



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Diferenciální rovnice a jejich aplikace

Vypracovala: Veronika Mládková
Vedoucí práce: Mgr. Hana Štěpánková, Ph.D.
České Budějovice, 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Diferenciální rovnice a jejich aplikace jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích _____

podpis

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat především mé vedoucí paní Mgr. Haně Štěpánkové Ph.D. za cenné rady, připomínky a výborné vedení, díky kterému jsem zvládla dokončit svou absolventskou práci, která má název „Diferenciální rovnice a jejich aplikace“ v řádném termínu. Dále bych poděkovala svému přítelovi za podporu a pomoc. Také chci poděkovat své rodině za podporu jak při studiu, tak i při psaní samotné absolventské práce.

Anotace

Má bakalářská práce pojednává o diferenciálních rovnicích a jejich aplikacích. Cílem mé bakalářské práce bylo vytvořit soubor aplikačních úloh na toto téma z různých oborů a ukázat tak velké zastoupení matematiky v běžném životě. V práci jsou uvedeny příklady různých situací a dějů, které se dají popsat diferenciálními rovnicemi a u kterých po dořešení rovnice zjistíme vztah mezi zkoumanými objekty. Jsou to např. zákon radioaktivního rozpadu, intenzita světla a růst rostliny.

Annotation

My bachelor thesis focuses on differential equations. The goal of this thesis is to create a set of application tasks for this topic from various disciplines and to show big representation of math in normal life. There are mentioned examples of various situations and processes in this thesis, which we can describe by differential equations and after solving this equations, we get relationship between examined objects. It's for example law of radioactive decay, intensity of light and growth of plant.

Obsah

Seznam obrázků	6
1 Úvod	7
2 Příklady z matematiky	8
2.1 Integrační faktor	8
2.2 Rovnice se separovatelnými proměnnými	10
2.3 Ropná skvrna	15
2.4 Bavlník	16
2.5 Pivo	18
2.6 Geometrická aplikace rovnic 1. řádu	21
2.7 Homogenní rovnice	26
2.8 Bernoulliho rovnice	36
3 Příklady z fyziky	47
3.1 Vražda	47
3.2 Polévka	49
3.3 Zákon radioaktivního rozpadu	51
3.4 Atom	52
3.5 Intenzita světla	53
4 Závěr	55
Literatura	56

Seznam obrázků

2.1	Graf funkce $y = 6 + c e^{-2x}$ pro $c = 0, c = \pm 1$ a $c = \pm 2$	9
2.2	Graf funkce $y = \sin(\tan x + x + c)$ pro $c = \pm 1$	11
2.3	Graf funkce $y = C e^{-\frac{1}{x^2}}$ pro $C = \pm 1, C = \pm 2$	13
2.4	Graf funkce $y = C \cdot x + 1 \cdot e^{-x}$ pro $C = \pm 1, C = \pm 2$	14
2.5	Graf funkce $y = \sqrt[3]{3kx}$	16
2.6	Graf funkce $y = 6 - 2e^{-\frac{x}{100}}$	21
2.7	Graf funkce $C = y^2 + \frac{x^2}{2}$ pro $C = 1, 2, 3, 4, 5, 6$	23
2.8	Graf funkce $y^2 = C (y + x)$ pro $C = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ a $y = -x$	26
2.9	Graf funkce $y = 2x \ln(xc)$ pro $c = \pm 1, c = \pm 2$	27
2.10	Graf funkce $y^2 + 2xy + x^2 = x^3c$ pro $c = \pm 1, c = \pm 2$ a pro $c = 0$	29
2.11	Graf rovnice $0 = y - 2x + x^3C(y + x)$ pro $C = \pm 1, \pm 2, 0$ a $y = -x$	31
2.12	Graf rovnice $0 = x^2 - y^2 - Cx$ pro $C = \pm 2, y = \pm x$	32
2.13	Graf rovnice $C = y^2 + x^2 - y + x - xy + \frac{1}{3}$ pro $C = 1, 2, 3, 8$	35
2.14	Graf funkce $y = \frac{2x}{x^2+C}$ pro $C = \pm 1, C = \pm 2$	37
2.15	Graf funkce $y^2 = \frac{2}{[(x+1)^2+c] \cdot (x+1)^2}$ pro $c = \pm 1$	39
2.16	Graf rovnice $y = \sqrt[3]{x^3 + cx^2}$ pro $c = \pm 1, c = \pm 2, c = 0$	41
2.17	Graf funkce $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}$ pro $C = \pm 1, C = \pm 2$	44
2.18	Graf funkce $y = \frac{1}{\ln x +1+C}$ pro $C = \pm 1, C = \pm 2$	46
3.1	Graf funkce $y = 75e^{-0,07x} + 25$	50

Kapitola 1

Úvod

Z historického hlediska můžeme říci, že matematika jako vědní disciplína vznikla ze zcela konkrétních potřeb zaznamenat a popsat různé reálné situace. Pomocí matematických modelů, se dá zjistit řada důležitých údajů a vztahů. Někdy se zdá, že teorie převažuje nad jejím praktickým využitím.

Motivací této bakalářské práce bylo především studium na této pedagogické fakultě, kde mě probíraná látka - diferenciální rovnice zaujala.

Cílem mé bakalářské práce je ukázat využití matematiky, konkrétních diferenciálních rovnic, v praxi. Vytvořit soubor aplikačních příkladů souvisejících s problematikou diferenciálních rovnic. U příkladů uvést jasný a srozumitelný popis a řešení, případně je doplnit názorným obrázkem. Dalším cílem je prostudovat různé materiály, které se týkají praktického využití diferenciálních rovnic.

Struktura mé bakalářské práce je následující: kapitola 1 - úvod, kapitola 2 pojednává o diferenciálních rovnic v oboru matematiky, kde můžeme najít diferenciální rovnice: integračního faktu, separace proměnných, homogenní, bernoulliho a aplikační příklady. Kapitola 3 pojednává o užití diferenciálních rovnic v oboru fyziky, kde můžete najít příklad např. zákon radioaktivního rozpadu nebo intenzitu světla a kapitola 4 je závěrem mé bakalářské práce.

Má bakalářská práce je psaná v programu $\text{\LaTeX}$. Obrázky jsou tvořeny v programu GeoGebra.

Kapitola 2

Příklady z matematiky

Nejprve na několika příkladech připomeňme způsoby řešení diferenciálních rovnic.

2.1 Integrační faktor

Řešte diferenciální rovnici $y' + 2y = 12$. [7]

Poznámka: Tato rovnice se dá řešit pomocí integračního faktoru, ale také metodou separace proměnných. My si ukážeme oba dva způsoby.

Pomocí integračního faktoru:

Řešení:

$$y' + 2y = 12,$$

$$a(x) = 2,$$

$$b(x) = 12.$$

Vypočítáme si integrační faktor.

$$A(x) = \int 2 \, dx = 2x \Rightarrow e^{2x}.$$

Nyní zderivujeme $(y \cdot e^{2x})'$.

$$(y \cdot e^{2x})' = y' \cdot e^{2x} + y \cdot 2e^{2x},$$

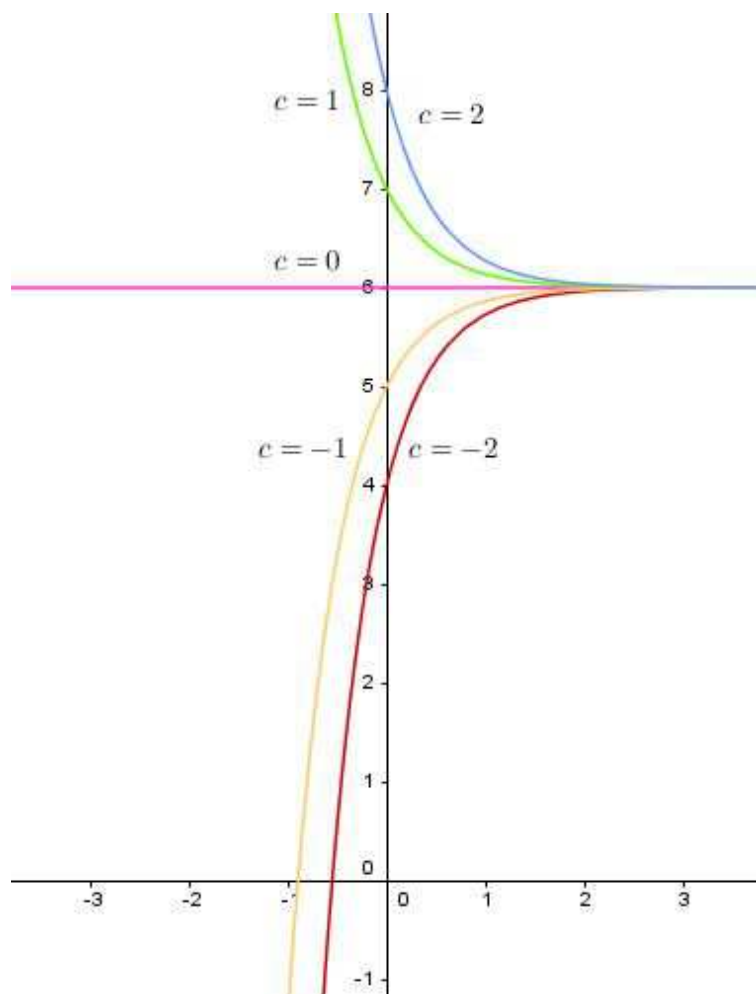
$$(y \cdot e^{2x})' = e^{2x}(y' + y).$$

Roznásobíme zadanou rovnici $y' + 2y = 12$ integračním faktorem e^{2x} . Pak

$$\begin{aligned} e^{2x} \cdot (y' + 2y) &= 12e^{2x}, \\ (y \cdot e^{2x})' &= 12e^{2x}, \\ \int (y \cdot e^{2x})' dx &= \int 12e^{2x} dx, \\ y \cdot e^{2x} &= 12 \cdot \frac{e^{2x}}{2} + c, \\ y \cdot e^{2x} &= 6e^{2x} + c, \\ y &= e^{-2x} \cdot (6e^{2x} + c), \\ y &= 6 + c e^{-2x}. \end{aligned}$$

Řešením zadané rovnice je funkce $y = 6 + c e^{-2x}$ pro $x \in \mathbf{R}$, kde $c \in \mathbf{R}$.

Graf funkce y pro $c = 0$, $c = \pm 1$ a $c = \pm 2$ je znázorněn na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Graf funkce $y = 6 + c e^{-2x}$ pro $c = 0$, $c = \pm 1$ a $c = \pm 2$.

Metoda separace proměnných:

Zadanou rovnici budeme řešit pomocí separace proměnných, to znamená, že proměnnou x dáme na jednu stranu a y na druhou stranu rovnice.

Řešení:

$$\begin{aligned}y' + 2y &= 12, \\y' &= 12 - 2y, \\y' &= 2 \cdot (6 - y).\end{aligned}$$

Předpokládejme, že $y \neq 6$, pak

$$\begin{aligned}\frac{y'}{(6-y)} &= 2, \\\int \frac{1}{6-y} dy &= \int 2 dx, \\-\ln |6-y| &= 2x + c, \\e^{\ln |6-y|} &= e^{-2x-c}, \\6-y &= \pm e^{-2x-c}.\end{aligned}$$

Zvolíme $\pm e^{-c} = C$ a dostáváme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y = 6 - Ce^{-2x} \quad \text{pro } x \in \mathbf{R}, \text{ kde } C \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

Vrátíme-li se k předpokladu $y \neq 6$, měli bychom ověřit, zda funkce $y = 6$ také není řešením zadané rovnice. Po dosazení do zadání vychází $12 = 12$. To znamená, že i funkce $y = 6$ je řešením rovnice. Všimněme si, že toto řešení bychom získali z obecného řešení volbou konstanty $C = 0$. Souhrnně můžeme napsat $y = 6 - Ce^{-2x}$ pro $x \in \mathbf{R}$, kde $C \in \mathbf{R}$.

Řešení je stejné, jako u způsobu výpočtu pomocí integračního faktoru.

2.2 Rovnice se separovatelnými proměnnými

Najděte obecná řešení následujících rovnic:

- $y' \cdot \cos^2 x = (1 + \cos^2 x) \cdot (1 - y^2)^{\frac{1}{2}} \quad [4]$

Řešení:

Zadanou rovnici budeme řešit pomocí separace proměnných.

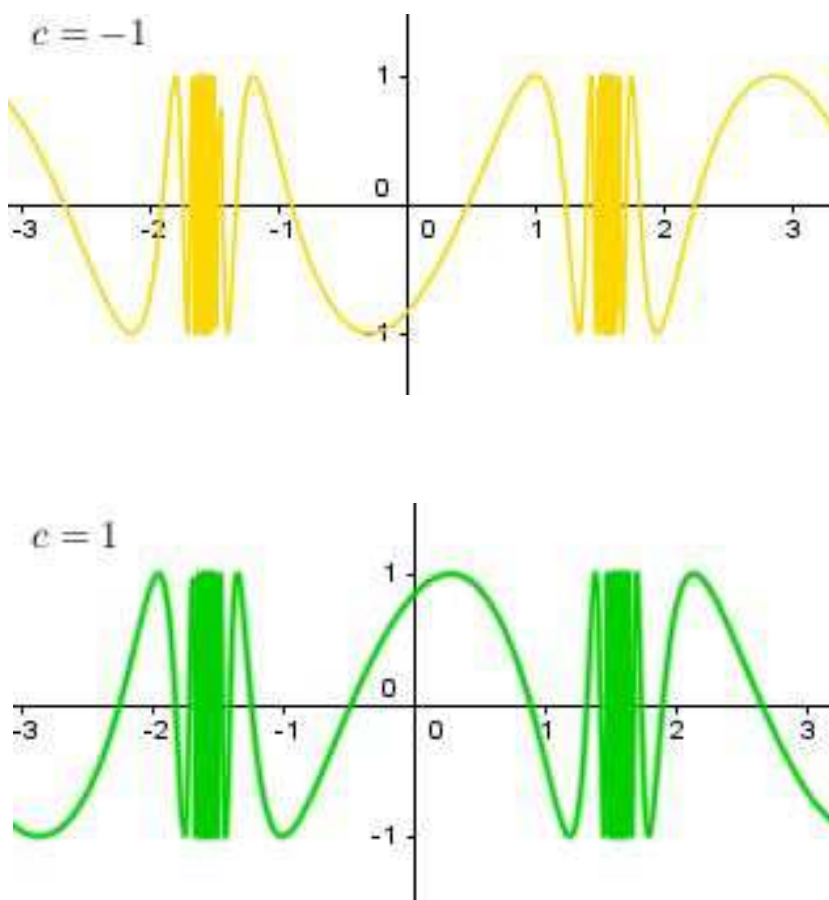
$$\begin{aligned} y' \cdot \cos^2 x &= (1 + \cos^2 x) \cdot (1 - y^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{y'}{(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}, \text{ kde } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, y \neq \pm 1. \end{aligned}$$

Nyní tuto rovnici zintegrujeme a vyjádříme hodnotu y .

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}} dy &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx, \\ \arcsin y &= \tan x + x + c, \\ y &= \sin(\tan x + x + c) \text{ pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ kde } C \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (2. 1. 1)$$

Navíc i funkce $y = 1$ a $y = -1$ jsou tzv. singulárními řešeními zadané rovnice.

Na obrázku 2.2 můžeme vidět graf funkce (2. 1. 1) pro $c = \pm 1$.



Obrázek 2.2: Graf funkce $y = \sin(\tan x + x + c)$ pro $c = \pm 1$.

$$\bullet \quad \frac{x^3 dx}{\sin y} + \frac{y dy}{x} = 0 \quad [4]$$

Řešení:

Pomocí separace proměnných získáme obecné řešení v implicitním tvaru.

$$\begin{aligned} \frac{x^3 dx}{\sin y} + \frac{y dy}{x} &= 0, \\ \frac{x^3 dx}{\sin y} &= -\frac{y dy}{x}, \\ x^4 dx &= -y \cdot \sin y dy, \\ \int x^4 dx &= -\int y \cdot \sin y dy, \\ \frac{x^5}{5} + c &= y \cdot \cos y - \sin y. \end{aligned}$$

Poznámka: Integrál $-\int y \cdot \sin y dy$ počítáme pomocí metody per partes, že

$$\begin{array}{ll} u = y & u' = 1 \\ v' = \sin y & v = -\cos y \end{array}$$

$$\text{pak } -\int y \cdot \sin y dy = y \cdot (-\cos y) - \int 1 \cdot (-\cos y) dy = -y \cdot \cos y + \int \cos y = -y \cdot \cos y + \sin y.$$

$$\bullet \quad 2y - x^3 \cdot y' = 0 \quad [4]$$

Řešení:

Tento příklad budeme řešit obdobně jako předchozí, opět zkusíme separaci proměnných.

$$\begin{aligned} 2y &= x^3 \cdot y', \\ 2x^{-3} &= \frac{y'}{y}, \text{ kde } y \neq 0, x \neq 0. \end{aligned}$$

Nyní tuto rovnici zintegrujeme a vyjádříme y .

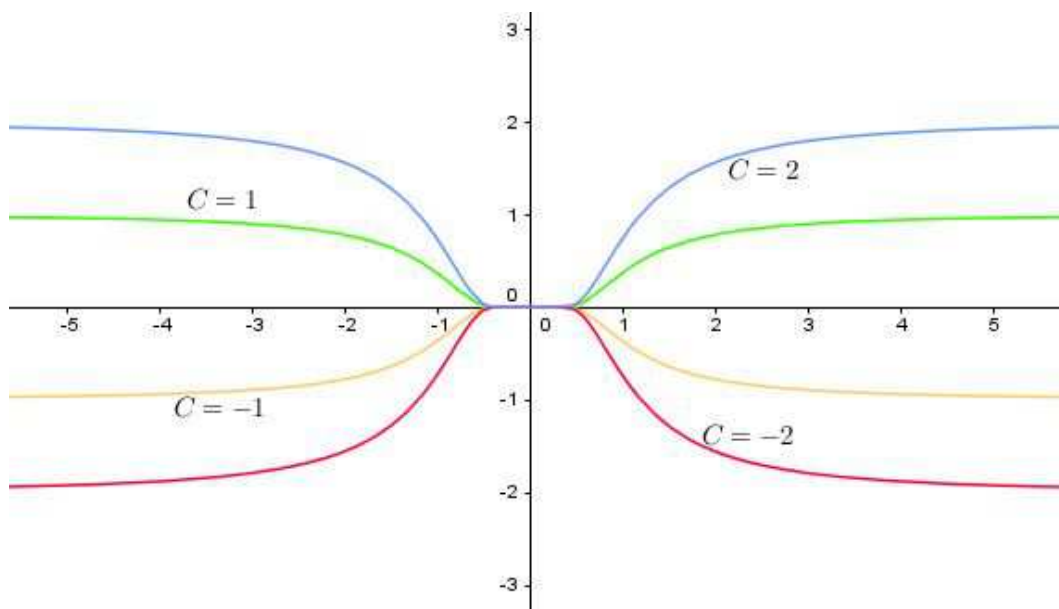
$$\begin{aligned} 2 \int x^{-3} dx &= \int \frac{1}{y} dy, \\ 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + c &= \ln |y|, \\ -\frac{1}{x^2} + c &= \ln |y|, \\ y &= \pm e^{-\frac{1}{x^2} + c}. \end{aligned}$$

Zvolíme $\pm e^c = C$ a zapíšeme obecné řešení rovnice

$$y = C e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ pro } x \neq 0, \text{ kde } C \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

Během výpočtu jsme vyloučili možné řešení $y = 0$. I tato funkce je řešením úlohy a získali bychom ji volbou $C = 0$ v obecném řešení diferenciální rovnice. Tedy $y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}$.

Na obrázku 2.3 můžeme vidět graf této funkce pro $C = \pm 1$, $C = \pm 2$.



Obrázek 2.3: Graf funkce $y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}$ pro $C = \pm 1$, $C = \pm 2$.

• $(x + 1) dy + xy dx = 0$ [4]

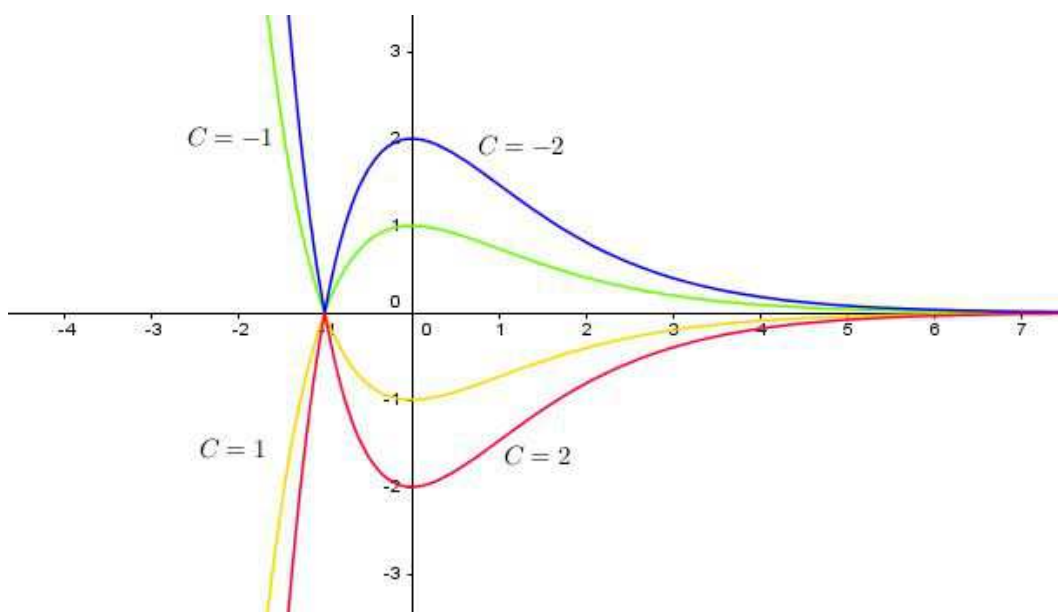
Řešení:

Rovnici budeme řešit opět metodou separace proměnných.

$$\begin{aligned}
 (x + 1) dy + xy dx &= 0, \\
 (x + 1) dy &= -xy dx, \\
 \frac{1}{y} dy &= -\frac{x}{x + 1} dx, \quad \text{kde } x \neq -1, y \neq 0, \\
 \int \frac{1}{y} dy &= \int -\frac{x}{x + 1} dx, \\
 \ln |y| &= -\int \frac{x + 1 - 1}{x + 1} dx, \\
 \ln |y| &= -\int 1 - \frac{1}{x + 1} dx, \\
 \ln |y| &= -x + \ln |x + 1| + c, \\
 y &= \pm e^{c + \ln |x + 1| - x}.
 \end{aligned}$$

Zvolíme $\pm e^c = C$ a tedy $y = C \cdot |x + 1| \cdot e^{-x}$ pro $x \neq -1$, kde $C \in \mathbf{R} - \{0\}$. Protože ale funkce $y = 0$ je také řešením zadané rovnice, píšeme $y = C \cdot |x + 1| \cdot e^{-x}$ pro $x \neq -1$, kde $C \in \mathbf{R}$.

Na obrázku 2.4 je graf této funkce pro $C = \pm 1$, $C = \pm 2$.



Obrázek 2.4: Graf funkce $y = C \cdot |x + 1| \cdot e^{-x}$ pro $C = \pm 1$, $C = \pm 2$.

$$\bullet \quad e^{-s} \cdot \left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1 \quad [4]$$

Řešení:

Zadanou rovnici budeme řešit pomocí separace proměnných.

$$\begin{aligned} e^{-s} \cdot \left(1 + \frac{ds}{dt}\right) &= 1, \\ \left(1 + \frac{ds}{dt}\right) &= e^s, \\ \frac{ds}{dt} &= e^s - 1, \\ ds &= (e^s - 1) dt, \\ dt &= \frac{ds}{e^s - 1}. \end{aligned}$$

Rovnici zintegrujeme a dopočítáme.

$$\begin{aligned} \int dt &= \int \frac{ds}{e^s - 1}, \\ t &= \ln |1 - e^s| - s - \ln c, \\ t + s &= \ln \frac{1 - e^s}{c}, \\ e^{t+s} &= \frac{1 - e^s}{c}, \\ c e^s e^t &= 1 - e^s, \\ c e^s e^t + e^s &= 1, \\ e^s(e^t c + 1) &= 1, \\ e^{-s} &= e^t c + 1, \text{ kde } c \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

A nyní se podívejme na některé aplikace, u jejichž řešení se dá také využít metoda separace proměnných.

2.3 Ropná skvrna

Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že poloměr roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Sestavte diferenciální rovnici popisující tento proces a vyřešte ji - tj. zjistěte, jaká funkce popisuje proces zvětšování poloměru olejové skvrny v čase. [1]

Řešení:

Označme:

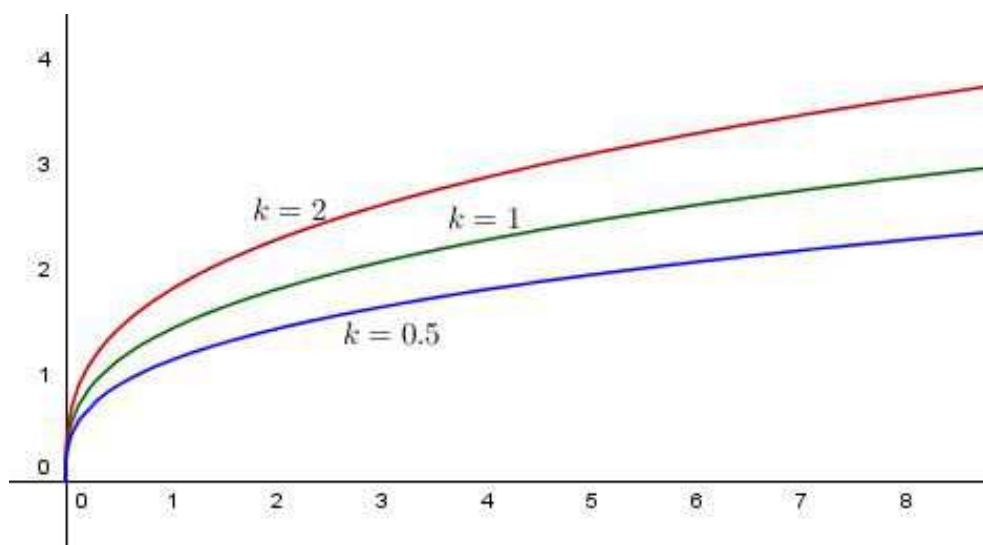
x ... čas

y ... poloměr

Závislost velikosti poloměru y na čase x označme jako funkci $y(x)$. Ze zadání víme, že poloměr roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Změnu poloměru y v čase x ($x \geq 0$) pak můžeme vyjádřit derivací funkce $y(x)$ (pro jednoduchost píšeme y'). To matematicky lze zapsat $y' = k \cdot \frac{1}{y^2}$. Tuto diferenciální rovnici vyřešíme separací proměnných, kde $k \in \mathbf{R}^+$ (k je koeficient vyjadřující kvalitu ropy).

$$\begin{aligned}
 y' &= k \cdot \frac{1}{y^2}, \\
 \frac{dy}{dx} &= k \cdot \frac{1}{y^2}, \\
 \int y^2 dy &= k \int dx, \\
 \frac{y^3}{3} &= kx + c, \\
 y^3 &= 3(kx + c), \\
 y &= \sqrt[3]{3(kx + c)}, \text{ kde } c \in \mathbf{R}.
 \end{aligned}$$

Když v čase $x = 0$ bude poloměr $y = 0$, pak $0 = \sqrt[3]{c}$, tedy $c = 0$. Funkce vyjadřující popisovaný proces zvětšování poloměru olejové skvrny v čase x je $y = \sqrt[3]{3kx}$. Pro hodnoty koeficientu $k = 0,5$, $k = 1$ a $k = 2$ nakreslíme graf, který je na obrázku 2.5.



Obrázek 2.5: Graf funkce $y = \sqrt[3]{3kx}$.

2.4 Bavlník

První měsíc růstu u některých významných průmyslových plodin (kukuřice, sója, bavlna) je okamžitá rychlost růstu hmotnosti rostliny přímo úměrná již dosažené hmotnosti. Pokud čas měříme na dny, tak u bavlníku je koeficient této přímé úměrnosti roven 0,21.

Předpokládáme, že bavlníková rostlina dnes váží 70 mg. Za jak dlouho se její hmotnost zdvojnásobí? Kolik bude vážit za měsíc? [5]

Řešení:

Z fyzikálního hlediska víme, že okamžitá rychlost růstu hmotnosti rostliny je charakterizovaná derivací funkce. Pokud tedy funkci hmotnosti rostliny v závislosti na čase označíme jako $y(x)$, kde x vyjadřuje čas (ve dnech), pak okamžitá rychlost růstu je $y'(x)$.

Označme:

$$y(0) = 70 \text{ mg} \qquad \text{pro bavlník platí } k = 0,21$$

Nejprve si musíme sestavit obecnou rovnici růstu bavlníkové rostliny, abychom mohli zjistit odpovědi na kladené otázky. Tedy

$$y' = ky.$$

Separacích proměnných vyřešíme rovnici a obdržíme její obecné řešení.

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= k, \\ \frac{1}{y} dy &= k dx, \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int k dx, \\ \ln |y| &= kx + c, \\ |y| &= e^{kx+c}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že y vyjadřuje hmotnost rostliny je $|y| = y$. Tedy

$$\begin{aligned} y &= e^{kx+c}, \\ y &= Ce^{kx}. \end{aligned}$$

Využijeme-li počáteční podmínku, že v čase $x = 0$ je hmotnost rostliny 70 mg (tj. $y(0) = 70 \text{ mg}$), bude $C = 70$. Funkce popisující zkoumaný jev je

$$y(x) = 70e^{0,21x}. \quad (*)$$

Hmotnost rostliny bude dvojnásobná, když rostlina bude vážit 140 mg. Dosadíme do

funkce (*) a vypočteme čas x .

$$140 = 70e^{0,21x},$$

$$2 = e^{0,21x},$$

$$\ln 2 = \ln e^{0,21x},$$

$$\ln 2 = 0,21x,$$

$$x = \frac{\ln 2}{0,21},$$

$$x \doteq 3,3.$$

Hmotnost bavlníkové rostliny se zdvojnásobí přibližně za 3,3 dny.

Dále nás zajímá kolik bude rostlina vážit za měsíc, nebo-li za 30 dní.

$$y(30) = 70 \cdot e^{0,21 \cdot 30},$$

$$y(30) = 38\,120.$$

Bavlníková rostlina bude vážit za měsíc 38 120 mg (tj. 38g).

2.5 Pivo

Ve velké nádrži je 500 galonů 4% piva. Rychlostí 5 galonů za minutu se do nádrže přidává 6% pivo. Piva se v nádrži důkladně rozmíchají a vzniklá směs se stejnou rychlostí vypouští z nádrže ven. Kolikaprocentní pivo bude v nádrži po 1 hodině a po 2 hodinách? K jakému pivu bude situace konvergovat s rostoucím časem? [5]

Řešení:

Označme:

V ...objem

y ... objem 100% alkoholu v nádrži

$\frac{y}{V}$... objem 100% alkoholu v 1 galonu

r ...průtok piva

Pomocí přímé úměry zjistíme, kolik galonů 100% alkoholu je v nádrži.

$$500 \text{ gal} \dots 100\%$$

$$5 \text{ gal} \dots 100 \%$$

$$x \text{ gal} \dots 4\%$$

$$x \text{ gal} \dots 6 \%$$

$$x = \frac{4 \cdot 500}{100} = 20 \text{ gal}$$

$$x = \frac{6 \cdot 5}{100} = 0,3 \text{ gal}$$

Sestavíme diferenciální rovnici, která popisuje děj v nádrži a pokusíme se jí vyřešit.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{r}{V} \cdot y + 0,3, \\ \frac{dy}{-\frac{r}{V} \cdot y + 0,3} &= 1dx, \\ \int \frac{dy}{-\frac{r}{V} \cdot y + 0,3} &= \int 1dx, \\ \frac{\ln |-\frac{r}{V} \cdot y + 0,3|}{-\frac{r}{V}} &= x + c, \\ \ln |-\frac{r}{V} \cdot y + 0,3| &= (x + c)(-\frac{r}{V}), \\ |-\frac{r}{V} \cdot y + 0,3| &= e^{(x+c)(-\frac{r}{V})}, \\ |-\frac{r}{V} \cdot y + 0,3| &= e^{-\frac{r}{V} \cdot x - \frac{r}{V} \cdot c}, \\ -\frac{r}{V} \cdot y + 0,3 &= \pm e^{c \cdot \frac{-r}{V}} \cdot e^{-x \cdot \frac{r}{V}}, \\ -\frac{r}{V} \cdot y &= K \cdot e^{-\frac{r}{V} \cdot x} - 0,3, \\ y &= \frac{K \cdot e^{-\frac{r}{V} \cdot x} - 0,3}{-\frac{r}{V}}.\end{aligned}$$

Nyní do řešení dosadíme hodnoty, které známe, tedy za $x = 0$; $V = 100$; $y = 20$; $r = 1$ a vypočítáme konstantu K .

$$\begin{aligned}20 &= \frac{K e^0 - 0,3}{-\frac{1}{100}}, \\ 20 &= \frac{-0,3 + K}{\frac{1}{100}}, \\ K &= 0,1.\end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme obecnou rovnici

$$\begin{aligned}y &= \frac{e^{-\frac{1}{100}x} \cdot 0,1 - 0,3}{-\frac{1}{100}} \\ y &= 30 - 10e^{-\frac{x}{100}}.\end{aligned}$$

Tato závislost vyjadřuje množství % alkoholu v nádrži za určitý čas.

Kolikaprocentní bude pivo po 1 hodině?

Zajímá nás funkční hodnota výsledné funkce v čase $x = 1$ hodina = 60 minut.

$$\begin{aligned}y &= 30 - 10e^{-\frac{60}{100}}, \\ y &\doteq 24,5 \text{ gal.}\end{aligned}$$

Převédeme na procenta pomocí přímé úměry

$$\frac{24,5 \cdot 100}{500} = 4,9\%.$$

Pivo po jedné hodině procesu bude 4,9%.

Jak silné bude pivo po 2 hodinách?

Tentokrát hodnota $x = 2$ hodiny = 120 minut, dosadíme do obecné rovnice a vypočteme

$$\begin{aligned} y &= 30 - 10e^{-\frac{120}{100}}, \\ y &\doteq 27 \text{ gal.} \end{aligned}$$

Opět převedeme na procenta

$$\frac{27}{500} \cdot 100 = 5,4\%.$$

Pivo bude 5,4%.

K jakému pivu bude situace konvergovat s rostoucím časem?

Odpověď na tuto otázku vyřešíme výpočtem limity pro $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (30 - 10e^{-\frac{x}{100}}) = 30 \text{ gal.}$$

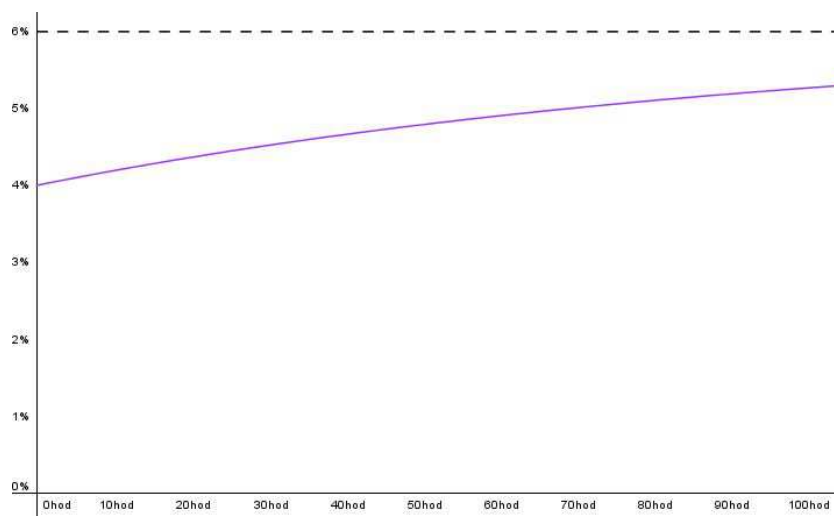
Převédeme na procenta

$$\frac{30}{500} \cdot 100 = 6\%.$$

S rostoucím časem bude situace konvergovat k 6% pivu, což odpovídá představě míchání 6% piva do 4% po dostatečně dlouhou dobu. Abychom nemuseli stále přepočítávat galony na %, můžeme upravit obecné řešení na tvar

$$\begin{aligned} y &= \frac{30 - 10e^{-\frac{x}{100}}}{500} \cdot 100, \\ y &= 6 - 2e^{-\frac{x}{100}}. \end{aligned}$$

Nyní funkce popisuje kolika % pivo je v nádrži v čase x . Graf této funkce můžeme vidět na obrázku 2.6.

Obrázek 2.6: Graf funkce $y = 6 - 2e^{-\frac{x}{100}}$.

2.6 Geometrická aplikace rovnic 1. řádu

Další aplikací, se kterou se můžeme setkat při řešení diferenciálních rovnic je aplikace geometrická. Můžeme určovat tzv. izogonální trajektorie soustavy čar.

Poznámka: Izogonální trajektorie soustavy čar $F(x, y, c) = 0$ je křivka, která každou čáru dané soustavy protíná pod zadaným úhlem φ . Ortogonální trajektorie soustavy čar $F(x, y, c) = 0$ je křivka, která každou čáru dané soustavy protíná pod pravým úhlem. Ortogonální trajektorie je totiž speciální příklad izogonální.

Najděte ortogonální trajektorie soustavy křivek:

- $y = ax^2$ [4]

Řešení:

Nejprve sestavíme diferenciální rovnici původní soustavy roviných čar. Pomocí rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \text{ kde funkce } F(x, y, c) = 0, \quad (**)$$

do které dosadíme zadanou křivku, určíme její derivace a vyjádříme parametr a .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(y - ax^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y - ax^2)}{\partial y} y' &= 0, \\
-2xa + y' &= 0, \\
y' &= 2xa, \\
a &= \frac{y'}{2x}, \text{ kde } x \neq 0.
\end{aligned}$$

Parametr a dosadíme do zadané rovnice, čímž získáme potřebnou diferenciální rovnici.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{y'}{2x} x^2, \\
y &= \frac{y'}{2} x, \\
2y &= y' x, \\
y' &= \frac{2y}{x}.
\end{aligned}$$

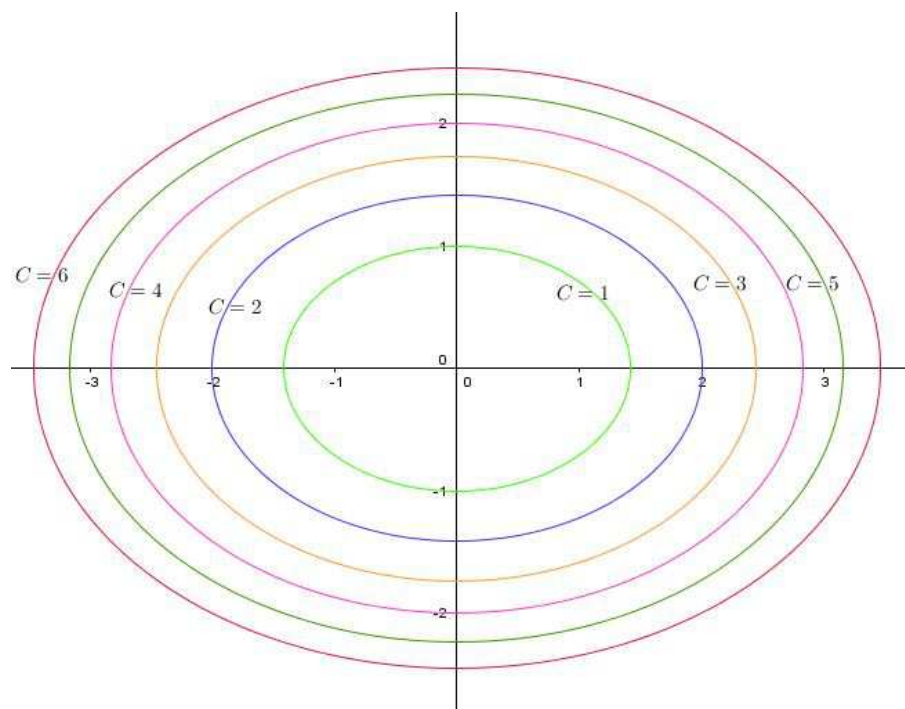
Dalším krokem je sestavit diferenciální rovnici soustavy izogonální trajektorií s úhlem $\alpha = 90^\circ$. To znamená, že diferenciální rovnici soustavy ortogonálních trajektorií dostaneme z diferenciální rovnice systému $F(x, y, a) = 0$, jestliže v této diferenciální rovnici nahradíme y' výrazem $-\frac{1}{y'}$.

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{y'} &= \frac{2y}{x}, \\
x &= -2yy', \\
\int x \, dx &= -2 \int y \, dy, \\
x^2 + c &= -2y^2, \\
-\frac{x^2}{2} - \frac{c}{2} &= y^2.
\end{aligned}$$

Označíme $C = -\frac{c}{2}$, pak

$$C = y^2 + \frac{x^2}{2}, \text{ kde } C \in \mathbf{R}.$$

Ortogonální trajektorie popsané touto rovnicí jsou zřejmě elipsy. Na obrázku 2.7 je graf křivky $C = y^2 + \frac{x^2}{2}$ pro $C = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.



Obrázek 2.7: Graf funkce $C = y^2 + \frac{x^2}{2}$ pro $C = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Sestavte diferenciální rovnici pro trajektorii, protínající křivky dané soustavy pod daným úhlem φ .

- $y = kx$, $\varphi = 60^\circ$ [4]

Řešení:

Tento příklad budeme řešit podobně jako předcházející. Nejdříve sestavíme diferenciální rovnici původních čar. Za pomoci rovnice (***) vyjádříme parametr k .

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y - kx)}{\partial x} + \frac{\partial(y - kx)}{\partial y} y' &= 0, \\ -k + y' &= 0, \\ k &= y'. \end{aligned}$$

Parametr k dosadíme do zadané rovnice a vyjádříme y' .

$$\begin{aligned} y &= y'x, \\ y' &= \frac{y}{x}, \text{ kde } x \neq 0. \end{aligned}$$

Nyní sestavíme diferenciální rovnici soustavy izogonálních trajektorií s $\varphi = 60^\circ$ pomocí vzorce

$$\tan \varphi = \frac{y' - f(x, y)}{1 + y'f(x, y)}. \quad [4]$$

$$\begin{aligned}
\tan 60^\circ &= \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y'y}{x}}, \\
\pm\sqrt{3} &= \frac{\frac{y'x-y}{x}}{\frac{x+y'y}{x}}, \\
\pm\sqrt{3} &= \frac{y'x-y}{x+y'y}, \\
\pm\sqrt{3}(x+yy') &= y'x-y, \\
\pm\sqrt{3}x \pm \sqrt{3}y'y &= y'x-y, \\
\pm\sqrt{3}x+y &= y'x \pm \sqrt{3}y'y, \\
\pm\sqrt{3}+y &= y'(x \pm \sqrt{3}y).
\end{aligned}$$

Najděte trajektorii, protínající křivky dané soustavy pod úhlem 45° (úhel odečítáme v záporném smyslu).

$$\bullet \quad y = x \ln cx, \quad \varphi = 45^\circ \quad [4]$$

Řešení:

Sestavíme si rovnici pomocí vzorce (***) a vyjádříme si parametr c .

$$\begin{aligned}
-\ln cx - 1 + y' &= 0, \\
y' - 1 &= \ln cx, \\
e^{y'-1} &= cx, \\
\frac{e^{y'-1}}{x} &= c.
\end{aligned}$$

Nyní se vrátíme zpět k zadané rovnici, do které dosadíme parametr c .

$$\begin{aligned}
y &= x \ln \frac{xe^{y'-1}}{x}, \\
y &= x(y' - 1), \\
y &= xy' - x, \\
xy' &= y + x, \\
y' &= \frac{y+x}{x}.
\end{aligned}$$

Sestavíme diferenciální rovnici původní sestavy pomocí rovnice

$$\tan \varphi = \frac{y' + f(x, y)}{1 + y'f(x, y)}, \quad [4]$$

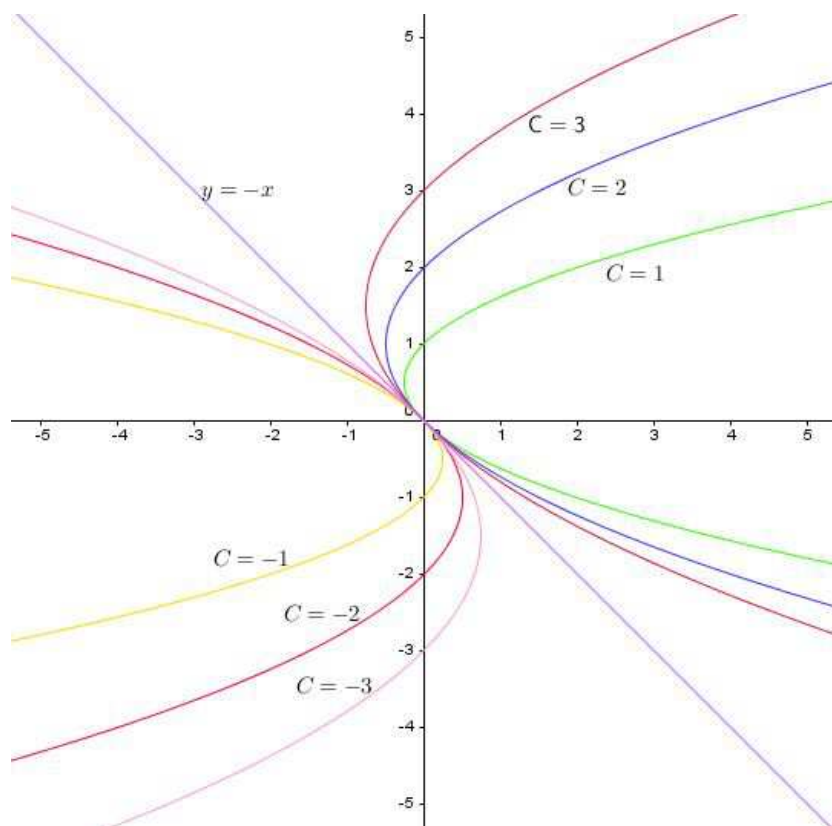
kde úhel budeme odečítat vzáporném smyslu.

$$\begin{aligned}
 \tan 45^\circ &= \frac{y' - \frac{y+x}{x}}{1 + y' \frac{y+x}{x}}, \\
 -1 &= \frac{y'x - y - x}{x} \cdot \frac{x}{x + y'y + xy'}, \\
 -1 &= \frac{y'x - y - x}{x + y'y + xy'}, \\
 -x + y'y - xy' &= y'x - y - x, \\
 y'y + 2y'x &= y, \\
 y'(y + 2x) &= y, \\
 y' \left(\frac{y}{x} + 2 \right) &= \frac{y}{x}, \quad \text{kde } x \neq 0.
 \end{aligned}$$

Jedná se o homogenní diferenciální rovnici, u které využijeme substituci (***) a vyřešíme.

$$\begin{aligned}
 (a'x + a) \cdot (a + 2) &= a, \\
 a'x + a &= \frac{a}{a + 2}, \\
 a'x &= \frac{a}{a + 2} - a, \\
 a'x &= \frac{a - a^2 - 2a}{a + 2}, \\
 a'x &= \frac{-(a^2 + a)}{a + 2}, \\
 \frac{a + 2}{a^2 + a} &= -\frac{1}{x}, \\
 \int \frac{a + 2}{a^2 + a} da &= - \int \frac{1}{x} dx, \\
 \ln a^2 - \ln(a + 1) &= -\ln x - \ln c, \\
 \ln \frac{a^2 xc}{a + 1} &= \ln 1, \\
 a^2 xc &= a + 1, \\
 \frac{y^2 xc}{x^2} &= \frac{y}{x} + 1, \\
 \frac{y^2 c}{x} &= \frac{y + x}{x}, \\
 y^2 c &= y + x, \\
 y^2 &= (y + x) \cdot \frac{1}{c}, \quad \text{kde } \frac{1}{c} = C, \\
 y^2 &= C (y + x), \quad \text{kde } C \in \mathbf{R}.
 \end{aligned}$$

Na obrázku 2.8 je graf této křivky pro $C = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ a $y = -x$.



Obrázek 2.8: Graf funkce $y^2 = C(y + x)$ pro $C = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ a $y = -x$.

2.7 Homogenní rovnice

Další metodou při řešení diferenciální rovnice může být zavedení vhodné substituce. U homogenních rovnic budeme používat substituci

$$a = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ax \Rightarrow y' = a'x + a. \quad (***)$$

Najděte obecná řešení následujících rovnic:

- $xy' = (2x + y) \quad [4]$

Řešení:

Nejprve si rovnici upravíme.

$$\begin{aligned} xy' &= (2x + y), \\ y' &= 2 + \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

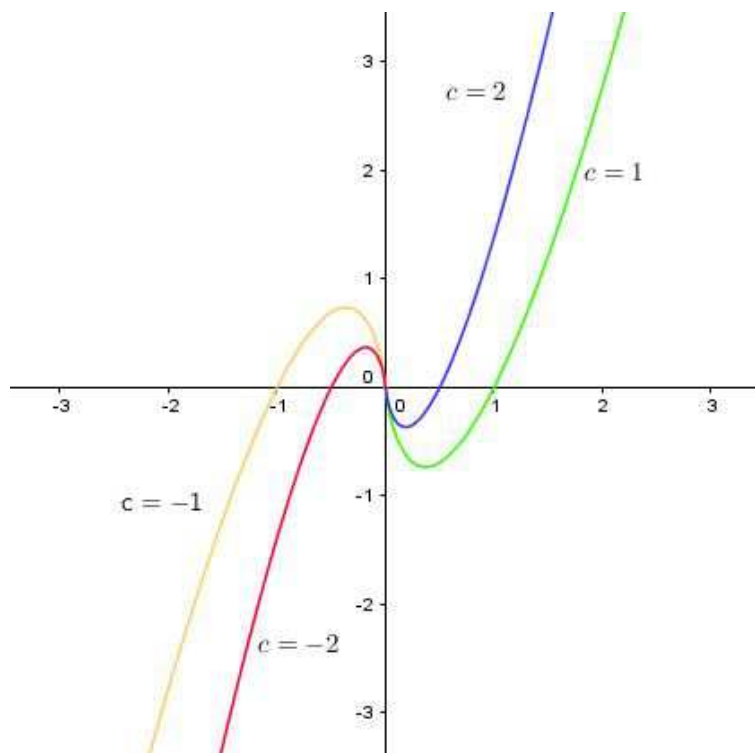
Do této rovnice dosadíme substituci $(***)$ a zjednodušíme.

$$\begin{aligned} a'x + a &= 2 + a, \\ a'x &= 2. \end{aligned}$$

Pomocí separace proměnných zjistíme obecné řešení rovnice.

$$\begin{aligned} a' &= \frac{2}{x} \text{ pro } x \neq 0, \\ \int da &= 2 \int \frac{1}{x} dx, \\ a &= 2(\ln x + \ln c), \\ \frac{y}{x} &= 2 \ln xc, \\ y &= 2x \ln xc, \text{ kde } c \neq 0 \text{ nebo } c \in \mathbf{R} - \{0\}. \end{aligned}$$

Na obrázku 2.9 je průběh funkce y pro $c = \pm 1$, $c = \pm 2$.



Obrázek 2.9: Graf funkce $y = 2x \ln(xc)$ pro $c = \pm 1$, $c = \pm 2$.

$$\bullet \quad 2xy' = (3y + x) \quad [4]$$

Řešení:

Ze zadané rovnice si vyjádříme y' .

$$\begin{aligned} 2xy' &= 3y + x, \\ y' &= \frac{3y}{2x} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

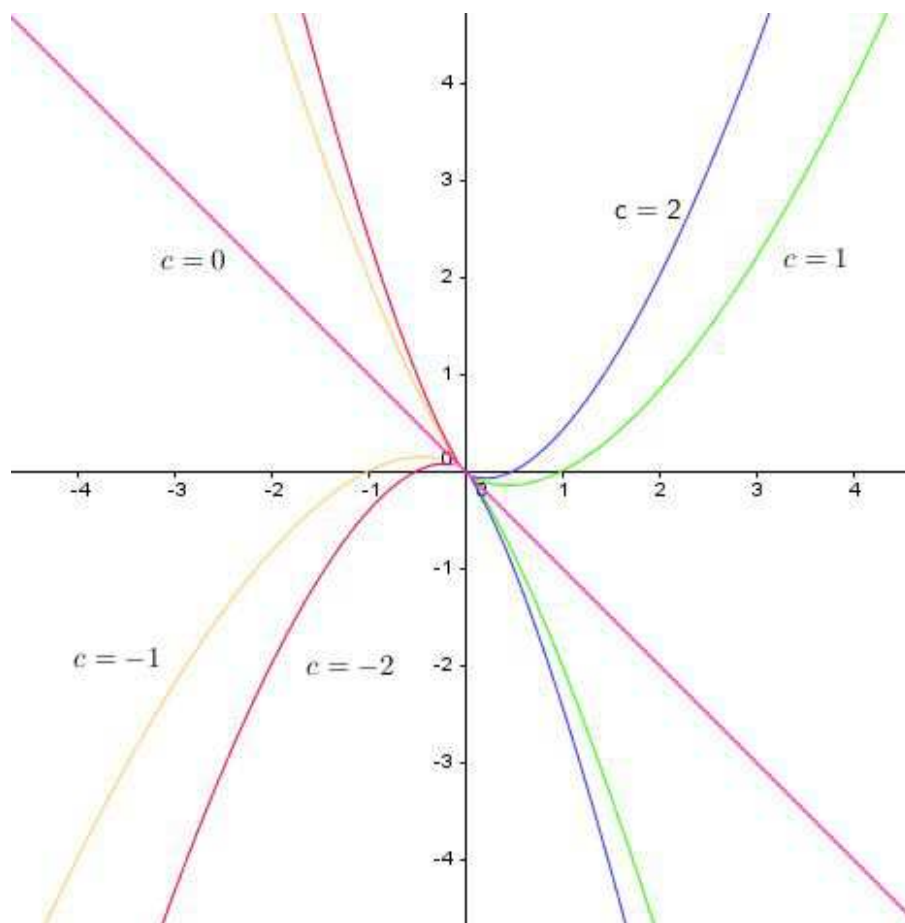
Nyní do této rovnice zavedeme substituci $(***)$ a vyřešíme.

$$\begin{aligned} a'x + a &= \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}, \\ a'x &= \frac{3}{2}a - a + \frac{1}{2}, \\ a'x &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}, \\ a'x &= \frac{1}{2}(a + 1), \\ 2 \cdot \frac{a'}{a + 1} &= \frac{1}{x}, \text{ kde } a \neq -1 \text{ (tj. } y \neq -x). \end{aligned}$$

Pomocí separace proměnných získáme obecné řešení v implicitním tvaru.

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{1}{a + 1} da &= \int \frac{1}{x} dx, \\ 2 \ln |a + 1| &= \ln |xc|, \\ (a + 1)^2 &= xc, \\ \left(\frac{y}{x} + 1\right)^2 &= xc, \\ \frac{y^2}{x^2} + 2 \cdot \frac{y}{x} + 1 &= xc, \\ y^2 + 2xy + x^2 &= x^3c, \text{ kde } c \in \mathbf{R} - \{0\}. \end{aligned}$$

Volbou $c = 0$ bychom získali řešení $y = -x$, které jsme v úlohách vyloučili, proto $y^2 + 2xy + x^2 = x^3c$, kde $c \in \mathbf{R}$. Na obrázku 2.10 můžeme vidět graf této funkce pro $c = \pm 1$, $c = \pm 2$ a $c = 0$.



Obrázek 2.10: Graf funkce $y^2 + 2xy + x^2 = x^3c$ pro $c = \pm 1$, $c = \pm 2$ a pro $c = 0$.

• $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ [2]

Řešení:

Do zadané rovnice můžeme rovnou dosadit substituci (***) a dořešíme rovnici separací proměnných.

$$\begin{aligned} a'x + a &= a^2 - 2, \\ a'x &= a^2 - a - 2, \\ \frac{a'}{a^2 - a - 2} &= \frac{1}{x}, \quad \text{kde } a \neq -1, a \neq 2. \end{aligned}$$

Zintegrujeme.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 - a - 2} da &= \int \frac{1}{x} dx, \\ \frac{1}{3} (\ln |2 - a| - \ln |a + 1|) &= \ln |x| + \ln |c|, \\ \ln \frac{2 - a}{a + 1} &= 3 \ln |xc|, \\ \ln \frac{2 - a}{a + 1} &= \ln |x^3 c^3| \quad \text{pro } x \neq 0, \text{ kde } c \in \mathbf{R} - \{0\}.\end{aligned}$$

Označíme $c^3 = C$, pak

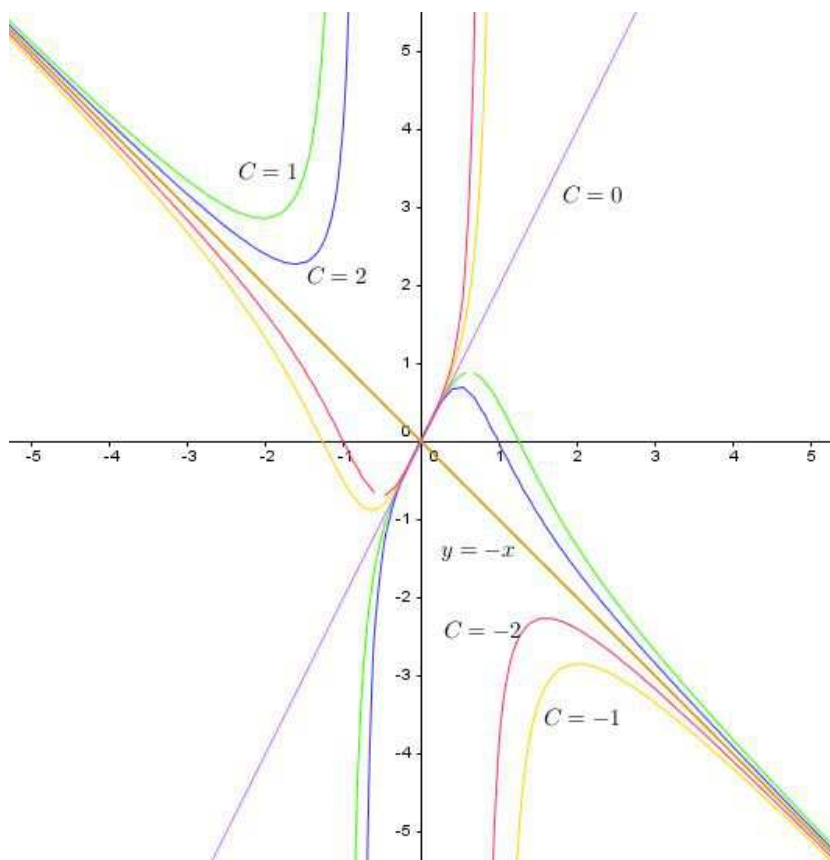
$$\frac{2 - a}{a + 1} = x^3 C. \quad (2.7.1)$$

Substituci (***) dosadíme do rovnice (2.7.1).

$$\begin{aligned}\frac{2 - \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} + 1} &= x^3 C, \\ \frac{\frac{2x - y}{x}}{\frac{y + x}{x}} &= x^3 C, \\ \frac{2x - y}{x} \cdot \frac{x}{y + x} &= x^3 C, \\ \frac{2x - y}{y + x} &= x^3 C, \\ 2x - y &= x^3 C(y + x), \\ 2x - y - x^3 C(y + x) &= 0, \\ y - 2x + x^3 C(y + x) &= 0 \quad \text{pro } x \neq 0, \text{ kde } c \in \mathbf{R} - \{0\}.\end{aligned}$$

Vrátíme-li se ještě k úvaze, co kdyby $a = 1$ nebo $a = 2$. Pak $\frac{y}{x} = -1$ tedy $y = -x$, nebo $\frac{y}{x} = 2$ tedy $y = 2x$. Obě tyto funkce splňují zadání rovnice a jsou také řešením dané úlohy. Řešení $y = 2x$ získáme volbou $c = 0$ z obecného řešení. Dostaneme řešení ve tvaru $0 = y - 2x + x^3 C(y + x)$ pro $x \neq 0$, kde $C \in \mathbf{R}$ a také $y = -x$.

Na obrázku 2.11 je graf této funkce pro $C = \pm 1$, $C = \pm 2$, $C = 0$ a graf singulárního řešení $y = -x$.



Obrázek 2.11: Graf rovnice $0 = y - 2x + x^3 C(y + x)$ pro $C = \pm 1, \pm 2, 0$ a $y = -x$.

$$\bullet \quad y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \quad [2]$$

Do diferenciální rovnice dosadíme substituci (***) a upravíme.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x^2}{2xy} + \frac{y^2}{2xy}, \\ a'x + a &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2} \cdot a - a, \\ a'x &= \frac{1}{2a} - \frac{1}{2} \cdot a, \\ 2a'x &= \frac{1}{a} - a, \\ 2a'x &= \frac{1 - a^2}{a}, \\ \frac{2a'a}{1 - a^2} &= \frac{1}{x} \quad \text{pro } a \neq \pm 1. \end{aligned}$$

Nyní tuto rovnici zintegrujeme.

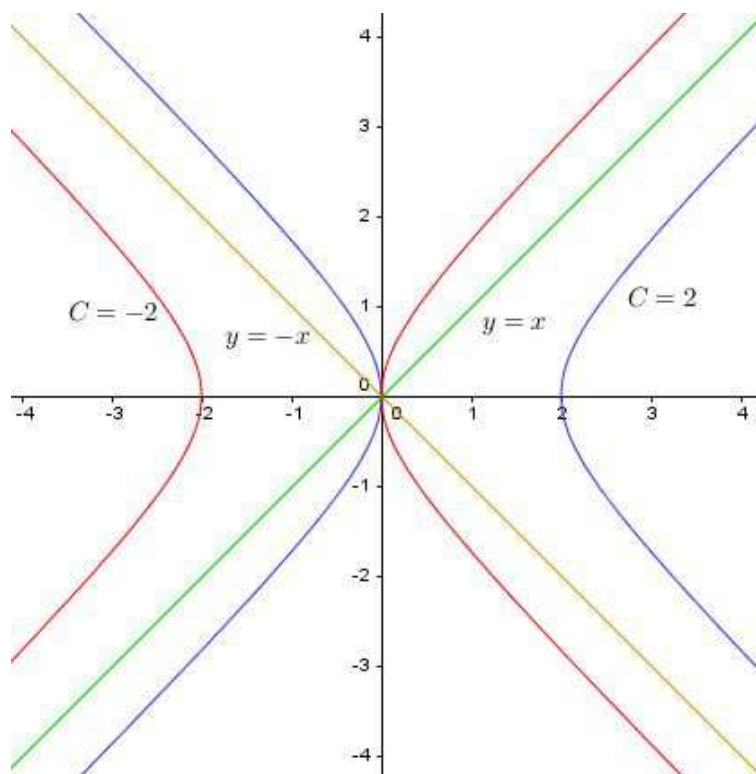
$$\begin{aligned}\int \frac{2a}{1-a^2} da &= \int \frac{1}{x} dx, \\ -\ln|1-a^2| &= \ln|x| + \ln|c|, \quad \text{kde } c \in \mathbf{R} - \{0\}, \\ 0 &= \ln|xc| + \ln|1-a^2|, \\ \ln 1 &= \ln|xc(1-a^2)|, \\ 1 &= xc(1-a^2), \\ \frac{1}{c} &= x(1-a^2).\end{aligned}$$

Zvolíme $\frac{1}{c} = C$ a dostaneme řešení zadané rovnice.

$$\begin{aligned}C &= x - \frac{y^2}{x}, \\ Cx &= x^2 - y^2, \\ 0 &= x^2 - y^2 - Cx, \quad \text{kde } C \in \mathbf{R} - \{0\}.\end{aligned}$$

Pokud by $a = \pm 1$, pak funkce $y = \pm x$ jsou také řešení zadané rovnice.

Na obrázku 2.12 můžeme vidět průběh této funkce pro $C = \pm 2$, $y = \pm x$.



Obrázek 2.12: Graf rovnice $0 = x^2 - y^2 - Cx$ pro $C = \pm 2$, $y = \pm x$.

$$\bullet \quad y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1} \quad [2]$$

Řešení:

Jde o rovnici typu

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right), \quad [2]$$

kterou převedeme na homogenní rovnici následujícím postupem. Soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ Ax + By + C &= 0, \end{aligned}$$

vyřešíme sčítací metodou a zjistíme hodnoty $x = x_0$ a $y = y_0$, abychom mohli provést substituci proměnných.

$$\begin{aligned} 2x - y + 1 &= 0, \\ x - 2y + 1 &= 0, \\ 2x - y + 1 &= 0, \\ -2x + 4y - 2 &= 0, \\ 3y - 1 &= 0, \\ y &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Vypočítáme hodnotu $x = x_0$.

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{3} + 1 &= 0, \\ 6x - 1 + 3 &= 0, \\ 6x + 2 &= 0, \\ x &= -\frac{2}{6}, \\ x &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Zvolíme substituci proměnných (2. 7. 2) podle vzorce

$$\begin{aligned} x &= u + x_0, & x &= u - \frac{1}{3}, \\ y &= v - y_0, & y &= v + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Substituci (2. 7. 2) dosadíme do zadané rovnice.

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \frac{2(u - \frac{1}{3}) - (v + \frac{1}{3}) + 1}{(u - \frac{1}{3}) - 2(v + \frac{1}{3}) + 1}, \\ \frac{dv}{du} &= \frac{2u - \frac{2}{3} - v - \frac{1}{3} + 1}{u - \frac{1}{3} - 2v - \frac{2}{3} + 1}, \\ v' &= \frac{2u - v}{u - 2v}. \quad (2. 7. 3)\end{aligned}$$

Opět provedeme další substituci

$$z = \frac{v}{u}, \quad v = zu, \quad v' = z'u + z.$$

Tuto substituci dosadíme do rovnice (2. 7. 3) a získáváme homogenní diferenciální rovnici, kterou vyřešíme.

$$\begin{aligned}z'u + z &= \frac{2u - zu}{u - 2zu}, \\ z'u + z &= \frac{u(2 - z)}{u(1 - 2z)}, \\ z'u &= \frac{2 - z}{1 - 2z} - z, \\ z'u &= \frac{2 - z - (1 - 2z)z}{1 - 2z}, \\ z'u &= \frac{2 - z - z + 2z^2}{1 - 2z}, \\ z'u &= \frac{2z^2 - 2z + 2}{1 - 2z}, \\ z'u &= \frac{2(z^2 - z + 1)}{1 - 2z}, \\ \frac{dz}{du} \cdot \frac{1 - 2z}{z^2 - z + 1} &= 2 \cdot \frac{1}{u}, \\ \int \frac{1 - 2z}{z^2 - z + 1} dz &= 2 \int \frac{1}{u} du, \\ -\ln |z^2 - z + 1| &= 2 \ln |u| + 2 \ln |c|, \\ -\ln |z^2 - z + 1| &= 2 \ln |uc|, \\ 0 &= \ln |uc|^2 + \ln |z^2 - z + 1|, \\ \ln 1 &= \ln |u^2 c^2 (z^2 - z + 1)|, \\ 1 &= u^2 c^2 (z^2 - z + 1), \\ \frac{1}{c^2} &= u^2 (z^2 - z + 1), \\ C &= u^2 (z^2 - z + 1). \quad (2. 7. 4)\end{aligned}$$

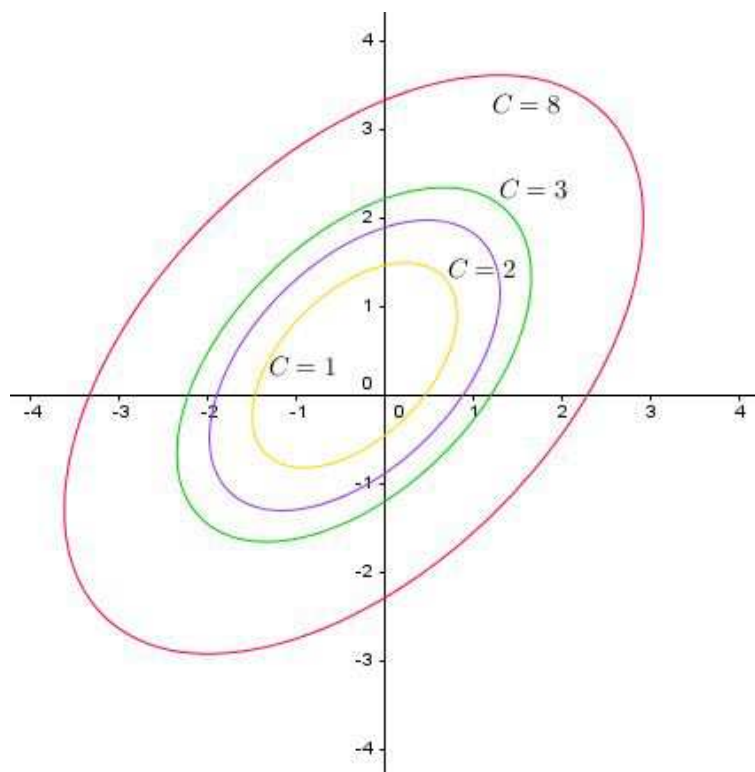
Z (2. 7. 2) zjistíme

$$u = x + \frac{1}{3}, \quad v = y - \frac{1}{3}.$$

Proměnné u, v dosadíme do rovnice (2. 7. 4) a tím získáme obecné řešení v implicitním tvaru.

$$\begin{aligned} C &= u^2 \cdot \left(\frac{v^2}{u^2} - \frac{v}{u} + 1 \right), \\ C &= v^2 - vu + u^2, \\ C &= \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 - \left(y - \frac{1}{3} \right) \left(x + \frac{1}{3} \right) + \left(x + \frac{1}{3} \right)^2, \\ C &= \left(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} - \left(yx - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9} \right) + x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \right), \\ C &= y^2 + x^2 - y + x - xy + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Na obrázku 2.13 je graf této křivky pro $C = 1$, $C = 2$, $C = 3$ a pro $C = 8$.



Obrázek 2.13: Graf rovnice $C = y^2 + x^2 - y + x - xy + \frac{1}{3}$ pro $C = 1, 2, 3, 8$.

2.8 Bernoulliho rovnice

U Bernoulliho rovnic budeme používat podobnou substituci jako u homogenních rovnic

$$y = uv, \quad y' = u'v + v'u. \quad (***)$$

Najděte obecná řešení následujících rovnic:

$$\bullet \quad xy' - y + xy^2 = 0 \quad [4]$$

Řešení:

Do zadané rovnice dosadíme substituci (****) a upravíme.

$$x \cdot (u'v + v'u) - uv + x \cdot (uv)^2 = 0, \quad (2.8.1)$$

$$xu'v + xv'u - uv + xu^2v^2 = 0,$$

$$u \cdot (xv' - v) + xu'v + xu^2v^2 = 0,$$

$$u \cdot (xv' - v) = -xu'v - xu^2v^2.$$

Závorku na levé straně rovnice položíme rovnu nule a vyjádříme v .

$$xv' - v = 0,$$

$$xv' = v,$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{x} \quad \text{pro } x \neq 0, v \neq 0,$$

$$\int \frac{1}{v} dv = \int \frac{1}{x} dx,$$

$$\ln |v| = \ln |x|,$$

$$v = x.$$

Pokud $v = 0$ je $y = 0$ také řešením rovnice (tzv. singulární řešení).

Když $v = x$ tak, $v' = 1$. (2.8.2)

Vrátíme se zpět k rovnici (2.8.1) a dosadíme (2.8.2).

$$x(u'v + uv') - uv + xu^2v^2 = 0,$$

$$x(u'x + u \cdot 1) - ux + xu^2vx^2 = 0,$$

$$x^2u' + ux - ux + x^3u^2 = 0,$$

$$x^2u' + x^3u^2 = 0.$$

Pomocí separace proměnných vypočítáme neznámou u .

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{x^3 u^2}{x^2}, \\ u' &= -x u^2, \\ \frac{u'}{u^2} &= -x, \\ \int \frac{1}{u^2} du &= -\int x dx, \\ \frac{u^{-1}}{-1} &= \frac{-x^2}{2} - \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

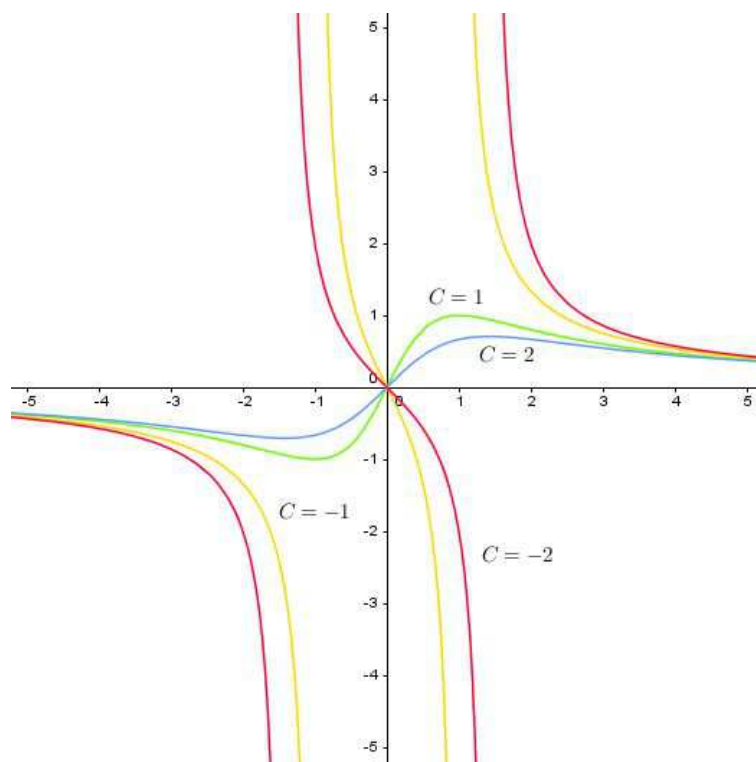
Označme $\frac{c}{2} = C$ a tedy

$$u = \frac{2}{x^2 + C}.$$

Vyjádřené neznámé u a v dosadíme do rovnice $y = uv$ a dostaneme obecné řešení.

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{x^2 + C} \cdot x, \\ y &= \frac{2x}{x^2 + C}. \end{aligned}$$

Na obrázku 2.14 můžeme vidět graf obecného řešení pro $C = \pm 1$, $C = \pm 2$.



Obrázek 2.14: Graf funkce $y = \frac{2x}{x^2 + C}$ pro $C = \pm 1$, $C = \pm 2$

$$\bullet \quad y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2} \cdot (x+1)^3 \cdot y^3 \quad [7]$$

Řešení:

$$\begin{aligned} u'v + uv' + \frac{uv}{x+1} &= -\frac{1}{2} \cdot (x+1)^3 \cdot (uv)^3, & (2.8.3) \\ u'v + u \left(v' + \frac{v}{x+1} \right) &= -\frac{1}{2} \cdot (x+1)^3 \cdot u^3 v^3. \end{aligned}$$

Pomocí separace proměnných ze závorky na levé straně rovnice, kterou jsme položili rovno nule, vypočteme neznámou v .

$$\begin{aligned} v' + \frac{v}{x+1} &= 0, \\ v' &= -\frac{v}{x+1}, \\ \frac{v'}{v} &= -\frac{1}{x+1} \quad \text{pro } v \neq 0, \\ \int \frac{1}{v} dv &= -\int \frac{1}{x+1} dx, \\ \ln |v| &= -\ln |x+1|, \\ \ln |v| + \ln |x+1| &= 0, \\ \ln |v \cdot (x+1)| &= \ln 1, \\ v(x+1) &= 1, \\ v &= \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Derivace v je

$$v' = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Do rovnice (2.8.3) dosadíme za

$$v = \frac{1}{x+1}, \quad v' = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Vyjádříme neznámou u .

$$\begin{aligned} u' \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} u + \frac{\frac{u}{x+1}}{x+1} &= -\frac{1}{2} \cdot (x+1)^3 \cdot u^3 \cdot \left(\frac{1}{x+1} \right)^3, \\ \frac{u'}{x+1} - \frac{u}{(x+1)^2} + \frac{u}{(x+1)^2} &= -\frac{1}{2} \cdot (x+1)^3 \cdot u^3 \frac{1}{(x+1)^3}, \\ \frac{u'}{x+1} &= -\frac{1}{2} u^3, \\ \frac{u'}{u^3} &= -\frac{1}{2} \cdot (x+1). \end{aligned}$$

Zintegrujeme.

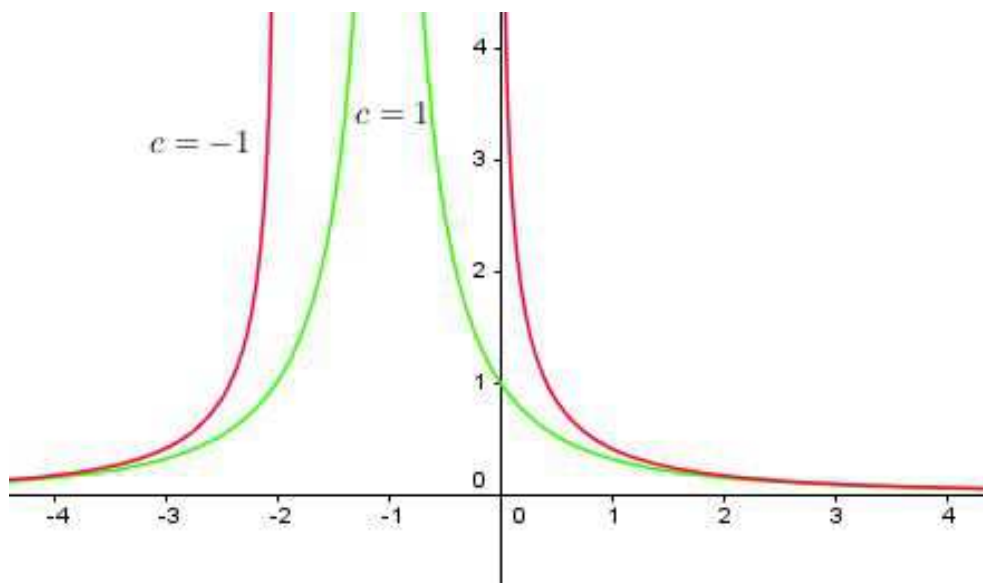
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^3} du &= -\frac{1}{2} \int (x+1) dx, \\ \frac{u^{-2}}{-2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{c}{4}, \\ -\frac{1}{2u^2} &= -\frac{(x+1)^2 + c}{4}, \\ -1 &= -\frac{(x+1)^2 + c}{2} \cdot u^2, \\ u^2 &= \frac{2}{(x+1)^2 + c}.\end{aligned}$$

V našem případě nám bude více vyhovovat u^2 a obecné řešení napíšeme v implicitním tvaru.

$$\begin{aligned}y^2 &= u^2 v^2, \\ y^2 &= \frac{2}{(x+1)^2 + c} \cdot \left(\frac{1}{x+1}\right)^2, \\ y^2 &= \frac{2}{[(x+1)^2 + c] \cdot (x+1)^2}.\end{aligned}$$

Pokud se vrátíme k vyloučené možnosti $v \neq 0$, pak $v = 0$ tj. $y = 0$ je také řešením zadané rovnice.

Na obrázku 2.15 je znázorněn graf této funkce pro $c = \pm 1$.



Obrázek 2.15: Graf funkce $y^2 = \frac{2}{[(x+1)^2 + c] \cdot (x+1)^2}$ pro $c = \pm 1$.

$$\bullet \quad 3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2} \quad [7]$$

Řešení:

Do zadané rovnice dosadíme substituci (****) a upravíme.

$$3x(u'v + uv') - 2uv = \frac{x^3}{(uv)^2}, \quad (2. 8. 4)$$

$$3xu'v + 3xv'u - 2uv = \frac{x^3}{u^2 \cdot v^2},$$

$$3xu'v + u \cdot (3xv' - 2v) = \frac{x^3}{u^2 \cdot v^2}.$$

Ze závorky pomocí separace proměnných vyjádříme neznámou v .

$$3xv' - 2v = 0,$$

$$3xv = 2v,$$

$$\frac{v'}{2v} = \frac{1}{3x} \quad \text{pro } v \neq 0, \quad x \neq 0,$$

$$\int \frac{1}{2v} dv = \int \frac{1}{3x} dx,$$

$$\frac{1}{2} \ln |v| = \frac{1}{3} \ln |x|,$$

$$\ln |v|^{\frac{1}{2}} = \ln |x|^{\frac{1}{3}},$$

$$v^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}},$$

$$v = x^{\frac{2}{3}}.$$

Pokud $v = 0$ tj. $y = 0$, zadaná rovnice nemá smysl. Funkce $y = 0$ není řešením úlohy.

Po derivaci v dostaneme

$$v' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}.$$

Neznámé v, v' dosadíme do rovnice (2. 8. 4).

$$3x(u'x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}u) - 2ux^{\frac{2}{3}} = \frac{x^3}{u^2x^{\frac{4}{3}}},$$

$$u'x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}u - \frac{2ux^{\frac{2}{3}}}{3x} = \frac{x^3}{3u^2x^{\frac{4}{3}+1}},$$

$$u'x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}u - \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}u = \frac{x^{3-\frac{4}{3}-1}}{2u^2},$$

$$u'x^{\frac{2}{3}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3u^2},$$

$$u'u^2 = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}},$$

$$u'u^2 = \frac{1}{3}.$$

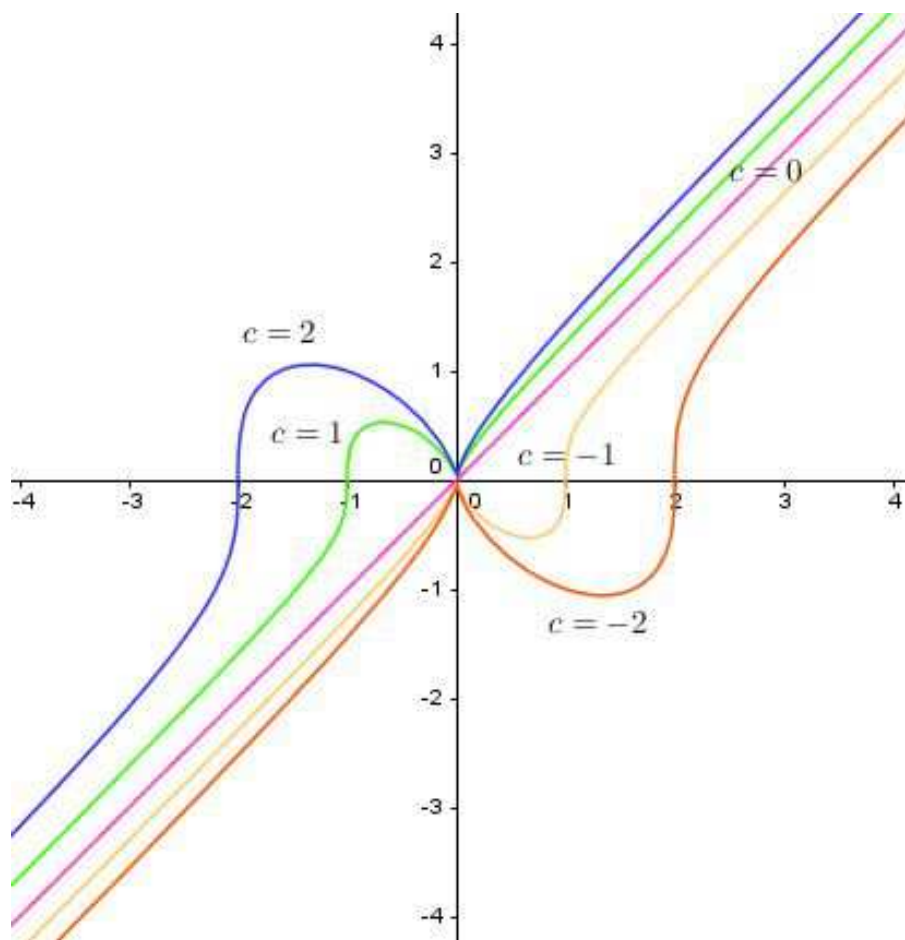
Zintegrujeme.

$$\begin{aligned}\int u^2 du &= \frac{1}{3} \int dx, \\ \frac{u^3}{3} &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}c, \\ u^3 &= x + c.\end{aligned}$$

Po dosazení neznámých u, v vyjádříme y .

$$\begin{aligned}y^3 &= u^3 v^3, \\ y^3 &= (x + c)x^2, \\ y &= \sqrt[3]{x^3 + cx^2}.\end{aligned}$$

Tato funkce y má graf znázorněn na obrázku 2.16 pro $c = \pm 1$, $c = \pm 2$ a pro $c = 0$.



Obrázek 2.16: Graf rovnice $y = \sqrt[3]{x^3 + cx^2}$ pro $c = \pm 1$, $c = \pm 2$, $c = 0$.

$$\bullet (xy)^2 y' + xy^3 = 1 \quad [7]$$

Řešení:

Do zadané rovnice dosadíme substituci (****) a upravíme.

$$\begin{aligned} x^2 u^2 v^2 \cdot (u'v + uv') + xu^3 v^3 &= 1, \\ x^2 u^2 v^2 u'v + uv' x^2 u^2 v^2 + xu^3 v^3 &= 1, \quad (2. 8. 5) \\ x^2 u^2 v^2 u'v + u^3 v' v^2 x^2 + xu^3 v^3 &= 1, \\ x^2 u^2 v^2 u'v + v^2 u^3 x \cdot (v'x + v) &= 1. \end{aligned}$$

Ze závorky si vyjádříme v .

$$\begin{aligned} v'x + v &= 0, \\ v'x &= -v, \\ -\frac{v'}{v} &= \frac{1}{x}, \quad \text{pro } x \neq 0, v \neq 0, \\ -\int \frac{1}{v} dv &= \int \frac{1}{x} dx, \\ -\ln |v| &= \ln |x|, \\ 0 &= \ln |x| + \ln |v|, \\ \ln 1 &= \ln |xv|, \\ 1 &= xv, \\ v &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Po derivaci v dostaneme

$$v' = -\frac{1}{x^2}.$$

Neznámé v a v' dosadíme do rovnice (2. 8. 5) a vyjádříme u .

$$\begin{aligned} x^2 u^2 \frac{1}{x^2} u' \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} u^3 x^2 \frac{1}{x^2} + xu^3 \frac{1}{x^3} &= 1, \\ u^2 u' \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} u^3 + \frac{1}{x^2} u^3 &= 1, \\ u^2 u' &= x. \end{aligned}$$

Zintegrujeme.

$$\begin{aligned}\int u^2 du &= \int x dx, \\ \frac{u^3}{3} &= \frac{x^2}{2} + \frac{c}{2}, \\ \frac{u^3}{3} &= \frac{x^2 + c}{2}, \\ u^3 &= \frac{3(x^2 + c)}{2}, \\ u &= \sqrt[3]{\frac{3(x^2 + c)}{2}}, \\ u &= \sqrt[3]{\frac{3x^2 + 3c}{2}}.\end{aligned}$$

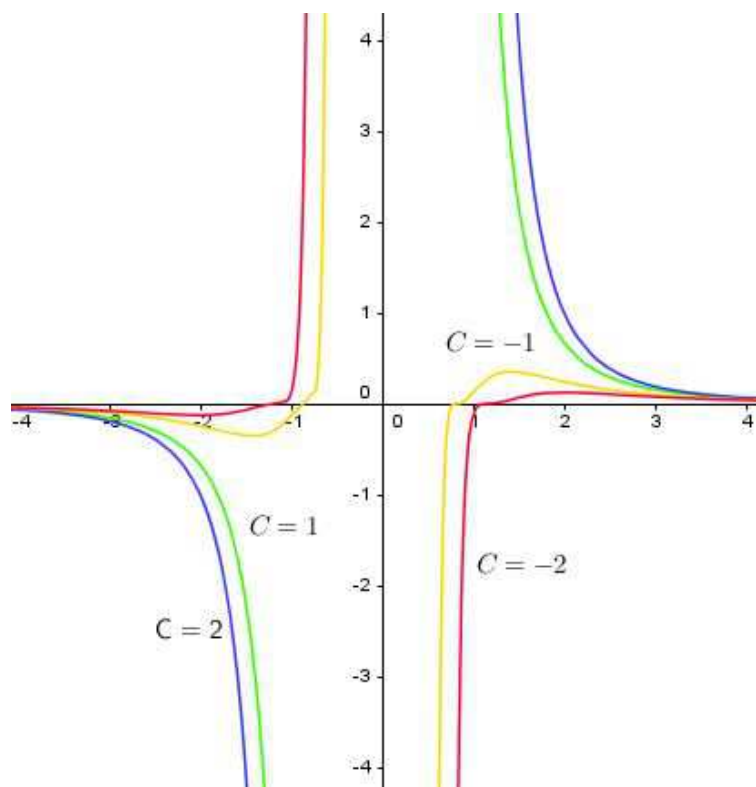
Označíme $3c = C$ a dostaneme

$$u = \sqrt[3]{\frac{3x^2 + C}{2}}.$$

Neznámé u, v dosadíme do rovnice $y = uv$ a vyjádříme y .

$$\begin{aligned}y &= \sqrt[3]{\frac{3x^2 + C}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}, \\ y &= \sqrt[3]{\frac{3x^2 + C}{2x^3}}, \\ y &= \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}.\end{aligned}$$

Na obrázku 2.17 můžeme vidět průběh funkce y , když $C = \pm 1$, $C = \pm 2$.



Obrázek 2.17: Graf funkce $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}$ pro $C = \pm 1$, $C = \pm 2$.

• $xy' + y = y^2 \ln |x| \quad [7]$

Řešení:

Do zadané rovnice dosadíme substituci (****) a upravíme.

$$\begin{aligned} x \cdot (u'v + uv') + uv &= u^2v^2 \ln |x|, \\ xu'v + xv'u + uv &= u^2v^2 \ln |x|, & (2.8.6) \\ xu'v + u(xv' + v) &= u^2v^2 \ln |x|. \end{aligned}$$

Ze závorky si vyjádříme v .

$$\begin{aligned} xv' + v &= 0, \\ xv' &= -v, \\ -\frac{v'}{v} &= \frac{1}{x} \text{ pro } v \neq 0. \end{aligned}$$

Pokud $v = 0$ tj. $y = 0$ je řešením diferenciální rovnice.

Zintegrujeme.

$$\begin{aligned} -\int \frac{1}{v} dv &= \int \frac{1}{x} dx, \\ -\ln |v| &= \ln |x|, \\ 0 &= \ln |x| + \ln |v|, \\ \ln 1 &= \ln |xv|, \\ 1 &= xv, \\ v &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Po derivaci v dostaneme

$$v' = -\frac{1}{x^2}.$$

Do rovnice (2. 8. 6) dosadíme v, v' .

$$\begin{aligned} x \cdot \left(u' \frac{1}{x} - u \frac{1}{x^2}\right) + u \frac{1}{x} &= u^2 \frac{1}{x^2} \ln |x|, \\ u' - \frac{1}{x} u + \frac{1}{x} u &= \frac{u^2}{x^2} \ln |x|, \\ u' &= \frac{u^2}{x^2} \ln |x|, \\ \frac{u'}{u^2} &= \frac{1}{x^2} \ln |x|, \\ \int \frac{1}{u^2} du &= \int \frac{1}{x^2} \ln |x| dx, \\ \frac{u^{-1}}{-1} &= -\frac{\ln |x| + 1}{x} + c, \\ -\frac{1}{u} &= -\frac{\ln |x| + 1}{x} + c, \\ \frac{1}{u} &= \frac{\ln |x| + 1 + cx}{x}, \\ x &= u \cdot (\ln |x| + 1 + cx), \\ u &= \frac{x}{\ln |x| + 1 + cx}. \end{aligned}$$

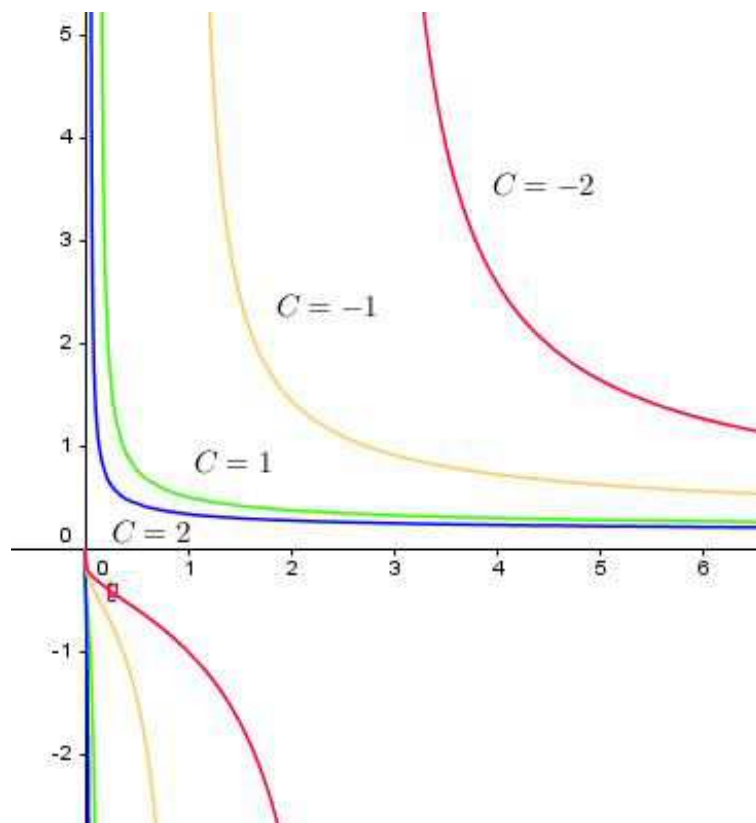
Označíme si $cx = C$ a tedy

$$u = \frac{x}{\ln |x| + 1 + C}.$$

Nyní vyjádříme y .

$$\begin{aligned} y &= uv, \\ y &= \frac{x}{\ln |x| + 1 + C} \cdot \frac{1}{x}, \\ y &= \frac{1}{\ln |x| + 1 + C}. \end{aligned}$$

Na obrázku 2.18 je průběh této funkce y pro $C = \pm 1$, $C = \pm 2$.



Obrázek 2.18: Graf funkce $y = \frac{1}{\ln|x|+1+C}$ pro $C = \pm 1$, $C = \pm 2$.

Kapitola 3

Příklady z fyziky

3.1 Vražda

Na místě vraždy byla v poledne nalezena mrtvola. V době nálezu byla teplota těla 30°C , po 3 hodinách kriminalisté naměřili 27°C . Teplota místnosti se stabilně držela na 20°C . Zjistěte, kdy došlo k vraždě. [6]

Poznámka: Využijme nultý zákon termodynamiky (tj. Je-li útvar A v tepelné rovnováze s útvarem B a s útvarem C, jsou v tepelné rovnováze i útvary B a C.).

Řešení:

Označme:

x ... čas v hodinách

y ... teplota těla v čase x

Sestavíme diferenciální rovnici popisující tepelnou výměnu a separací proměnných jí vyřešíme.

$$\begin{aligned}y' &= -a \cdot (y - 20), \\y' \cdot \frac{1}{y - 20} &= -a, \\\int \frac{1}{y - 20} dy &= -\int a dx, \\\ln |y - 20| &= -a \cdot x + c, \\|y - 20| &= e^{-ax} \cdot e^c.\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že teplota těla nemůže klesnout pod hodnotu okolní teploty 20°C , je

$$\begin{aligned}y - 20 &= Ke^{-ax}, \\y &= Ke^{-ax} + 20.\end{aligned}$$

V čase $x = 0$ byla teplota 30°C . Tedy

$$30 = Ke^0 + 20,$$

$$K = 10.$$

Po 3 hodinách byla teplota 27°C . Pak

$$27 = 10e^{-3a} + 20,$$

$$10e^{-3a} = 7,$$

$$e^{-3a} = \frac{7}{10},$$

$$\frac{10}{7} = e^{3a},$$

$$\ln \frac{10}{7} = 3a,$$

$$\frac{\ln \frac{10}{7}}{3} = a,$$

$$a \doteq 0,12.$$

Funkce, která popisuje teplotu těla y ($^\circ\text{C}$) po určité době x (hod) má předpis

$$y(x) = 10e^{-0,12x} + 20.$$

Normální teplota lidského těla se pohybuje kolem $36,6^\circ\text{C} - 37^\circ\text{C}$. V našem případě budeme počítat, že před vraždou měla osoba teplotu těla $36,6^\circ\text{C}$. Chceme tedy určit čas, ve kterém teplota těla byla $36,6^\circ\text{C}$. Tedy

$$36,6 = 20 + 10e^{-0,12x},$$

$$16,6 = 10e^{-0,12x},$$

$$1,66 = e^{-0,12x},$$

$$\ln 1,66 = -0,12x,$$

$$\frac{\ln 1,66}{-0,12} = x,$$

$$x \doteq -4,2.$$

Převědeme si 4,2 hodin na celé hodiny a minuty, tj. 4 hod a $0,2 \cdot 60 = 12$ minut. K vraždě došlo přibližně před 4 hodinami a 12 minutami.

Co, když měl zavražděný horečku?

V tomto případě by teplota těla před vraždou byla např. 38°C . Pak

$$\begin{aligned} 38 &= 20 + 10e^{-0,12x}, \\ 18 &= 10e^{-0,12x}, \\ 1,8 &= e^{-0,12x}, \\ \ln(1,8) &= -0,12x, \\ \frac{\ln(1,8)}{-0,12} &= x, \\ x &\doteq -4,9. \end{aligned}$$

Převědeme si 4,9 hodin na celé hodiny a minuty, dostaneme 4h a $0,9 \cdot 60 = 54$ minut. K vraždě by došlo v 7 : 06.

3.2 Polévka

V kuchyni je teplota 25°C . Za jak dlouho se právě vypnutá vroucí polévka ochladí na 30°C , pokud po 15 minutách má 50°C ? [1]

Řešení:

Označme:

x ... čas

$y = y(x)$... teplota polévky

K sestavení rovnice, popisující proces chladnutí, použijeme vztah jako v příkladě 3.1 Vražda na straně 47.

Separacích proměnných pak získáme její obecné řešení.

$$\begin{aligned} y' &= a \cdot (y - 25), \\ \frac{y'}{(y - 25)} &= a, \\ \int \frac{1}{y - 25} dy &= \int a dx, \\ \ln |y - 25| &= ax + c. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že teplota polévky $y \geq 25$ je

$$\begin{aligned} y - 25 &= e^{ax+c}, \\ y &= e^{ax+c} + 25, \\ y &= Ke^{ax} + 25. \end{aligned}$$

Při vypnutí ($x = 0$) polévka vřela (měla 100°C) a pak začal proces chladnutí, tedy

$$100 = Ke^{0x} + 25,$$

$$K = 75.$$

Dosadíme do rovnice $y = Ke^{ax} + 25$ a zjistíme hodnotu koeficientu a , když víme, že $y(15) = 50$.

$$50 = 75e^{15a} + 25,$$

$$25 = 75e^{15a},$$

$$\frac{25}{75} = e^{15a},$$

$$\ln \frac{1}{3} = 15a,$$

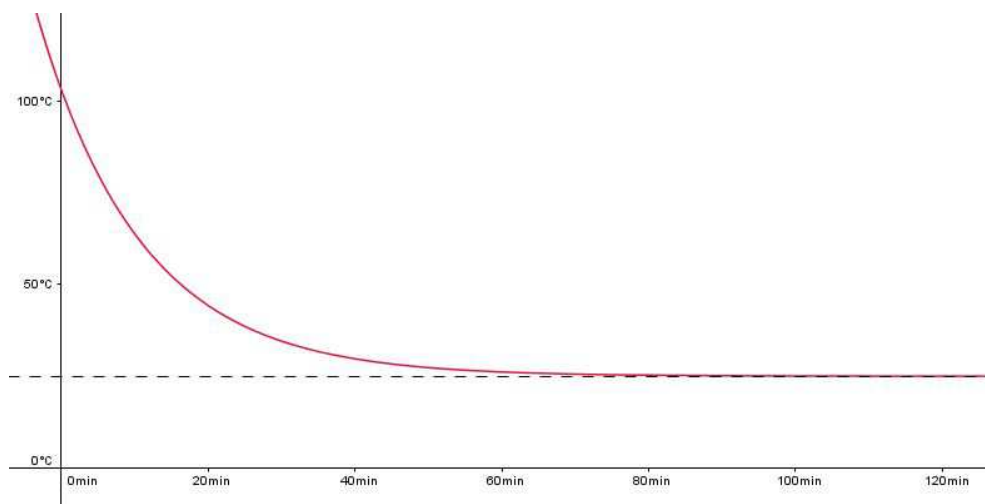
$$a = \frac{\ln \frac{1}{3}}{15},$$

$$a \doteq -0,07.$$

Můžeme sestavit funkci, která popisuje chladnutí polévky a je řešením diferenciální rovnice

$$y = 75e^{-0,07x} + 25.$$

Na obrázku 3.1 můžeme vidět graf této funkce.



Obrázek 3.1: Graf funkce $y = 75e^{-0,07x} + 25$.

Nyní vypočítáme za jak dlouho se ochladí polévka na 30°C . Tedy

$$\begin{aligned} 30 &= 75e^{-0,07x} + 25, \\ 5 &= 75e^{-0,07x}, \\ \frac{5}{75} &= e^{-0,07x}, \\ \frac{1}{15} &= e^{-0,07x}, \\ \ln\left(\frac{1}{15}\right) &= -0,07x, \\ \frac{\ln(\frac{1}{15})}{-0,07} &= x, \\ x &\doteq 39. \end{aligned}$$

Polévka se ochladí na 50°C přibližně za 39 minut.

3.3 Zákon radioaktivního rozpadu

Odvoďte zákon radioaktivního rozpadu. Pokud víme, že časový úbytek je přímo úměrný počtu nerozpadlých částic. [3]

Řešení:

Označme:

t ... čas rozpadu

N ... počet atomů v daném vzorku v čase t

λ ... rozpadová konstanta

N_0 ... počet atomů v čase $t = 0$

Počáteční podmínka:

$$N = N_0$$

$$t = 0$$

Separacích proměnných vyjádříme neznámou N .

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= -\lambda N, \\ \frac{dN}{N} &= -\lambda dt, \\ \int \frac{dN}{N} &= - \int \lambda dt, \end{aligned}$$

Zintegrujeme.

$$\begin{aligned}\ln |N| &= -\lambda t + \ln |c|, \\ \ln |N| - \ln |c| &= -\lambda t, \\ \ln \left| \frac{N}{c} \right| &= -\lambda t, \\ e^{\ln \left| \frac{N}{c} \right|} &= e^{-\lambda t}, \\ \frac{N}{c} &= e^{-\lambda t}, \\ N &= ce^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Nyní nás bude zajímat počet atomů N_0 v čase $t = 0$.

$$\begin{aligned}N_0 &= c \cdot e^{-\lambda \cdot 0}, \\ N_0 &= c. \quad (3.3.1)\end{aligned}$$

Rovnici (3.3.1) dosadíme do $N = c \cdot e^{-\lambda t}$ a tím získáme vzorec zákona radioaktivního rozpadu

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

3.4 Atom

Určete závislost počtu atomů radioaktivní látky na čase, jestliže platí $dN = -\frac{\ln 2}{T} N dt$, kde N je počet nerozpadlých atomů v čase t , T je poločas rozpadu. [3]

Řešení:

$$\begin{aligned}dN &= -\frac{\ln 2}{T} \cdot N \cdot dt, \\ \frac{dN}{N} &= -\frac{\ln 2}{T} dt, \\ \int \frac{dN}{N} &= -\frac{\ln 2}{T} dt, \\ \ln N &= \frac{\ln 2}{T} \cdot t + c. \quad (3.4.1)\end{aligned}$$

Předpokládejme:

$$t = 0$$

$$N = N_0$$

Dosadíme do rovnice (3. 4. 1) a vyjádříme konstantu c .

$$\begin{aligned}\ln N_0 &= -\frac{\ln 2}{T} \cdot 0 + c, \\ c &= \ln N_0.\end{aligned}$$

Konstantu c dosadíme opět do rovnice (3. 4. 1) a vyjádříme N .

$$\begin{aligned}\ln N &= -\frac{\ln 2}{T} \cdot t + \ln N_0, \\ \ln N - \ln N_0 &= -\frac{\ln 2}{T} \cdot t, \\ \ln \frac{N}{N_0} &= -\frac{\ln 2}{T} \cdot t, \\ \frac{N}{N_0} &= e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t}, \\ N &= e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t} \cdot N_0.\end{aligned}$$

Závislost počtu nerozpadlých atomů radioaktivní látky na čase je $N = e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t} \cdot N_0$.

3.5 Intenzita světla

Intenzita slunečního světla pod vodou klesá rychlostí přímo úměrnou intenzitě světla v dané hloubce. Pokud 8 metrů vody absorbuje 15 % světla, v jaké hloubce bude v poledne stejně jasno jako na hladině vody při úplňku? Intenzita slunečního světla v poledne je 300 000-krát větší než intenzita při úplňku. [5]

Řešení:

Označme:

x ... hloubka

$y(x)$... intenzita světla v hloubce x

Ze zadání víme, že intenzita slunečního světla pod vodou klesá rychlostí přímo úměrnou intenzitě světla v dané hloubce. Změnu intenzity slunečního světla v hloubce x vyjadřuje derivace funkce $y(x)$. To lze tedy zapsat $y' = ky$. Tuto diferenciální rovnici jsme už řešili v příkladě 2.4 Bavlník na straně 17.

Takže platí

$$|y| = e^{kx+c}.$$

Vzhledem k tomu, že y je intenzita světla, je tato veličina nezáporná. Proto

$$\begin{aligned}y &= e^{kx+c}, \\y &= e^{kx} \cdot e^c.\end{aligned}$$

Označíme-li, $e^c = C$, dostaneme

$$y = Ce^{kx}.$$

Intenzita světla v 0 m hloubky je 100% a tedy

$$\begin{aligned}1 &= Ce^0, \\C &= 1.\end{aligned}$$

Tedy $y = e^{kx}$. Navíc víme, že 8 metrů vody absorbuje 15 % světla. To znamená, že intenzita v 8 metrech je 85 % intenzity v nulové hloubce. To lze zapsat takto $y(8) = 0,85 y(0)$. Nyní to dosadíme do obecného řešení a vyjádříme k .

$$\begin{aligned}0,85 &= e^{8k}, \\ \ln(0,85) &= 8k, \\ k &= \frac{\ln 0,85}{8}, \\ k &\doteq -0,020315.\end{aligned}$$

Funkce, která popisuje zkoumaný jev je

$$y(x) = e^{-0,020315x}.$$

Dále víme, že intenzita slunečního světla v poledne je 300 000-krát větší než intenzita při úplňku. To znamená, že intenzita při úplňku je $y(x) = \frac{1}{300\,000}$. Pak $\frac{1}{300\,000} = e^{-0,020315x}$. Z této rovnice vyjádříme hloubku x .

$$\begin{aligned}\frac{1}{300\,000} &= e^{-0,020315x}, \\ \ln \left| \frac{1}{300\,000} \right| &= -0,020315x, \\ x &= \frac{\ln \left| \frac{1}{300\,000} \right|}{-0,020315}, \\ x &= 620.\end{aligned}$$

Stejně jasno bude v hloubce 620 metrech.

Kapitola 4

Závěr

Závěrem bych chtěla říci, že zadání této absolventské práce bylo beze zbytku splněno.

Cílem této práce bylo vytvořit soubor aplikačních příkladů souvisejících s problematikou diferenciálních rovnic.

Práce je rozdělena do dvou hlavních kapitol, a to kapitola 2, která se zabývá diferenciálními rovnicemi a jejich aplikacemi z oboru matematiky a kapitola 3 se zabývá aplikací diferenciálních rovnic z oboru fyziky. Řešené příklady jsou doplněny jasným a srozumitelným popisem a řešením. Některé příklady jsou doplněny obrázkem, které jsem vytvořila v programu GeoGebra. Bakalářská práce je psaná v programu L^AT_EX.

Literatura

- [1] Fišnářová, S. Aplikace diferenciálních rovnic - řešené příklady [online]. [⟨http://user.mendelu.cz/fisnarov/imt/prednasky/aplikacedr.pdf⟩](http://user.mendelu.cz/fisnarov/imt/prednasky/aplikacedr.pdf), 2015.
- [2] Hájek, J., Dula, J. *Cvičení z matematické analýzy, Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: Masarykova univerzita, 1996.
- [3] Kříž, P. *Matematika pro fyziky II*. 2014.
- [4] Plch, R. *Příklady z matematické analýzy, Diferenciální rovnice*. Brno: Masarykova univerzita, 2007.
- [5] Samková, L. *Diferenciální a funkcionální rovnice*. 2015.
- [6] Samková, L. *Matematická analýza 3*. 2015.
- [7] Ungermann, Z., Zachariášova, L. *Matematika pro posluchače fyziky na pedagogických fakultách*. Praha: SPN, 1973.