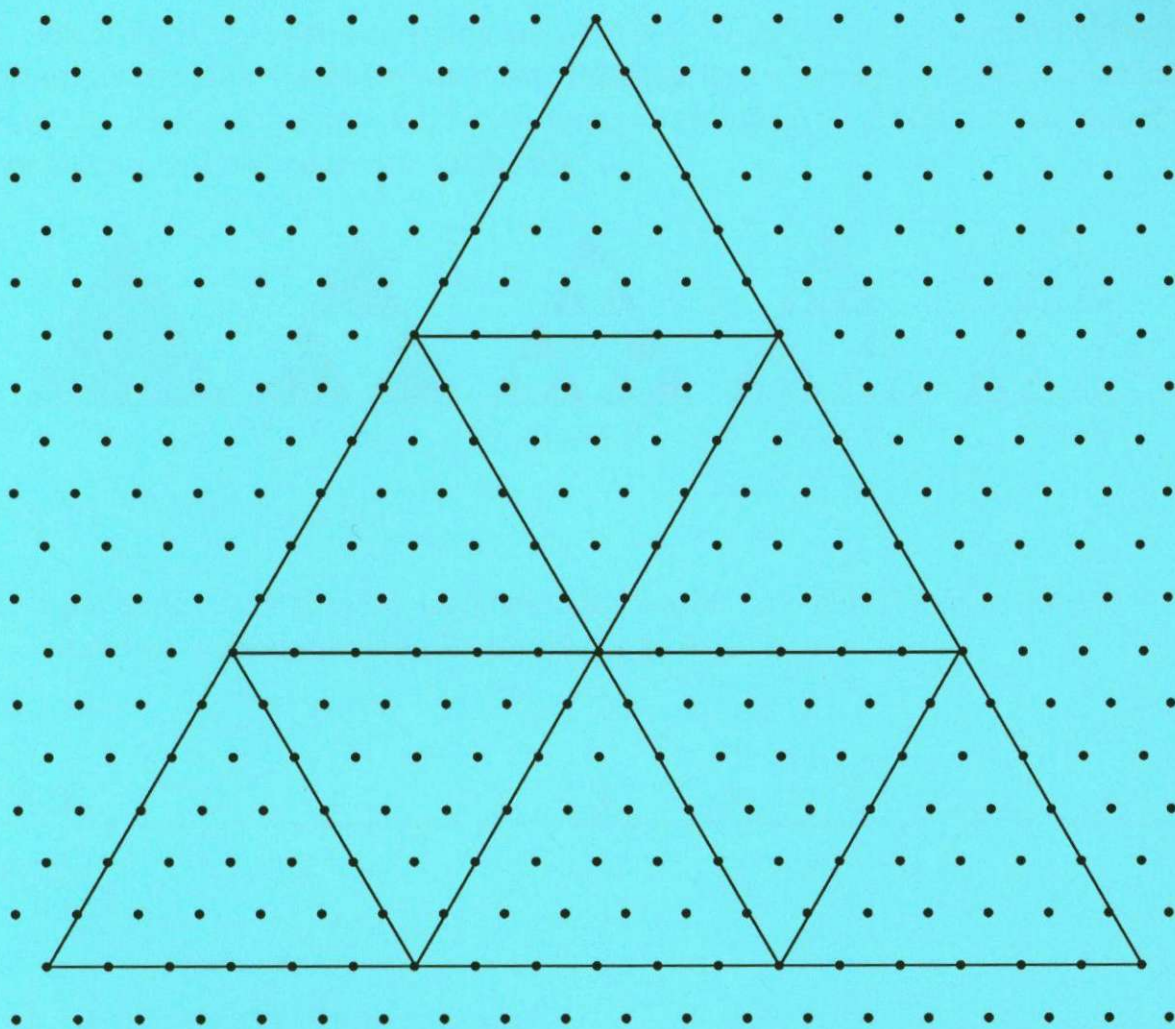
6. Kolik nových rovnostranných trojúhelníků jsi tímto procesem získal?



7. Kolik bodů obsahuje každý nově vzniklý trojúhelník?



8. Opět vybarvi modře, prostřední nově vzniklé rovnostranné trojúhelníky.



Obr. 2

ÚKOLY:

1. Popiš, co můžeš pozorovat, když je postup opakován do nekonečna.
.....
.....
2. Změňte algoritmus tak, že místo 6-ti okrajových trojúhelníků budeme ponechávat vždy tři vnitřní trojúhelníky. Ponechat znamená, že vybarvíme modře okrajové trojúhelníčky. Jaký druh obrázku vznikne po druhém opakování? Vyzkoušej tento algoritmus na novém obrázku a porovnej ho s předešlým trojúhelníkem.
.....
.....
.....

1.2 A PRACOVNÍ LIST

ČÍSELNÉ VZORCE S VARIACEMI

První čtyři fáze jsou ukázány na obrázku. V následujících fázích pokračuje dělení na menší a menší trojúhelníky. Použijte tyto obrázky ke zjištění číselného vzorce, který vznikne, když je tento trojúhelník vytvořen následujícími operacemi, čili následujícím postupem.



POČET TROJÚHELNÍKŮ

1. Spočítejte počet černých trojúhelníků v každé fázi. Fázi 0 máš uvedenou v tabulce, tedy doplň tabulku pro fázi 1 až 4.

FÁZE	0	1	2	3	4	5		n
POČET	1							

2. Pokus se doplnit tabulku bez kreslení trojúhelníků. Jaký počet je při fázi 5? Zapiš do tabulky. Jaká konstanta násobení musí být použita pro přechod z jedné fáze do následující?

! Pozorně si prohlédni tabulku a jednotlivé hodnoty v ní.

3. Zobecněte vzorec pro nalezení počtu trojúhelníků pro fázi n . Když n roste do nekonečna jaký bude počet trojúhelníků?

PLOCHA TROJÚHELNÍKŮ

4. Necht' plocha trojúhelníku ve fázi 0 je 1. Určete celkovou plochu černých trojúhelníků v jednotlivých fázích jedna až čtyři.

FÁZE	0	1	2	3	4	5		n
PLOCHA	1							

Pomůcka: číslo ve tvaru zlomku nám odpoví na otázku, jaká plocha z celku je černá!

5. Pokus se doplnit tabulku bez kreslení trojúhelníků. Jaká konstanta násobení musí být použita při přechodu z jedné fáze do následující?

Hodnoty zapiš do tabulky a opět si pozorně prohlédni tabulku a hodnoty v ní!



6. Zobecněte vzorec pro nalezení celkové plochy černých trojúhelníků pro fázi n . Když n roste do nekonečna, co se stane s celkovou vybarvenou plochou?

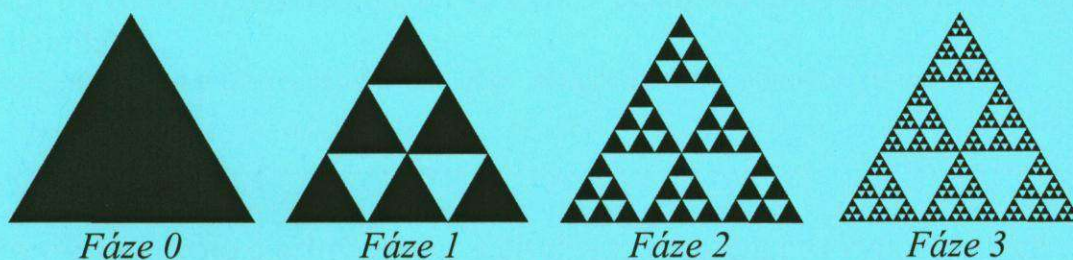
.....

1.2 B PRACOVNÍ LIST

ČÍSELNÉ VZORCE PŘI DĚLENÍ STRAN TROJÚHELNÍKU NA TŘETINY

Jakmile dojde ke změně konstrukce postupu, ovlivní tato změna nejen obrazy, ale také vytvořené vzorce. Vzniknou nám nové „obrázky“.

První tři fáze konstrukce trojúhelníku, používající algoritmus dělení ve třetinách stran, jsou znázorněny na obrázku. V následných fázích jsou vytvářeny menší a menší trojúhelníky. Použijte tyto obrázky pro zjištění číselných vzorců, které vzniknou, když je na obrázky aplikováno nekonečně mnoho dalších opakování.



POČET TROJÚHELNÍKŮ

1. Spočítej počet černých trojúhelníků v každé fázi. Fázi 0 máš uvedenou v tabulce. Doplň tabulku pro fázi 1 až 3.

FÁZE	0	1	2	3	4	5		n
POČET	1							

2. Pokus se doplnit tabulku pro fázi 4 a 5. Jaká konstanta násobení musí být použita pro přechod z jedné fáze do následující?

Když n roste do nekonečna co se stane s počtem černých trojúhelníků?

Hodnoty fáze 4 a fáze 5 zapiš do tabulky. Na další otázky odpověz písemně.

.....

.....

.....

3. Porovnejte tento číselný vzorec se vzorcem pro výpočet počtu černých trojúhelníků. V jakém případě rostou počty trojúhelníků rychleji? Porovnej tedy tyto hodnoty s předešlým pracovním listem, tedy listem 1.2 A.

.....

.....

PLOCHA TROJÚHELNÍKŮ

4. Necht' plocha trojúhelníku ve fázi 0 je rovna 1. Určete celkovou plochu černých trojúhelníků ve fázi 1 až 3.

FÁZE	0	1	2	3	4	5		n
PLOCHA	1							

Zjištěné hodnoty zapiš do připravené tabulky.

5. Pokus se doplnit tabulku pro fázi 4 a 5. Jaká konstanta násobení musí být použita pro přechod z jedné fáze do následující?

Když n roste do nekonečna, co se stane s celkovou plochou černých trojúhelníků?

Hodnoty fáze 4 a fáze 5 zapiš do tabulky. Na další otázky odpověz písemně.

.....

6. Porovnejte tento číselný vzorec s číselným vzorcem pro výpočet ploch černých trojúhelníků z předešlého pracovního listu (1.2A). V jakém případě se plochy zmenšují rychleji?

.....

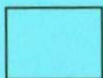
1.3 A PRACOVNÍ LIST

SIERPINSKÉHO ČTVERCOVÝ KOBEREK

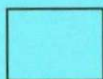
Opakováním této konstrukce do nekonečna je vytvořen obrazec založený na čtverci, který se nazývá čtvercový koberec.

Konstrukce:

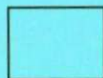
1. Na obr. 3 je dán čtverec v pravidelné síti bodů. Třetiny jeho stran jsme spojili úsečkami.
2. Prostřední čtverec vybarvi modře. Tím jsme tento čtverec jakoby „vyjmuli“.
3. Ponecháme jen 8 okrajových čtverců, u kterých spočítej, kolik každý z těchto čtverců obsahuje vnitřních bodů.



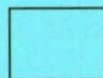
4. Tento postup opakuj dále po druhé...
vyjmi (vybarvi modře) vždy prostřední čtverce,
spočítej u okrajových čtverců, kolik obsahují vnitřních čtverců.

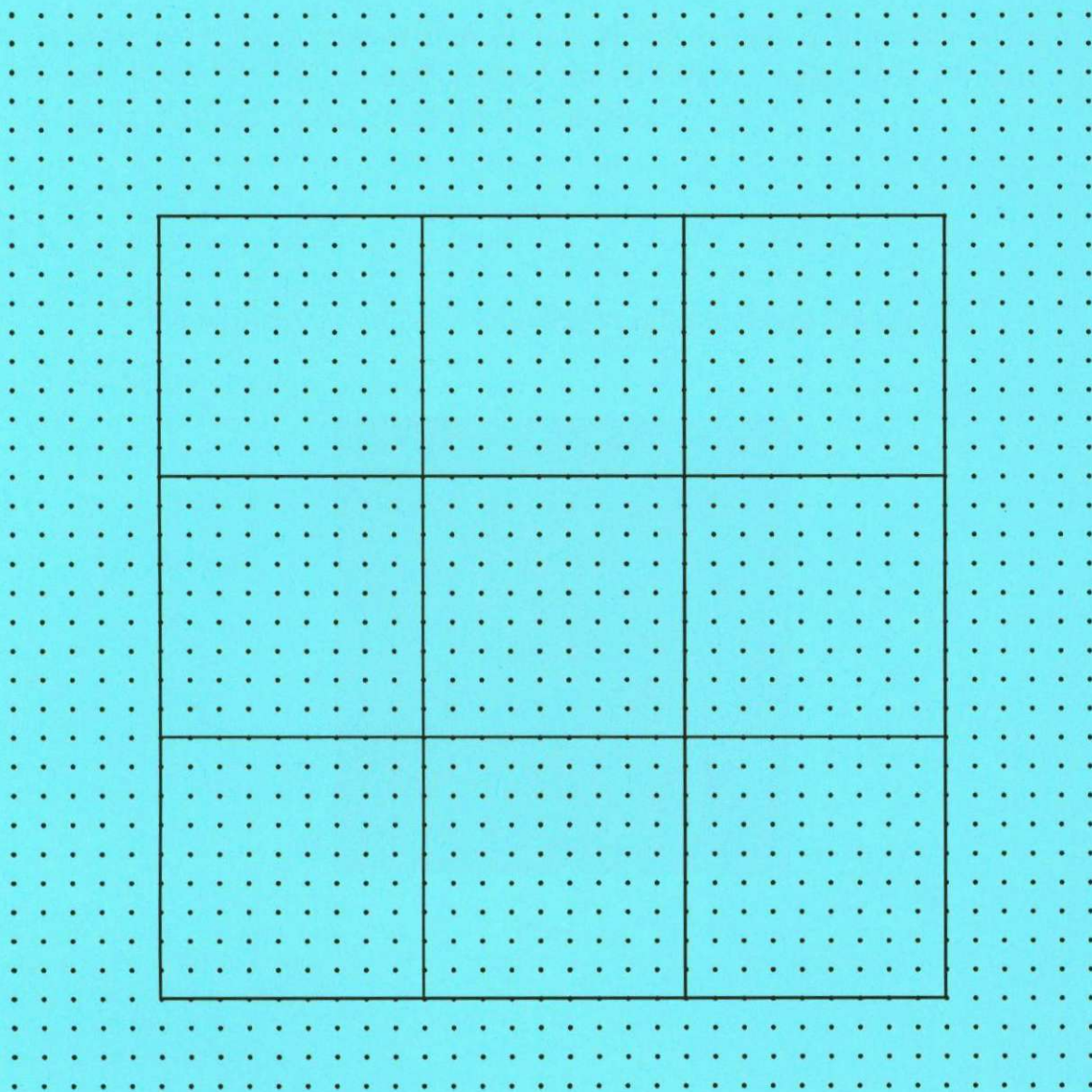


5. Postup opakuj po třetí...
vyjmi (vybarvi modře) vždy prostřední čtverce,
spočítej u okrajových čtverců, kolik obsahují vnitřních čtverců.



6. Tento postup opakuj naposledy po čtvrté...
vyjmi (vybarvi modře) vždy prostřední čtverce,
spočítej u okrajových čtverců, kolik obsahují vnitřních čtverců.





Obr. 3

ÚKOLY:

1. Uvažujte, že postup budete opakovat donekonečna. V každé fázi je každý čtverec přeměněn na osm nových menších čtverců s třetinovou délkou strany. Popište, co lze vidět na obrazci jestliže je proces opakován do nekonečna? Kolik bude v obrazci „děr“? Kolik zbyde z původního čtverce?

.....

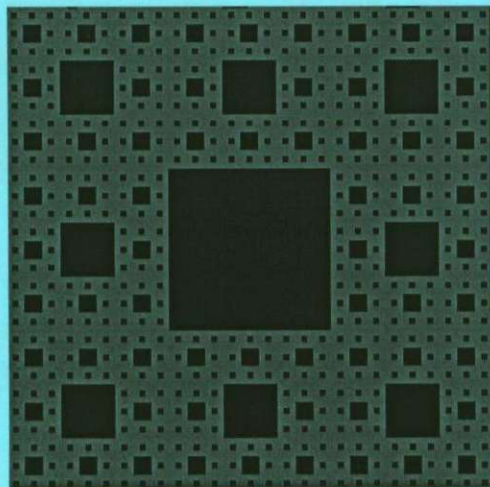
.....

.....

2. Předpokládej, že postup je změněn tak, že místo osmi okrajových čtverců budou ponechávány jen čtyři rohové menší čtverce. Jaký obraz vznikne po dvou opakování? Zkus zakreslit do obrázku.

.....
.....

Na obrázku si můžeš prohlédnout Sierpinského kobereček.



Obr. 4

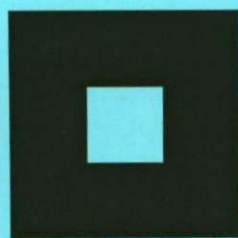
1.3 B PRACOVNÍ LIST

ČÍSELNÉ VZORCE VE ČTVERCOVÉ SÍTI

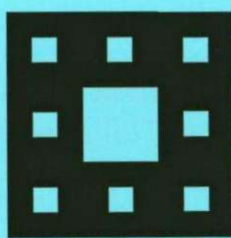
První tři fáze procesu konstrukce čtvercového koberce jsou ukázány na obrázku. V následujících fázích pokračuje dělení na stále menší a menší čtverce. Použijte tyto obrázky ke zjištění číselných vzorců, které vznikají při vytváření čtvercového koberce.



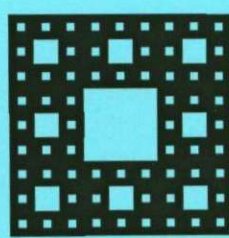
Fáze 0



Fáze 1



Fáze 2



Fáze 3

POČET ČTVERCŮ

1. Spočítejte počet černých čtverců v každé fázi. Fázi 0 máš již uvedenou v tabulce. Spočítej hodnoty pro fázi 1 až 3.

FÁZE	0	1	2	3	4	5		n
POČET	1							

Získané údaje zapiš do tabulky.

2. Pokus se doplnit tabulku pro fázi 4 a 5, tyto hodnoty zapište do tabulky. Jaká konstanta násobení musí být použita při přechodu z jedné fáze do následující?

3. Zobecněte tento vzorec pro zjištění počtu černých čtverců ve fázi n . Když n roste do nekonečna, jaký bude počet černých čtverců?

PLOCHA ČTVERCŮ

4. Necht' plocha čtverce ve fázi 0 je 1. Nalezněte celkovou plochu černých čtverců ve fázi 1 až 3.

FÁZE	0	1	2	3	4	5		n
PLOCHA	1							

Získané údaje zapiš do tabulky.

5. Pokus se doplnit tabulku pro fázi 4 a 5. Jaká konstanta násobení musí být použita při přechodu z jedné fáze do následující?

Hodnoty fáze 4 a 5 zapiš do tabulky.

6. Zobecněte tento vzorec pro nalezení obsahu ploch černých čtverců ve fázi n , když n roste do nekonečna, jaká bude plocha černých čtverců?

7. Předpokládejme, že následné fáze budou vytvářeny s použitím pouze čtyř rohových čtverců v každé fázi. Jaké budou v tomto případě odpovědi na otázky 1 – 6?

.....

.....

.....

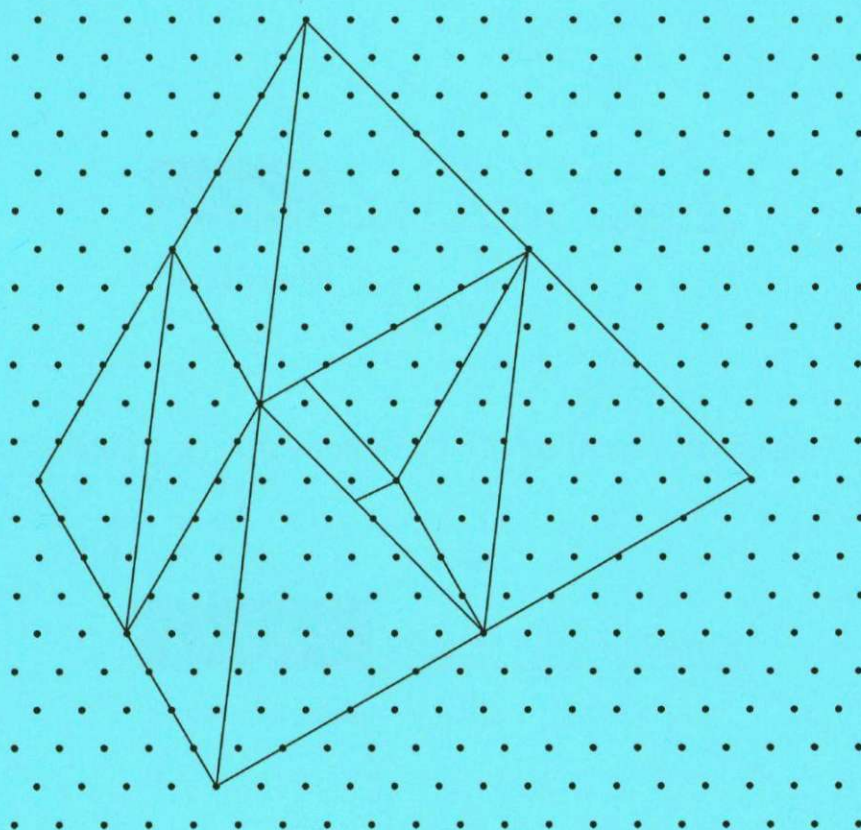
.....

1.4 A PRACOVNÍ LIST SIERPINSKÉHO ČTYŘSTĚN

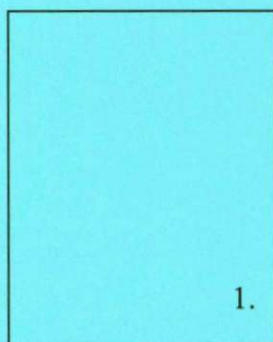
Tento pracovní list používá konstrukční postup pro trojrozměrnou trojúhelníkovou pyramidu nebo čtyřstěn. Výsledek vede k zajímavému obrazci, který se nazývá *Sierpinského čtyřstěn*.

Konstrukce:

1. Na obr. 5 vidíš čtyřstěn, spojili jsme středy jeho stran úsečkami.
2. Zanechej pouze čtyři rohové čtyřstěny. Ostatní vybarvi modře (tím jsme je „odstranili“)
3. Prostuduj si nové čtyři čtyřstěny, aby ses ujistil, že je vidíš.
4. Každý čtyřstěn (4) zakresli do připraveného pole, tak jas se jeví.



Obr. 5



Každý čtyřstěn má čtyři stěny, 6 hran a čtyři vrcholy.

5. Použij stejný postup po druhé (fáze 2) na každý z těchto čtyř čtyřstěnů.

6. Kolik nových čtyřstěnů jsi tímto postupem získal? Nepřipomínají Ti tyto čtyřstěny malé pyramidy?

.....

Úkoly:

1. Kolik stěn, hran a vrcholů existuje v těchto 16 čtyřstěnech, které nám vznikly ve fázi 2? Kolik mají společných vrcholů? Kolik stěn je viditelných?

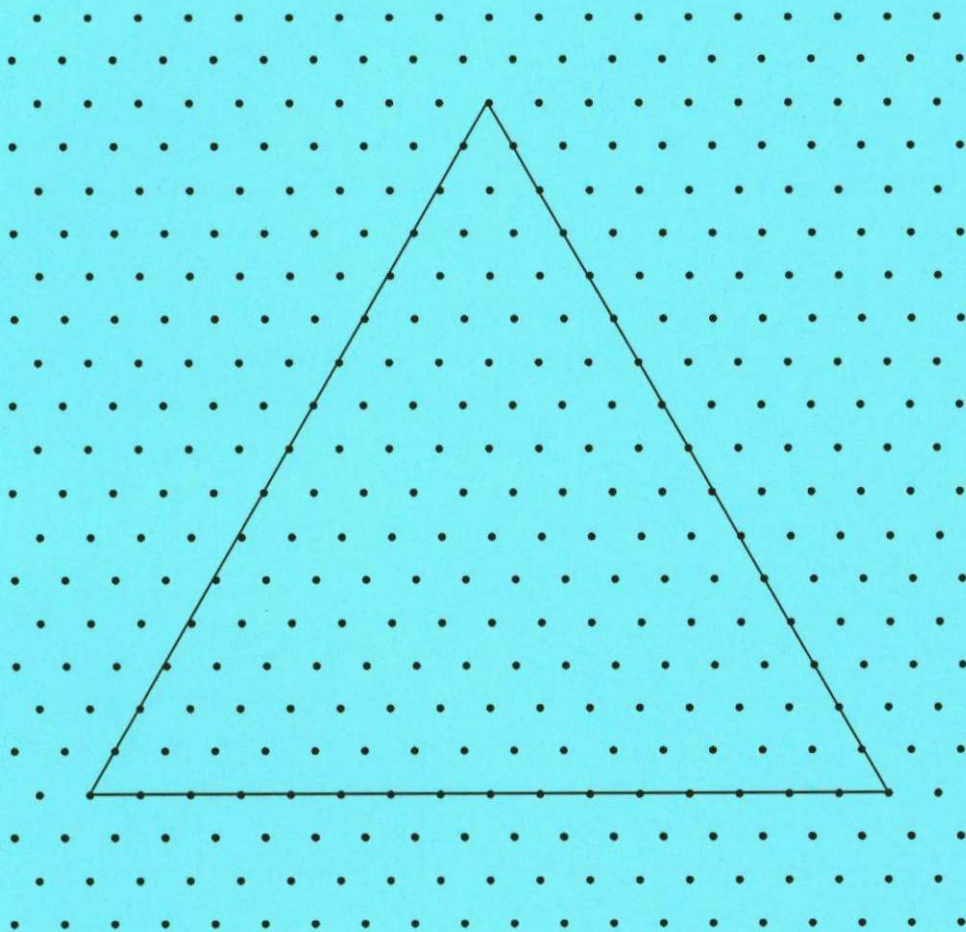
	Stěn	Hran	Vrcholů
16 čtyřstěnů			

2. Kolik čtyřstěnů by jsi objevil pro fázi 3? Pro fázi 4? Pro fázi n ?

	Fáze 3	Fáze 4	Fáze n
Počet čtyřstěnů			

3. Použij bodovou mříž k vytvoření pohledu na jednu ze stěn fáze 4 Sierpinského čtyřstěnu. Co ti vzniklo za obrázek?

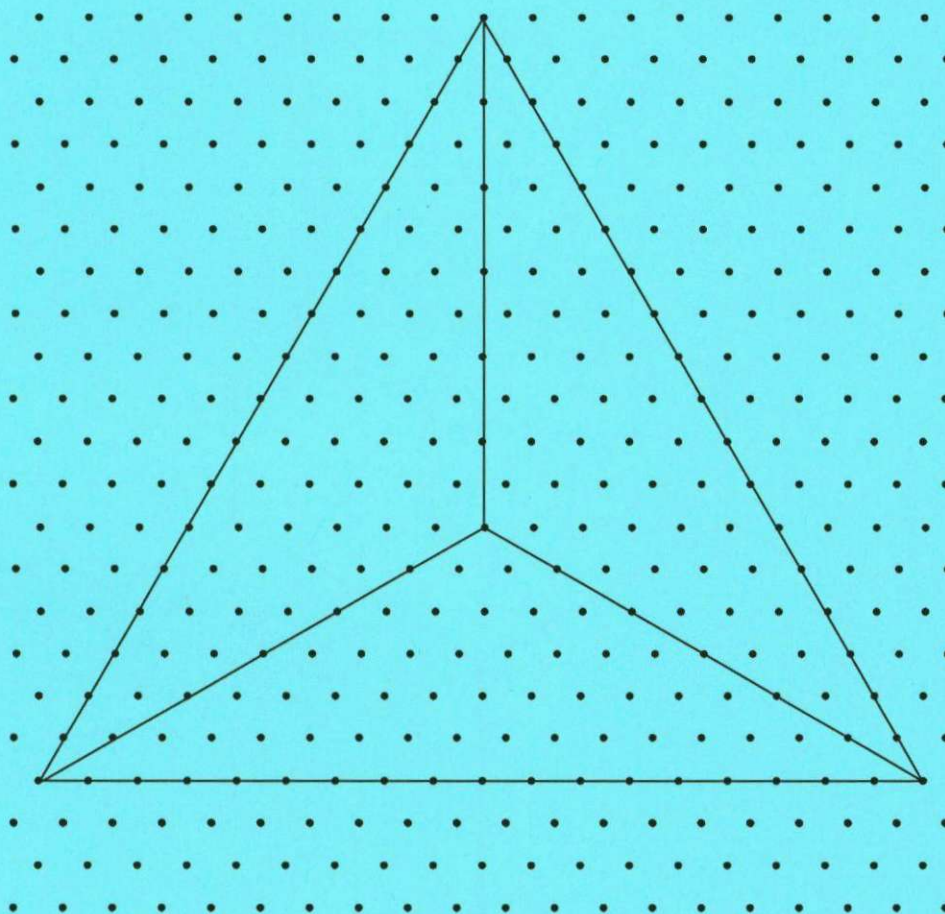
Pomůcka: Spoj středy stran trojúhelníku, vždy vyjmi (vybarvi modře) prostřední trojúhelník a pokračuj tímto algoritmem celkem čtyřikrát (1. – 4. fáze). Uvědom si, že zde pracuješ s jednou stěnou čtyřstěnu, což představuje tento trojúhelník.



Obr. 6

4. Použij bodovou mříž k vytvoření pohledu ze shora pro fázi 1 Sierpinského čtyřstěnu. Zakresli viditelné hrany tohoto čtyřstěnu.

Pomůcka: Spoj středy stran v každé stěně, tedy u viditelných třech trojúhelníků. Ve prostřed tohoto obrázku nalezněš malou kopii původního obrázku, tento obrazec vybarvi modře (tímto procesem jsme ho vyjmuli). Poté spoj navzájem okrajové středy stěn, ale nezapomeň, že musíš zakreslit jen viditelnou část.



Obr. 7

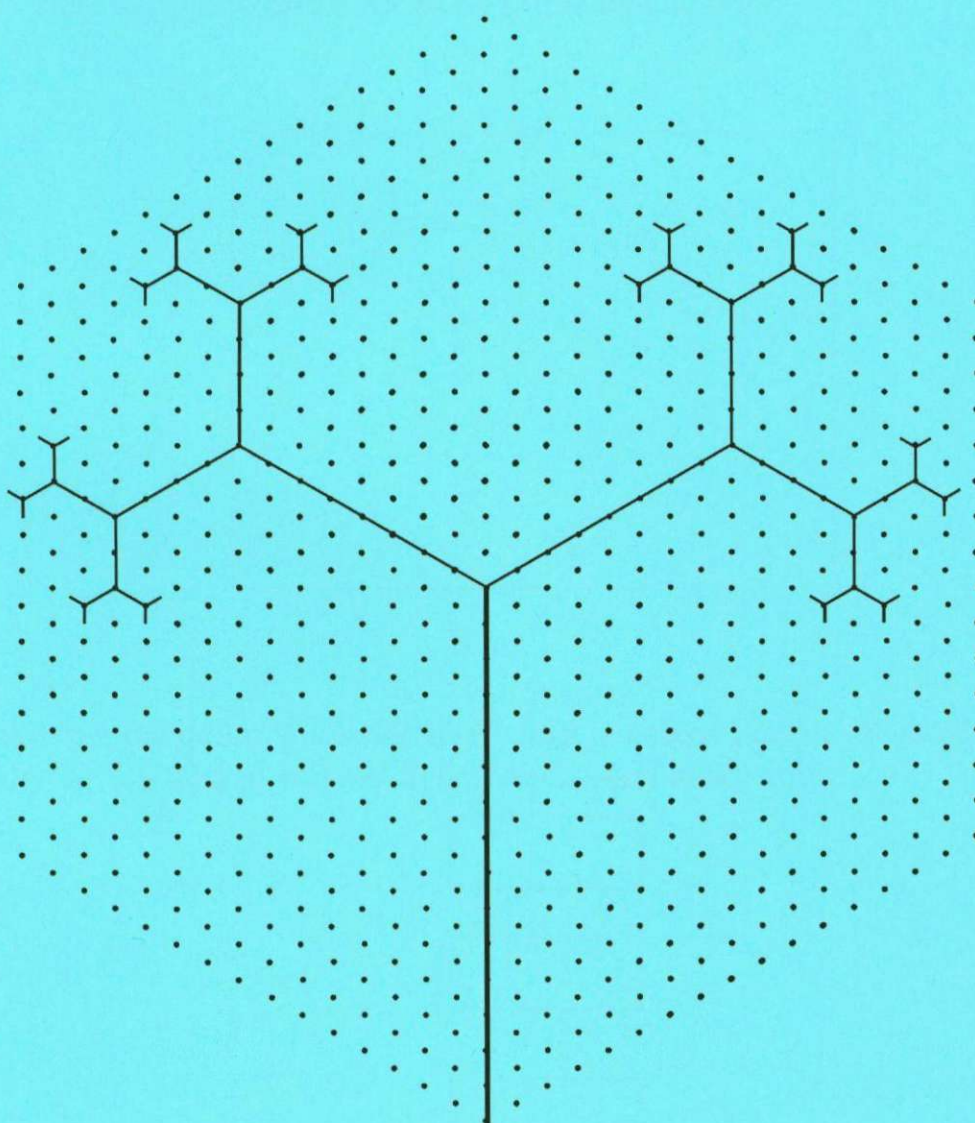
1.5 A PRACOVNÍ LIST STROMY

Když strom roste, větví se. Z velkých větví rostou menší. Z těchto pak rostou ještě menší atd. Pro představu použijeme síť bodů tvořící šestiúhelník pro nakreslení matematického stromu, který má některé vlastnosti stejné jako živý strom. O této pravdě se názorně přesvědčíme.

Konstrukce:

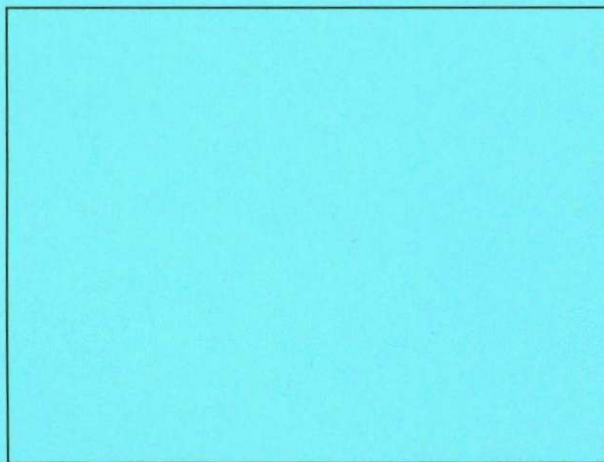
Z koncového bodu každé větve nakreslete dvě nové větve, poloviční délky, rostoucí pod úhlem 30° .

1. Fáze 1 procesu je zakreslena na obr. 8.



Obr. 8

2. Zvýrazněte čtyři nové větve pro fázi 2, které budou vycházet z koncových bodů. Tyto větve budou poloviční než předešlé a opět budou svírat s původní větví úhel 120° .
3. Stejným postupem pokračuj ve fázi 3, kde dokreslíš celkem 8 nových větví.
4. Stejným postupem pokračuj pro fázi 4.
Koncové body větví by měly stále být v bodech sítě.
5. Pokračuj v procesu růstu, dokud nebudou větve příliš malé pro zakreslení.
Předpokládejme, že strom začíná růst počáteční větví, která má délku 1, což je kmen.
Nakreslete tento kompletní strom do připraveného pole.



6. Kolik větví má délku $\frac{1}{4}$ a kolik $\frac{1}{16}$? Jaká je celková délka všech větví dlouhých $\frac{1}{4}$, a jaká je celková délka všech větví délky $\frac{1}{16}$?

7. Jaká je celková délka všech větví úplného stromu?

8. Dotknete se někdy konce bodové sítě?

.....

.....

1.6 A PRACOVNÍ LIST

SOBĚPODOBNOST: ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Sierpinského trojúhelník se zaměřuje na charakteristiku soběpodobnosti. Jestliže části obrazu jsou menšími kopiemi celku, pak se obrázek nazývá *soběpodobným*.

Některé obecně známé objekty v reálném světě kolem nás se jeví tak, že vyhovují této charakteristice, protože části jsou menšími kopiemi celku. Toto chceme zahrnout do našeho intuitivního vnímání soběpodobnosti. Avšak existují různé stupně soběpodobnosti. Nejvyšší stupeň soběpodobnosti existuje, pokud některá vybraná část soběpodobného obrázku je kopií celého obrázku.

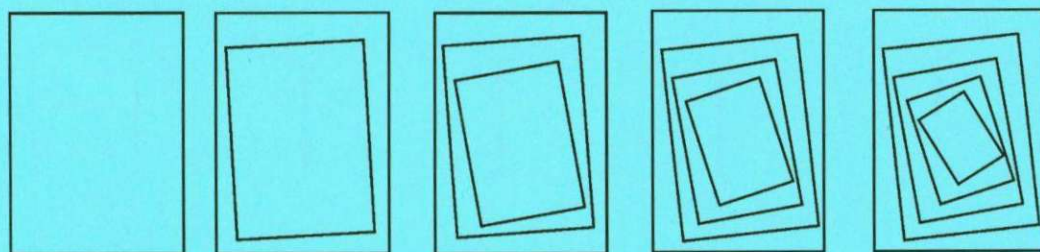
Obrázek se nazývá *přesně soběpodobný*, jestliže může být rozložen na části, které jsou přesnými kopiemi celku. Každá libovolná část obsahuje přesnou kopii celého obrazu.

1. Jak by jste porovnali stopku s celou hlavou kvěťáku? V jakém smyslu jsou soběpodobné?

Můžete uvést další zeleninu s podobnou vlastností?

.....
.....

Představme si obal knihy, která obsahuje obrázek ruky držící tu samou knihu. Překvapivě tento popis vede ke spíše komplexnímu uspořádání. Když se díváme hlouběji a hlouběji do obrázku, vidíme více a více obdélníkových obálek.



2. Co můžeme říci o počtu obdélníků znázorňujících obálky, které se objeví na obdélníkové obálce původní knihy?

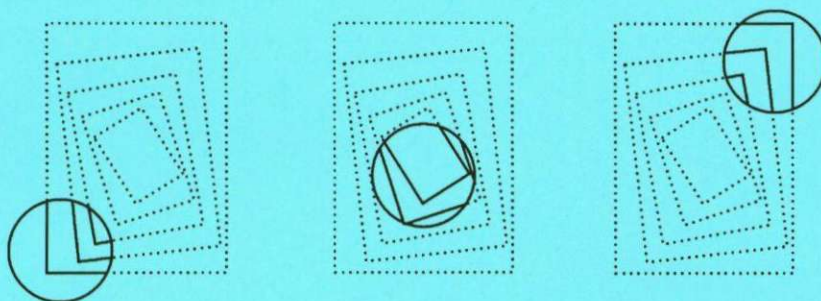
.....

3. Má každý obdélník na obálce další obdélník uvnitř?
Bude každý obdélník, kromě obálky samotné obsažen v nějakém obdélníku?

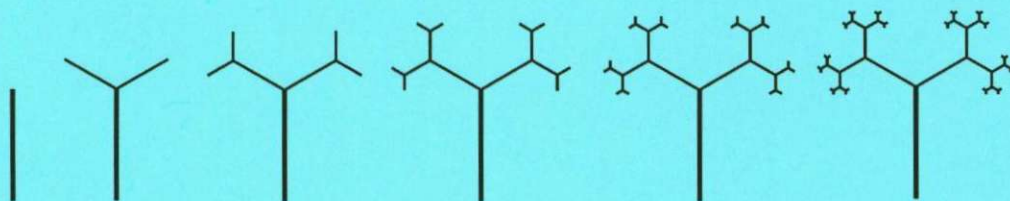
.....

4. V každém z následujících obrázků, část kompletní knihy je podrobně nastíněna. Který obrázek znázorňuje tu část, která spojuje kopii s původním obrázkem?

Najdeš na těchto obrázcích nějakou soběpodobnost, či dokonce přesnou soběpodobnost?



Představ si strom, který stále se zvětšuje větvením podobných částí jak je ukázáno. V každé fázi růstu, strom vypadá podobně jako v další fázi růstu. Čím více a více fází následuje, tím si strom vypadá více a více podobně. Tvé oči začnou vnímat podstatné vizuální charakteristiky soběpodobnosti.



5. Představ si strom ve své konečné fázi růstu. Je zde nějaká část stromu, která je přesnou replikou stromu v této fázi?

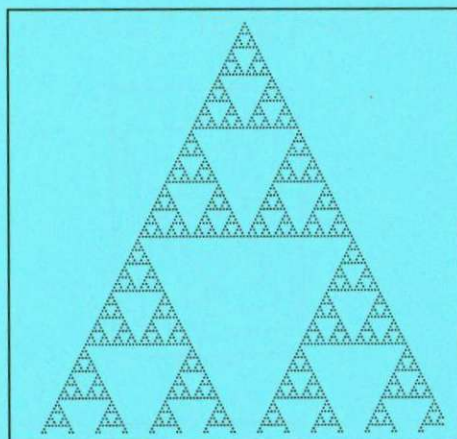
To znamená například, že část musí mít to samé číslo větví jako původní stromem.

Může být strom soběpodobný ve své konečné fázi?

Nyní si uvedeme ještě jeden příklad, na kterém se budeme snažit pochopit probírané téma.

6. Uvaž například, Sierpinského trojúhelník, který jsme již probírali dříve.

Jestliže vidíš nějakou část Sierpinského trojúhelníku, je nějaký tento kousek kopií nebo-li přesnou kopií původního obrázku? Je Sierpinski trojúhelník přesně soběpodobný?



.....

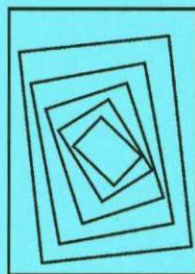
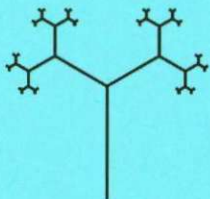
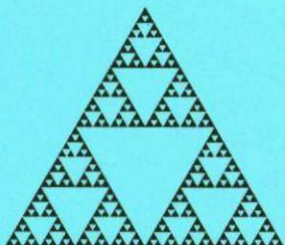
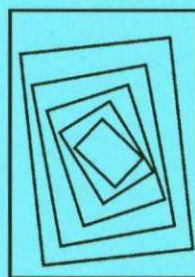
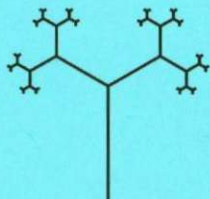
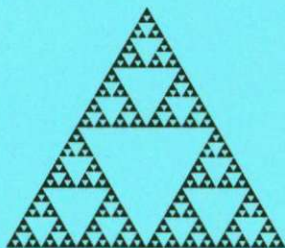
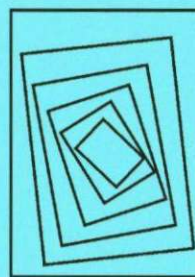
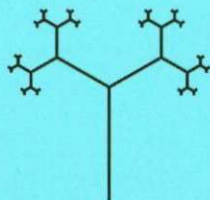
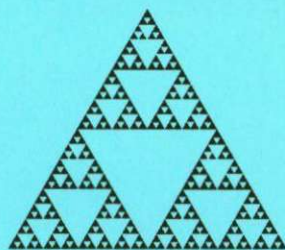
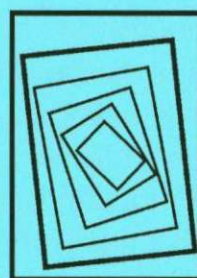
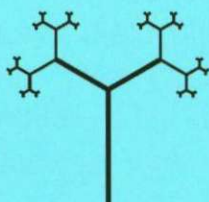
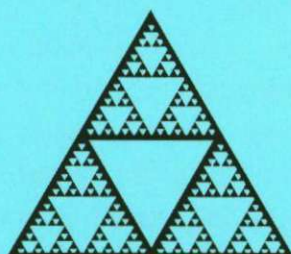
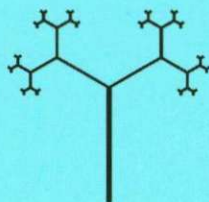
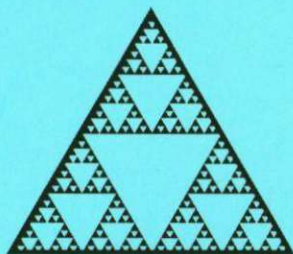
.....

.....

1.7 A PRACOVNÍ LIST

SOBĚPODOBNOST: DETAILS

Co přesně znamená část je přesnou kopií původního celku? Tento pracovní list rozšiřuje otázku a doplňuje ji odpovědí.



1. Uvaž opakovací postup jednotlivých fází: naše oblíbená kniha, rostoucí strom a v neposlední řadě rozvinutý Sierpinského trojúhelník. Fáze 0 a 1 máš ukázané na obrázku.

Důkladně si tyto náповědné fáze prohlédni a na základě těchto předloh, zkus odhadnout jak budou vypadat fáze 2, 3 a 4.

.....

.....

.....

Všechny obrázky v jejich konečné podobě jsou soběpodobné. Avšak obdélník, chceš-li kniha, se přibližuje k jednomu jedinému bodu. Jen části obsahující ten bod budou obsahovat kopii původního obrázku. Stromy se větví směrem k jejich finální podobě. Jen části obsahující tuto podobu budou obsahovat kopii původního obrázku. Ale Sierpinski trojúhelník je jednoduše rostoucí všude. To je speciální vlastnost vytvoření Sierpinského trojúhelníku, který je *přesně soběpodobný*.

Důkladně si prohlédni kompletní Sierpinského trojúhelník, strom a knihy, aby jsi se o této pravdě přesvědčil sám.

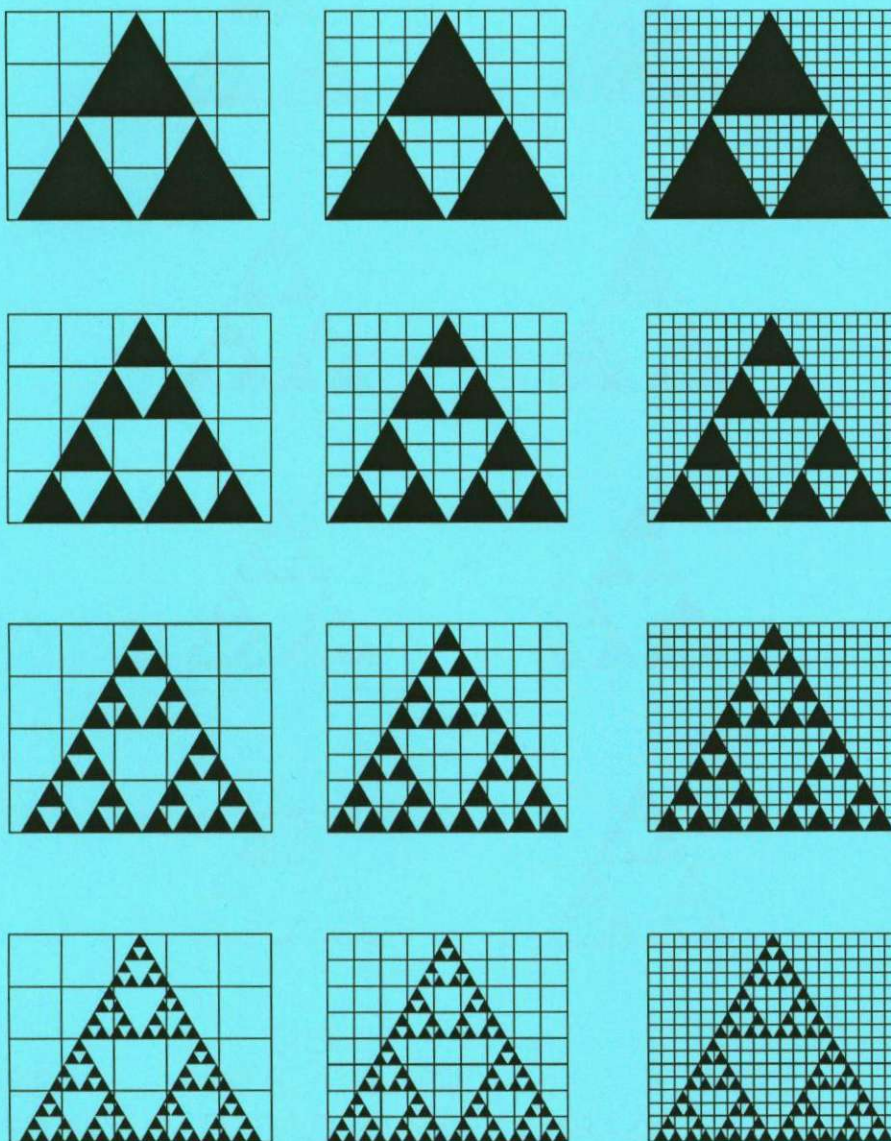
1.8 A PRACOVNÍ LIST

ČTVEREČKOVÁ SOBĚPODOBNOST: PŘIBLIŽOVÁNÍ SE K NEKONEČNU

Metoda čtverečkové soběpodobnosti uvažuje konečné přiblížení ke konečnému objektu v rozmanitých mřížkách k odhalení soběpodobnosti.

1. Pro každou konstrukci jednotlivých fází Sierpinského trojúhelníku, vystínuj čtverečky v dané síti, které obsahují alespoň nějaký i když malý kousek tohoto Sierpinského trojúhelníku.

Tyto čtverečky budeme nazývat obrazové body.

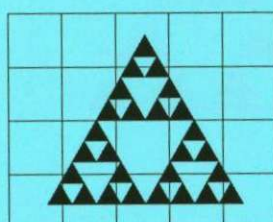
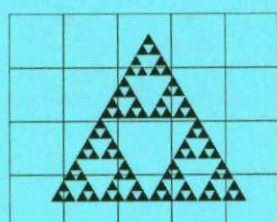
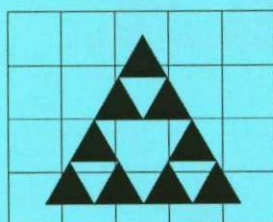
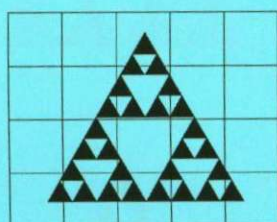
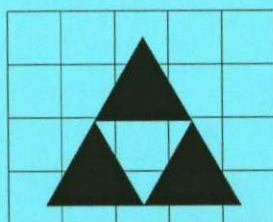
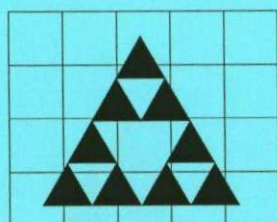
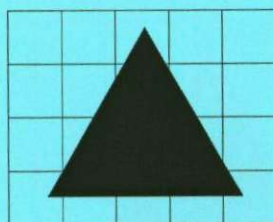
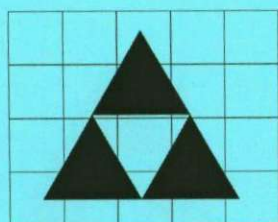


2. Ve které fázi obrázku přestane tato síť zjišťovat libovolné rozdíly v obrázcích?

Kdy se to stane pro střední síť? Kdy pro konečnou síť?

1.8 B PRACOVNÍ LIST

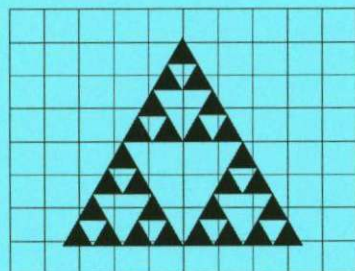
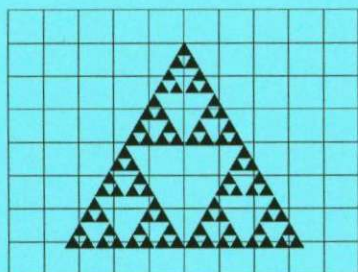
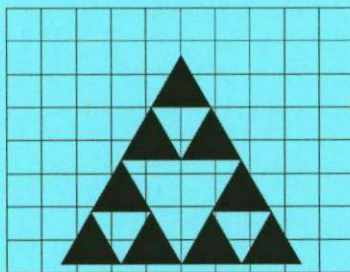
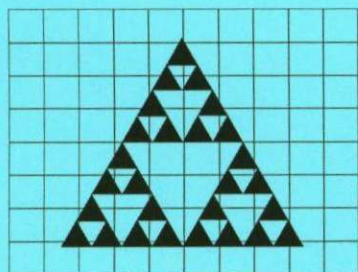
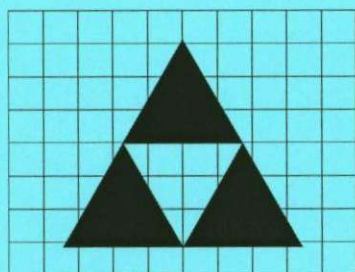
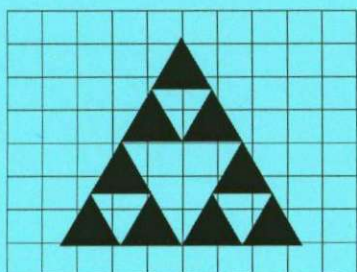
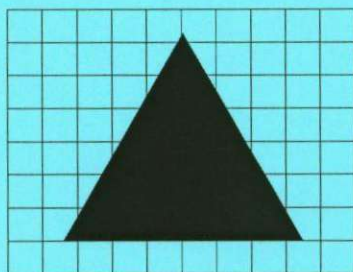
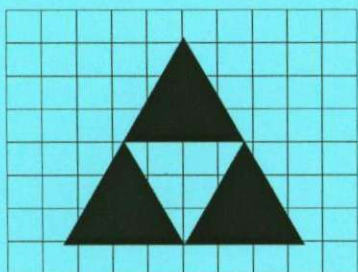
- Každá dvojice obrázku představuje fázi Sierpinského trojúhelníku a dolní levou část tohoto obrázku zvětšenou dvakrát. Vybarvěte čtvercové pole, které překrývají nějakou část obrázku. Napiš celkové číslo polí v tabulce pro celý obraz a poté pro příslušný výřez.
- V tabulce, počínaje kterou fází, počet bílých polí pro celý obrázek a pro výřez, jsou stejné? Co můžete očekávat, že se stane při použití jemné sítě?



FÁZE ČÍSLO	ČÍSLO SVĚTLÝCH POLÍ		JSOU STEJNÁ POLE SVĚTLÁ?
	CELÝ OBRÁZEK	VÝŘEZ OBRÁZKU	
1			
2			
3			
4	12	12	ANO

1.8 C PRACOVNÍ LIST

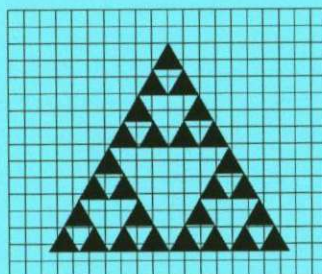
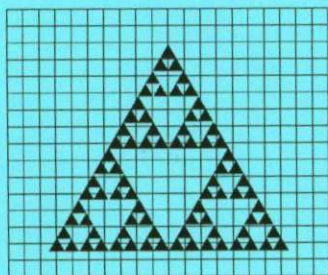
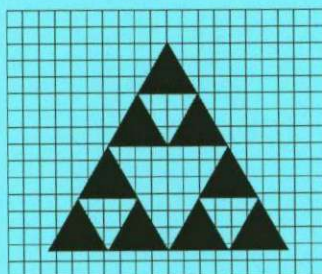
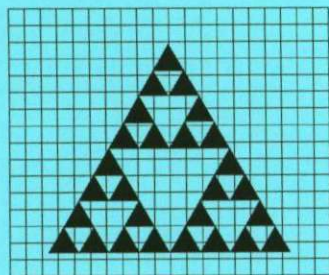
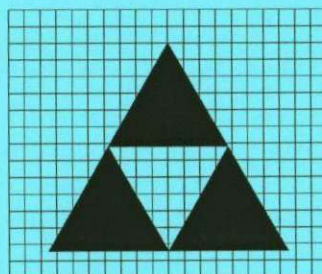
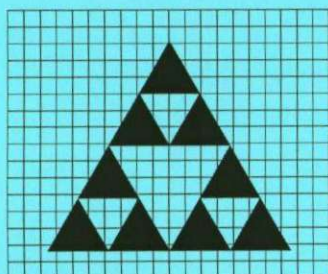
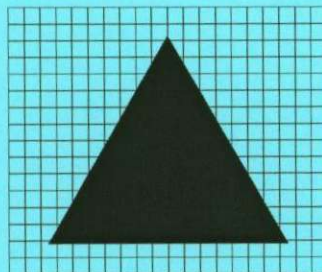
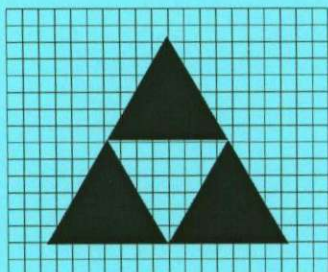
5. Každá dvojice obrázku ukazuje fázi Sierpinského trojúhelníku a její zvětšení. Opět vybarvi čtvercová pole. Vlož čísla polí do tabulky celého obrázku a jeho zvětšení.
6. V tabulce, počínaje kterou fází, počet bílých polí pro celý obrázek a pro výřez, jsou stejné? Co můžete očekávat, že se stane při použití jemné sítě?



FÁZE ČÍSLO	ČÍSLO SVĚTLÝCH CELÝ OBRÁZEK	POLÍ VÝŘEZ OBRÁZKU	JSOU STEJNÁ POLE SVĚTLÁ?
1			
2			
3			
4	36	36	ANO

1.8 D PRACOVNÍ LIST

7. Každá dvojice obrázku ukazuje fázi Sierpinského trojúhelníku a její zvětšení. Opět vybarvi čtvercová pole. Vlož čísla polí do tabulky celého obrázku a Jeho zvětšení.
8. V tabulce, počínaje kterou fází, počet bílých polí pro celý obrázek a pro výřez, jsou stejné?



FÁZE ČÍSLO	ČÍSLO SVĚTLÝCH POLÍ		JSOU STEJNÁ POLE SVĚTLÁ?
	CELÝ OBRÁZEK	VÝŘEZ OBRÁZKU	
1			
2			
3			
4	102	102	ANO

1.9 A PRACOVNÍ LIST PASCALŮV TROJÚHELNÍK

Tento pracovní list je základní pro seřazení čísel do trojúhelníku, který se nazývá PASCALŮV TROJÚHELNÍK. Tato čísla používají různé variace problému pravděpodobnosti. Je zde spojení se Sierpinským trojúhelníkem a tedy i fraktálem, což si i názorně ukážeme a přesvědčíme se o této pravdě.

První číslo v řadě 0 Pascalova trojúhelníku je 1. Na obrázku máš znázorněno prvních 10 řad Pascalova trojúhelníku. Pokud si ho důkladně prohlédneš, přijdeš sám na zákonitosti jak se tvoří čísla v tomto trojúhelníku.

Každé číslo vznikne součtem dvou čísel nad ním.

Pokud se ptáš, kde jsme vzali jedničky, vždy si představ nuly v řádku nad ním a odpověď Ti přejde sama.

1. Kolik čísel je v řadě 8? Kolik v řadě 9? Kolik v řadě 10? Kolik čísel bude v řadě n ?

.....

2. Zkus doplnit řádek 11 a 12.

Mohou být čísla, v řadě n , vytvořená pomocí vzorce $(n + 1)!$

3. V řadě 13, 14 a 15 vlož písmena **E** pro sudá čísla a **O** pro lichá čísla. Pracuj podle předepsaného algoritmu, který Ti pomůže v práci.

$$E + E = E$$

$$E + O = O$$

$$O + E = O$$

$$O + O = E$$

	<i>Řada</i>															
0	1															
1		1		1												
2		1		2		1										
3		1		3		3		1								
4		1		4		6		4		1						
5		1		5		10		10		5	1					
6		1		6		15		20		15	6	1				
7		1		7		21		35		35	21	7	1			
8		1		8		28		56		70	56	28	8	1		
9		1		9		36		84		126	126	84	36	9	1	
10		1		10		45		120		210	252	210	120	45	10	1
11																
12																
13																
14																
15																

Sčítání sudých a lichých čísel znamená sčítání modulo 2. Ve sčítání modulo 2, jsou důležité pouze rozdíly po dělení dvěma.

Například:

$$5 + 7 = 12$$

$$5 + 8 = 13$$

Sčítanec 12 má po dělení dvěma zbytek 0.

Sčítanec 13 má po dělení dvěma zbytek 1.

Jak to zapíšeme?

$$5 + 7 = 0 \pmod{2}$$

$$5 + 8 = 1 \pmod{2}$$

Pokud opět použijeme E pro sudá čísla a O pro lichá čísla, platí následující vzorečky.

$$E + E = E$$

$$E + O = O$$

$$O + E = O$$

$$O + O = E$$

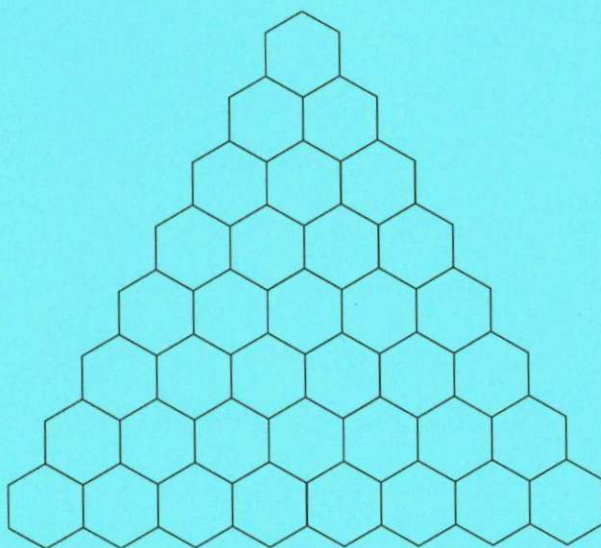
$$O + O = O \pmod{2}$$

$$O + 1 = 1 \pmod{2}$$

$$1 + O = 1 \pmod{2}$$

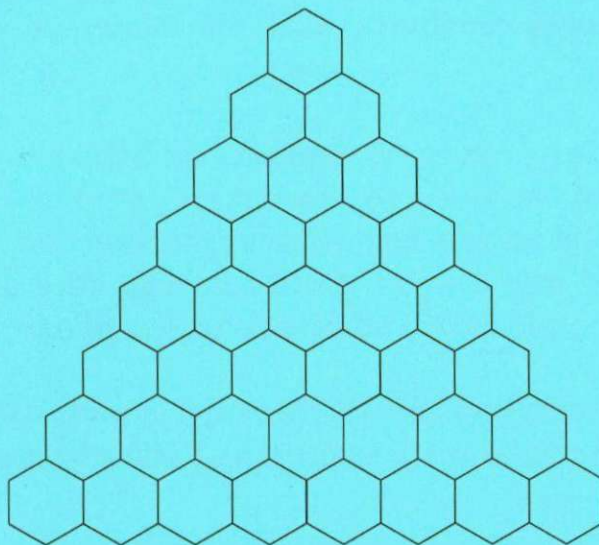
$$1 + 1 = O \pmod{2}$$

4. Vlož O nebo 1 do prvních osmi řad Pascalova trojúhelníku, kdy O vlož místo sudých čísel a 1 místo lichých čísel.



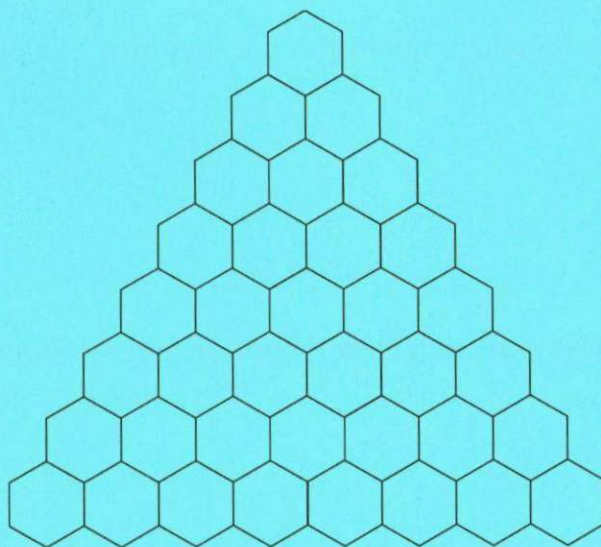
Obr. 9

5. Opět Tě bude zajímat prvních osm řad, ale nyní vybarvi modře buňky, kam patří 0 (sudá čísla) a bíle nech buňky kam patří 1 (lichá čísla).



Obr. 10

6. Nyní vybarvi prvních osm řad Pascalova trojúhelníku a vybarvi modře ty buňky, kam patří jedničky a bíle ponech ty buňky, kam by patřili nuly. Pokud si prohlédneš úkol 5, bude vybarvování hračkou.



Obr. 11

1.10 A PRACOVNÍ LIST SIERPINSKÉHO TROJÚHELNÍK

Na obrázku vidíme nový typ trojúhelníku, který se skládá z bílých a černých buněk. My si v tomto pracovním listě zavedeme pravidlo pro obarvování jednotlivých buněk.

Jestliže dvě pozice přesně nad zkoumanou pozicí mají odlišnou barvu, pak obarvíme tuto pozici na černo. Jestliže dvě pozice přímo nad zkoumanou pozicí jsou stejné barvy, pak necháme uvažovanou pozici bílou. Koncové pozice v každém řádku jsou vždy obarvené černě. Prvních osm řad v trojúhelníkovém poli na spodním obrázku bylo obarveno podle uvedeného pravidla.

1. Vidíte geometrický obrazec u prvních čtyř řad trojúhelníku? Jakou má tento obrazec spojitost s fází 1 konstrukce Sierpinského trojúhelníku?

Odpověď:

2. Jakou spojitost má prvních osm řad s prvními čtyřmi řadami? Jakou mají spojitost s fází 2 Sierpinského trojúhelníku?

Odpověď:

3. Řiďte se uvedeným pravidlem a správně vybarvěte následujících osm řad trojúhelníku v obrázku.

Jaké fázi Sierpinského trojúhelníku odpovídá výsledný obrazec?

Odpověď:

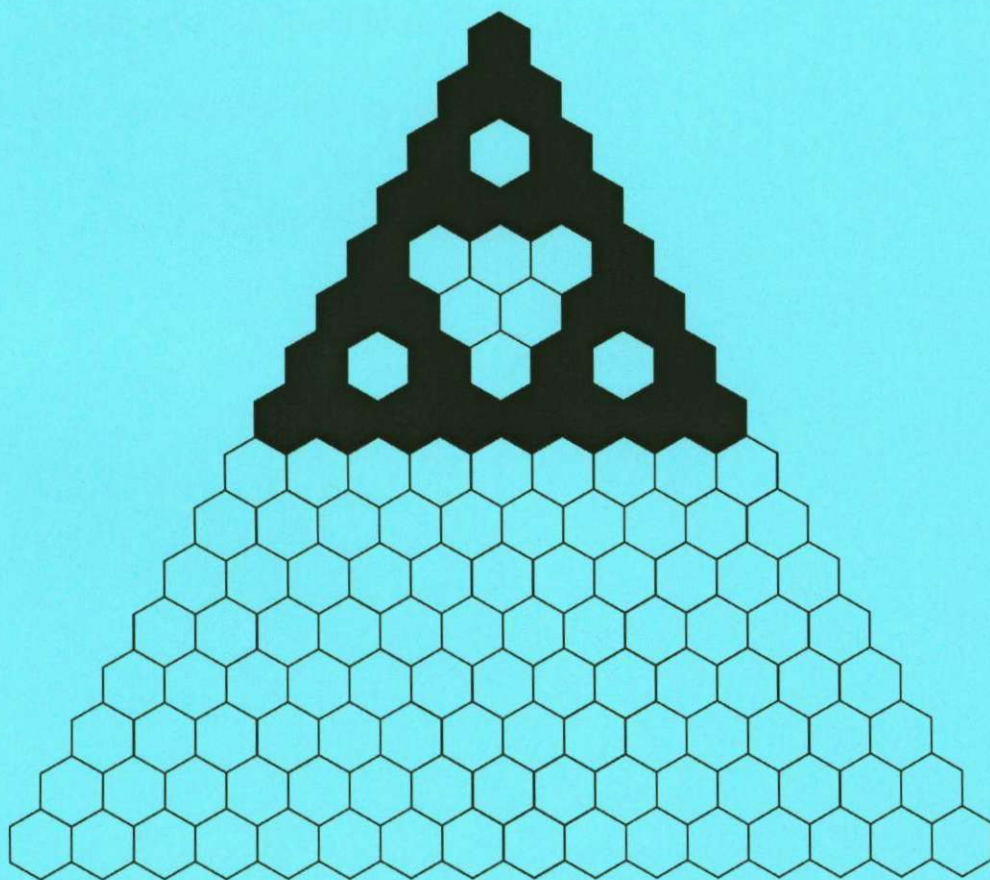
4. Kolik řad trojúhelníku bude celkově potřeba pro reprezentaci fáze čtyři Sierpinského trojúhelníku?

Kolik pro fázi 5?

Odpověď:

5. Nyní zobecněte výsledky v tabulce.
 Kolik řad trojúhelníku je potřeba pro fázi n ?
Odpověď:

FÁZE	1	2	3	4	5	...	n
ČÍSLO ŘADY	2	4	8				



Obr. 12

1.10 B PRACOVNÍ LIST OBARVOVACÍ ZKRATKA

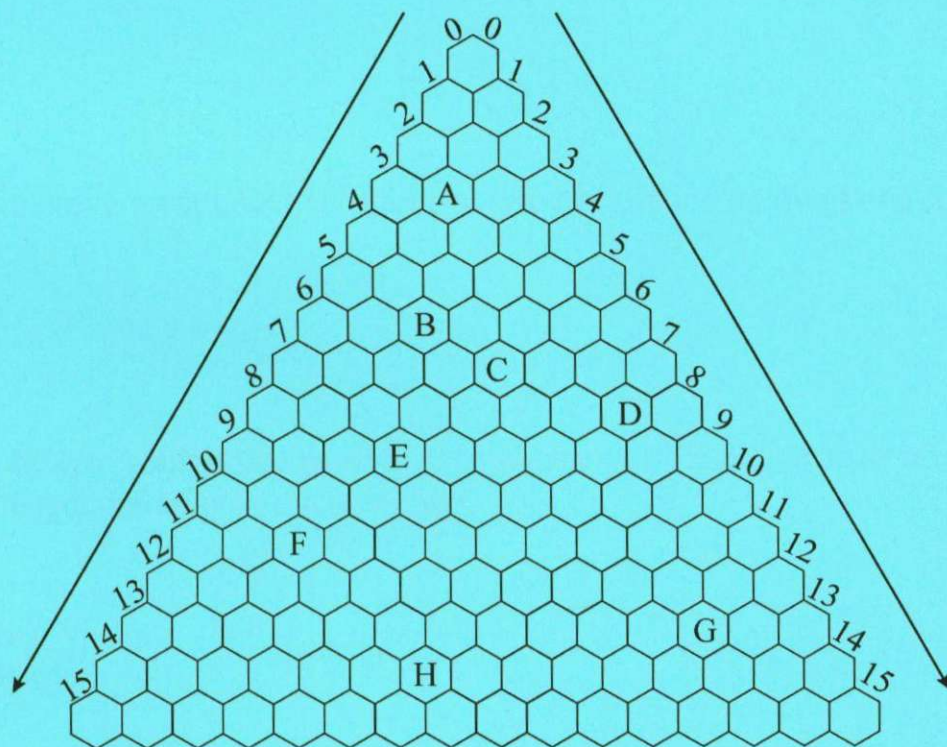
Pokud si kladete otázku, zda existuje či nikoliv, přímý způsob, jak zjistit způsob obarvení libovolné pozice v tomto trojúhelníku bez provedení uvedeného procesu ve všech řadách nad ní, odpověď je ano, ale proces vyžaduje přepis v dvojkové soustavě pro každou pozici.

Následné instrukce Vám snad pomohou pochopit jak na to.

Začneme s původní pozicí (0,0) jako vrcholem trojúhelníkového pole. Necht' x osa je úhlopříčná doleva a y osa je úhlopříčná doprava. Poté každá dvojice souřadnic (x,y) odpovídá určité pozici v trojúhelníkovém poli.

Pozice A na obrázku má souřadnice (2,1).

1. Napište souřadnice pro pozice B,C,D.



Obr. 13

2. Pro určení barvy dané pozice umístěte zápis dvou souřadnic dané pozice v dvojkové soustavě nad sebe a řiďte se následujícím pravidlem: Jestliže se nad sebou objeví dvě jedničky v

jakémkoliv sloupci tohoto zápisu, potom nechte pozici bílou. V opačném případě obarvěte pozici načerno.

Odpověď:

$B = (\quad , \quad)$

$C = (\quad , \quad)$

$D = (\quad , \quad)$

2. Čtyřciferné souřadnice pro pozice E ve dvojkové soustavě jsou (010,0011). Pokud umístíme tyto souřadnice nad sebe, jsou v nějakém sloupci dvě Jedničky nad sebou? Bude tato pozice černá nebo bílá?

Odpověď:

3. Jaká je barva pozice F,G,H? Přepište tyto souřadnice do dvojkové soustavy.

F =

G =

H =

4. Přepište tyto souřadnice do dvojkové soustavy. Poté určete jestli příslušné pozice jsou barveny černě nebo bíle.

$(7, 9) =$

$(12, 16) =$

$(25, 40) =$

1.11 A PRACOVNÍ LIST

NOVÁ OBARVOVACÍ PRAVIDLA A OBRAZCE

V této doplňkové aktivitě je na tento zvláštní trojúhelník použito modifikované obarvovací pravidlo založené na aritmetice ve trojkové soustavě. Budou vytvořeny nové, ale očekávané obrazce při obarvování pozic trojúhelníků.

Trochu Vás zasvětim do tajů trojkové soustavy, ve které nehledejme žádné složitosti.

V aritmetice, která je založená na této trojkové soustavě, je podstatný pouze Zbytek po dělení třemi.

Např. uvažujme součty $5+7 = 12$, $5+8 = 13$, $5+9 = 14$.

Součet 12 má po dělení třemi zbytek 0.

Součet 13 má po dělení třemi zbytek 1.

Součet 14 má po dělení třemi zbytek 2.

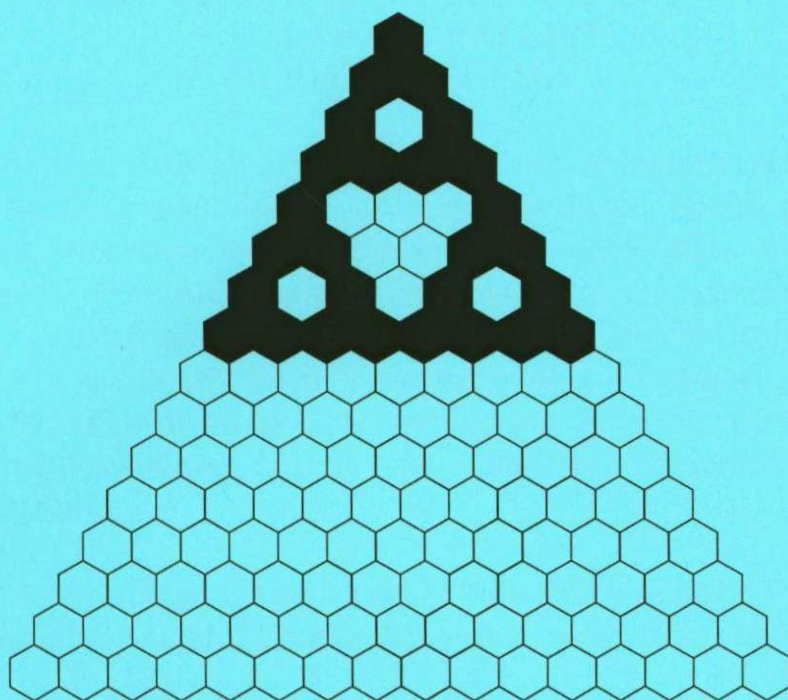
Zápis:

$$5+7 = 0 \bmod 3$$

$$5+8 = 1 \bmod 3$$

$$5+9 = 2 \bmod 3$$

1. Bereme v úvahu číselné pozice v řadách 0 až 8 zvláštního trojúhelníku. Vyjádřete každé číslo ve formě modulo 3 (jak jsme si vysvětlili) a poté Obarvíme příslušnou pozici použitím následujícího pravidla:
Jestliže pozice je jedna nebo dva, obarvěte pozici načerno. Jestliže je Pozice nula nechte tuto pozici neobarvenou.
2. Studujte obarvení doposud uvažovaných pozic. Jak odpovídají s fází jedna Sierpinského trojúhelníku, který jsme již dělali v pracovním listě 1.1B?
3. Pokuste se obarvit pozice ve zbývajících řadách kopírováním obrazce, který vidíte v prvních devíti řadách. Obrazec, který takto vytvoříte by měl obsahovat 18 malých trojúhelníků podobně jako ve fázi 2 Sierpinského trojúhelníka, který jsme již poznali dříve.



Obr. 14

V aritmetice podle devítkové soustavy nás zajímá pouze zbytek po dělení devíti.

$$5+11 = 7 \bmod 9$$

$$5+12 = 8 \bmod 9$$

$$5+13 = 0 \bmod 9$$

Jediné možné hodnoty zbytku při dělení devíti jsou : 0,1,.....8, každý součet modulo 9 musí být jedno z těchto čísel. Tato následující aktivita vyžaduje nalezení čísel v tomto trojúhelníku, které jsou dělitelné devíti se zbytkem 0. To jsou čísla rovná $0 \bmod 9$.

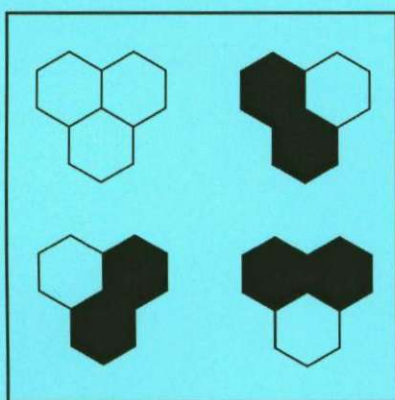
4. Budeme se zajímat o čísla v Pascalově trojúhelníku a jejich tvarů mod 9. Obarvěte příslušné pozice v tomto poli s použitím následujícího pravidla. Jestliže dané číslo je $0 \bmod 9$, pak obarvěte tuto pozici načerno. V opačném

Případě nechte buňku neobarvenou. Pozorujte jak rychle vidíte
Obarvovaný obrazec vznikající při kompletování pole.

1.12 A PRACOVNÍ LIST BUNĚČNÉ SCHÉMA

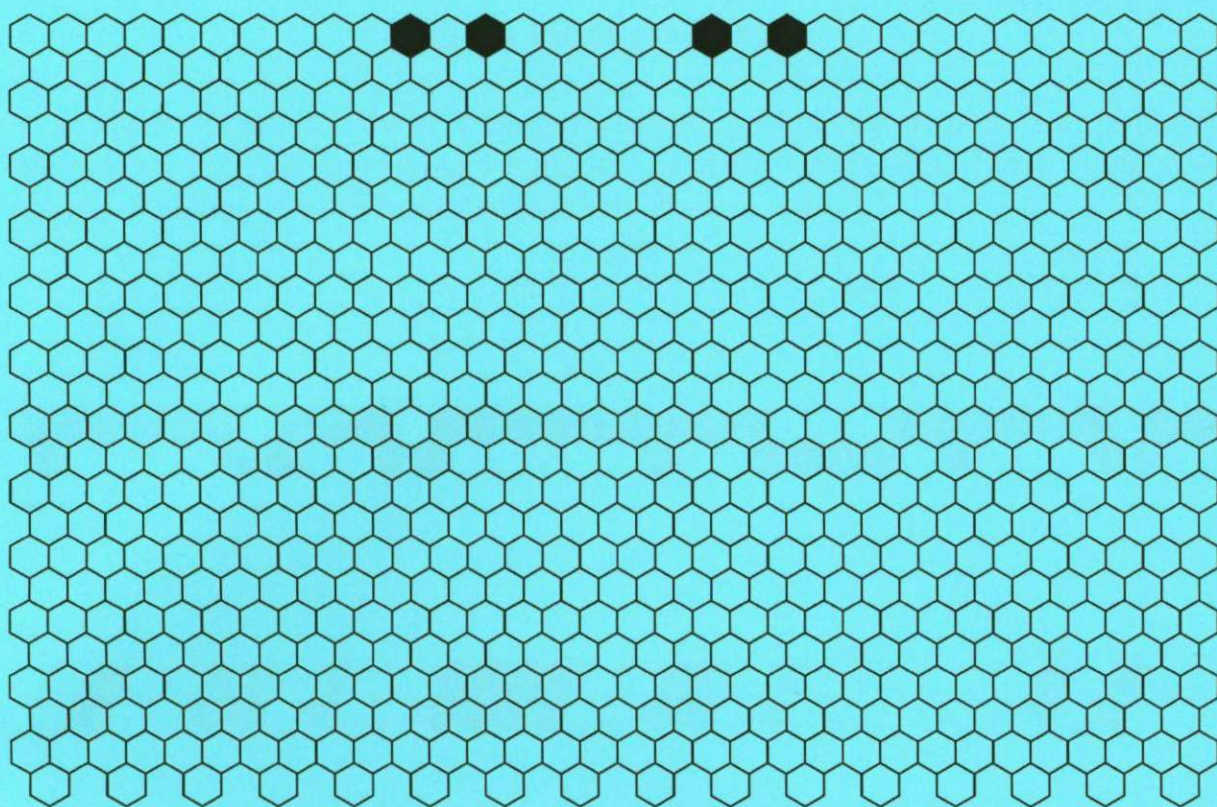
Pascalův trojúhelník představuje tvořící proces, ve kterém roste řada po řadě buněk podle určitých pravidel. Uvažujme obarvování buněk podle určitého pravidla. Např. obarvení buněk obsahujících lichá čísla černě a buněk obsahujících sudá čísla bíle. Takto mohou být vytvořeny geometrické obrazce nebo struktury. Pokud jsou tato pravidla změněna, objeví se nové struktury. Procesy tohoto typu se nazývají *cellular automata* čili buněčná schémata. Bylo objeveno mnoho užitečných aplikací buněčných schémat, včetně simulování obtékání předmětu tekutinou. Tato aktivita je navržena pro zavedení a zkoumání obarvovacích tabulek.

1. Tato obarvovací tabulka má čtyři části. Podle těchto obrázků vyslovte pravidla pro obarvení buněk podle barvy dvou buněk těsně nad považovanou buňkou.



Obr. 15

2. Použijte pravidla z obarvovací tabulky pro dokončení obarvení všech zbývajících řad v tomto poli.
3. Jaký barevný obrazec vidíte? Jaký má vztah k Pascalově trojúhelníku? Jaký má vztah k Sierpinskému trojúhelníku?



Obr. 16

1.12 B PRACOVNÍ LIST

Studujte obarvení dvou postupných řad z buněčného pole na obrázku. Vytvořte příslušné obarvovací tabulku, jestliže obarvování každé buňky je založeno na barvě dvou buněk přesně nad ní.

4.



5.

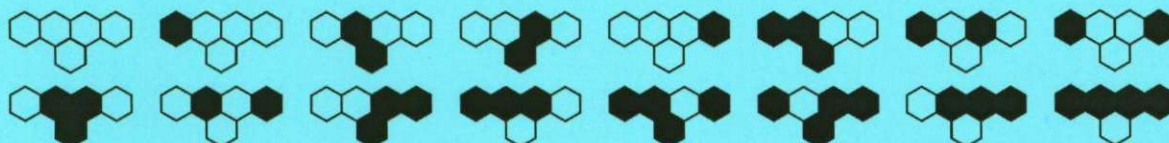


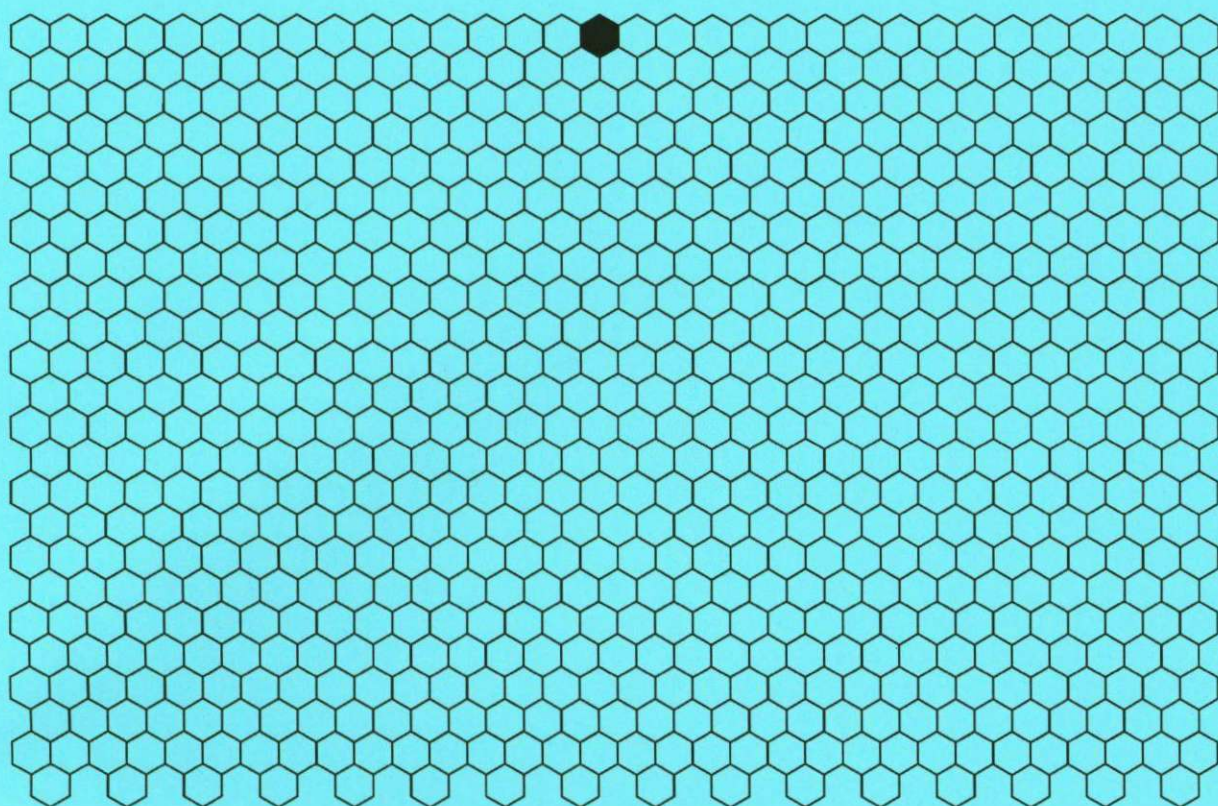
6. Kolik rozdílných obarvovacích tabulek možno vytvořit na základě dvou buněk? Jestliže obarvení buňky je založeno na barvách čtyřech buněk přesně nad ní, kolik odlišných možností musí být uvedeno v každé obarvovací tabulce?

.....

.....

7. Použijte uvedenou obarvovací tabulku pro dokončení obarvení tohoto buněčného pole. Kde jste již mohli vidět výslednou strukturu.

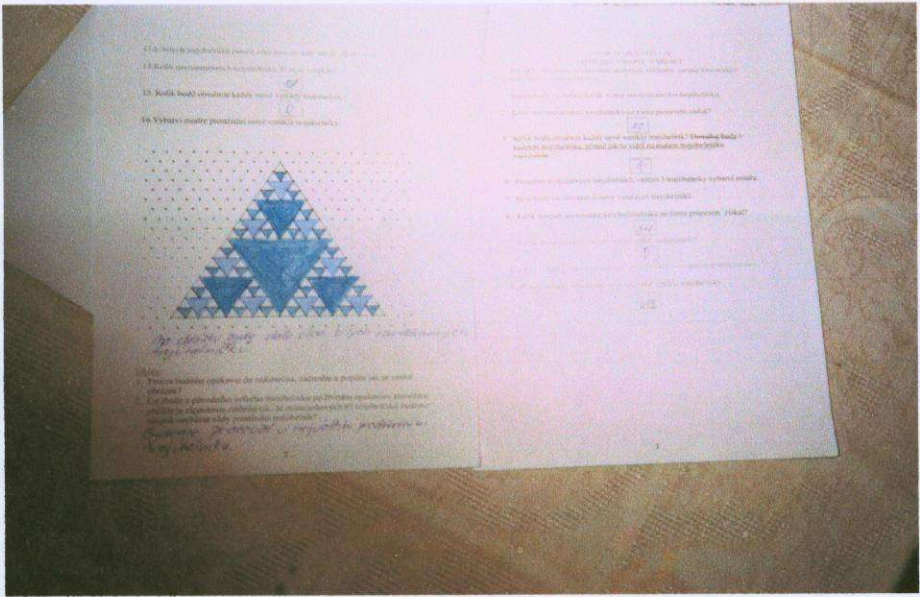




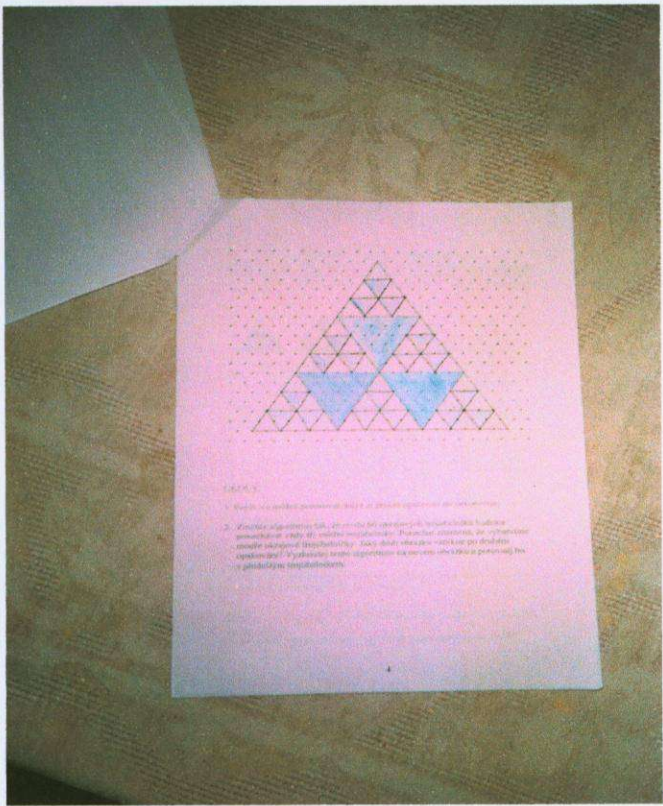
Obr. 17

Fotografická příloha

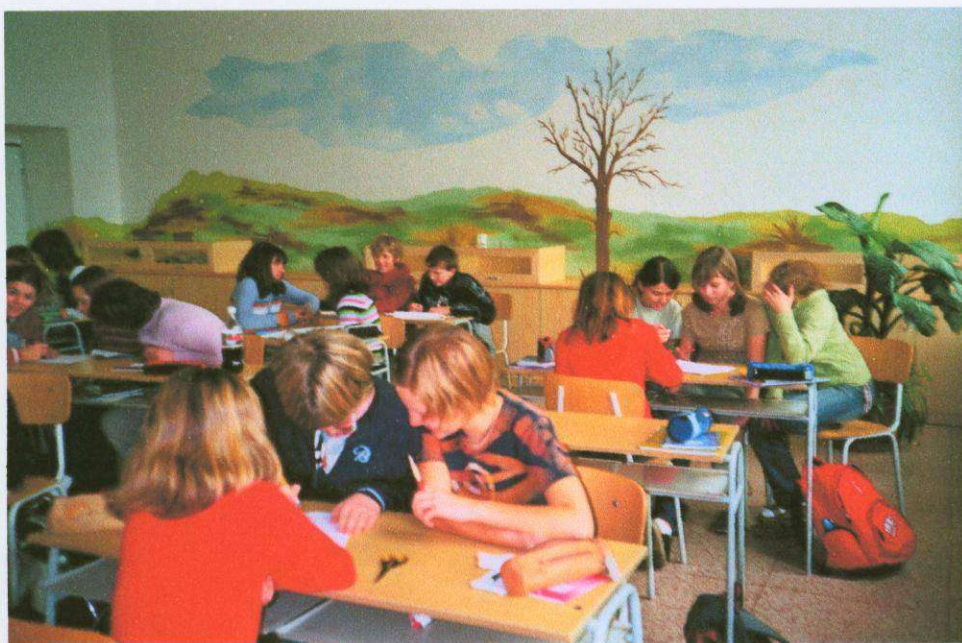
VII. ročník, II Základní škola v Jindřichově Hradci. MPL a jejich použití v praxi.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3