



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v ČB

Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

**Užití programu GeoGebra při řešení problémů v
geometrii**

**The use of GeoGebra by solving problems in
geometry**

Diplomová práce

Vypracoval: Bc. Štěpán Buzek

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2022

Tímto bych chtěl poděkovat prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za skvělé vedení při tvorbě diplomové práce a za spoustu skvělých připomínek, které mi během psaní sdělil.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Užití programu GeoGebra při řešení problémů v geometrii jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 30. dubna 2022.

.....

Bc. Štěpán Buzek

Anotace

Tato diplomová práce je zaměřena na nové funkce systémů dynamické geometrie a systémů počítačové algebry. V první části diplomové práce prozkoumávám nové funkce, které systémy dynamické geometrie poskytují. Druhá část diplomové práce se zaměřuje na příklady, které je možno pomocí těchto funkcí řešit. Zejména se jedná o automatické objevování množin daných vlastností. Zejména se zaměřuje na objevování rovnic těchto množin. V závěru je uveden příklad na porovnání principu automatického dokazování a automatického objevování.

Abstract

This diploma thesis is focused on new functionalities of dynamic geometry systems and computer algebra systems. In first part of the diploma thesis I research new functions of dynamic geometry systems. Second part is focused on examples which are possible to solve by usage of said methods. Especially it is focused on automatic discovery of locus. Main focus is on finding of equations of locuses. In last example is compared principle of automatic discovery with automatic proving.

Obsah

1	Úvod	6
2	Současný výzkum efektu užívání programů DGS	8
3	Programové vybavení GeoGebra	11
3.1	Funkce Locus a LocusEquation - explicitní množina bodů daných vlastností	12
3.2	Funkce Locus a LocusEquation - implicitní množina bodů daných vlastností	16
3.3	Funkce Envelope	23
4	Množiny bodů daných vlastností	26
4.1	Osa úsečky jako množina bodů daných vlastností	27
4.2	Asteroida	32
4.3	Strofoida	38
4.4	Kardioida	45
4.5	Ophriuida	52
4.6	Holfeld 1773	55
4.6.1	Řešení pomocí programu GeoGebra	56
4.6.2	Klasický důkaz	59
4.7	Wallace-Simsonova věta	61
4.7.1	Klasický důkaz	62
4.7.2	Počítačový důkaz	65
5	Závěr	71

1 Úvod

Geometrie je oblast matematiky zabývající se studiem rovinných a prostorových útvarů. Zejména se zajímá o vztahy mezi geometrickými útvary.

Objevování vztahů mezi útvary nemusí být vždy snadné. I velkým matematikům v historii mnohdy trvalo několik let, než přišli s některými, dnes již notoricky známými, větami. Pythágoras z Milétu svoji slavnou větu neobjevil jen tak. Vystává tedy otázka: Jak nejlépe představit tyto starověká tvrzení žákům během omezeného času, který nám škola poskytuje? Může nám k tomu pomoci moderní technologie.

Dnes máme nové vybavení, které nám může pomoci v objevování vztahů mezi geometrickými objekty.

Mezi nejvýznamnější nástroje v objevování vztahů se jistě řadí systémy dynamické geometrie spolu se systémy počítačové algebry.

Pomocí těchto nástrojů můžeme velmi snadno získávat informace o vztazích mezi objekty a zároveň problémy velmi snadno vizualizovat. Prostředí těchto systémů je často velice uživatelsky přívětivé. Proto není velký problém představovat systémy dynamické geometrie i dětem, které jsou na digitální prostředí poměrně zvyklé.

Z toho důvodu jsem si i toto téma zvolil. Rád bych objevil nové způsoby práce s těmito prostředími a pokusil se objevit principy práce, které bych mohl případně aplikovat i ve své školské praxi.

Touto diplomovou prací volně navazuji na svoji bakalářskou práci, ve které jsem se také zabýval využíváním systému dynamické geometrie.

V první kapitole krátce shrnuji současný výzkum vlivu dynamické geometrie na kvalitu výuky. Další kapitoly už se zabývají hlavním tématem této práce.

Druhá kapitola představuje novější funkce, které jsou do implementovány do konkrétního programu dynamické geometrie - a to do programu GeoGebra. Jmenovitě to jsou funkce *Locus*, *LocusEquation* a *Envelope*. Tato kapitola se zabývá hlavně představením těchto nových funkcí.

Třetí a zároveň nejobsáhlejší kapitola se zabývá řešením příkladů na množiny bodů daných vlastností, což je jeden z typických příkladů využití systému dynamické geometrie. Proces řešení tohoto příkladu se nazývá automatické objevování.

V této kapitole je také uveden příklad zabývající se jiným principem využití dynamické geometrie - automatické dokazování. Tento princip je demonstrován na příkladu s Wallace-Simsonovou větou.

Při tvoření této práce jsem využíval programy GeoGebra, CoCoA a WolframAlpha.

2 Současný výzkum efektu užívání programů DGS

V této kapitole bych rád uvedl několik výzkumů zabývajících se využíváním systémů dynamické geometrie ve výuce matematiky na různých úrovních vzdělávacího systému.

V současnosti se ve světě můžeme setkat s integrací moderních technologií ve výuce matematiky ve snaze zlepšit výuku matematiky ve školách [1].

Využívání systémů dynamické geometrie ve výuce matematiky poskytuje žákům a studentům další možnosti rozvoje schopnosti řešení problémů, resp. vymýšlení nových postupů v řešení problémů s využitím neomezené možnosti výpočetní síly počítačů [2].

Užívání počítačů při výuce rychle přitáhlo učitele a výzkumné pracovníky. Nejvíce rozšířeným softwarem využívaným ve výuce matematiky jsou systémy dynamické geometrie (DGS = Dynamic Geometric System). Takový software umožňuje uživateli vytvářet geometrické konstrukce, měřit různé proměnné, které poté využije k určování vlastností, umožňuje přetahovat objekty (body, úsečky, přímky apod.), umožňuje formulovat hypotézy a odvozovat zobecnění [3].

To samozřejmě vyvolává otázku, zda-li je výuka matematiky pomocí DGS efektivní. Na to nemůže odpovědět jediná studie, proto se autoři článku *The Effectiveness of Dynamic Geometry Software Applications in Learning Mathematics: A Meta-Analysis Study* [1] rozhodli zkombinovat výsledky několika studií na toto téma a pokusili se nalézt odpověď na následujících šest otázek.

- Vyvolává používání DGS při výuce matematiky dostatečně velký efekt na matematické schopnosti oproti využívání běžných postupů?
- Jsou znatelné rozdíly v efektivitě DGS v následujících letech (a) 2010-2012 (b) 2013-2015 (c) 2016-2018 a (d) 2019-2020?
- Jsou znatelné rozdíly v efektivitě používání DGS na různých stupních školského systému: (a) druhý stupeň základní školy (b) střední školy (c) vyšší stupně

- Má velikost zkoumaného souboru vliv na efektivitu používání DGS? Zkoumá se méně nebo rovno třiceti a více než třicet.
- Existují znatelné rozdíly efektivit mezi následujícími systémy DGS: (a) GeoGebra (b) Cabri (c) Sketchpad a (d) Wingeom?
- Existují znatelné rozdíly v efektivitě v závislosti na poměru počítačů a studentů? Resp. Je rozdíl, jestli žáci pracují individuálně, nebo ve skupinách.

Získaná data vzhledem k první otázce naznačují, že využívání DGS při výuce matematiky má velký vliv na kvalitu získaných znalostí a dovedností. Žáci, u nichž probíhala výuka s využitím DGS, dosahovali lepších výsledků, než žáci, kteří byli vyučováni bez využívání DGS ve výuce.

Data vedla ke zjištění, že výsledky zkoumání efektivit výuky pomocí DGS se lišila i podle roku vydání studie, ze které byla data čerpána.

Zkoumané studie také naznačují, že znatelný vliv na efektivitu použití DGS ve výuce má i úroveň vzdělávacího systému, na kterém se žák nachází. Největších pokroků dosahovali studenti nacházející se na úrovni středních škol. To ovšem znamená, že by na ostatních úrovních nebyl žádný pokrok zaznamenán.

Data ze studií také určují, že vliv využití DGS je znatelně výraznější při použití v menších skupinách. Tady se ovšem dá spekulovat, zda-li výuka obecně není efektivnější v menších skupinách.

Ve zkoumaných třídách měla největší zastoupení GeoGebra, data také ukazují, že je nejefektivnější při výuce. Na druhém místě v zastoupení i efektivitě se umístilo CABRI.

Data také naznačují, že individuální výuka má znatelnější efekt, než výuka ve skupinách. Výuka je efektivnější, má-li každý žák k dispozici jeden počítač.

Ve shrnutí by se dalo říci, že využívání DGS ve výuce má pozitivní vliv na kvalitu vzdělávacího procesu v oblasti matematiky za určitých podmínek, které jsou uvedeny výše.

Autoři této studie ještě nepovažují zkoumání vlivu DGS ve výuce za hotové a rozhodnuté. Na základě existujících studií jsou ale přesvědčeni, že pozitivní vliv na matematické schopnosti žáků se projevuje, ale je ještě potřeba dalšího dlouhodobého a podrobnějšího výzkumu.

Pokud se chceme podívat na situaci ohledně využívání DGS v českém školství, můžeme nahlédnout do druhé kapitoly knihy *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* od docentky Naďy Vondrové [4].

Tato kapitola se zabývá konstrukčními úlohami napříč ročníky základní školy. Součástí této kapitoly je také shrnutí dotazníkového šetření mezi učiteli základních škol v České republice.

Za zmínku stojí, že v tomto průzkumu, kterého se zúčastnilo zhruba 250 českých druhostupňových učitelů, dochází k zajímavému rozporu. 85 % českých učitelů je přesvědčeno, že využívání DGS při hodinách matematiky přispívá k lepšímu pochopení geometrie. Avšak pouze jen 42 % dotazovaných učitelů používá DGS při své výuce.

Bohužel kniha se nezmiňuje, proč učitelé nevyužívají DGS ve výuce více, i když většina z nich věří, že je to přímósne.

Zároveň 94 % dotazovaných učitelů považuje za důležité, aby žáci prováděli konstrukce i za pomoci rýsovacích pomůcek. Většina dotazovaných učitelů se také staví k názoru, že systémy dynamické geometrie by se měly do výuky zařadit až teprve po zvládnutí probírané látky na papír.

Z těchto dat nasbíraných v českých školách můžeme pozorovat, že čeští učitelé DGS věří, ale nejspíš si ještě nejsou moc jisti, jak tyto systémy do výuky zařadit.

3 Programové vybavení GeoGebra

GeoGebra je systém dynamické geometrie fungující pod licencí open source. To znamená, že je možno ji využívat zcela zdarma ve školách. Tisíce škol po celém světě se proto rozhodlo pro využívání programu GeoGebra ve výuce. [5].

Od verze programu 4.2 (prosinec 2012) podporuje výpočet množiny bodů daných vlastností. Tato možnost je výsledkem společné práce matematiků a programátorů z vývojářského týmu GeoGebra [5].

Plodem této spolupráce je také umožnění rychlých výpočtů v internetových prohlížečích, což vede ještě k lepší přístupnosti a možnosti využití programu GeoGebra [5].

V této části diplomové práce se zaměříme na metody, které GeoGebra k vyšetřování a odvozování množin bodů daných vlastností používá, zejména se bude jednat o metodu *Locus*, *LocusEquation* a *Envelope*.

Hlavní předností GeoGebry je jednoduchá manipulace s jednotlivými objekty, které jsou na obrazovce k dispozici, to umožňuje i žákovi základní školy s tímto programem efektivně pracovat [6].

Nejenomže GeoGebra slouží jako nástroj precizního kreslení, přesná grafická reprezentace geometrického problému dokáže žákovi velmi pomoci. Dle Vondrové [4] je vizuální informace pro žáka daleko silnější, než informace převzatá z textu. V knize jeden ze zkoumaných žáků, správně provedl rozbor úlohy, ale vzhledem k nevhodnému náčrtu (úhel, který byl menší než devadesát stupňů si zakreslil jako tupý úhel), poté pokračoval podle náčrtu, který byl nevhodně nakreslen, ale popsán správně.

GeoGebra je ale více, než jen "kreslicí plátno". Kromě kreslení je GeoGebra schopna provádět i výpočty. Názvy metod, které k tomu využívá, jsou uvedeny výše [5], [6]. V dalších částech se na ně podíváme zblízka.

3.1 Funkce Locus a LocusEquation - explicitní množina bodů daných vlastností

Tuto funkci není možné využít vždy. Aby bylo možno tuto funkci používat, potřebujeme mít k dispozici dva body [6].

První bod se nazývá *mover* - to je bod, který se pohybuje po nějakém objektu. V české lokalizaci programu GeoGebra je tento bod označován jako "Bod na množině". Tímto objektem může být např. přímka, kružnice, hyperbola, parabola a další možné objekty [6].

Druhý bod se nazývá *tracer* - to je bod, který je nějakým způsobem závislý na *moveru*. V české lokalizaci programu GeoGebra je označován tento bod jako "Bod tvořící množinu". Závislost těchto dvou bodů umožňuje kreslit trajektorii *traceru* v závislosti na pohybu *moveru* po objektu [6].

Úkolem v takovýchto typech problému je nalézt množinu bodů, po které se bude v závislosti na pohybu *moveru* pohybovat *tracer* [5].

Takováto množina bodů se nazývá explicitní množina bodů daných vlastností. Tato množina je tedy zadána bodem pohybujícím se po nějakém objektu, nebo cestě. Poté musí být zadána konstrukce definující druhý bod a následně musí být provedena konstrukce na zjištění množiny bodů, po které se druhý bod pohybuje [7].

Tato funkce je velmi jednoduchá, ale i tak je velice užitečná. Její hlavní nevýhodou je, že se nedá použít k vyřešení každého problému [6].

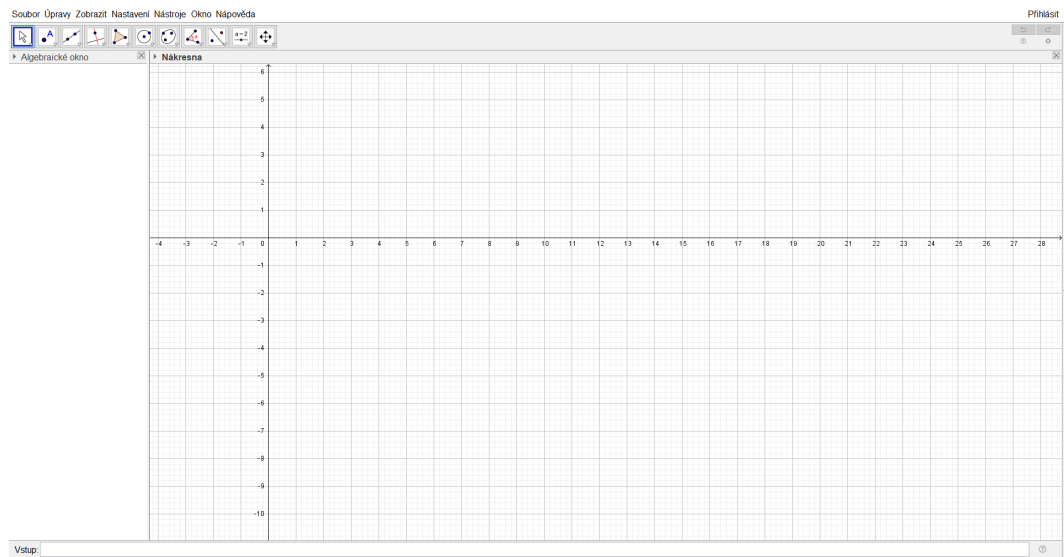
Uveďme si tuto funkci na základě jednoduchého příkladu. Sestrojme si libovolný bod. V našem případě si ho pojmenujeme A . Poté si narýsujeme kružnici se středem v tomto bodě. Následně si na této kružnici sestrojíme libovolný bod a nazveme ho P . Jako další krok si spojíme bod A s bodem P , vznikne nám úsečka AP . Poté sestrojíme bod P' jako střed úsečky AP .

Úkolem tedy bude zjistit, po jaké trajektorii se bude pohybovat bod P' , když budeme pohybovat bodem P po kružnici.

V tomto zadání nám úlohu *moveru* plní bod P , který se pohybuje po kružnici a úlohu *traceru* plní bod P' , který se pohybuje v závislosti na pohybu bodu P .

V programu GeoGebra můžeme využívat obrázkové menu nacházející se na hor-

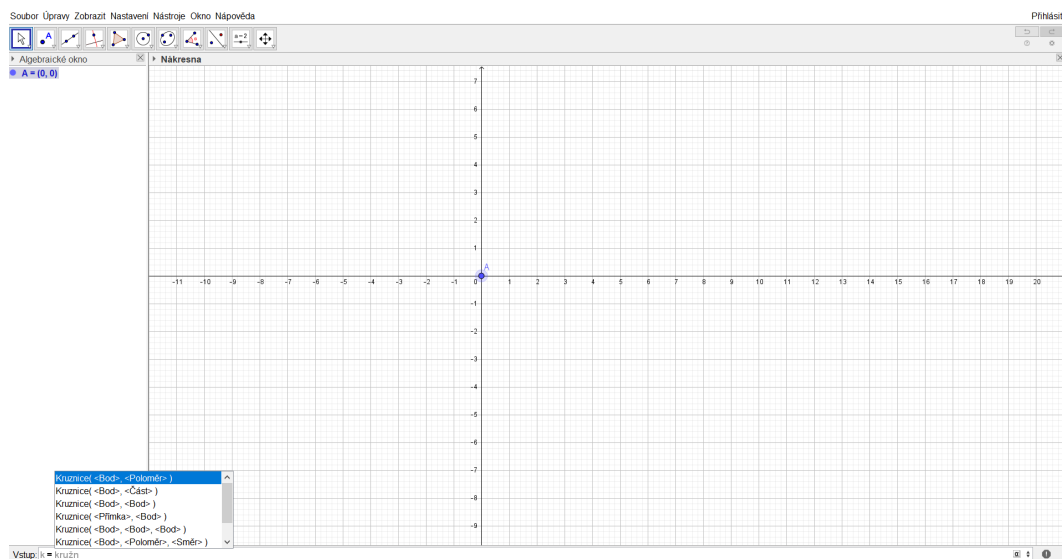
ním pravém okraji okna. Nebo můžeme využívat příkazový řádek nacházející se v levém spodním okraji okna. Můžete vidět na obrázku 1.



Obrázek 1: Okno programu GeoGebra po spuštění

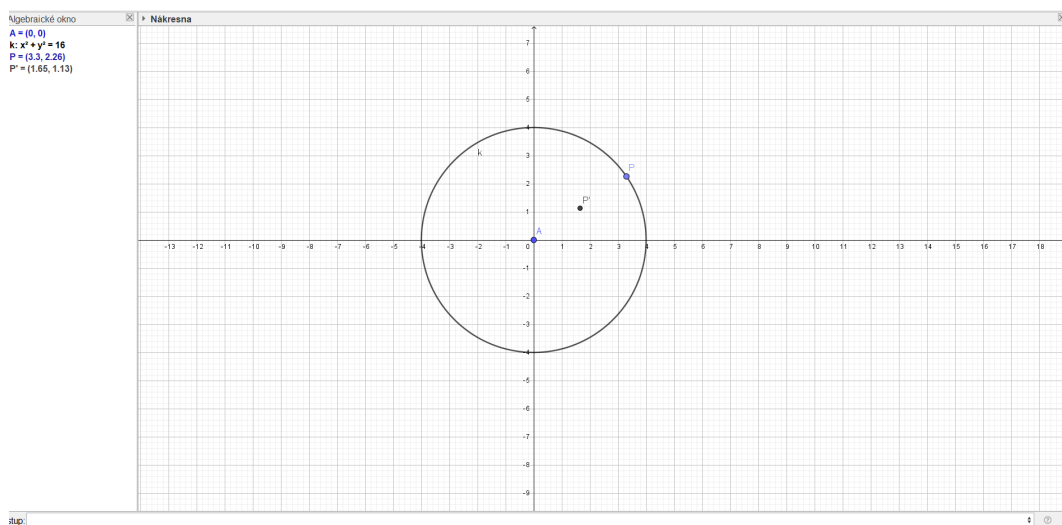
Pokud se rozhodneme pro využití příkazového řádku, musíme znát příkazy, nemusíme je znát úplně z paměti, protože GeoGebra nám nabízí nápovědu. Pokud bychom se tedy výše uvedený příklad rozhodli zkonstruovat pomocí příkazového řádku, zadávali bychom postupně tyto příkazy:

- $A = (0,0)$ - vytvořili jsme bod A o souřadnicích $x = 0$ a $y = 0$.
- $k = \text{Kružnice}(A, 4)$ - vytvořili jsme kružnici k o poloměru 4, na obrázku 2 můžete vidět, že možností, jak vytvořit kružnici je více, našeptávač je v tomto případě velice nápomocný a usnadňuje nám činnost, nemusíme dokonce ani příkaz psát úplně přesně a našeptávač nám i přesto poradí.
- $P = \text{Bod}(k)$ - definovali jsme bod P jako bod, který se nachází na objektu (v našem případě kružnici) k .
- $P' = \text{StředSouměrnosti}(A, P)$ - definovali jsme bod P' jako střed úsečky AP .
Za povšimnutí stojí, že úsečka AP nemusí být zakreslena.



Obrázek 2: Ukázka našeptávače

Po zadání výše uvedených příkazů bychom měli mít sestrojené základní zadání, které by mělo vypadat jako na obrázku 3.

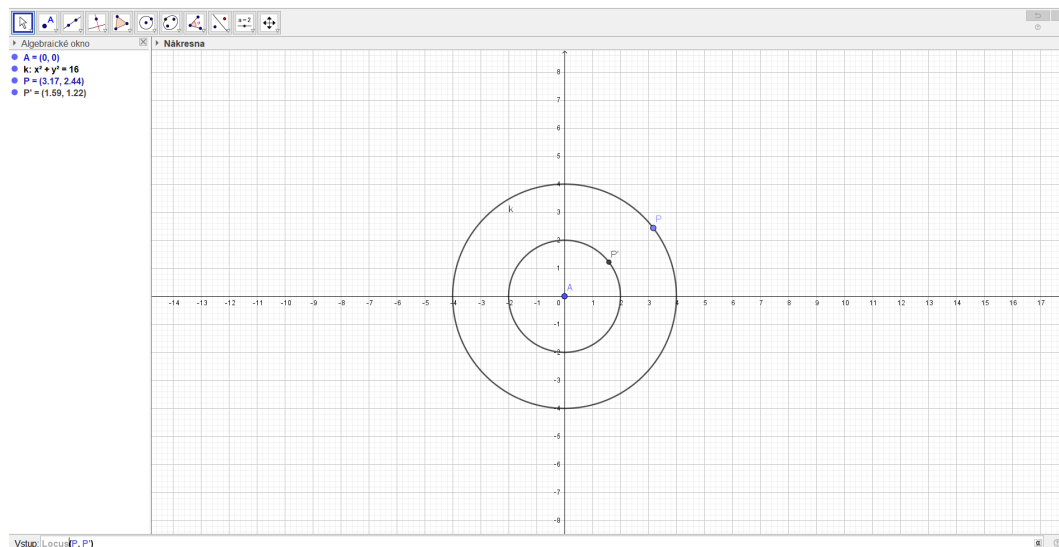


Obrázek 3: Zadání příkladu

Nyní si sami můžeme vyzkoušet, jak se pohybuje bod P' v závislosti na pohybu bodu P po kružnici k . Vidíme, že bod P' se nejspíše pohybuje po kružnici.

Pokud se o tom chceme ujistit, můžeme použít funkci *Locus*. V české lokalizaci se jedná o funkci *MnozinaBodu*

Tato funkce nám množinu bodů, po které se pohybuje *tracer* vykreslí 4.



Obrázek 4: Řešení příkladu pomocí funkce Locus

Mohlo by se zdát, že již zde můžeme skončit a prohlásit, že bod P' se pohybuje po kružnici. Vizuálně by se mohlo zdát, že není o čem diskutovat. Pokud si ale svým prohlášením chceme být stoprocentně jistí, tak nám vizuální důkaz stačit nebude [5], [6], [7].

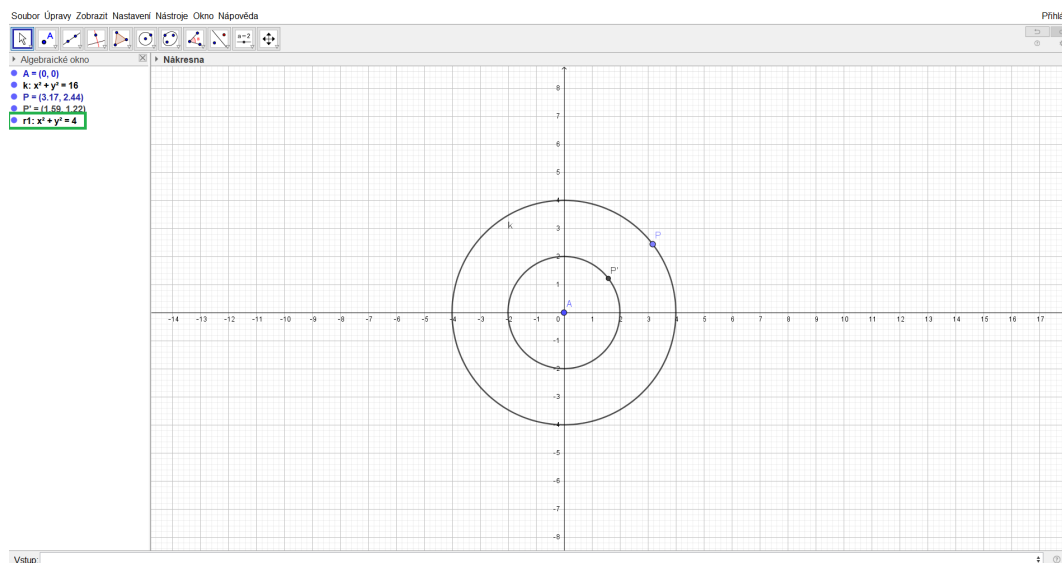
Abychom mohli s jistotou prohlásit, že se jedná o kružnici, budeme potřebovat i její rovnici.

V programu GeoGebra je implementovaná funkce *LocusEquation*. V české lokalizaci programu GeoGebra by se jednalo o funkci *RovniceMnozinyBodu*. Tato metoda si sestaví rovnice všech objektů, které se v konstrukci vyskytují. Tedy definuje souřadnice bodů x_A, y_A, x_P, y_P, x'_P a y'_P .

Pomocí těchto souřadnic funkce *LocusEquation* vytvoří soustavu rovnic využívající tyto souřadnice vzhledem ke konstrukci. Poté je třeba tuto soustavu zredukovat pouze na rovnice používající jenom souřadnice x'_P a y'_P . Proces, který metoda *LocusEquation* využívá, se nazývá eliminace.

Tento proces v programu GeoGebra provádí Giac Computer Algebra System (CAS) na pozadí [5], [6], [7].

Pokud tedy použijeme funkci *LocusEquation* nejenže získáme vizuální reprezentaci hledané množiny, ale získáme i její rovnici. Pokud máme rovnici kružnice, už nemůže být pochyb o tom, že hledaná množina je skutečně kružnicí.



Obrázek 5: Řešení příkladu pomocí funkce LocusEquation

GeoGebra nám ukáže rovnici $x^2 + y^2 = 4$. Tedy kružnice se středem v počátku souřadné soustavy a s poloměrem 2. Vzhledem k tomu, že naše původní kružnice měla střed také v počátku souřadnic a *tracer* byl zkonstruován, tak aby byl v polovině poloměru, není pochyb o tom, že je to správné řešení.

Tento příklad slouží pouze jako ukázkový příklad využití metod *Locus* a *LocusEquation*. Posloužil také k vysvětlení pojmu explicitní množiny bodů daných vlastností.

3.2 Funkce Locus a LocusEquation - implicitní množina bodů daných vlastností

Mějme jakýkoliv bod I . Může se jednat o bod v prostoru, nebo o bod na nějakém objektu, po kterém se může pohybovat. Takovýto objekt, po kterém se bod I pohybuje, můžeme nazývat cestu. Předpokládejme, že jsou dané jakési konstrukční kroky. Můžeme si vymyslet jakoukoliv podmínku, která platí ve vztahu k bodu I a ostatním objektům konstrukce. Tato podmínka se v programu GeoGebra nazývá *Boolean Expression*. V české lokalizaci programu GeoGebra je tato podmínka označena jako *Pravdivostní hodnota*.

Úkolem při takovémto zadání bude nalézt rovnici objektu takového, že když se

na něm bude nacházet bod I , tak budou splněny všechny zadané podmínky.

K řešení takovýchto úloh nám bude opět sloužit metoda *LocusEquation*. Ovšem v tomto případě budeme jako parametry funkce udávat danou podmínku (Boolean expression/Pravdivostní hodnotu) a bod I .

Uvedeme si základní hodnoty, které se nám můžou objevit v parametru Boolean expression/Pravdivostní hodnota [7] [8]:

- Jakákoliv rovnice např. $a^2 + b^2 == c^2$. Pythagorova věta.
- Totožnost dvou geometrických objektů, např. $A == B$. Bod A je totožný s bodem B . Je možno použít metodu *AreEqual*[A, B].
- Shodnost dvou geometrických objektů pomocí funkce *AreCongruent*, např. *AreCongruent*[*Circle*((0,0),1), $x^2 + y^2 = 1$] a *AreCongruent*[*Circle*((1,1),1), $x^2 + y^2 = 1$]. Obě tyto funkce budou vracet pravdivostní hodnotu *true*. V prvním případě porovnáváme dvě totožné kružnice - mají stejný poloměr i střed. V tomto případě by nám i funkce *AreEqual* vrátila pravdivostní hodnotu *true*. V druhém případě porovnáváme kružnice se stejným poloměrem, avšak střed se liší. U první kružnice je to bod [1,1] a u druhé kružnice je to bod [0,0]. Funkce *AreCongruent* nám vrátí pravdivostní hodnotu *true*, protože se jedná o kružnici s poloměrem 1. Avšak funkce *AreEqual* nám vrátí pravdivostní hodnotu rovnou *false*, protože kružnice jsou sice stejné (resp. mají stejný poloměr), ale střed se liší. V české lokalizaci jsou odpovídající funkce nazvány *JsouTotozne = AreEqual* a *JsouShodne = AreCongruent*.
- Ověření, zda se bod nachází na přímce, kružnici apod. např. $A \in c$. Zde se ptáme, zda se bod A nachází na geometrickém objektu c .
- Rovnoběžnost dvou přímek/úseček, které se zadávají jako parametry této funkce. např. *AreParallel*[p, q] vrací hodnotu *true* v případě, že jsou přímky/úsečky p a q rovnoběžné. V české lokalizaci je tato funkce označena jako *JsouRovnobezne*.

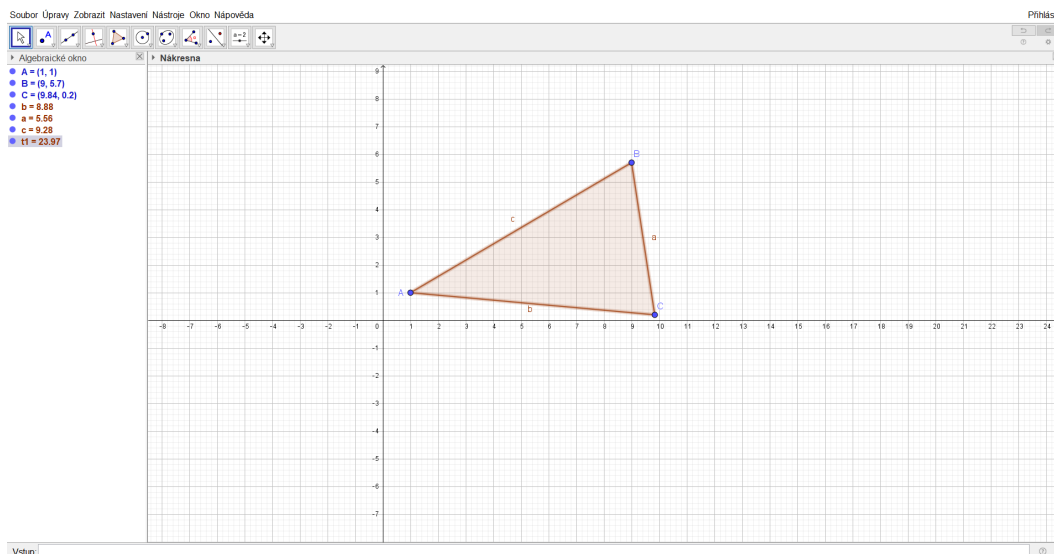
- Kolmost dvou přímek/úseček, např. *ArePerpendicular[p,q]* vrátí hodnotu *true* v případě, že přímky/úsečky p a q jsou na sebe kolmé. V české lokalizaci je tato funkce pojmenována *JsouKolme*.
- Kolinearita tří bodů. Tedy ověření, zda tři dané body leží na jedné přímce, např. *AreCollinear[K,L,M]* vrací hodnotu *true* v případě, že body K , L a M lze vést přímkou. V české lokalizaci je tato funkce pojmenována *JsouKolinearni*.
- Ověření, zda tři přímky mají jeden společný bod, např. *AreConcurrent[f,g,h]* vrací hodnotu *true* v případě, že se přímky f , g a h protínají v právě jednom společném bodě. V české lokalizaci je tato funkce pojmenována *ProtinajiciSe*.
- Ověření zda, čtyři body leží na kružnici, např. *AreConcyclic[A,B,C,D]* vrátí hodnotu *true* v případě, že můžeme sestrojit kružnici takovou, že na ni budou ležet všechny čtyři body. V české lokalizaci je tato funkce pojmenována *JsouNaKruznici*.

Využití implicitní množiny bodů daných vlastností ukážeme na příkladu odvození Thaletovy věty¹ resp. odvození Thaletovy kružnice. Využijeme k tomu funkci *LocusEquation* a Pythagorovu větu² jako podmínku. Tedy využijeme hned první typ podmínky ze seznamu uvedeného výše.

V první řadě si sestrojíme trojúhelník ABC . K tomu můžeme využít funkci *Polygon/Mnohoúhelník*, která se vyskytuje v horním menu. Tímto způsobem bychom se vyhnuli používání vstupního řádku. Můžeme si také sestrojit tři body a spojit je pomocí funkce *Segment/úsečka* viz. obrázek 6.

¹"Sestrojme libovolnou kružnici s průměrem. Koncové body jejího průměru označíme A a B a zvolíme libovolný bod C na kružnici. Pak platí, že trojúhelník ABC je pravoúhlý a má pravý úhel u vrcholu C."[9]

²"Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou libovolného pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad oběma jeho odvěsnami (dvěma kratšími stranami)."[9]



Obrázek 6: Trojúhelník ABC k vyřešení implicitní množiny bodů daných vlastností

Pokud bychom trvali na využití vstupního řádku, je to možné. Museli by však již existovat body, které bychom uvedli jako parametry funkce *Polygon/Mnolehelnik*.

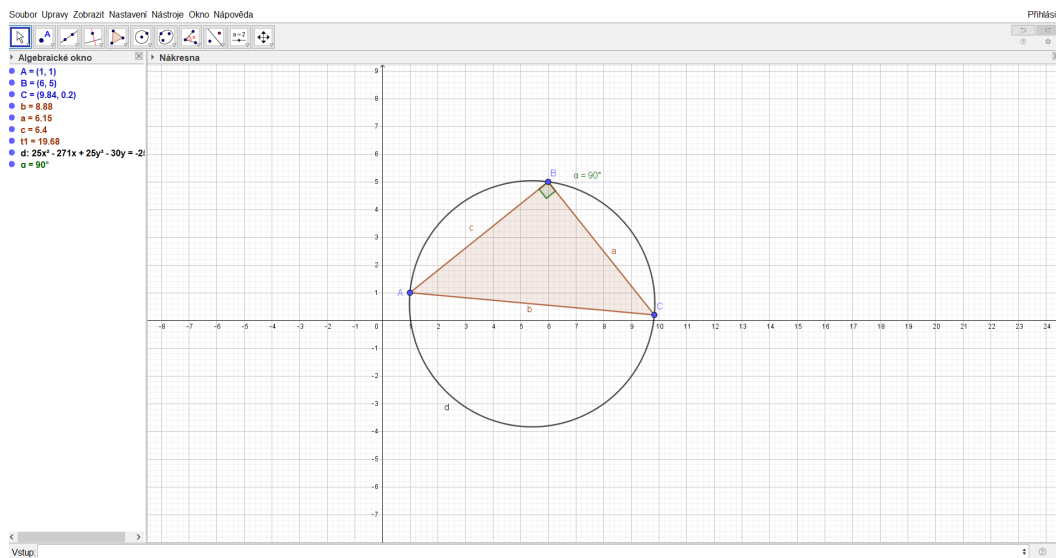
Dalším krokem již bude využití funkce *LocusEquation*. V případě implicitní množiny bodů daných vlastností musíme jako parametry funkce *Boolean Expression/Pravdivostní hodnotu* a bod, kterého se daná podmínka týká.

V našem případě si tyto parametry můžeme zvolit následovně. Budeme předpokládat, že pravý úhel budeme chtít u vrcholu B . V tom případě bude naše funkce s parametry vypadat následovně viz. obrázek 7.:

$$\text{LocusEquation}[a^2 + c^2 == b^2, B]/\text{RovniceMnozinyBodu}[a^2 + c^2 == b^2, B]$$

Pomocí posouvání objektů, které se potahovat dají, můžeme zjistit, že výsledek se jeví jako kružnice. Dokonce máme danou i rovnici, která tuto kružnici vykresluje.

Tato vizuální pomůcka nám pomůže Thaletův teorém dokázat. Zatím by se ještě neměl opomíjet "klasický" důkaz. Ovšem ukázalo se, že je daleko jednodušší odvodit "klasický" důkaz, když už je nám výsledek známý.



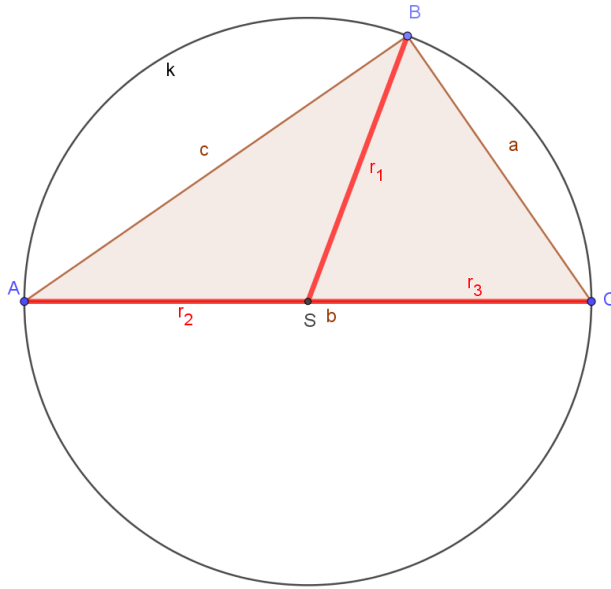
Obrázek 7: Implicitní množina bodů daných vlastností

V našem případě jsme pomocí GeoGebry zjistili, že pokud sestrojíme kružnici tak, aby měla za průměr stranu trojúhelníka, tak když se bude bod, který na té dané straně neleží nacházet na kružnici a zároveň nebude ležet na dané úsečce (nebyl by to trojúhelník), tak úhel u tohoto vrcholu bude pravý.

Tato znalost nám posléze umožní snadněji nalézt "klasický důkaz"[6].

Pokud chceme aby se bod B nacházel přímo na kružnici, musíme použít funkci *Attach/Detach / Připojit/Odpojit*. Pokud si takto definujeme bod B , tak se bude pohybovat pouze po dané kružnici. Tato funkce lze použít i na jiné objekty. Pohybování bodem B pouze po kružnici nám pomůže si snadněji uvědomit důležitou vlastnost dané konstrukce viz 8.

Usnadnění v tomto případě spočívá v tom, že když víme jak vypadá řešení, snadněji najdeme i důkaz [6]. Když víme, že se snažíme dokázat, že hledaná množina bodů daných vlastností je kružnice, lehčeji si odvodíme některé vlastnosti, které můžeme potřebovat použít.



Obrázek 8: Zjištění důležité vlastnosti

V našem případě snadno uvidíme, že vzdálenost mezi body A a S je stejná jako vzdálenosti mezi A a B a A a C. Tedy platí, že $|AS| = |BS| = |CS|$. V obrázku 8 označeno červenou barvou a také pojmenováno r_1, r_2 a r_3 .

Při pohledu na obrázek 8 si také můžeme velmi snadno uvědomit, že trojúhelníky BSC a ASB jsou rovnoramenné trojúhelníky. U nich víme, že ramena mají stejnou délku (v našem případě je délka ramen u obou trojúhelníků rovna poloměru kružnice) a zároveň oba úhly při základně mají stejnou velikost viz 9.

V trojúhelníku ASB tedy platí $\alpha = \beta$ a v trojúhelníku CSB platí $\gamma = \delta$.

Víme také, že když se trojúhelník nachází v Eukleidovské rovině, tak součet vnitřních úhlů je roven 180° .

Můžeme tedy zapsat $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$. Protože víme, že $\alpha = \beta$ a $\gamma = \delta$, můžeme některé symboly nahradit a upravit rovnici do následujícího tvaru:

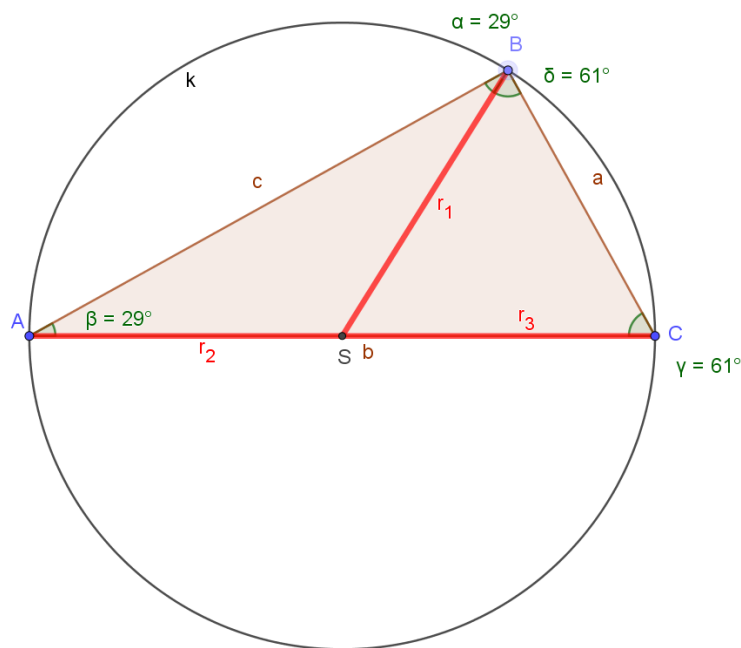
$$\alpha + \alpha + \delta + \delta = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\delta = 180^\circ$$

Tuto rovnici již stačí pouze vydělit dvěma a dostaneme:

$$2\alpha + 2\delta = 180^\circ | : 2$$

$$\alpha + \delta = 90^\circ$$



Obrázek 9: Rovnoramenné trojúhelníky

Povedlo se nám poměrně snadno pomocí programu GeoGebra odvodit Thaletův teorém. Zadání pro žáky by mohlo například znít: *Máme daný trojúhelník ABC. Nalezněte množinu bodů, na které se musí nacházet bod B tak, aby trojúhelník ABC byl pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu B.*

S pomocí konstrukce v programu GeoGebra a využití pomocné funkce (*LocusEquation/RovniceMnozinyBodu*) snadno nalezneme hledanou množinu.

Uvědomění si významných vlastností je s dynamickým appletem mnohem snazší, než bez něj. Žáci si také mnohem snadněji uvědomí, že se jedná o rovnoramenné trojúhelníky i v případě, že by se jako první věnovali úhlům α, β, γ a δ .

Nejzásadnější krok je sestrojení si úsečky SB . Poté už je důkaz poměrně snadno

odvoditelný.

3.3 Funkce Envelope

Tato funkce slouží k vypočítání rovnice křivky, která je tečnou ke skupině objektů, zatímco se *rodič* skupiny objektů pohybuje po určité dráze.

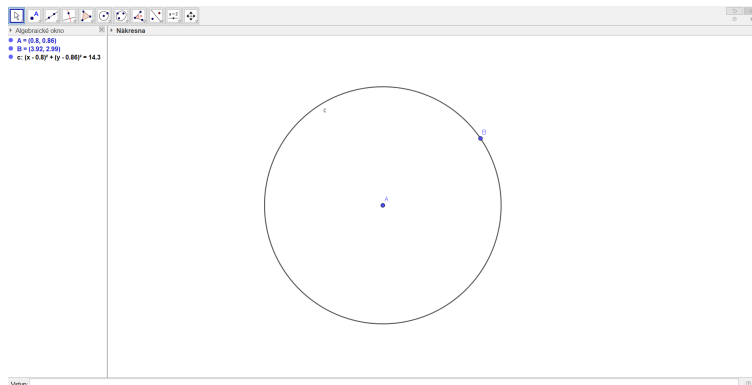
Přesněji řečeno, mějme výstupní bod I na dané trase P , určité konstrukční kroky a výstupní trasu O . Výstupní trasa může být přímka, kružnice apod. Úkolem je odvodit rovnici E křivky C , která je tečnou k trase O , zatímco se bod I pohybuje na trase P . Tímto postupem vznikne E .

Bod I se nazývá *mover*. E se nazývá *envelope equation/rovnice obálky* a její grafická reprezentace se nazývá *envelope/obálka*.

Na příkladu si ukážeme definici elipsy jako obálku. Mějme kružnici a bod, který leží uvnitř kružnice. Křivka, která je tvořena tečnami ke skupině kolmých úseček, které pólí úsečku mezi pohybujícím se bodem na kružnici a jejím vnitřním bodem, je elipsa.

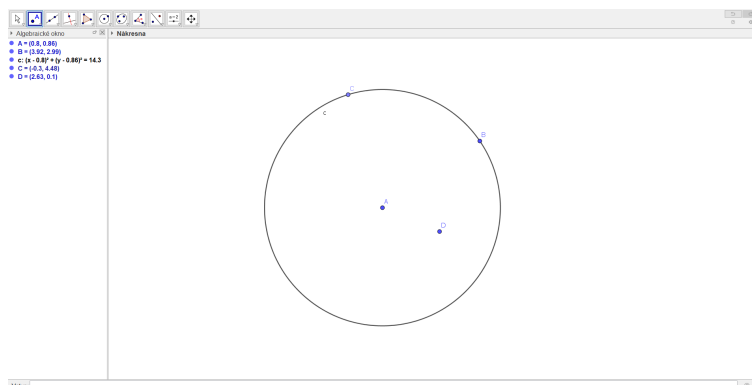
Tuto definici si s využitím funkce *envelope/obálka* můžeme snadno ověřit v programu dynamické geometrie GeoGebra. V následující části si ukážeme, jak by se to dalo udělat.

Prvním krokem bude sestrojít si kružnici c se středem v bodě A a bodem B , který leží na kružnici c . Můžeme k tomu využít funkci kružnice daná středem a bodem viz 10.



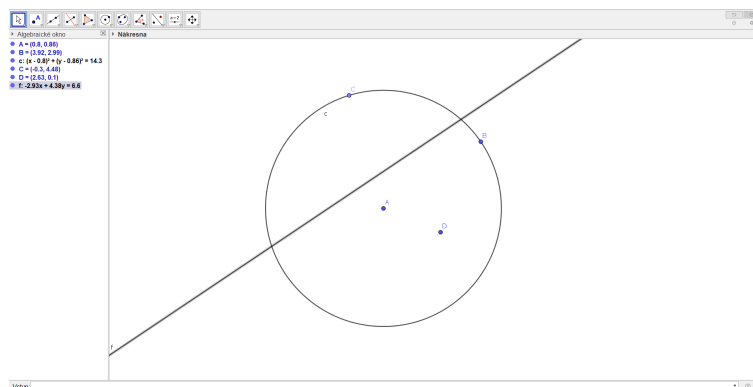
Obrázek 10: Kružnice c s bodem B

Poté si na kružnici c vložíme bod C . A dále si vložíme libovolný bod D do vnitřní oblasti kružnice c viz 11.



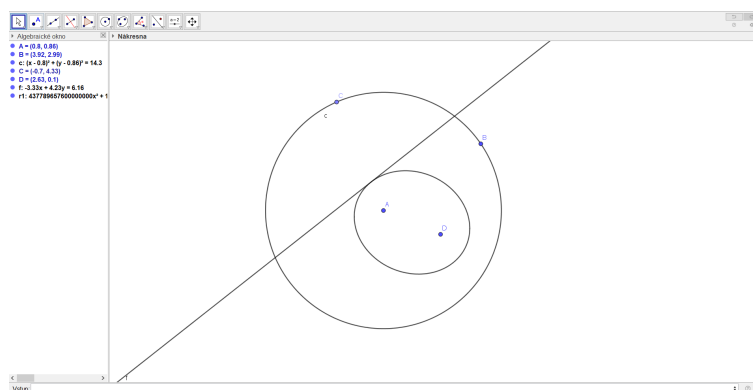
Obrázek 11: Kružnice c s body C a D

Následně si sestrojíme úsečku CD a její osu. Tedy přímku, která je na tuto úsečku kolmá a dělí ji na dvě půlky. V programu GeoGebra si vizuálně úsečku CD vykreslovat nemusíme, stačí nám využít funkci *PerpendicularBisector/osa úsečky*. Tato funkce nám vykreslí rovnou osu úsečky, bez nutnosti si danou úsečku vykreslovat. Použitím této funkce nám vznikne přímka f viz 12.



Obrázek 12: Přímka f jako osa úsečky CD

V této fázi jsme již připraveni na použití funkce *Envelope/Obalka*. Do okna vstupu zapíšeme $Envelope[f, C]/Obalka[f, C]$. V algebraickém okně se nám vypíše rovnice kuželosečky, v grafickém okně se nám tato kuželosečka vykreslí. Pohybem bodu C po kružnici c si můžeme graficky ověřit, že všechny osy úsečky CD jsou skutečně tečny vzniklé elipsy viz 13.



Obrázek 13: Vzniklá elipsa pomocí funkce *Envelope/Obalka*

Funkce *Envelope/Obalka* lze využít k prozkoumávání alternativních definic kuželoseček a k prohloubení znalostí na toto téma. Výhoda spočívá, jako u všech zkoumaných funkcí, v rychlé a snadné vizualizaci daného problému.

4 Množiny bodů daných vlastností

V předchozích kapitolách jsme si představili nové funkce, které nám program GeoGebra nabízí. V této kapitole si ukážeme možnosti využití výše uvedených funkcí na různých příkladech.

Existují dva základní přístupy - automatické objevování a automatické dokazování.

Automatické objevování se zabývá situacemi, kdy je dané tvrzení pravdivé a automatické dokazování se zabývá, jestli je dané tvrzení pravdivé [13].

V této kapitole se budeme zabývat především automatickým objevováním.

Při řešení příkladů zabývajících se automatickým objevováním lze uplatnit následující postup:

1. Náčrt situace v programu DGS
2. Demonstrace v programu DGS - použití funkce *Stopa bodu*
3. Ověření za využití funkce *Množina bodů*
4. Sestavení klasického důkazu - DGS může sloužit k nalezení souvislostí mezi objekty, ne vždy lze takový důkaz sestavit
5. Hledání množiny s využitím počítače a CAS - Zavedení vhodné kartézské soustavy souřadnic, sestavení algebraických rovnic a následná eliminace závislých proměnných vede k získání rovnice hledané množiny
6. Srovnání výsledků DGS a CAS
7. Odvození závěrů

Automatické objevování funguje na následujícím principu. Mějme tvrzení $H \Rightarrow T$, které je ve většině podstatných případů nepravdivé. Naším cílem je automaticky vyprodukovat přídatnou hypotézu H_0 , tak aby vzniklo nové tvrzení $(H \wedge H_0) \Rightarrow T$ bylo pravdivé [13].

Abychom se tímto problémem mohli zabývat, musíme převést problém geometrický na problém algebraický. Musíme tedy zavést systém rovnic, který popisuje geometrickou situaci.

Pomocí tohoto systému sestavíme množinu polynomů, které popisují situaci pomocí algebraických rovnic. Tento systém se nazývá ideál. Ze sestaveného ideálu získáme výsledné tvrzení pomocí eliminace závislých proměnných. K této eliminaci využíváme Gröbnerovy báze.

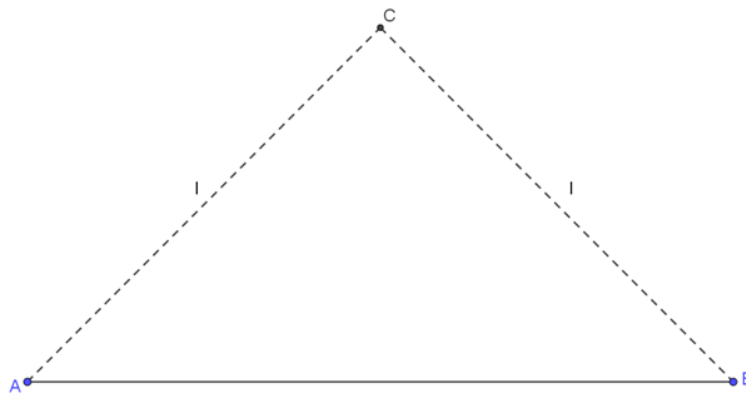
Základní případy jsou implicitní a explicitní množina bodů daných vlastností (uvedeno v kapitolách výše).

V následujících kapitolách si uvedeme případy, které mohou nastat - získání výsledků rovnou z eliminace, dopravení výsledků pomocí faktorizace, eliminace vrátí prázdnou množinu.

4.1 Osa úsečky jako množina bodů daných vlastností

Zadání: Určete množinu všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od dvou zadaných bodů A a B.

Jako první si vytvoříme náčrt situace pomocí programu DGS. Musíme si zadat dva bod A a bod B. Následně si sestrojíme bod C, tak aby byl stejně vzdálený od bodu A i od bodu B. Situace by mohla vypadat následovně.

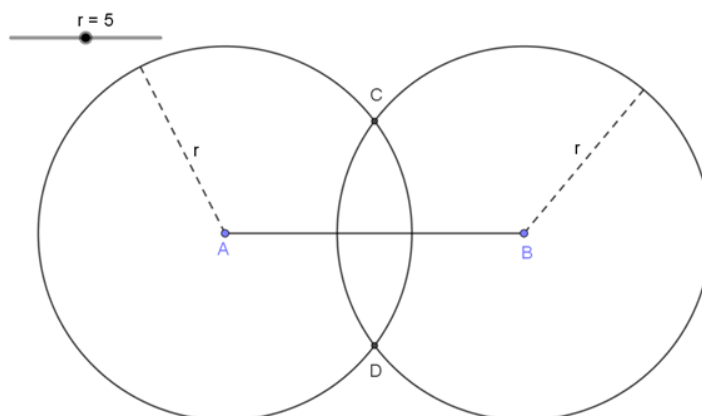


Obrázek 14: Náčrt situace

Z tohoto náčrtu můžeme usoudit, že se k nalezení bodu, který má od dvou bodů stejnou vzdálenost můžeme, využít dvě kružnice o stejném poloměru.

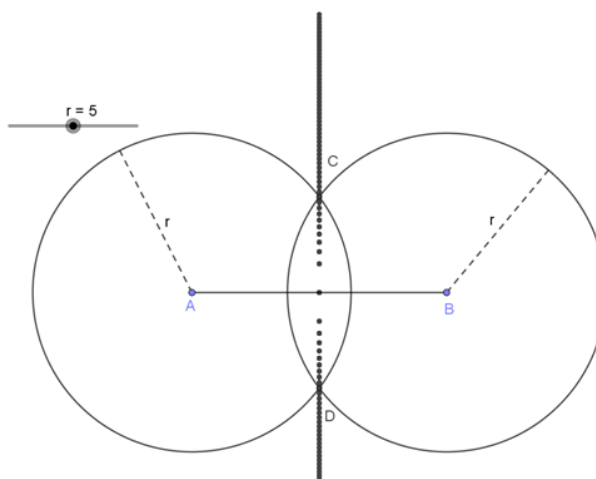
V programu DGS si můžeme zajistit, pomocí funkce *Kružnice daná poloměrem*, dvě kružnice o stejném poloměru. Stačí si nastavit posuvník. Hodnotu tohoto posuvníku můžeme pak nastavit jako poloměr daných dvou kružnic. Bude se nám tedy

měnit poloměr obou kružnic zároveň. To nám umožní lépe prozkoumat situaci.



Obrázek 15: Dva body množiny

Touto konstrukcí jsme získali dva hledané body C a D. Nyní můžeme použít funkci *Stopa množiny*. Ta nám umožní získat ještě větší náhled do situace.



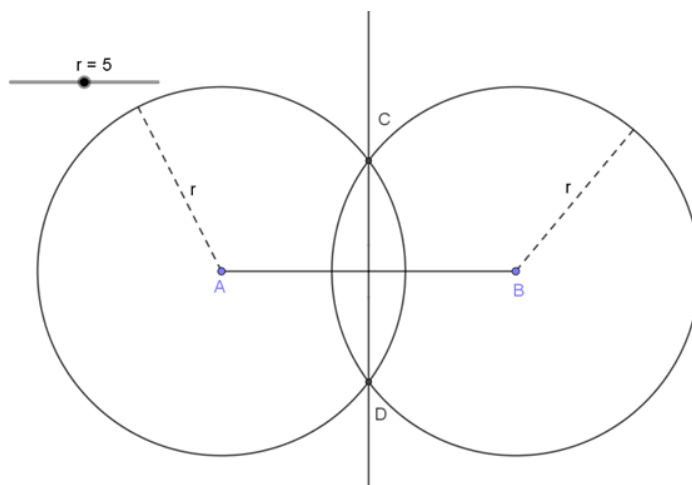
Obrázek 16: Použití funkce *Stopa bodu*

Z obrázku můžeme vidět, že se nám podařilo získat větší vhled do situace. Graficky se zdá, že by hledaná množina bodů mohla být přímka. Toto ovšem ještě nestačí na to, abychom to mohli prohlásit s jistotou.

K získání většího přesvědčení, že se skutečně jedná o přímku, musíme využít funkci *Množina bodů*.

Funkci *Množina bodů* použijeme s parametry bod tvořící množinu a posuvník. Bod tvořící množinu bude postupně bod C a bod D. Na pořadí nezáleží. A do části

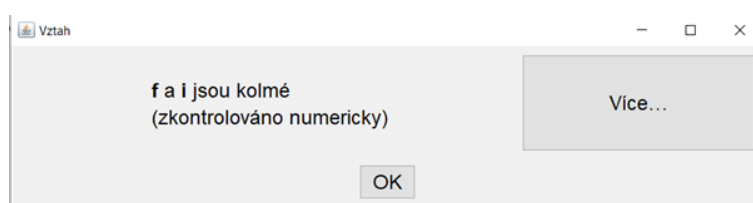
zadání posuvníku napíšeme název posuvníku. V tomto případě je to r .



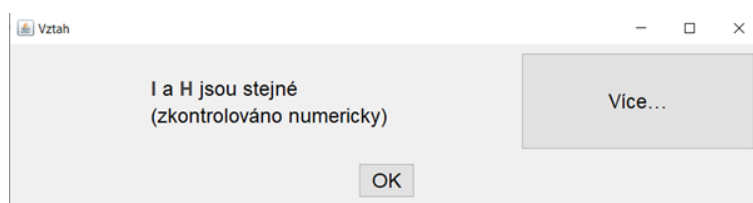
Obrázek 17: Použití funkce *Množina bodů*

Funkce *Množina bodů* nás posunula zase o kus dále. Nyní si můžeme být trochu jistější, že se skutečně jedná o přímku. V tomto kroku to ještě však nemůžeme vědět jistě. Avšak takovýto náhled nám umožní snadněji sestavit klasický nepočítačový důkaz.

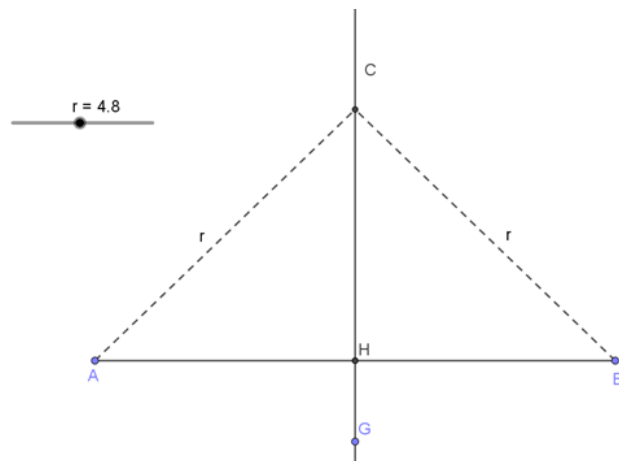
K zjištění platných vlastností mezi objekty využijeme funkci *Vztah mezi objekty*. Tato funkce nám potvrdí, že úsečka AB je kolmá na přímkou CD . Dále si vytvoříme průsečík této úsečky a přímky. Dále si sestojíme střed úsečky AB . Porovnáním tohoto průsečíku a středu úsečky AB .



Obrázek 18: Kontrola kolmosti



Obrázek 19: Kontrola shodnosti



Obrázek 20: Sestavení klasického důkazu

Nyní máme dostatek informací k sestavení klasického nepočítačového důkazu. Pomocí těchto informací si můžeme vyvodit následující vztahy:

$$|AH| = |BH|$$

$$|\angle AHC| = |\angle BHC| = 90^\circ$$

Důkaz provedeme pomocí ekvivalence $a \Leftrightarrow b$, kde:

Výrok a : Bod C leží na přímce HG .

Výrok b : Bod C leží ve stejné vzdálenosti od bodu A i od bodu B .

Nejprve dokážeme výrok $a \Rightarrow b$. Na základě získaných informací můžeme prohlásit, že trojúhelník AHC je podobný trojúhelníku BHC podle věty *sus*. Bude tedy vždy platit:

$$|AC| = |BC|$$

První implikace je tedy dokázána. Nyní ještě musíme dokázat implikaci $b \Rightarrow a$.

Tedy pokud platí, že vzdálenost bodu C od bodů A i B stejná, tak bod C leží na přímce HG .

Při důkazu mohou nastat dva stavy:

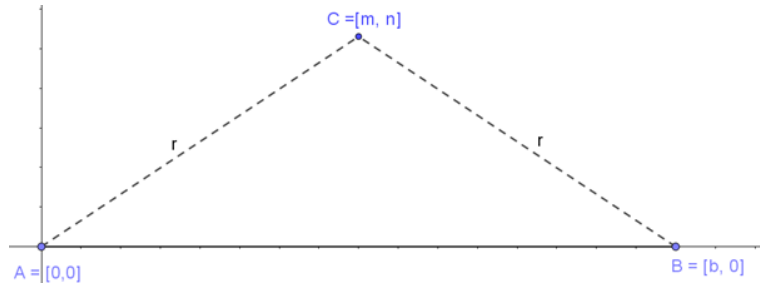
Bod C leží na úsečce $AB \Rightarrow$ bod C musí být středem úsečky AB , tedy musí ležet na přímce HG .

Bod C neleží na úsečce $AB \Rightarrow$ mohu sestavit trojúhelník ABC .

Trojúhelník ABC je rovnoramenný, tudíž jeho výška musí procházet středem

úsečky AB a zároveň na ni musí být kolmá. Klasický nepočítačový důkaz je tedy sestaven. Zbývá nám jen důkaz za využití CAS.

K využití CAS potřebujeme zavést vhodnou kartézskou soustavu souřadnic. V našem případě by to mohlo vypadat následovně.



Obrázek 21: Zavedená kartézská soustava

Bod $A = [0, 0]$, bod $B = [b, 0]$, bod $C = [m, n]$, $b \neq 0$. Nesmíme zapomenout na dvě kružnice se středy v bodech A a B a poloměrech r .

Jejich rovnice by vypadali následovně:

$$k_1 : x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$$k_2 : (x - b)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

První rovnice je rovnice kružnice (k_1) se středem v bodě A . Druhá rovnice tedy náleží kružnici (k_2) se středem v bodě B .

Na základě předchozích analýz si sestojíme pravdivá tvrzení, která jsou relevantní pro řešení problému. Takovými tvrzeními jsou v tomto případě taková, že bod C leží na obou kružnicích zároveň. Tím dostaneme následující vztahy:

$$C \in k_1 \Leftrightarrow H_1 : m^2 + n^2 - r^2 = 0$$

$$C \in k_2 \Leftrightarrow H_2 : (m - b)^2 + n^2 - r^2 = 0$$

Nyní se přesuneme do systému CAS, v této práci budu využívat CoCoA 4.7.5. Do programu zapíšeme:

```
Use R ::= Q[m, n, b, r];
```

```
I:=Ideal(m^2+n^2-r^2, (m-b)^2+n^2-r^2);
```

`Elim(r, I);`

System CAS nám udá výsledek:

`Ideal(2mb - b^2).`

Z tohoto výsledku získáme:

$$\begin{aligned}2mb - b^2 &= 0 \\m &= \frac{b^2}{2b} \\m &= \frac{b}{2}\end{aligned}$$

Záměnou neznámé m za neznámou x získáme tvar rovnice, který můžeme zadat do programu GeoGebra a ověřit si, zda se skutečně jedná o rovnici přímky. V tomto případě je zjevné, že se jedná o přímku kolmou na osu x a procházející středem úsečky AB .

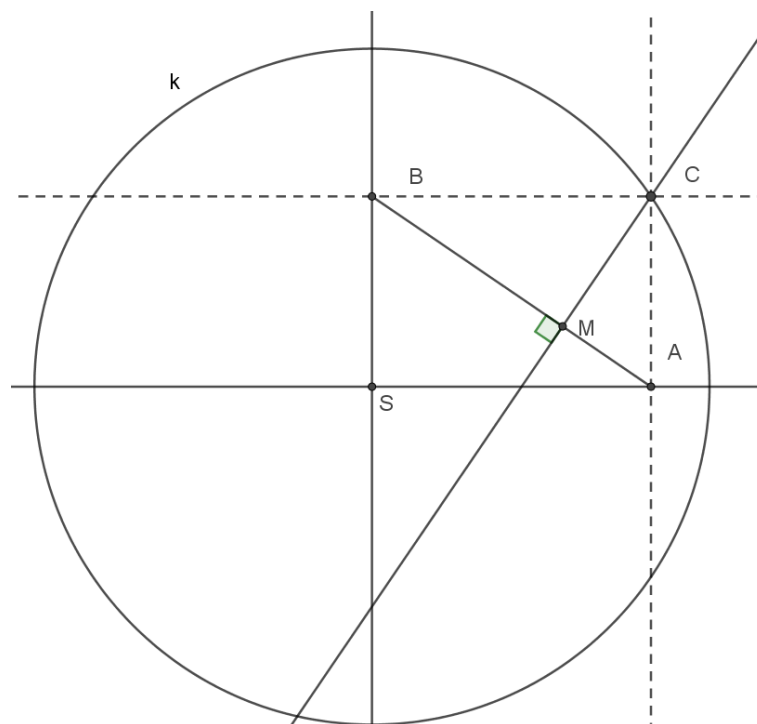
$$x = \frac{b}{2}$$

4.2 Asteroidea

Je dána kružnice k a na ní bod C . Středem kružnice k sestrojíme dvě na sebe kolmé přímky x, y . Poté sestrojíme kolmice z bodu C na přímky x, y . Paty těchto kolmic označíme body A, B . Bodem C následně vedeme kolmici na stranu AB . Průsečík této kolmice a úsečky AB označíme bodem M .

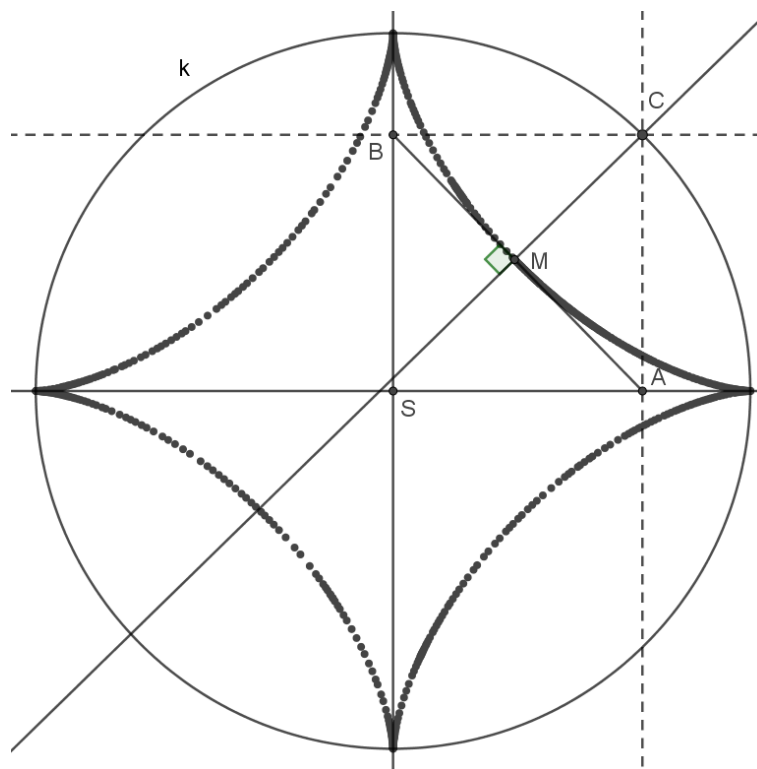
Zadání: Určete množinu bodů M , která vznikne pohybem bodu C po kružnici k .

Prvním krokem k řešení tohoto zadání bude náčrt situace v prostředí DGS.

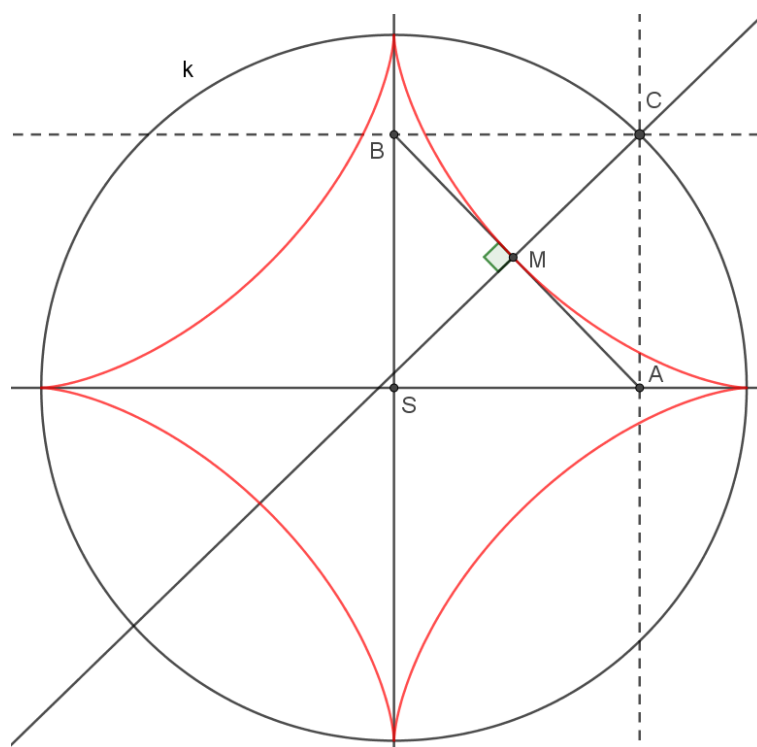


Obrázek 22: Náčrt zadané situace

Samotný náčrt nám toho ještě moc neprozradí, ale umožní nám využití dalších funkcí programu GeoGebra, které nám umožní větší náhled do situace. Mezi tyto funkce patří *Stopa bodu* a *Množina bodů*.



Obrázek 23: Nápodvěda získaná pomocí funkce *Stopa bodu*



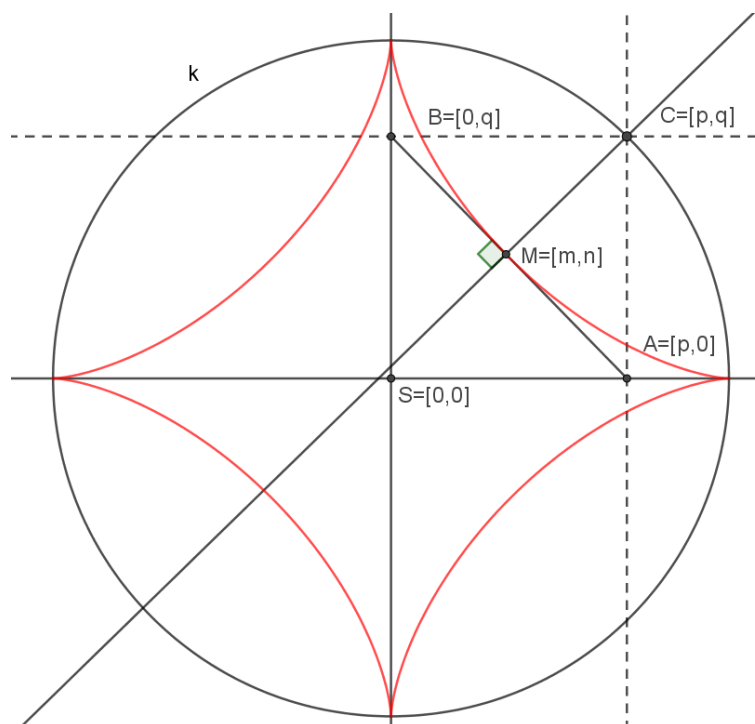
Obrázek 24: Využití funkce *Množina bodů*

Využití funkce *Stopa bodu* je poměrně přímočaré. Stačí si jen u bodu M zapnout vykreslování stopy bodu. Poté stačí pohybovat bodem C , bod M se v závislosti na pohybu bodu C bude pohybovat také. Zároveň za sebou bude nechávat stopu, která nám umožní lepší náhled do situace.

Využití funkce *Množina bodů* bude také velice jednoduché. Stačí si do parametrů funkce jako bod tvořící množinu bod M a jako bod pohybující se po objektu (v tomto případě kružnici) bod C .

GeoGebra nám poskytla představu o tom, jak by hledaná množina bodů mohla vypadat. Tato křivka se obecně nazývá asteroida.

Pro nalezení rovnice asteroidy musíme opět vhodně zvolit kartézskou soustavu souřadnic. Tato volba může vypadat například takto.



Obrázek 25: Kartézská soustava souřadnic

Zavedli jsme si značení $S = [0, 0]$, $A = [p, 0]$, $B = [0, q]$, $C = [p, q]$, $M = [m, n]$.

Nejprve si sestavíme obecnou rovnici přímky AB . Obecná rovnice je dána normálovým vektorem a bodem, který leží na přímce. Abychom mohli zjistit normálový vektor, tak si v tomto případě musíme určit směrový vektor přímky AB .

$$\vec{s} = B - A = (0 - p, q - 0) = (-p, q)$$

Ze směrového vektoru získáme normálový vektor, tak, že prohodíme složky směrového vektoru a u jednoho změníme znaménko. Takže normálový vektor může vypadat následovně:

$$\vec{n} = (q, p)$$

Nyní si můžeme začít sestavovat rovnici přímky AB .

$$qx + py + c = 0$$

Abychom si určili c parametr rovnice, tak si do rovnice potřebujeme dosadit jeden bod, který na přímce leží, v našem případě bude nejvhodnější si zvolit bod A , nebo bod B . Vhodné jsou proto, že obsahují ve svých souřadnicích nulu. Zvolíme si tedy např. bod $A = [p, 0]$.

$$qp + 0p + c = 0$$

$$qp + c = 0$$

$$c = -pq$$

Nyní už máme vše, abychom sestavili rovnici přímky AB .

$$qx + py - pq = 0$$

Další rovnice, kterou budeme potřebovat, je rovnice přímky, která je kolmá na přímku AB a zároveň prochází bodem C . Jako normálový vektor této přímky můžeme použít směrový vektor první přímky. Tedy vektor $(-p, q)$, nebo vektor $(p, -q)$.

$$px - qy + c = 0$$

Dosadíme bod $C = [p, q]$, abychom si vyjádřili parametr c .

$$p \cdot p - q \cdot q + c = 0$$

$$p^2 - q^2 + c = 0$$

$$c = q^2 - p^2$$

Po dosazení parametru c do rovnice dostáváme finální tvar:

$$px - qy + q^2 - p^2 = 0$$

Poslední rovnici kterou budeme potřebovat, je rovnice vyjadřující, že bod C leží na kružnici k . Rovnice kružnice k je následující. Je vhodné si pro kružnici zvolit

střed v bodě $[0, 0]$ a zároveň si zvolit poloměr roven jedné.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Dosazením bodu $C = [p, q]$ dostaneme:

$$p^2 + q^2 - 1 = 0$$

Tedy je ještě potřeba tyto rovnice upravit, tak jak mají být vloženy do programu CAS. Tedy na přímkách se nachází bod M , a na kružnici bod C . Poslední rovnici, tedy není ani potřeba měnit.

Dostaneme soustavu následujících tří rovnic:

$$qm + pn - pq = 0$$

$$pm - qn - p^2 + q^2 = 0$$

$$p^2 + q^2 - 1 = 0$$

Nyní se můžeme přesunout k programu CAS. Do nějž zadáme:

```
Use R:=Q[p, q, m, n];
```

```
I:=Ideal(qm + pn - pq, pm - qn - p^2 + q^2, p^2 + q^2 - 1);
```

```
Elim(p..q,I);
```

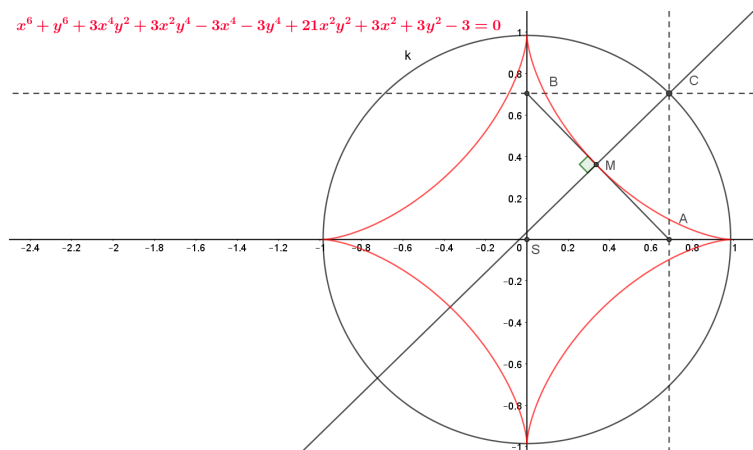
CAS nám vrátí takovéto řešení:

```
Ideal(-2/9m^6 - 2/3m^4n^2 - 2/3m^2n^4 - 2/9n^6 + 2/3m^4 - 14/3m^2n^2 +
2/3n^4 - 2/3m^2 - 2/3n^2 + 2/9)
```

Nyní musíme provést faktorizaci tohoto polynomu. Musíme zjistit, jestli se v tomto řešení nenacházejí, kromě rovnice asteroidy ještě nějaké další křivky.

V tomto případě nám faktorizace žádnou další křivku neodhalila. V následujícím příkladu si ukážeme, proč je tato faktorizace nutná k určení přesného řešení.

Pomocí programu GeoGebra si můžeme snadno ověřit, zda se skutečně jedná o rovnici Asteroidy. Stačí zadat výslednou rovnici do pole *Input*.



Obrázek 26: Oběření rovnice Asteroidy

Výsledná rovnice asteroidy je tedy:

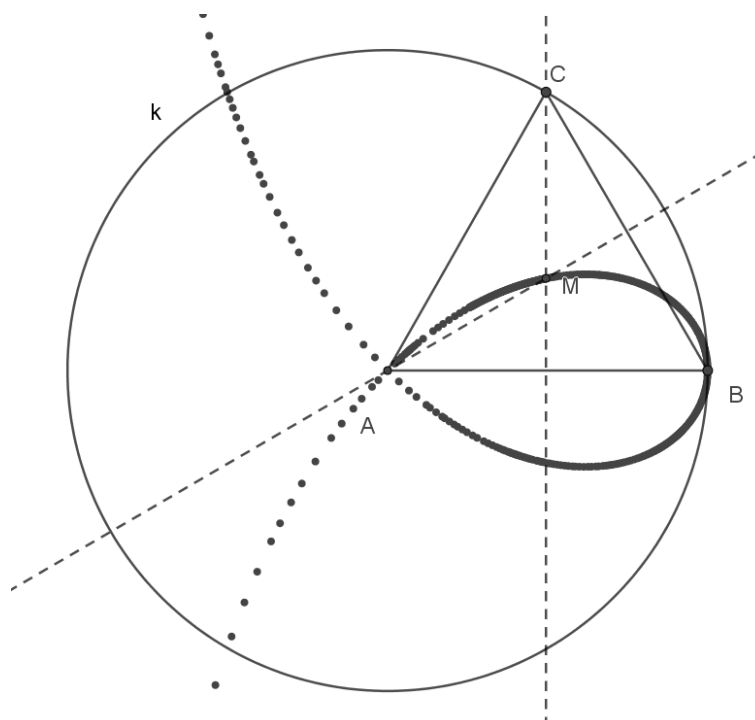
$$x^6 + y^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - 3x^4 - 3y^4 + 21x^2y^2 + 3x^2 + 3y^2 - 3 = 0.$$

4.3 Strofoida

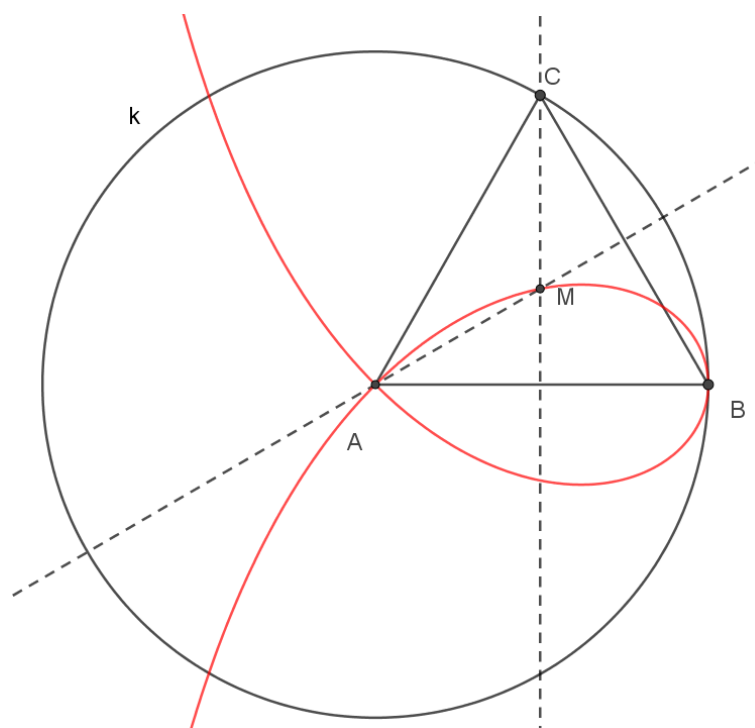
Je dána úsečka AB a bod C , který se pohybuje po kružnici k se středem v bodě A a poloměrem $|AB|$.

Zadání: Určete množinu všech průsečíků výšek M trojúhelníku ABC , pokud budeme bodem C pohybovat po kružnici k .

Situaci si opět zkonstruujeme v programu DGS. Představu o řešení opět získáme využitím funkce *Stopa bodu* a funkcí *Množina bodů*.



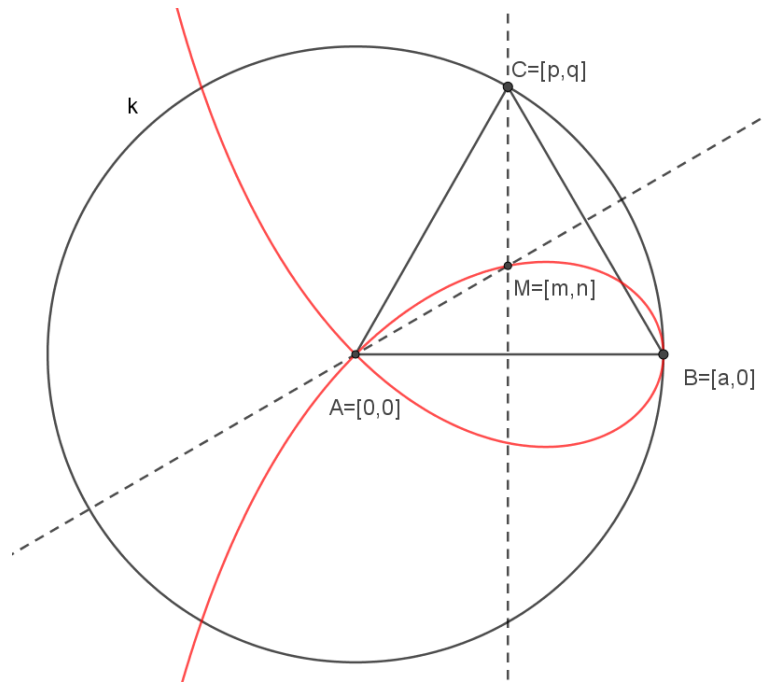
Obrázek 27: Použití funkce *Stopa bodu*



Obrázek 28: Použití funkce *Množina bodů*

Při použití funkce *Množina bodů* si zvolíme bod M jako bod tvořící množinu

a bod C , jako bod na množině. Můžeme vidět, že obě vizualizace jsou podobné. Připomínají rovinnou křivku, která se nazývá strofoida. Abychom si mohli být jistí, musíme zjistit její rovnici. K tomu nám pomůže vhodně zvolená souřadnicová soustava.



Obrázek 29: Vhodně zvolená kartézská soustava

Bod A umístíme do počátku kartézské soustavy, tedy $A = [0, 0]$. V návaznosti na toto umístění si zvolíme bod $B = [a, 0]$. Bod M , který označuje průsečík výšek trojúhelníku ABC si označíme $M = [m, n]$ a bod $C = [p, q]$.

Z těchto bodů si budeme chtít získat obecné rovnice výšek na strany AB a BC . Potřebovat budeme ještě rovnici kružnice k .

Nejprve si můžeme sestavit rovnici výšky na stranu AB . Označíme ji v_{AB} . Při určování obecné rovnice přímky potřebujeme znát normálový vektor této přímky. V tomto případě je normálový vektor přímky v_{AB} stejný jako směrový vektor přímky AB .

$$\overrightarrow{n_{v_{AB}}} = \overrightarrow{s_{AB}} = B - A = (a, 0)$$

$$v_{AB} : ax + c = 0$$

Abychom zjistili parametr c , musíme si do rovnice přímky dosadit bod, který

na této přímce leží. V našem případě to bude bod $P = [p, q]$. Po dosazení tedy dostaneme:

$$ap + c = 0$$

$$c = -ap$$

Hodnota parametru c v rovnici výšky kolmé na stranu AB je roven $-ap$. Vzhledem k tomu, že a je nějaké číslo, můžeme celou rovnici přímky tímto parametrem vydělit, aniž bychom směr vektoru změnili.

$$ax - ap = 0$$

$$a \cdot (x - p) = 0 \mid : a$$

$$x - p = 0$$

Rovnice první výšky je tedy známa. Rovnici druhé výšky dostaneme obdobným způsobem. Určíme si směrový vektor přímky BC .

$$\overrightarrow{s_{BC}} = \overrightarrow{n_{v_{BC}}} = C - B = (p - a, q)$$

$$v_{BC} : (p - a)x + qy + c = 0$$

Do této rovnice dosadíme bod, který na této přímce leží, abychom zjistili hodnotu parametru c . Jediný bod, který je nám znám, je bod $A = [0, 0]$. Po dosazení dostaneme:

$$c = 0$$

Úprava v tomto případě byla poměrně snadná. Vše se nám vynulovalo. Finální podoba rovnice, tedy bude takováto:

$$(p - a)x + qy = 0$$

Nyní nám zbývá jen určit rovnice kružnice k . Víme, že střed této kružnice leží v bodě $A = [0, 0]$ a její poloměr odpovídá parametru a . Finální rovnice kružnice k bude tedy vypadat následovně:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

Ted' už jen stačí dosadit si do těchto rovnic, body $M = [m, n]$, $C = [p, q]$, tak aby platilo bod M leží na přímce v_{AB} a zároveň leží na přímce v_{BC} . A bod C musí ležet na kružnici k . Dostaneme následující rovnice:

$$\begin{aligned}m - p &= 0 \\(p - a)m + qn &= 0 \\p^2 + q^2 - a^2 &= 0\end{aligned}$$

Nyní se přesuneme do systému CAS, v této práci budu využívat CoCoA 4.7.5. Do programu zapíšeme:

```
Use R :=Q[p, q, m, n, a];

I:=Ideal(m - p, (p-a)m + qn, p^2 + q^2 - a^2);

Elim(p..q,I);
```

Tato eliminace proměnných p, q ze soustavy rovnic uvedených výše nám zjistí výsledek:

```
Ideal(m^4 + m^2n^2 - 2m^3a + m^2a^2 - n^2a^2)
```

Nyní si musíme ověřit, zda je tímto polynomem vyjádřena pouze rovnice strofoidy. Pouze vizuální řešení pomocí programu GeoGebra nám v tomto případě stačit nebude. GeoGebra nám ve všech případech neznázorní, jak by křivka mohla vypadat v případě degenerace trojúhelníku ABC .

Abychom zjistili, zda-li se v polynomu

$$m^4 + m^2n^2 - 2m^3a + m^2a^2 - n^2a^2$$

nachází i něco jiného než pouze rovnice strofoidy, tak musíme polynom faktorizovat. Faktorizaci můžeme provést v programu CoCoA příkazem *Factor*. Do programu CoCoA tedy zadáme následující příkaz:

```
Factor(m^4 + m^2n^2 - 2m^3a + m^2a^2 - n^2a^2);
```

Dostaneme následující výsledek:

$$(m - a)(m^3 + mn^2 - am^2 + an^2).$$

Z tohoto výsledku můžeme vidět, že součástí řešení by měla být i přímka $x = a$.

Tato přímka se nám v řešení objevuje v případě, že trojúhelník ABC zdegeneruje. Může nastat situace, že trojúhelník ABC přestane existovat. Tato situace nastane v případě, že $B = C$.

Bod C při pohybu po kružnici splyne s bodem B . V tento okamžik nastane i $B = C = M$.

V tomto případě bychom mohli tento problém odhalit i bez použití počítače. Rovnici hledané množiny bodů odvozujeme z následujících tvrzení:

$$m - p = 0$$

$$(p - a)m + qn = 0$$

$$p^2 + q^2 - a^2 = 0$$

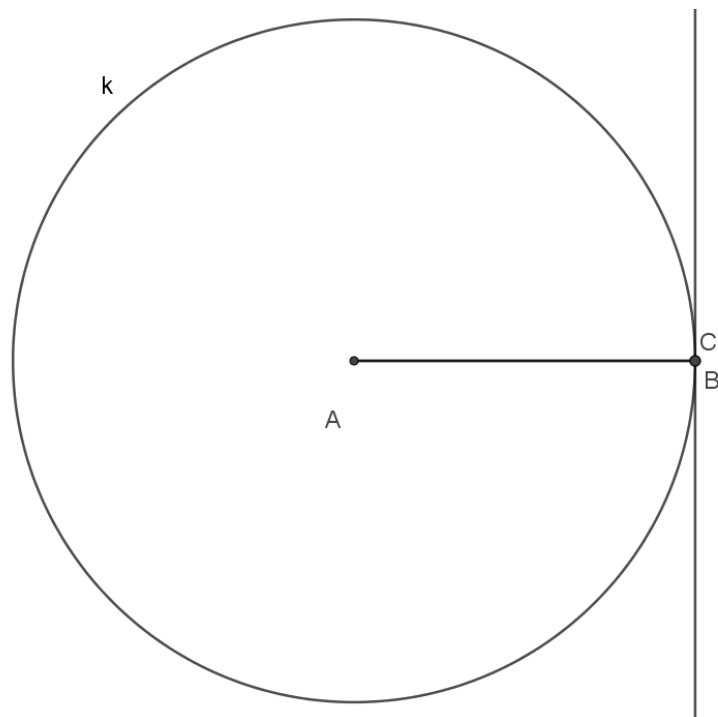
Dosaďme si do tohoto systému $B = C = [a, 0]$. Systém rovnic se nám dostane do tvaru:

$$m - a = 0$$

$$(a - a)m + q0 = 0$$

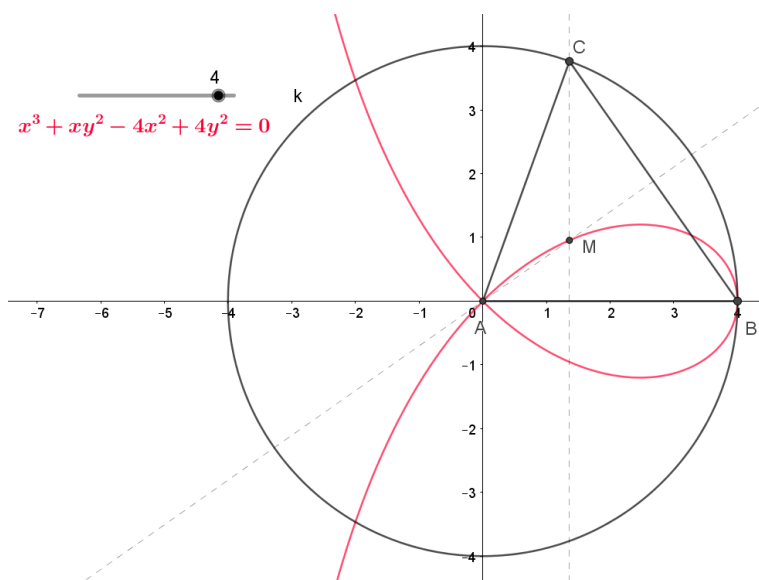
$$a^2 + 0^2 - a^2 = 0$$

Můžeme vidět, že nám zbude pouze rovnice přímky. Zbylé dvě rovnice se vynulují. V této jediné situaci nám výsledná množina hledaných bodů nebude vycházet jako strofoida. Ovšem zadání úlohy vyžaduje existenci trojúhelníku ABC , což v tomto případě neplatí. Tudíž musíme tuto přímku z řešení vyloučit.



Obrázek 30: Množina v případě $B = C$

Vložení objevené rovnice do pole *Input* a vytvořením slideru pro parametr a , si ověříme, zda se jedná o rovnici strofoidy.



Obrázek 31: Ověření v programu GeoGebra

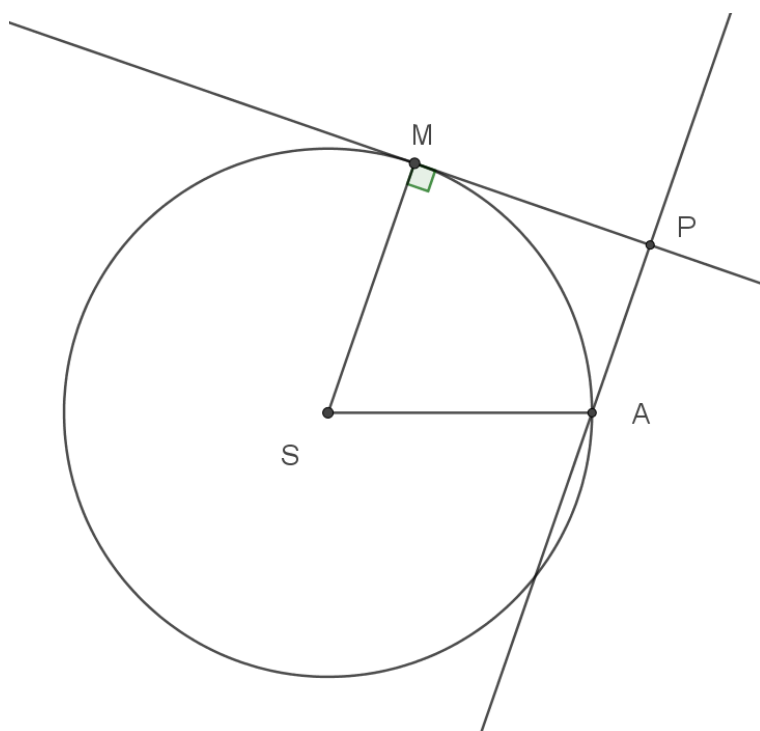
Objevená rovnice strofoidy je tedy:

$$x^3 + xy^2 - ax^2 + ay^2 = 0.$$

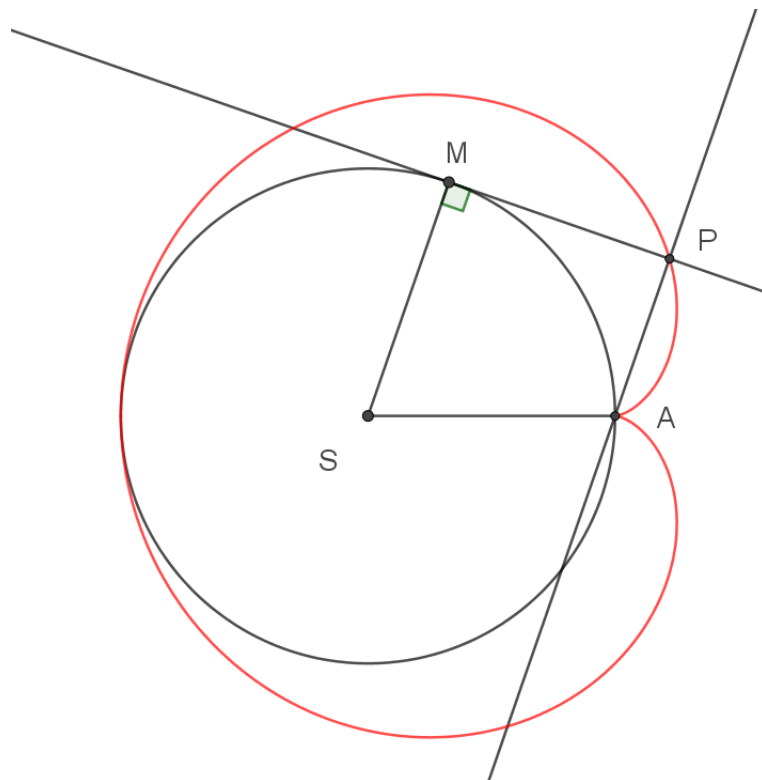
4.4 Kardioida

Mějme kružnici na které se nachází bod M a pevný bod A . V rovině, mimo kružnici, mějme bod P . Veďme bodem P tečny k bodům A a M .

Zadání: Zjistěte rovnici množiny bodů, kterou bude opisovat bod P při pohybu bodu M po kružnici.



Obrázek 32: Kardioida jako množina pat tečen

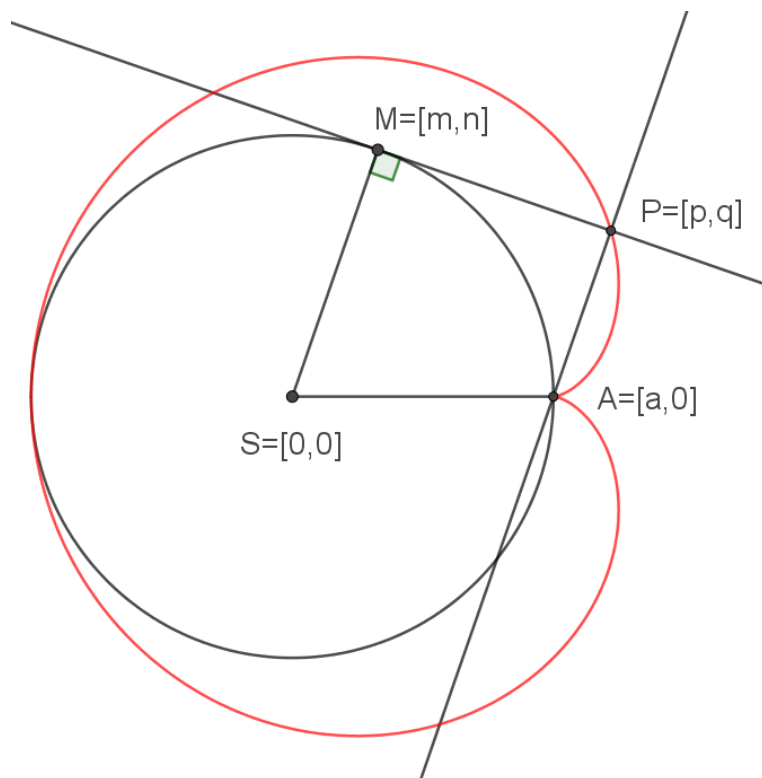


Obrázek 33: Kardioida jako množina pat tečen

Získali jsme lepší představu o tom, po jaké křivce se bude bod P pohybovat. Tato křivka se nazývá kardioida.

Na řadě je odvození rovnice této křivky. Musíme si tedy zvolit vhodnou kartézskou soustavu souřadnic a sestavit vhodné rovnice.

Zvolená kartézská soustava může vypadat následovně:



Obrázek 34: Kartézská soustava pro kardioidu

Nyní musíme získat rovnice přímek t a u a kružnice $k = (S, a)$.

Při odvození rovnic přímek t a u využijeme faktu, že jsou na sebe kolmé. Tedy směrový vektor jedné přímky je normálový vektor druhé přímky. Normálový vektor přímky t získáme takto:

$$\vec{n}_t = S - M = (-m, -n)$$

Když známe normálový vektor přímky, tak můžeme sestavit obecnou rovnici přímky. Obecná rovnice přímky t bude tedy:

$$-mx - ny + c = 0$$

$$-m^2 - n^2 + c = 0$$

$$c = m^2 + n^2$$

$$-mx - ny + m^2 + n^2 = 0$$

K získání parametru c obecné rovnice jsme využili dosazení bodu M .

Dále musíme odvodit rovnici přímky u . Normálový vektor přímky t je směrovým vektorem přímky u . Čili platí:

$$\vec{n}_t = \vec{s}_u$$

Ze směrového vektoru získáme normálový vektor přehozením souřadnic a obrácením znaménka u jedné této souřadnice $\vec{n}_u = (n, -m)$.

Obecnou rovnici přímky u sestavíme stejným způsobem jako rovnici přímky t pouze s tím rozdílem, že k získání parametru c využijeme dosazení bodu A .

$$nx - my + c = 0$$

$$na + c = 0$$

$$c = -na$$

$$nx - my - na = 0$$

Nyní máme rovnice obou přímek. Nyní musíme sestavit rovnici kružnice k . Odvození této rovnice není obtížné. Pomocí programu GeoGebra rovnou vidíme, že střed kružnice k je bod $S = [0, 0]$ a poloměr kružnice je a . Rovnice kružnice je tedy:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Máme sestavené všechny rovnice, které jsou potřeba. Avšak musíme ještě sestavit vztahy, které platí:

$$M \in k_1 \Leftrightarrow H_1 : m^2 + n^2 - a^2 = 0$$

$$P \in t \Leftrightarrow H_2 : -mp - nq + m^2 + n^2 = 0$$

$$P \in u \Leftrightarrow H_3 : np - mq - na = 0$$

Tedy vztahy jsou, že bod M leží na kružnici k a bod P leží na přímkách u a t .

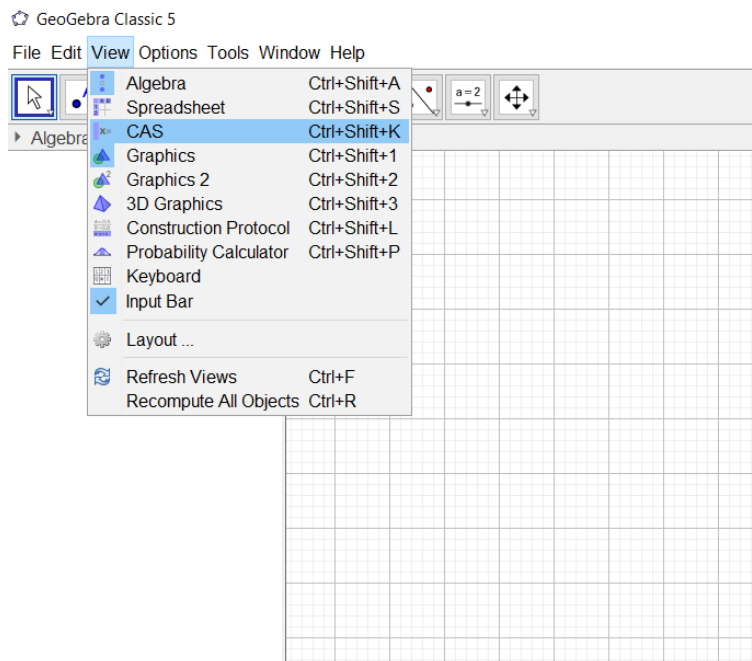
V novějších verzích programu GeoGebra je implementováno prostředí CAS. Můžeme si tedy ukázat jeho využití pro získávání rovnic. Nemusíme tedy využívat externí program CoCoA.

Využívání CAS v prostředí GeoGebry je uživatelsky jednodušší. Další výhodou je, že se nemusíme učit používat žádný další program. GeoGebra je v tomto ohledu mnohem intuitivnější, než program CoCoA.

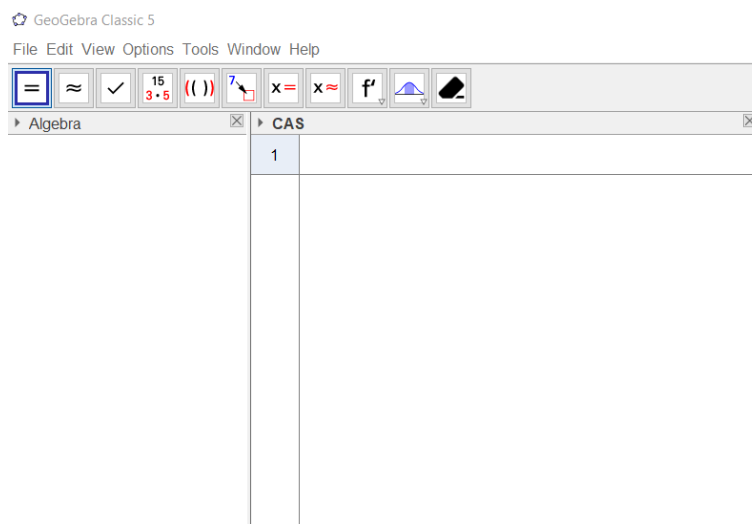
V tomto příkladu tedy využijí prostředí GeoGebry namísto programu CoCoA 4.7.5.

Nejprve si musíme v programu GeoGebra zobrazit okno pro práci s CAS, které v základním nastavení zobrazováno není.

Po spuštění programu GeoGebra si kurzorem najedeme na nabídku *View/Zobrazit*. V této nabídce je možnost CAS. Po kliknutí na tuto položku menu se nám zobrazí okno s CAS, ve kterém můžeme pracovat.



Obrázek 35: GeoGebra zobrazení okna CAS



Obrázek 36: Vzhled CAS okna v programu GeoGebra

K eliminaci proměnných ze systému rovnic nám GeoGebra poskytuje funkci *Eli-*
 $minate(<List\ of\ Polynomials>, <List\ of\ Variables>)/$ *Eliminovat(<Pole polynomů,*

Pole proměnných>).

Tato funkce má dva parametry - pole polynomů a pole proměnných. Pole polynomů je seznam vztahů (ve tvaru polynomů), které nám algebraicky popisují geometrickou situaci. Pole proměnných je seznam proměnných, které potřebujeme eliminovat ze seznamu polynomů.

V programu GeoGebra se pole zadává do složených závorek a jednotlivé položky v poli jsou oddělené čárkou.

V našem případě bude tedy seznam polynomů vypadat následovně:

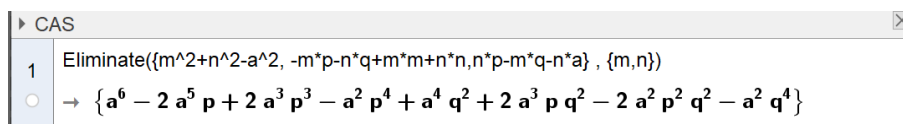
$$m^2 + n^2 - a^2, -mp - nq + m^2 + n^2, np - mq - na$$

Do pole polynomů již nemusíme zapisovat, že se rovnají nule. GeoGebra to zařídí automaticky.

Seznam proměnných je následující. Eliminujeme proměnné, které se týkají *move* - tedy proměnné m a n . Seznam bude tvořen pouze dvěma proměnnými- m a n .

$$m, n$$

Zápis přímo v CAS okně v GeoGebře je následující:



Obrázek 37: Zápis funkce *Eliminate* v programu GeoGebra

Na obrázku 37 můžeme vidět funkci, kterou nám eliminace vrátila.

Potřebujeme si ověřit, zda se skutečně jedná o rovnici kardioidy. K tomu nám GeoGebra také připravila funkce.

V okně CAS si můžeme pomocí funkce *Substitute* nahradit proměnné p a q za proměnné x a y . To uděláme proto, abychom poté mohli v algebraickém okně použít funkci *ImplicitCurve*, která nám křivku vykreslí.

Funkce *Substitute*(*<Expression>*, *<Substitution List>*) vyžaduje dva parametry. Prvním je výraz, do kterého budeme substituovat a druhý je seznam substitucí.

V našem případě bude samozřejmě první parametr polynom, který nám vyšel z eliminace: $a^6 - 2a^5p + 2a^3p^3 - a^2p^4 + a^4q^2 + 2a^3pq^2 - 2a^2p^2q^2 - a^2q^4$.

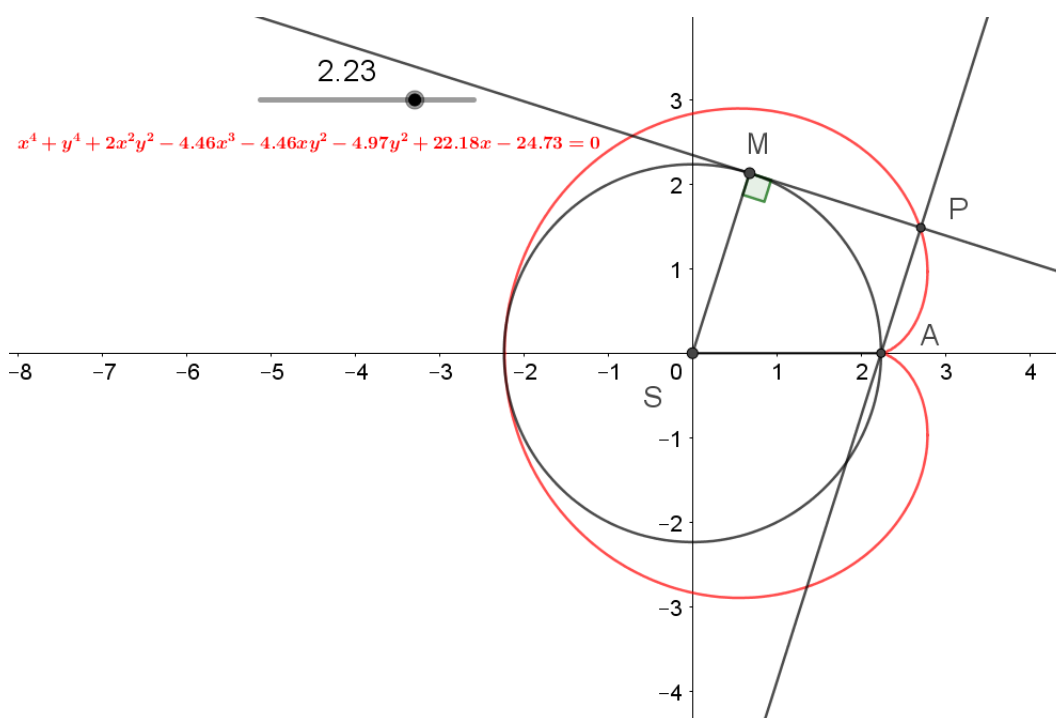
2	Substitute({a ⁶ - 2a ⁵ p + 2a ³ p ³ - a ² p ⁴ + a ⁴ q ² + 2a ³ p q ² - 2a ² p ² q ² - a ² q ⁴ }, {p=x, q=y})
	→ {a ⁶ - a ² x ⁴ - a ² y ⁴ + 2 a ³ x ³ + a ⁴ y ² - 2 a ⁵ x - 2 a ² x ² y ² + 2 a ³ x y ² }

Obrázek 38: Zápis funkce *Substitute* v programu GeoGebra

Před prohlášením, že se jedná o rovnici kardioidy, provedeme faktorizaci polynomu. V tomto případě nám faktorizace opět neodhalí žádnou podmínku degenerace.

A pokud jsme si již nevšimli, tak nám faktorizace odhalí možnost vytknutí čísla a^2 . Čímž si výslednou rovnici můžeme zjednodušit.

Nyní si musíme ověřit, zda se skutečně jedná o rovnici kardioidy. Ověříme to pomocí programu GeoGebra dosazením rovnice do pole *Input*.



Obrázek 39: Ověření pomocí programu GeoGebra

Můžeme vidět, že se skutečně jedná o rovnici kardioidy. Můžeme si vytvořit *slider* pro parametr a a sledovat, jaký má jeho změna vliv na tvar kardioidy.

Objevená rovnice kardioidy je tedy:

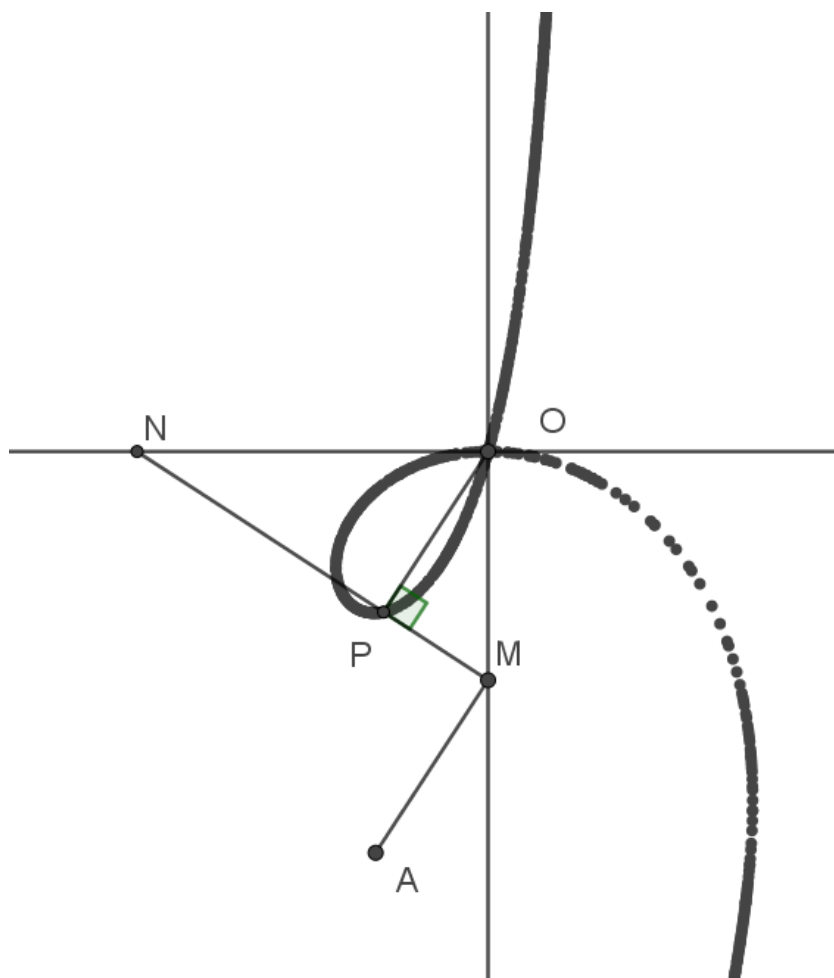
$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2ax^3 - 2axy^2 - a^2y^2 + 2a^3x - a^4 = 0$$

4.5 Ophruida

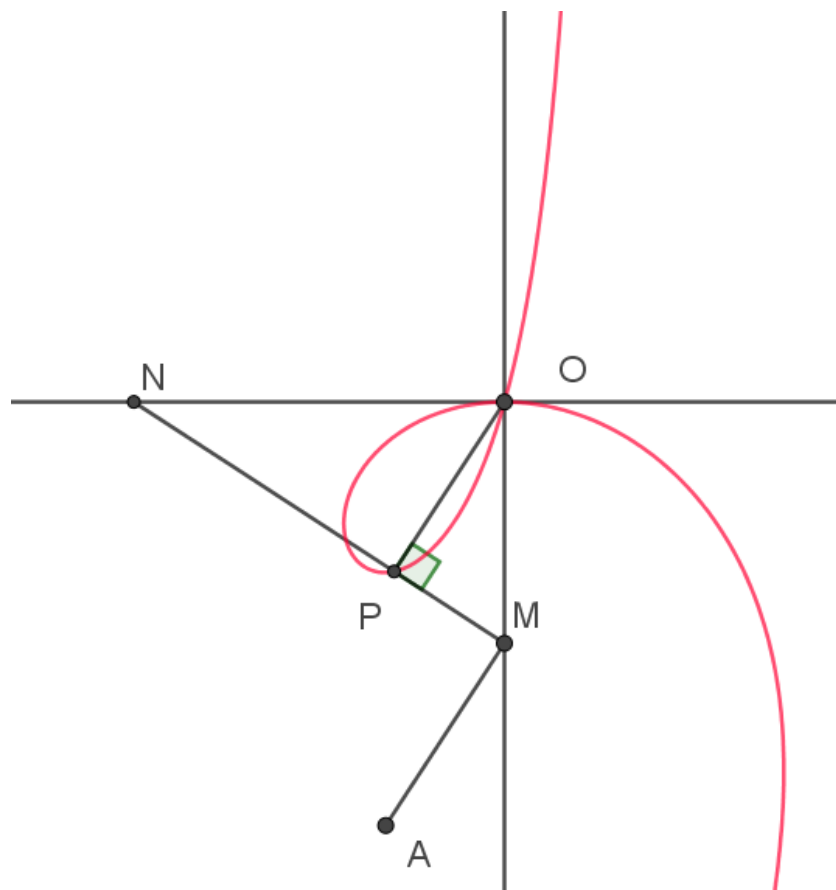
Mějme kolmé přímky k a l protínající se v bodě O . Dále mějme bod A ležící ve vzdálenosti a od přímky l a ve vzdálenosti b od přímky k . Pro libovolný bod M na přímce l se strojte bod N na přímce k , tak aby $AM \perp MN$.

Zadání: *Nalezněte rovnici množiny bodů paty kolmice P spuštěné z bodu O na úsečku MN , zatímco se bod M pohybuje po přímce l .*

Zkonstruujeme situaci v programu GeoGebra a použijeme funkce *Stopa bodu* a *Množina bodů*.



Obrázek 40: Použití funkce *Stopa bodu*



Obrázek 41: Použití funkce *Množina bodů*

Použití těchto dvou funkcí nám umožnilo hlouběji nahlédnout do situace a získat představu o tom, jak by mohla výsledná množina bodů vypadat.

Nyní musíme zavést vhodnou kartézskou soustavu souřadnic a algebraicky popsat situaci.

V první řadě si popíšeme rovnici vyjadřující kolmost $MN \perp AM$.

$$\overrightarrow{MN} = [n, 0] - [0, v] = (n, -v)$$

$$\overrightarrow{AM} = [0, v] - [a, b] = (-a, v - b)$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AM} = (n, -v)(-a, v - b) = -na - v^2 + bv$$

Rovnice popisující vztah $MN \perp AM$ je tedy: $v^2 + na - vb = 0$. Dále je na řadě vztah $OP \perp MN$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= [p, q] - [0, 0] = (p, q) \\ \overrightarrow{MN} &= [n, 0] - [0, v] = (n, -v) \\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MN} &= (p, q)(n, -v) = np - vq\end{aligned}$$

Rovnice popisující vztah $OP \perp MN$ je tedy: $np - vq = 0$. Dále si musíme popsat, že body N , P a M jsou kolineární.

$$\begin{vmatrix} n & 0 & 1 \\ p & q & 1 \\ 0 & v & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Z determinantu této matice získáme rovnici $nq + pv - nv = 0$. Nyní máme algebraicky popsané všechny vztahy, které jsou potřeba k řešení.

Získáváme následující systém rovnic, který zadáme do programu CoCoA a eliminujeme proměnné v a n :

$$MN \perp AM \Leftrightarrow H_1 : v^2 + na - vb = 0$$

$$OP \perp MN \Leftrightarrow H_2 : np - vq = 0$$

$$P, M, N \Leftrightarrow H_3 : nq + pv - nv = 0$$

Program CoCoA nám vrátil prázdné řešení (viz 42), ačkoliv bychom nějaké řešení očekávali. Metody použité výše nám řešení poskytly. Situaci musíme prozkoumat důkladněji.

```
Use R:=Q[a,b,v,n,p,q];
I := Ideal(v^2 + n * a - v * b, n * p - v * q, n * q + p * v - n * v);
Elim(v..n, I);
Ideal(0)
```

Obrázek 42: Výstup programu CoCoA

Dále můžeme zjistit $\dim(R/I) = 4$, mělo by se ale rovnat 3, protože máme 6 proměnných a 3 rovnice. Musíme ošetřit podmínku degenerace. Musíme využít heuristický přístup. Nevíme, jaká podmínka to je a počítač nemá způsob, jak nám ji zobrazit.

Do ideálu přidáme podmínku $v \neq 0$ tedy $vt - 1 = 0$, kde t je pomocná proměnná.

```

Use R:=Q[a,b,v,n,t,p,q];
J := Ideal(v^2 + n * a - v * b, n * p - v * q, n * q + p * v - n * v, v * t - 1);
Elim(v..t,J);
Ideal(-p^3 + bpq - aq^2 - pq^2)

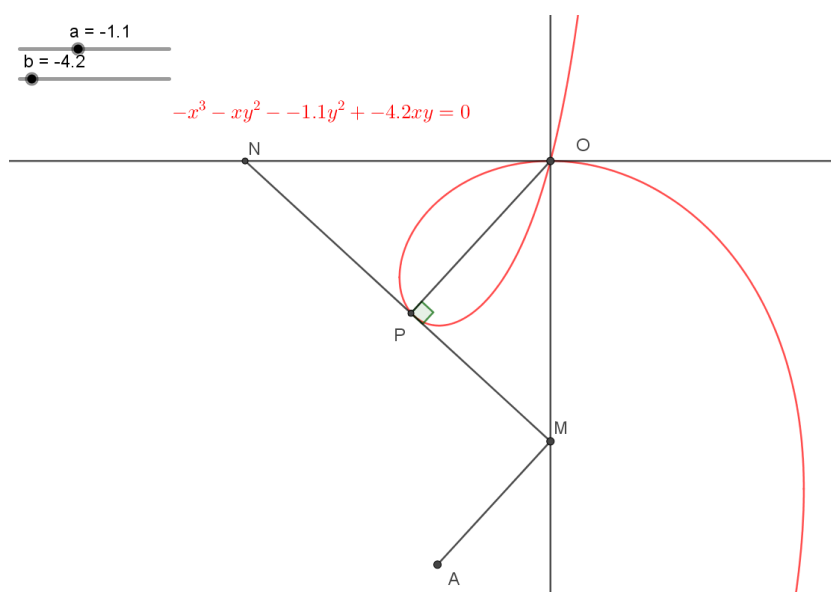
```

Obrázek 43: Výstup programu CoCoA

Nyní nám program CoCoA řešení vrátil. Dostáváme řešení $-p^3 + bpq - aq^2 - pq^2$.

Opět nesmíme zapomenout si výsledný polynom faktorizovat, abychom nezanebali podmínku degenerace. V tomto případě nám faktorizace nic neodhalila.

Řešení si ověříme v programu GeoGebra pomocí metody pro zobrazení implicitní křivky.



Obrázek 44: Ověření pomocí programu GeoGebra

Získali jsme rovnici křivky, která se nazývá ophriuida. V tomto případě jsme si ukázali některé limity tohoto přístupu. Museli jsme zapojit heuristické metody, abychom se k řešení dostali.

Objevená rovnice je tedy:

$$x^3 + xy^2 + ay^2 - bxy = 0.$$

4.6 Holfeld 1773

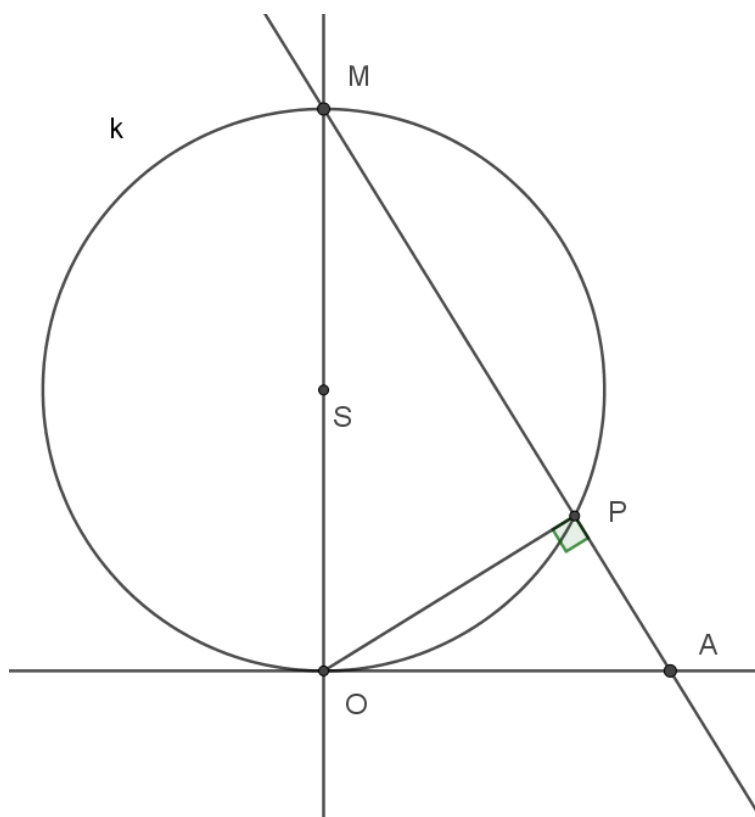
Mějme dvě vzájemně kolmé přímky a , b , které se protínají v bodě O . Nechť bod A leží na přímce a a bod M leží na přímce b . Kružnice k s poloměrem $|MO|$ protíná

přímku AM v bodě P . Jaká je množina bodů, kterou opisuje bod P , zatímco se bod M pohybuje po přímce b ? [11]

Tento problém je jistě řešitelný jak bez využití počítače, tak i s využitím počítače. Uvedu obě možná řešení pro porovnání.

4.6.1 Řešení pomocí programu GeoGebra

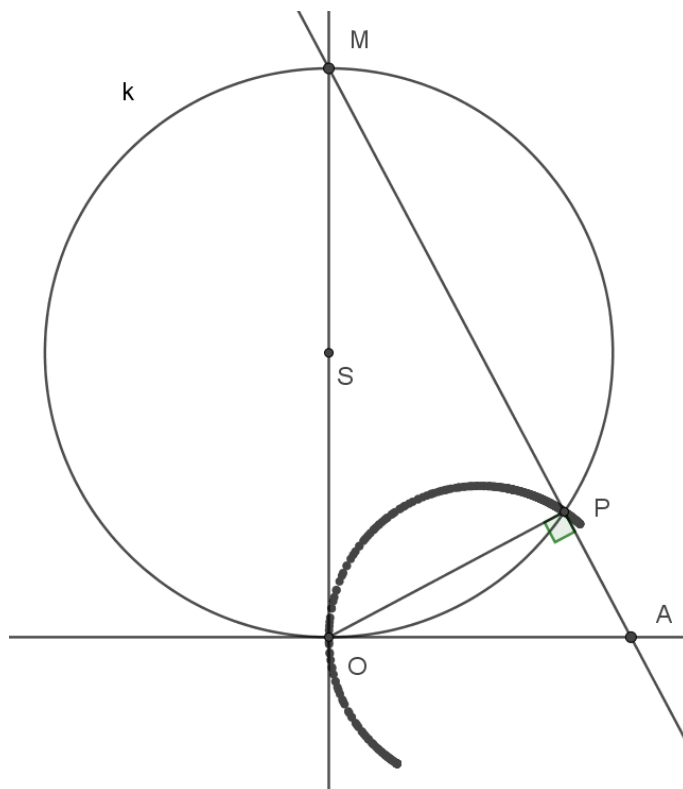
První krok se jistě nebude lišit, ať už budeme řešit čistě počítačově, nebo na papír. Uděláme si tedy náčrt situace.



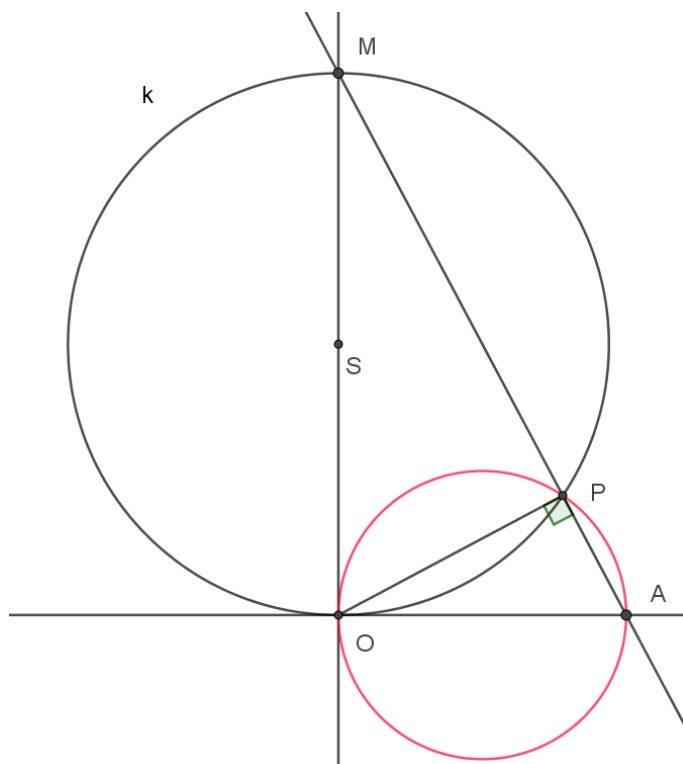
Obrázek 45: Náčrt problému

Nyní budeme pokračovat v počítačovém řešení a klasický důkaz bude uveden až po počítačovém řešení.

Pro získání většího vhledu do situace využijeme funkci *Stopa bodu* a *Množina bodů*.



Obrázek 46: Použití funkce *Stopa bodu*

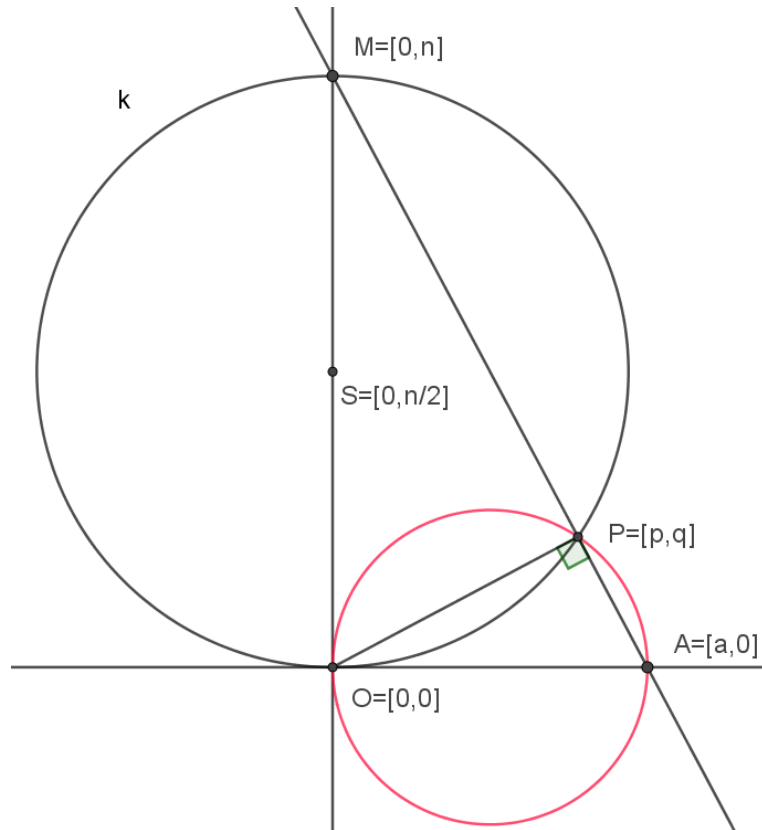


Obrázek 47: Použití funkce *Množina bodů*

Obě funkce nám naznačují, že by se mohlo jednat o kružnici. Prohlásit to s jistotou ovšem ještě nemůžeme.

Abychom to mohli prohlásit s jistotou, tak musíme zjistit rovnici hledané množiny.

Zavedeme si tedy vhodnou kartézskou soustavu souřadnic:



Obrázek 48: Vhodně zavedená kartézská soustava

Algebraicky si potřebujeme vyjádřit, že bod P leží na kružnici k a zároveň, že body M , P a A jsou kolineární. Tedy že leží na jedné přímce.

Získat rovnici kružnice k není problém. Z náčrtu vidíme, že střed této kružnice je v bodě $S = [0, \frac{n}{2}]$ a tedy pro její poloměr r musí platit $r = \frac{n}{2}$.

Z těchto znalostí jednoznačně určíme, že rovnice kružnice k musí být:

$$x^2 + \left(y - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4} = 0$$

Kolinearitě tří bodů můžeme určit pomocí matice jejich souřadnic. U všech tří bodů souřadnice známe tudíž použití této metody nic nebrání.

Sestavíme matici a spočítáme její determinant. Tento determinant musí být roven nule.

$$\begin{vmatrix} 0 & n & 1 \\ p & q & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Užitím Sarrusova pravidla pro matice typu 3×3 získáme rovnici:

$$pn + qa - an = 0$$

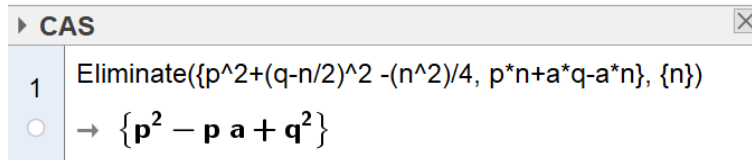
Podařilo se nám získat všechny potřebné rovnice. Můžeme tedy vyjádřit následující dva vztahy:

$$P \in k \Leftrightarrow H_1 : p^2 + \left(q - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4} = 0$$

$$M, P, A \Leftrightarrow H_2 : pn + qa - an = 0$$

Z této soustavy rovnic musíme vyeliminovat proměnné vztahující se k bodu M . V tomto případě je to pouze proměnná n .

K eliminaci můžeme využít prostředí GeoGebry:



Obrázek 49: Výsledek eliminace

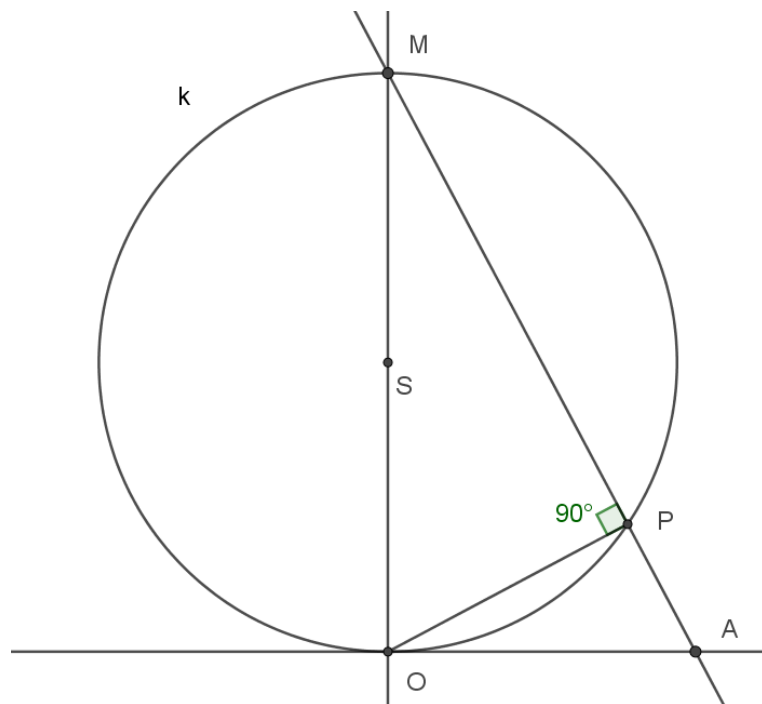
Substitucí $p = x$ a $q = y$ dostaneme tvar $x^2 - xa + y^2$. Z tohoto tvaru se doplněním na čtverec dostaneme do základního tvaru kružnice:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

Hledaná množina bodů je tedy kružnice se středem v bodě $[\frac{a}{2}, 0]$ a s poloměrem $r = \frac{a}{2}$.

4.6.2 Klasický důkaz

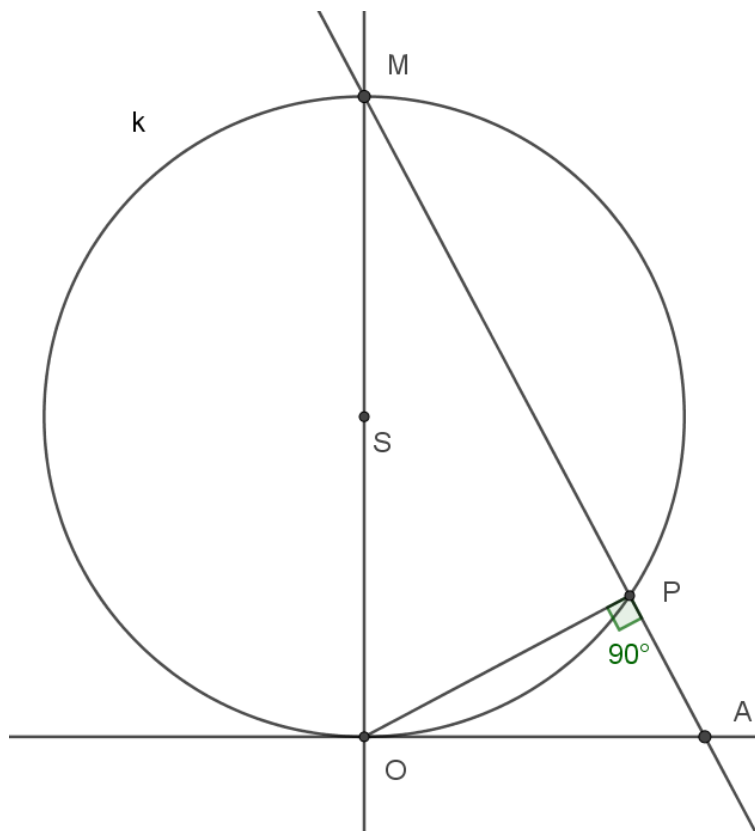
Klasický důkaz je založen na dvojité aplikaci Thaletova teorému, který říká, že všechny úhly sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravé.



Obrázek 50: Velikost úhlu OPM

Z náčrtu můžeme odvodit, že velikost úhlu OPM je devadesát stupňů. $|\angle OPM| = 90^\circ$.

Z tohoto důvodu můžeme odvodit velikost úhlu OPA . Z věty o vedlejších úhlech vyplývá, že součet velikostí dvou vedlejších úhlů musí být roven 180° . Tedy pro velikost úhlu OPA musí platit $|\angle OPA| = 90^\circ$.



Obrázek 51: Velikost úhlu OPM

Když máme dokázáno, že $|\angle OPA| = 90^\circ$, tak můžeme opačnou aplikací Thaletova teorému prohlásit, že naše hledaná množina je kružnice o průměru OA .

Byl tedy sestaven jak klasický nepočítačový důkaz, tak i důkaz počítačový. GeoGebra nám při sestavování klasického důkazu může značně ulehčit práci. I kdybychom se rozhodli řešit pouze pomocí náčrtu v GeoGebře, tedy nesnažili bychom se o odvození rovnice počítačově, tak nám dynamičnost náčrtu může velmi usnadnit práci.

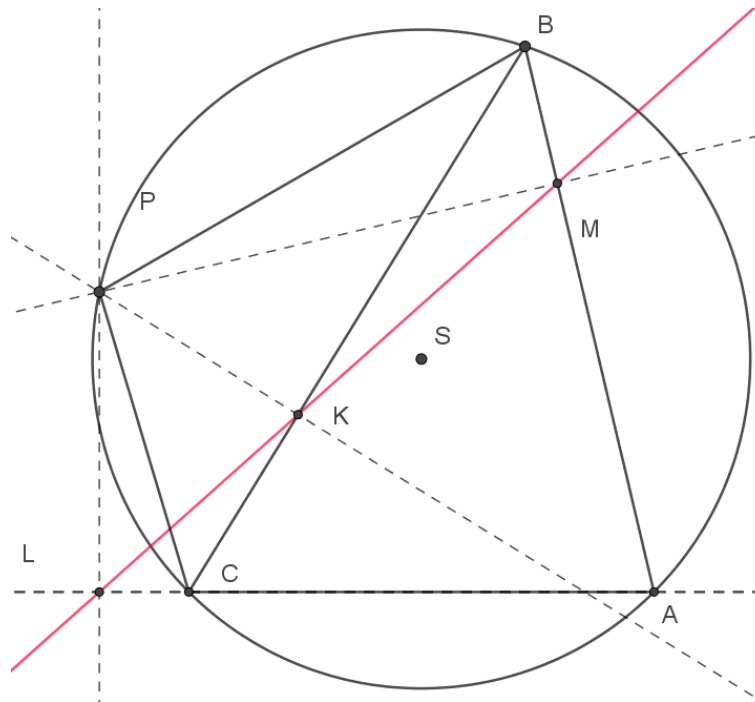
4.7 Wallace-Simsonova věta

V předchozích příkladech jsme hledali rovnice množin bodů daných vlastností. Systémy DGS a CAS se dají využít i k dokazování matematických tvrzení.

Tento postup si budeme demonstrovat na dokázání Wallace - Simsonovy věty. Provedeme jak klasický nepočítačový důkaz, tak čistě počítačový důkaz pomocí programu GeoGebra a CoCoA 4.7.4.

Znění Wallace - Simsonovy věty: *Mějme trojúhelník ABC a bod P , který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC . Paty kolmic K, L, M spuštěné z bodu P na strany trojúhelníku ABC leží na jedné přímce [12].*

Pro začátek můžeme provést verifikaci v programu GeoGebra. Zkonstruujeme si tvrzení této věty a můžeme ji blíže prozkoumat. Tato verifikace v žádném případě nenahrazuje důkaz. Pomůže nám pouze získat lepší vhled do situace.



Obrázek 52: Konstrukce Wallace - Simsonovy věty

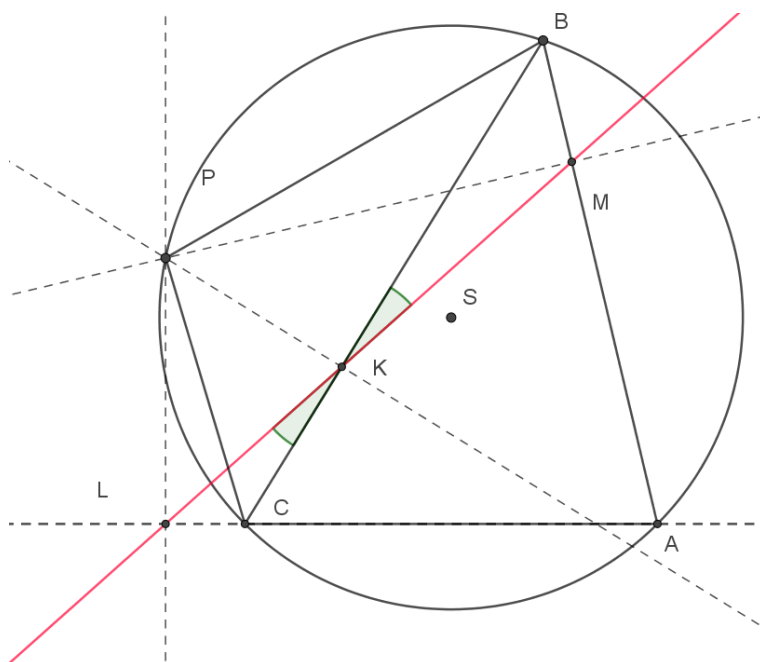
K verifikaci můžeme použít funkci *AreCollinear*, ve které uvedeme jako parametry body K , L a M . Tato funkce nám vrátí hodnotu *true* nebo hodnotu *false*. V tomto případě nám vrátí hodnotu *true*. Toto však ještě nelze považovat za důkaz Wallace - Simsonovy věty.

4.7.1 Klasický důkaz

Pokud se snažíme dokázat, že paty kolmic na strany BC , AC a AB po řadě označené K , L , a M jsou kolineární, tedy že leží na jedné přímce, tak musíme dokázat, že platí následující rovnost:

$$|\angle CKL| = |\angle MKB|$$

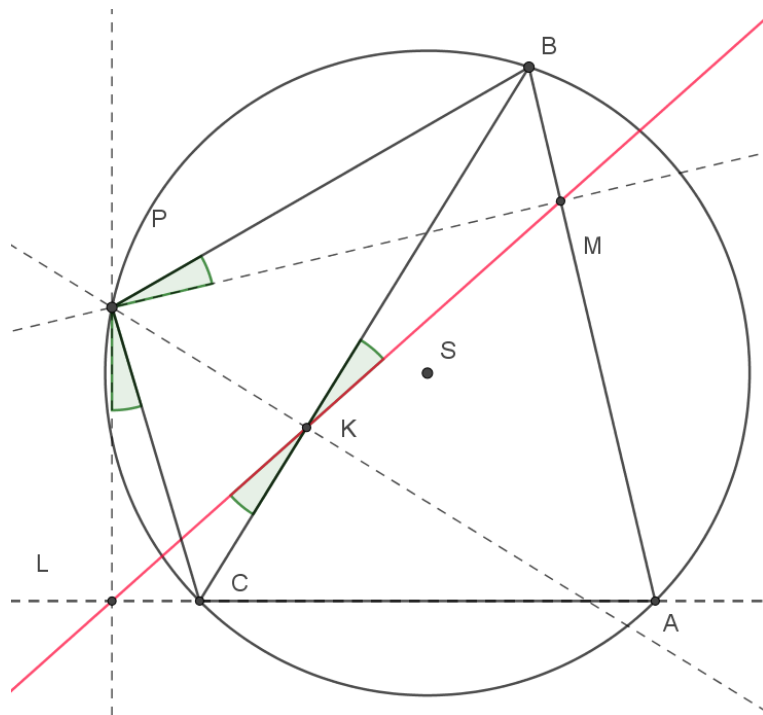
Tedy že tyto dva úhly mají stejnou velikost. Pokud jsou tyto dva úhly stejné, tak body K , L a M musejí být kolineární.



Obrázek 53: Klasický důkaz Wallace - Simsonovy věty

O čtyřúhelníku $PLCK$ a čtyřúhelníku $PKMB$ můžeme prohlásit, že jsou tětí-
vové³.

³Čtyřúhelník je tětíkový pokud mu lze opsat kružnici. Součet protilehlých úhlů je 180° a jedna z jeho stran je vidět ze zbylých vrcholů pod stejným úhlem.



Obrázek 54: Klasický důkaz Wallace - Simsonovy věty

Pokud jsou tyto čtyřúhelníky tětiové, tak z jejich vlastností vyplývají následující vztahy:

$$|\angle CPL| = |\angle CKL|$$

$$|\angle BPM| = |\angle BKM|$$

Z těchto vztahů zjistíme, že musíme dokázat platnost vztahu $|\angle CPL| = |\angle BPM|$.

Čtyřúhelníky $CABP$ a $AMPL$ jsou také tětiové. V tětiovém čtyřúhelníku platí, že součet protilehlých úhlů je roven 180° . Z této vlastnosti odvodíme, že platí:

$$|\angle CPB| = 180^\circ - |\angle CAB|$$

$$|\angle LPM| = 180^\circ - |\angle CAB|$$

Z toho získáme vztah $|\angle CPB| = |\angle LPM|$. Dále platí:

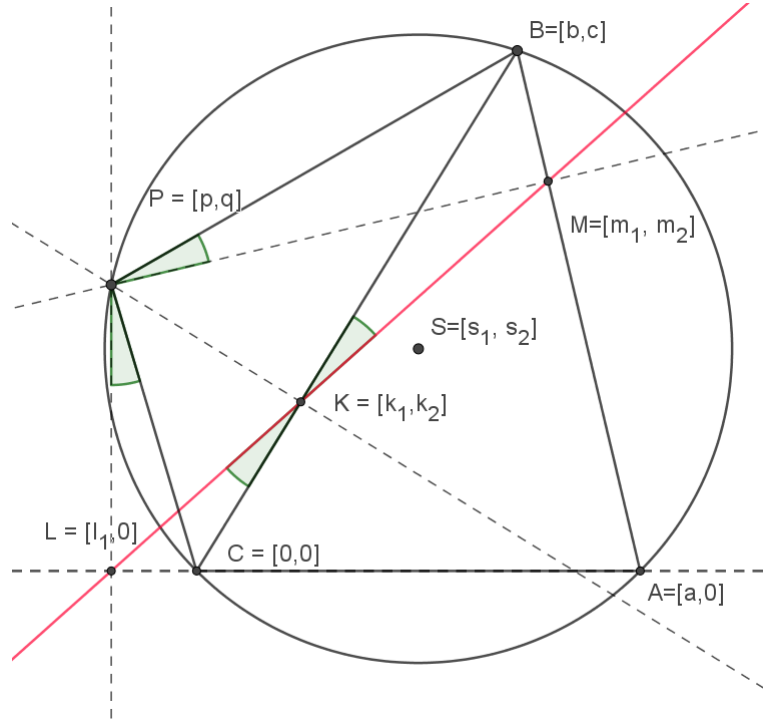
$$|\angle CPB| = |\angle CPL| - |\angle LPB|$$

$$|\angle LPM| = |\angle LPB| - |\angle BPM|$$

Z toho už nám plyne rovnost $|\angle CPL| = |\angle BPM|$. Klasický nepočítačový důkaz Wallace - Simsonovy věty je dokončen. Kolinearita bodů K , L a M je dokázána.

4.7.2 Počítačový důkaz

Stejně jako v předchozích příkladech si na začátku hledání počítačového důkazu musíme zvolit vhodnou kartézskou soustavu souřadnic. Volbu můžeme vidět na 55.



Obrázek 55: Zvolená kartézská soustava

Následně musíme opět zvolit algebraické vztahy popisující danou situaci. Jako první si zavedeme vztahy, které nám popisují kolmost přímek spuštěných z bodu P na jednotlivé strany trojúhelníku ABC .

Tedy první nás bude zajímat vztah $PL \perp AC$. Kolmost dvou vektorů zjistíme tak, že spočítáme jejich skalární součin a ten musí být roven nule. Tedy pokud je skalární součin dvou vektorů roven nule, tak tyto dva vektory jsou kolmé. Určíme si tedy směrové vektory přímek PL a AC .

$$\overrightarrow{PL} = [l_1, 0] - [p, q] = (l_1 - p, -q)$$

$$\overrightarrow{AC} = [0, 0] - [a, 0] = (-a, 0)$$

Směrové vektory jsou tedy určeny a nyní stačí provést jejich skalární součin.

$$\overrightarrow{PL} \cdot \overrightarrow{AC} = (l_1 - p, -q) \cdot (-a, 0) = (-al_1 + ap, 0)$$

Kolmost těchto dvou vektorů tedy popisuje vztah $p - l_1 = 0$.

Dále si potřebujeme popsat, že paty kolmic leží na stranách trojúhelníku ABC . Popíšeme tedy $K \in BC$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= [0, 0] - [b, c] = (-b, -c) \\ \overrightarrow{n_{BC}} &= (c, -b)\end{aligned}$$

Po získání normálového vektoru přímky BC si ho dosadíme do obecné rovnice přímky $ax + by + k = 0$, parametr c , který se obecně v tomto tvaru udává, nahradím parametrem k , aby se nezaměnil s druhou souřadnicí bodu B .

K získání parametru k si do obecné rovnice přímky dosadím bod $C = [0, 0]$.

$$\begin{aligned}ax + by + k &= 0 \\ cx - by + k &= 0 \\ k &= 0 \\ cx - by &= 0\end{aligned}$$

Obecná rovnice přímky BC je hotova. Nyní můžeme algebraicky vyjádřit vztah $K \in BC$.

$$k_1c - k_2b = 0$$

Postupně vyjádříme zbývající kolmosti. První se budeme zabývat $PM \perp AB$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} &= [m_1, m_2] - [p, q] = (m_1 - p, m_2 - q) \\ \overrightarrow{AB} &= [b, c] - [a, 0] = (b - a, c) \\ \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} &= (m_1 - p, m_2 - q) \cdot (b - a, c) = (m_1 - p) \cdot (b - a) + (m_2 - q) \cdot c\end{aligned}$$

Tuto kolmost můžeme tedy popsat vztahem $(m_1 - p) \cdot (b - a) + (m_2 - q) \cdot c = 0$.

Poslední kolmost, kterou potřebujeme vyjádřit je $PK \perp BC$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PK} &= [k_1, k_2] - [p, q] = (k_1 - p, k_2 - q) \\ \overrightarrow{BC} &= [0, 0] - [b, c] = (-b, -c) \\ \overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{BC} &= (k_1 - p, k_2 - q) \cdot (-b, -c) = (k_1 - p) \cdot (-b) + (k_2 - q) \cdot (-c)\end{aligned}$$

Poslední kolmost tedy lze popsat vztahem $(p - k_1) \cdot b + (q - k_2) \cdot c = 0$. Všechny kolmosti jsou algebraicky popsány. Musíme si však ještě popsat jednu patu kolmice ležící na straně trojúhelníka ABC . Zvolíme si $M \in AB$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= [b, c] - [a, 0] = (b - a, c) \\ \overrightarrow{n_{AB}} &= (c, a - b)\end{aligned}$$

S normálovým vektorem přímky AB můžeme sestavit obecnou rovnici popisující přímku AB .

$$\begin{aligned}cx + (a - b)y + k &= 0 \\ ac + k &= 0 \\ k &= -ac \\ cx + (a - b)y - ac &= 0\end{aligned}$$

Vztah $M \in AB$ lze tedy zapsat ve tvaru $ac - m_1c - am_2 + bm_2 = 0$.

Jako poslední předpoklad potřebuje algebraicky vyjádřit, že bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC . To lze popsat vztahem $-acp + cp^2 + abq - b^2q - c^2q + cq^2 = 0$.

Naši situaci tedy popisuje následující sada rovnic:

$$\begin{aligned}PL \perp AC &\Leftrightarrow h_1 : p - l_1 = 0 \\ PM \perp AB &\Leftrightarrow h_2 : (m_1 - p) \cdot (b - a) + (m_2 - q) \cdot c = 0 \\ PK \perp BC &\Leftrightarrow h_3 : (p - k_1) \cdot b + (q - k_2) \cdot c = 0 \\ K \in BC &\Leftrightarrow h_4 : k_1c - k_2b = 0 \\ M \in AB &\Leftrightarrow h_5 : ac - cm_1 - am_2 + bm_2 = 0 \\ P \in k &\Leftrightarrow h_6 : -acp + cp^2 + abq - b^2q - c^2q + cq^2 = 0\end{aligned}$$

Tvrzení, které chceme dokázat je, že body K , L a M jsou kolineární. Musíme toto tvrzení také vyjádřit algebraicky a pomocí programu CoCoA ověříme, zda patří do našeho ideálu (sada rovnic popisující situaci).

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & 0 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Z určení determinantu získáme rovnici, která je hledanou podmínkou $l_1m_2 +$

$m_1k_2 - k_1m_1 - l_1k_2 = 0$. Dále již budeme pracovat s programem CoCoA, který nám ověří, zda je toto tvrzení pravdivé.

V první řadě si v programu CoCoA potřebujeme definovat okruh s proměnnými $a, b, c, p, q, m_1, m_2, k_1, k_2, l_1, l_2$ a t . Následně musíme vytvořit ideál I , který je tvořen rovnicemi popisující geometrickou situaci.

```
Use R:=Q[a,b,c,p,q,k[1..2],l[1..2],m[1..2],t];
I:=Ideal(p-l[1],(m[1]-p)(b-a)+(m[2]-q)c,(p-k[1])b+(q-k[2])c,k[1]c-
k[2]b,ac-cm[1]-am[2]+bm[2],-acp+cp^2+abq-b^2q-c^2q+cq^2,
(l[1]m[2]+m[1]k[2]-k[1]m[1]-l[1]k[2])t-1);
```

Příkazem $NF(1,I)$ zjišťujeme, zda je tvrzení obecně pravdivé. Pokud nám tento příkaz vrátí hodnotu jedna, tak tvrzení není obecně pravdivé, pokud nám vrátí hodnotu nula, tak je tvrzení obecně pravdivé.

V tomto případě nám program CoCoA vrátil hodnotu jedna. Tedy naše tvrzení není obecně pravdivé.

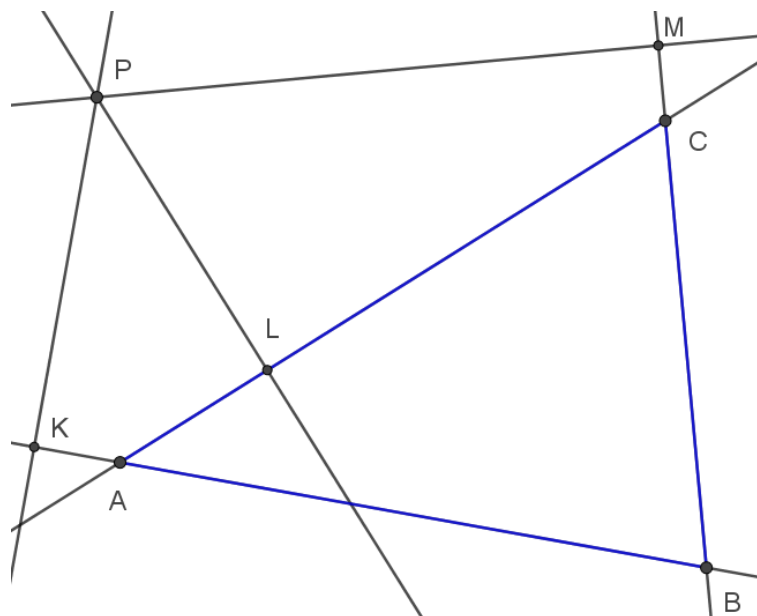
Tvrzení nemůže obecně platit, protože nejsou ošetřeny takzvané podmínky degenerace. Tedy například situace, kdy trojúhelník nebude existovat. To může nastat například, že některé dva body trojúhelníka splynou v jeden.

Při zjišťování podmínek degenerace získáme následující rovnici: $(b^2 + c^2)((a - b)^2 + c^2) = 0$. Tato rovnice nám popisuje, že pro trojúhelník ABC platí $A = B$, nebo $B = C$. Musíme tedy předpokládat, že $A \neq B$ a $B \neq C$. Musíme přidat polynom $(b^2 + c^2)((a - b)^2 + c^2)t - 1$ do ideálu I a opět použít příkaz $NF(1,I)$.

Tentokrát jsme obdrželi odpověď rovnou nule. Wallace-Simsonova věta je tedy dokázána.

Wallace-Simpsonovu větu můžeme pomocí programů dynamické geometrie nejen dokázat, ale také objevit. Nyní se už nebude jednat o explicitní množinu bodů, ale o implicitní množinu bodů. V tomto případě již nebude figurovat dvojice *mover*, *tracer*.

Vytvoříme si v programu GeoGebra trojúhelník, bod P a kolmice z bodu P na strany vytvořeného trojúhelníka.



Obrázek 56: Náčrt situace

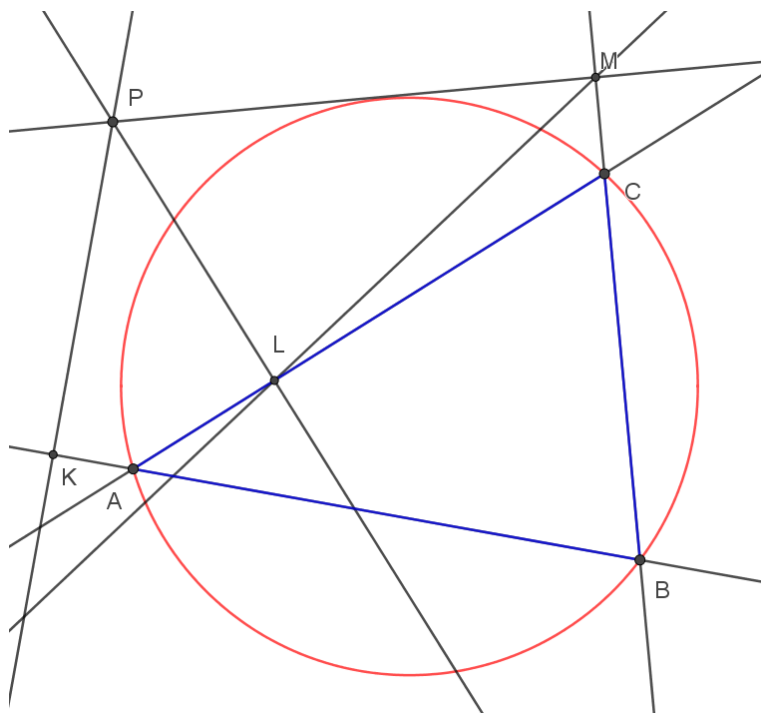
Musíme zjistit, jestli existuje množina pozic, kde se musí nacházet bod P , tak aby paty kolmic K , L a M byly kolineární.

K tomu nám v programu GeoGebra pomůže funkce *LocusEquation*. Jako parametry této funkce vybereme *Boolean expression* a *Moving point*. V našem případě bude naše podmínka $\text{AreCollinear}(K, L, M)$ a druhý parametr bude bod P .

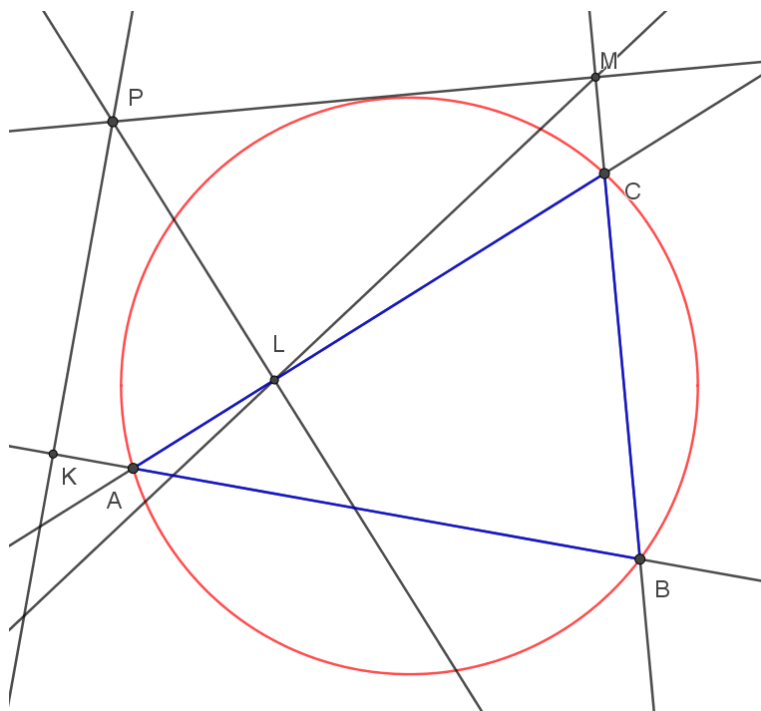
Input: `LocusEquation(AreCollinear(K, L, M), P)`

Obrázek 57: Příkaz LocusEquation

Výstupem této funkce bude kružnice opsaná trojúhelníku ABC . Můžeme vidět, že objevit toto tvrzení nebyl pomocí počítače velký problém.



Obrázek 58: Množina bodů, kde se musí vyskytovat bod P



Obrázek 59: Množina bodů, kde se musí vyskytovat bod P

Na výše uvedených obrázcích můžeme vidět, že když se bod P bude nacházet na kružnici opsané trojúhelníku, tak budou paty kolmic kolineární.

5 Závěr

Cílem této práce bylo předvést moderní využívání informačních technologií v matematice. Chtěl jsem ukázat, jak lze správným využitím moderních technologií objevit/dokázat matematické objevy.

Objevy a důkazy, které matematikům trvaly dokázat i několik let, můžeme pomocí počítačů a programů DGS a CAS objevit během několika minut.

Práce je strukturovaná do dvou základních částí. První se zabývá programovým vybavením systému dynamické geometrie, konkrétně programem GeoGebra. Tento program jsem si oblíbil kvůli jeho uživatelské přívětivosti a jeho online dostupnosti.

Ve druhé části diplomové práce jsem se zabýval různými příklady na množiny bodů daných vlastností. Pokusil jsem se znázornit, jak je objevování těchto množin pomocí počítačů snadné.

Jako učitel matematiky jsem byl hodně rád, že jsem měl v rámci diplomové práce možnost lépe pochopit fungování těchto programů. Díky čemuž můžu lépe vybírat, zda je vhodné využívat tyto programy.

Ve své krátké školské praxi jsem se setkal s pozitivní zpětnou vazbou na využívání těchto systémů, a to především díky jejich intuitivnosti. Žáci umí daleko lépe ovládat tablety a počítače, než pravítka a kružítko. Díky těmto programům se můžu se žáky více soustředit na geometrii a ne na obsluhu kružítko. Tím netvrdím, že se musí nutně upustit od využívání klasických geometrických nástrojů. Ty mají v geometrii jistě také své místo.

Doufám, že tato práce pomůže s rozšiřováním využívání DGS ve školách základních, středních i vysokých.

Seznam literatury

- [1] JUANDI, Dadang, Yaya Sukjaya KUSUMAH, Maximus TAMUR, Krisna Satrio PERBOWO, Muhammad Daut SIAGIAN, Rini SULASTRI a Habibi R. P NEGARA. The Effectiveness of Dynamic Geometry Software Applications in Learning Mathematics: A Meta-Analysis Study. International Journal of Interactive Mobile Technologies (iJIM) [online]. 2021, 15(02), 18-37 [cit. 2021-7-21]. ISSN 1865-7923. Dostupné z: doi:10.3991/ijim.v15i02.18853
- [2] JUANDI, D a N PRIATNA. Discovery learning model with geogebra assisted for improvement mathematical visual thinking ability. Journal of Physics: Conference Series [online]. 2018, 1013 [cit. 2021-7-21]. ISSN 1742-6588. Dostupné z: doi:10.1088/1742-6596/1013/1/012209
- [3] OLDKNOW, Adrian. Dynamic Geometry Software - a powerful tool for teaching mathematics, not just geometry! [online]. 1999, 14 [cit. 2021-7-21]. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/publication/2812249>
- [4] VONDROVÁ, Naďa a Miroslav RENDL. Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků. V Praze: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3234-6.
- [5] KOVÁCS, Zoltán. New tools in GeoGebra offering novel opportunities to teach loci and envelopes [online]. 2016, , 21 [cit. 2021-8-4]. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/publication/303681352>
- [6] BLAŽEK, Jiří a Pavel PECH, 2017. Searching for loci using GeoGebra. International Journal for Technology in Mathematics Education [online]. 23(2), 5 [cit. 2021-8-4]. Dostupné z: <https://go.gale.com/ps/i.do?id=GALE%7CA551963334>
- [7] KOVÁCS, Zoltán, 2018. Using Automated Reasoning Tools in GeoGebra in the Teaching and Learning of Proving in Geometry. International Journal of Technology in Mathematics Education [online]. 25(2), 19 [cit. 2021-8-19]. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/publication/326632420>
- [8] GeoGebra: Manual, 2013. GeoGebra [online]. Salzburg: IGI [cit. 2021-9-5]. Dostupné z: [https://wiki.geogebra.org/en/Category:Manual_\(official\)](https://wiki.geogebra.org/en/Category:Manual_(official))
- [9] DOLEŽAL, Jiří, 2006. Základy geometrie. Ostrava: VŠB - Technická univerzita. ISBN 80-248-1202-9.
- [10] GÜNZEL, Martin, 2012. Integrace elektronických prostředí pro počítačem podporovanou výuku matematiky. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. ISBN 978-80-7394-386-8.
- [11] PECH, Pavel. Searching for loci using new technology in teacher's education. In: Gordon.ac.il [online]. s. 79 [cit. 2022-02-17]. Dostupné z: <https://www.gordon.ac.il/sites/gordon/UserContent/files/pavel%20pech.pdf>

- [12] PECH, Pavel, 2005. Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita. ISBN 80-704-0805-7.
- [13] KOVÁCS, Zoltán a Francisco BOTANA. Automatic Discovery in GeoGebra: First Steps. Research Gate [online]. 30 [cit. 2022-02-27]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/310249775_Automatic_Discovery_in_GeoGebra_First_Steps
- [14] COX, David A., John B. LITTLE a Donal O'SHEA, [2015]. Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Fourth edition. Cham: Springer. Undergraduate texts in mathematics (Springer). ISBN 978-3-319-16720-6.