



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce
KOMPLEXNÍ ČÍSLA, KVATERNIONY
A JEJICH APLIKACE

Vypracoval: Pavel Brdlík
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice

Duben 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Komplexní čísla, kvaterniony a jejich aplikace jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

.....

Poděkování

Chtěl bych tímto poděkovat Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D., který byl vedoucím mé bakalářské práce. Zejména bych chtěl ocenit jeho rady a ochotu při spolupráci, se kterou mi pomáhal při obstarávání zdrojů i při samotném vyhotovení bakalářské práce.

Anotace:

Bakalářská práce je věnována tématu komplexní čísla a kvaterniony a jejich aplikace. Hlavním úkolem této práce je seznámit s pojmy komplexní číslo a kvaterniony a s jejich důležitými vlastnostmi a reprezentací těchto pojmů na vhodně zvolených příkladech. Komplexní čísla lze mimo jiné použít k reprezentaci rotačního pohybu v rovině, kvaterniony lze užít pro reprezentaci rotací v trojrozměrném prostoru. Cílem práce je poskytnout přehledné shrnutí teorie a ukázkové řešení praktických příkladů, které by názorně ilustrovaly uvedené využití komplexních čísel a kvaternionů při popisu rovinných resp. prostorových pohybů, případně jejich další aplikace.

Summary:

The bachelor thesis is dedicated to the topic of complex numbers and quaternions and their application. The main goal of this thesis is to familiarize with the subject of complex numbers and quaternions and their important properties and to present these terms with suitably selected examples. Complex numbers can be used among others to represent a planar rotational movement, quaternions can be used to represent rotations in three-dimensional space. The aim of this thesis is to provide a well arranged summary of the theory and a sample solution of practical examples that would illustratively demonstrate the application of complex numbers and quaternions by description of planar or spatial movements or their further applications.

Obsah

Úvod	7
1. Historie komplexních čísel	8
2. Komplexní čísla v programech GeoGebra, wxMaxima a Wolfram Alpha.....	11
2.1. Komplexní čísla v programu GeoGebra.....	11
2.1.1. Program GeoGebra	11
2.1.2. Nápopěda v GeoGebře	11
2.1.3. Znázornění komplexních čísel v programu GeoGebra	11
2.1.4. Operace s komplexními čísly	14
2.2. Komplexní čísla v programu wxMaxima.....	20
2.2.1. O programu wxMaxima.....	20
2.2.2. Zadávání komplexních čísel v programu wxMaxima.....	20
2.2.3. Operace s komplexními čísly.....	20
2.3. Komplexní čísla v programu Wolfram Alpha.....	27
2.3.1. O programu Wolfram Alpha.....	27
2.3.2. Základní operace s komplexními čísly	27
3. Užití komplexní čísel.....	34
3.1. Komplexní čísla v geometrii	34
3.1.1. Dělení úseček do daného poměru	34
3.1.2. Měření úhlů.....	36
3.1.3. Úhel mezi dvěma úsečkami	38
3.1.4. Otočení (rotace) kolem středu v rovině	40
3.1.5. Podobnost trojúhelníků	40
3.1.6. Rovnostranné trojúhelníky.....	43
3.2. Příklady z kinematiky.....	51
3.3. Řešení elektrických obvodů se střídavým proudem (RLC obvody)	53
4. Historie kvaternionů.....	61

5. Užití kvaternionů.....	64
5.1. Algebraické operace s kvaterniony	64
5.1.1. Součet a rozdíl kvaternionů	64
5.1.2. Násobení kvaternionů	65
5.1.3. Konjugovaný kvaternion.....	65
5.1.4. Norma kvaternionu	66
5.1.5. Inverzní kvaternion	67
5.1.6. Skalární a vektorový součin kvaternionů.....	67
5.1.7. Zápis kvaternionů do matice	68
5.2. Rotace (otočení) v prostoru	69
5.2.1. Rotace ve dvourozměrném prostoru	69
5.2.2. Rotace v trojrozměrném prostoru	69
5.3. Užití kvaternionů v praxi.....	73
 Závěr	 75
 Použité zdroje.....	 76

Úvod

Bakalářská práce se zabývá číselným oborem komplexních čísel $\mathbb{C}$ a jejich zobecněním v třírozměrném prostoru, kvaterniony $\mathbb{H}$.

Podle rámcového vzdělávacího programu oborů středního vzdělání, MŠMT ČR, se na některých středních školách komplexní čísla nevyučují. V této bakalářské práci bych chtěl čtenáře seznámit s využitím komplexních čísel při řešení různých algebraických a geometrických úloh, a dalším využitím například ve fyzice při řešení složitějších elektrických obvodů se střídavým proudem.

Komplexní čísla lze také použít k reprezentaci rotačního pohybu v rovině. Stejný význam mají potom kvaterniony pro reprezentaci rotací v trojrozměrném prostoru. Toto jejich využití přináší některé výhody oproti použití transformačních matic. Kvaterniony tak nacházejí stále větší uplatnění při popisu prostorových pohybů, např. v robotice, kinematice, kvantové fyzice a jiných vědních oborech.

Práce je rozdělena do pěti kapitol. První a čtvrtá kapitola seznamuje čtenáře s historií komplexních čísel a kvaternionů. Ve druhé kapitole se čtenář může dočíst o volně dostupných matematických programech GeoGebra, wxMaxima a internetové aplikaci Wolfram Alpha, včetně interpretace zápisu a algebraických operací s komplexními čísly v těchto programech a aplikaci. Třetí kapitola seznamuje čtenáře s využitím komplexních čísel v geometrii, kinematice a s řešením složitějších elektrických obvodů se střídavým proudem. Pátá kapitola seznamuje čtenáře s využitím kvaternionů v algebře, v geometrii, fyzice a dalších vědních oborech. Ve třetí a páté kapitole jsou grafická řešení příkladů verifikována pomocí programu GeoGebra.

Cílem bakalářské práce je poskytnout čtenáři přehledné shrnutí teorie a ukázkové řešení praktických příkladů, které názorně ilustrují využití komplexních čísel a kvaternionů.

1 Historie komplexních čísel

Komplexní čísla byla poprvé zavedena v teorii kubických rovnic. Řešením kubických rovnic (tj. rovnic třetího stupně) se zabýval italský matematik C. Cardano (1501-1576). Cardano dospěl k vzorcům, které vyjadřovaly kořeny rovnic jako součet nebo rozdíl čísel nazývaných čísla komplexní [26]. Kubická rovnice má tvar

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0; a \neq 0 \text{ [11]},$$

kde a, b, c, d jsou koeficienty.

Uděláme-li substituci $x = y - \frac{b}{3a}$ a vydělíme-li číslem a rovnicí

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, dostaneme normovaný tvar kubické rovnice

$$y^3 + 3py + 2q = 0,$$

kde

$$3p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}, 2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Tuto úpravu kubické rovnice formuluje Rektorys ([11], s. 39).

Pro kořeny y_1, y_2, y_3 rovnice $y^3 + 3py + 2q = 0$ platí

$$y_1 = u + v, y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v,$$

kde

$$\varepsilon_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}, u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}, v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Tento tvar Cardanových vzorců formuluje Rektorys [11].

Cardanovy vzorce jsou pro výpočet kořenů kubické rovnice velice nevýhodné. V některých případech vyjadřují reálné kořeny kubické rovnice pomocí čísel imaginárních. Tento nedostatek (tzv. casus irreducibilis) bohužel odstranit nelze [2].

Příklad 1: Podle Cardanových vzorců je jedním ze tří kořenů rovnice $x^3 - 7x - 6 = 0$ číslo

$$\sqrt[3]{3 + i \frac{10}{9} \sqrt{3}} + \sqrt[3]{3 - i \frac{10}{9} \sqrt{3}}.$$

Pokud bychom řešili rovnici $x^3 - 7x - 6 = 0$ pomocí rozkladu v součin kořenových činitelů, dospěli bychom k závěru, že kořeny rovnice jsou čísla -1, -2, 3 [2].

Kubické rovnice se v dnešní době řeší buď rozkladem v součin kořenových činitelů anebo goniometrickým řešením [11].

Italský matematik Raffaello Bombelli v r. 1579 vypracoval teorii ryze imaginárních čísel a řešil kvadratické rovnice, které mají komplexní kořeny [26].

Příklad 2: Kvadratická rovnice $x^2 - x + 3 = 0$ má komplexní kořeny

$$x_1 = \frac{1+i\sqrt{11}}{2}; x_2 = \frac{1-i\sqrt{11}}{2}.$$

V 17. a 18. století ukázali Abraham de Moivre (1667-1754), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) a Leonhard Euler (1707-1783), že komplexní čísla mají uplatnění i v jiných oborech matematiky, např. v geometrii, a ve fyzice. Od L. Eulera pochází označení „i“ pro imaginární jednotku [2].

V roce 1673 stanovil John Wallis (1616-1703) $\sqrt{-1}$ jako geometrický průměr mezi +1 a -1 [26].

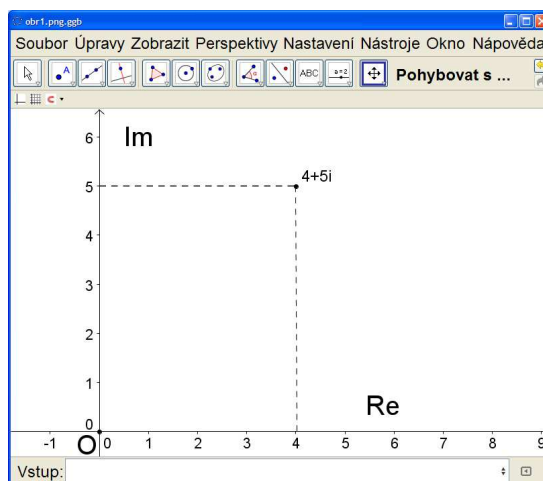
Jean-Robert Argand (1768-1822) v roce 1806 veličinu $a + bi$ znázornil bodem v rovině a zavedl pojem modulu $\sqrt{a^2 + b^2}$, čísla reálná znázorňuje přímka, čísla imaginární pak přímka kolmo na předešlou v bodě O [26].

Na Obr. 1 je znázornění čísla $4+5i$, kde *Re* je reálná osa, *Im* je imaginární osa a O je průsečík os (počátek).

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) v roce 1821 zavedl vztah mezi exponenciálním goniometrickým a algebraickým tvarem komplexních čísel

$$re^{\varphi i} = r(\cos \varphi + \sin \varphi) = a + bi,$$

kde r je modul $\sqrt{a^2 + b^2}$, φ argument (úhel), i imaginární jednotka, $re^{\varphi i}$ je exponenciální tvar, $r(\cos \varphi + \sin \varphi)$ goniometrický tvar a $a + bi$ algebraický tvar komplexního čísla [26].



Obr. 1: Znázornění komplexního čísla $4+5i$, a počátku O v programu GeoGebra

Příklad 3: Číslo $1+i$, které je zapsáno v algebraickém tvaru, se pomocí A. L. Cauchyho vztahu zapíše do goniometrického a exponenciálního tvaru takto:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}.$$

Německý matematik Karl Fridrich Gauss (1777-1855), zavedl geometrické znázornění komplexních čísel jako bodů roviny [26]. Dokázal tzv. základní větu algebry: „Každá algebraická rovnice má v oboru komplexních čísel aspoň jeden kořen“. Pomocí této věty lze odvodit, že každá algebraická rovnice má v oboru komplexních čísel právě n kořenů, jestliže každý kořen počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost [2].

Dnes jsou komplexní čísla užitečná pro mnoho oborů zejména v geometrii, algebře, elektrotechnice, hydromechanice, v jaderné a kvantové fyzice.

2 Komplexní čísla v programech GeoGebra, wxMaxima a Wolfram Alpha

V této části bakalářské práce chci čtenáře seznámit s volně dostupnými matematickými programy GeoGebra, wxMaxima a internetové aplikaci Wolfram Alpha, včetně interpretace zápisu a algebraických operací s komplexními čísly v těchto programech a aplikaci.

2.1. Komplexní čísla v programu GeoGebra

2.1.1 Program Geogebra

Program GeoGebra je nekomerční, zdarma šiřitelný program, který podporuje výuku matematiky. Jednotlivé matematické problémy řeší algebraicky a geometricky. Je rozšířen po celém světě. Autorem tohoto programu je Markus Hohenwarter z Johannes Kepler University Linz. Program získal řadu ocenění v Rakousku, v Německu a v dalších evropských zemích. V současnosti se na vývoji tohoto programu podílí mezinárodní tým programátorů [27].

Instalační soubor programu je dostupný na webové stránce www.geogebra.org.

2.1.2 Náповěda v GeoGebře

Po stisknutí tlačítka nápověda v pravém horním rohu příkazové lišty získá uživatel informace o licenci programu, jednotlivých funkcích programu, různé návody v tutoriálech a může se účastnit i internetového fóra o GeoGebře. Náповěda se neustále aktualizuje a její obsah je prakticky celý přeložený do českého jazyka a do dalších jazyků.

2.1.3 Znázornění komplexních čísel v programu GeoGebra

Komplexní čísla jsou uspořádané dvojice reálných čísel. Můžeme je zobrazit v tzv. Gaussově rovině (viz kapitola 1). Znázornění komplexních čísel pomocí Gaussovy roviny můžeme uplatnit i v GeoGebře. V programu můžeme komplexní čísla zobrazit jako bod nebo jako vektor.

2.1.3.1 Zadání komplexního čísla jako bod.

Můžeme postupovat tímto způsobem

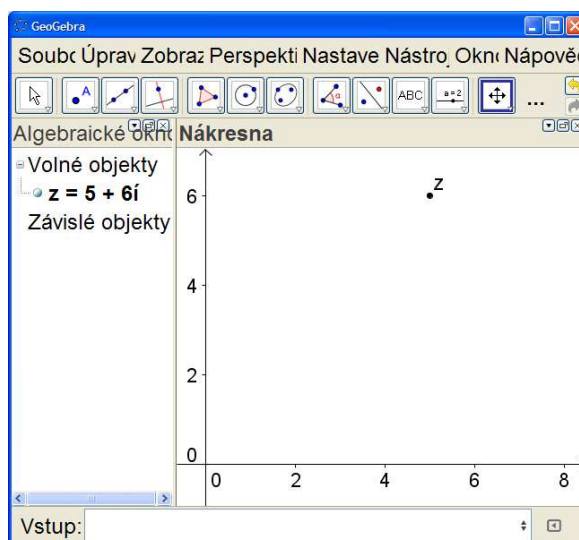
- 1) Klikneme levým tlačítkem myši na ikonu  (Nový bod). Zvolíme dole v nabídce ikonu  (Komplexní číslo).
- 2) Libovolně klikneme levým tlačítkem myši na plochu nákresny. Program znázorní komplexní číslo na nákresně automaticky jako bod. V okně algebry se ve volných objektech zobrazí odpovídající komplexní číslo z v algebraickém tvaru (Obr. 2).

Poznámka:

- Klikneme-li pravým tlačítkem myši na komplexní číslo zapsané v algebraickém okně, můžeme tento bod přejmenovat.
- Podržíme-li levé tlačítko myši na bodě komplexního čísla znázorněného na nákresně a budeme jím myši posouvat, bude se hodnota tohoto čísla měnit. Vše je možné sledovat v okně algebry.

Komplexní číslo můžeme zadat do programu ve všech možných tvarech (algebraicky, goniometricky a exponenciálně) pomocí vstupní lišty, nacházející se dole pod pracovní plochou. V algebraickém okně, ale bude číslo znázorněné jen v algebraickém tvaru. Konkrétně se může postupovat tímto způsobem:

- 1) Do vstupní lišty napíšeme libovolné komplexní číslo například $z = 6 + 5i$, kde z představuje název (označení) komplexního čísla, 6 je reálná část a 5 je imaginární část. Poté klikneme na klávesu ENTER.
- 2) Po stisknutí ENTER se číslo objeví jak v algebraickém okně, tak i v nákresně.



Obr. 2: Znázornění komplexního čísla jako bod

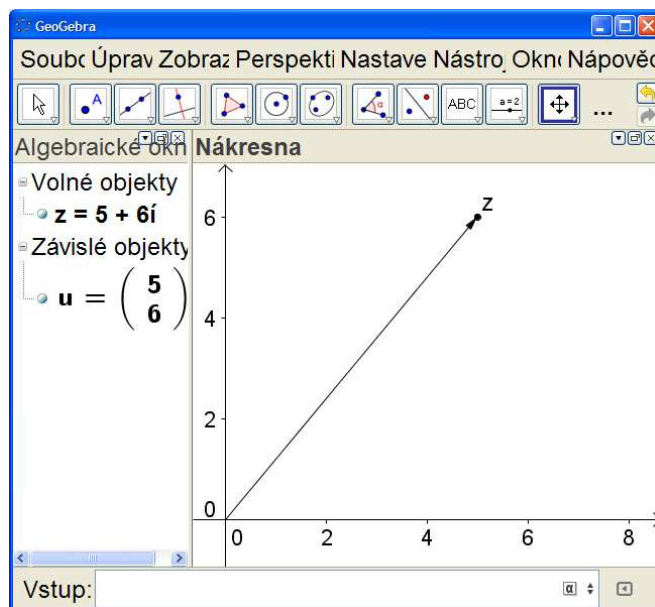
2.1.3.2 Zadání komplexního čísla jako vektoru

Můžeme postupovat tímto způsobem (Obr. 3):

- 1) Nejprve postupujeme stejně jako při vkládání komplexního čísla do vstupního okna.
- 2) Poté, až se číslo zobrazí v nákresně, ve vstupní liště použijeme příkazu „Vektor[<Bod>]“. Místo „<Bod> „ napíšeme do hranatých závorek název komplexního čísla. V našem případě „Vektor[z]“, poté stiskneme ENTER.

Poznámka:

- Libovolné komplexní číslo například $z = 5 + 6i$ můžeme zadat i jako vektor bez názvu tímto příkazem „Vektor[5+6i]“.
- Místo hranatých závorek je možné použít kulaté „Vektor()“.
- Pokud píšeme příkaz ve vstupní liště, stačí napsat počáteční písmena příkazu a už si jej můžeme zvolit z nabídky, kterou nám program poskytne.
- Pokud příkaz nevíme, dole v pravém rohu, u vstupní lišty, klikneme na ikonu  (Nápověda) a otevře se nám okno nápovědy, kde si můžeme zvolit požadovanou matematickou operaci.



Obr. 3: Znázornění komplexního čísla jako vektor

2.1.4 Operace s komplexními čísly

V GeogGebře můžeme s komplexními čísly dělat libovolné algebraické operace. V této části bakalářské práce, na jednotlivých příkladech, uvádím postup při sčítání, odčítání, násobení a dělení komplexních čísel a řešení binomické rovnice dvěma způsoby. K postupům jsou přidána i grafická znázornění v programu GeoGebra.

2.1.4.1 Součet komplexních čísel:

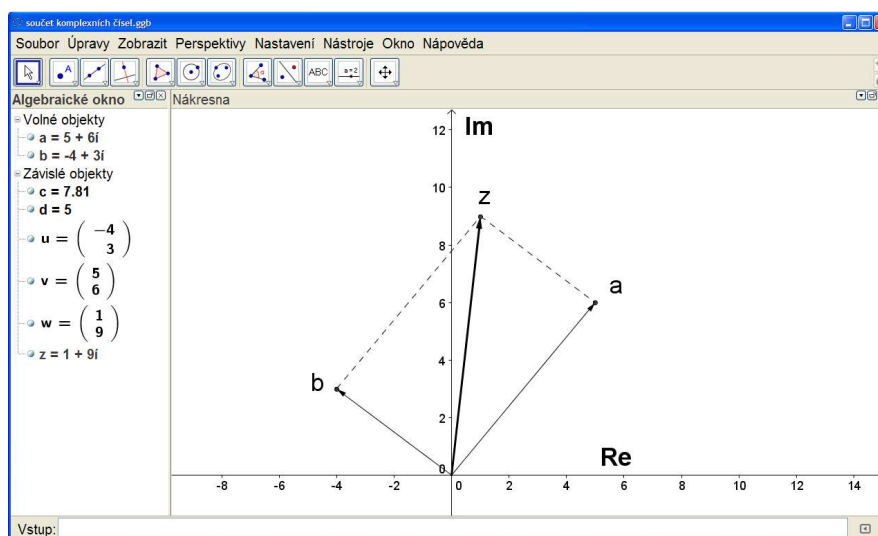
Příklad 1: Sečtěte graficky dvě komplexní čísla $a = 5 + 6i$, $b = 3i - 4$, kde $z = a + b$.

Řešení:

- 1) Do vstupní lišty napíšeme příkaz „ $a=5+6i$ “ a stiskneme ENTER.
- 2) Do vstupní lišty napíšeme příkaz „Vektor(a)“ a stiskneme ENTER.
- 3) Stejně jako u komplexního čísla a , postupujeme i u komplexního čísla b .
- 4) Do vstupní lišty napíšeme příkaz „ $z=a+b$ “ a stiskneme ENTER.
- 5) Do vstupní lišty napíšeme „vektor(z)“ a stiskneme ENTER.

Poznámka:

Výsledek příkladu 1 je znázorněný na (Obr. 4). Na (Obr. 4) je znázorněný čárkovaně i rovnoběžník. Vodorovná osa je osa reálná. Svislá osa je osa imaginární. Výsledné komplexní číslo z bude dáno součtem vektorů a , b .



Obr. 4: Součet komplexních čísel v GeoGebře

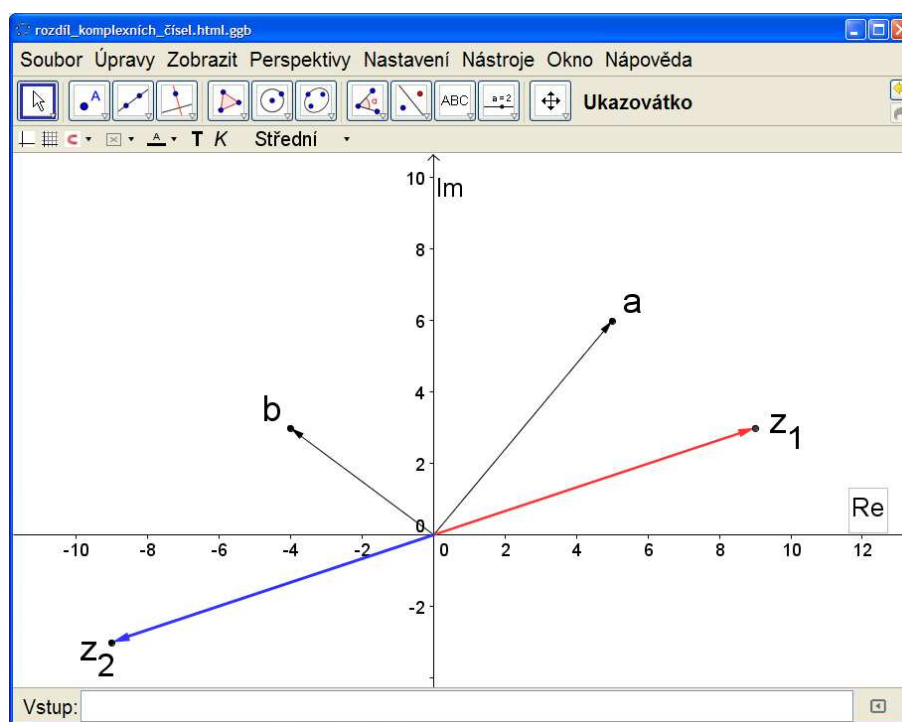
2.1.4.2 Rozdíl komplexních čísel

Příklad 2: Určete graficky rozdíl komplexních čísel $z_1 = a - b$ a $z_2 = b - a$, kde $a = 5 + 6i$; $b = (-4) + 3i$.

Řešení:

- 1) Napíšeme do vstupní lišty příkaz „a=5+6i“ a stiskneme ENTER.
- 2) Napíšeme do vstupní lišty příkaz „vektor(a)“.
- 3) Totéž udělejme u komplexního čísla b .
- 4) Do vstupní lišty napíšeme příkaz „ $z_1=a-b$ “ a stiskneme ENTER.
- 5) Do vstupní lišty napíšeme příkaz „ $z_2=b-a$ “ a stiskneme ENTER.
- 6) Do vstupní lišty napíšeme „vektor(z_1)“ a stiskneme ENTER.
- 7) Totéž udělejme i u z_2 .

Na (Obr. 5) je znázorněný výsledek.



Obr. 5: Rozdíl komplexních čísel v GeoGebře

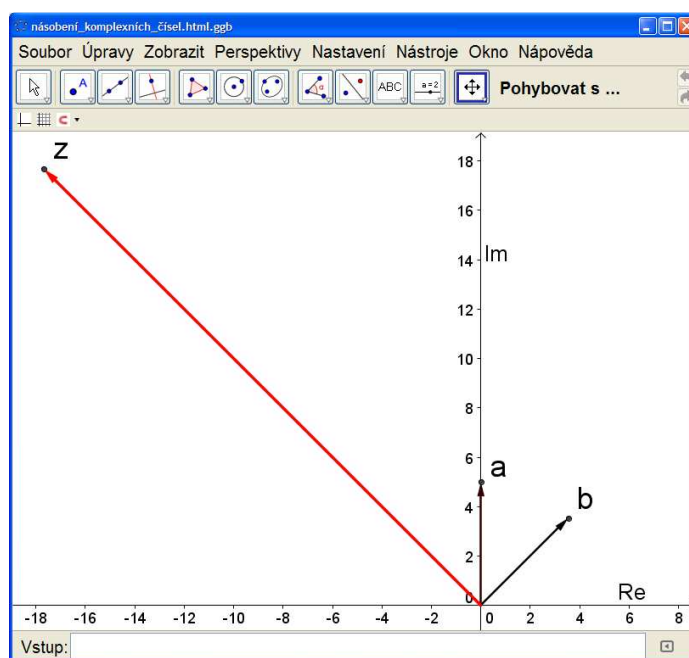
2.1.4.3 Násobení komplexních čísel

Příklad 3: Vynásobte dvě komplexní čísla $a = 2i - 4$; $b = 2 - 2i$.

Řešení:

- 1) Do vstupní lišty napíšeme příkaz „ $a=2i-4$ “ a stiskneme ENTER.
- 2) Do vstupní lišty napíšeme příkaz „vektor(a)“.
- 3) Totéž udělejme u komplexního čísla b .
- 4) Do vstupní lišty napíšeme „ $z=a*b$ “ a stiskneme ENTER.
- 5) Do vstupní lišty napíšeme „vektor (z)“ a stiskneme ENTER.

Na Obr. 6 je znázorněný výsledek



Obr. 6: Součin komplexních čísel v GeoGebře

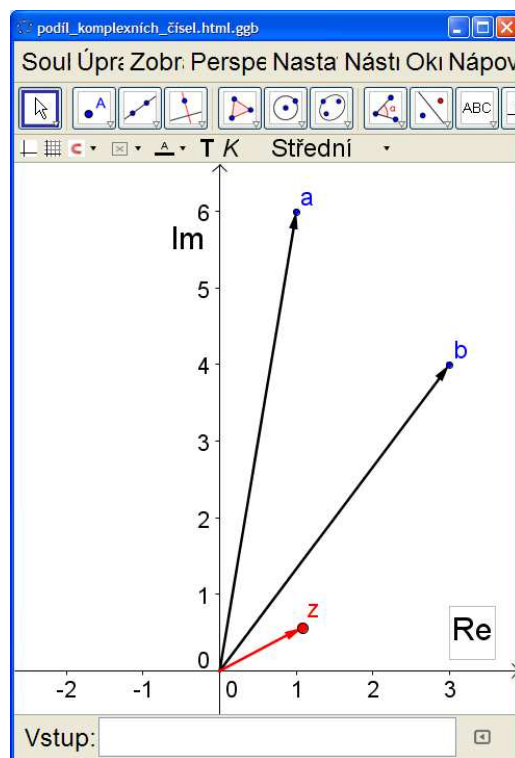
2.1.4.4 Podíl komplexních čísel

Příklad 4: Vydělte dvě komplexní čísla $a = 1 + 6i$; $b = 3 + 4i$.

Řešení:

- 1) Do vstupní lišty napíšeme příkaz „ $a=1+6i$ “ a stiskneme ENTER.
- 2) Do vstupní lišty napíšeme příkaz „vektor(a)“.
- 3) Totéž udělejme u komplexního čísla b .
- 4) Do vstupní lišty napíšeme „ $z=a/b$ “ a stiskneme ENTER.
- 5) Do vstupní lišty napíšeme příkaz „vektor (z)“ a stiskneme ENTER

Na (Obr. 7) je znázorněný výsledek.



Obr. 7: Podíl komplexních čísel v GeoGebře

2.1.4.5 Řešení binomické rovnice

Příklad 5: Vyřešte binomickou rovnici $x^5 - 1 = 0$.

Řešení:

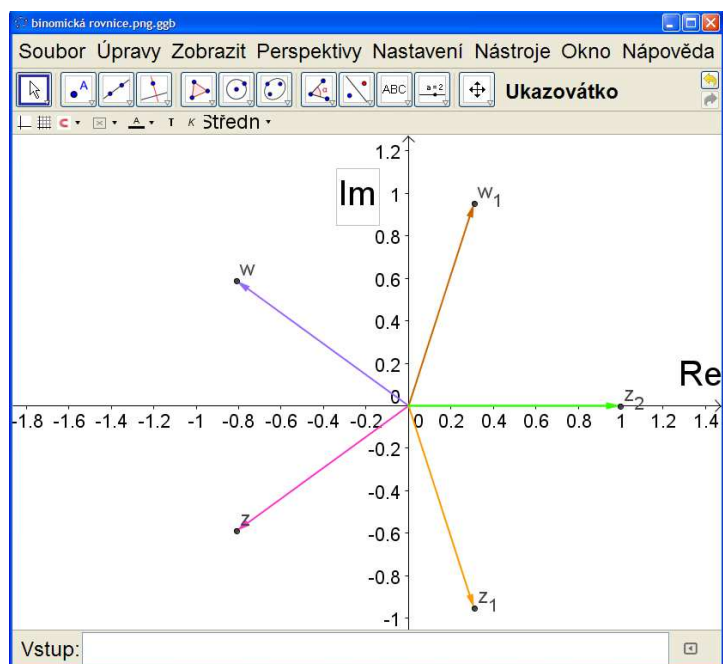
1. způsob:

- 1) Klikneme na ikonu  (Nápověda).
- 2) Klikneme na funkci „Funkce & Kalkulus“.
- 3) Klikneme dvakrát na „KomplexniKoren“.
- 4) Do vstupní lišty napíšeme do závorky funkce „KomplexniKoren“ polynom ve tvaru x^5-1 .
- 5) GeoGebra zobrazí výsledky v algebraickém tvaru a na grafu zobrazí tyto kořeny v bodech.
- 6) Chceme-li kořeny rovnice znázornit pomocí vektorů, budeme postupovat stejně jako v předešlých příkladech. (tj. napíšeme funkci „Vektor()“ a do závorek napíšeme označení jednotlivých kořenů).

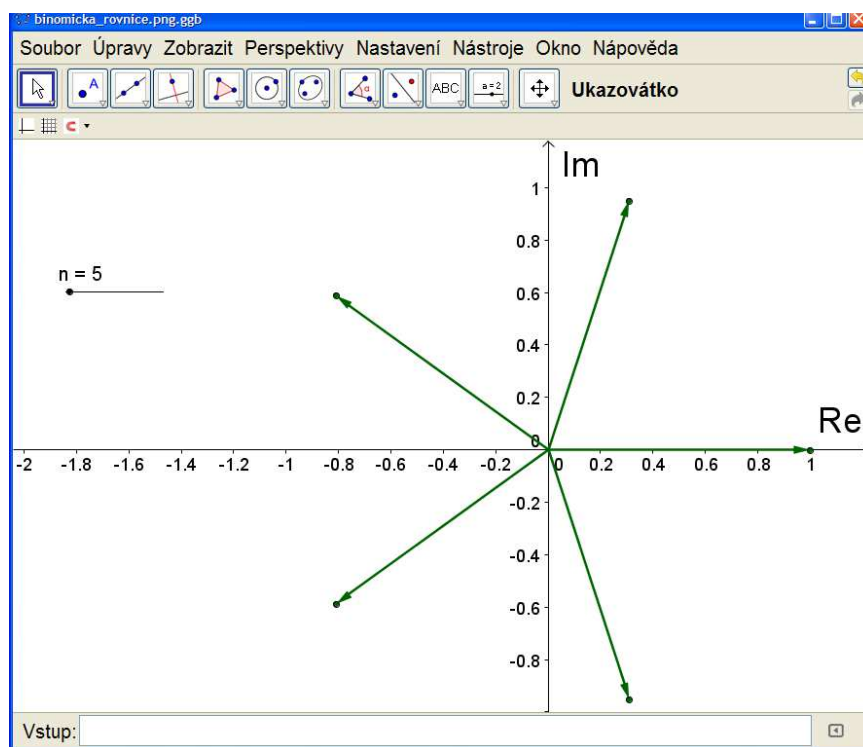
Na (Obr.8) je znázorněný výsledek.

2. způsob

- 1) Klikneme na ikonu  (Posuvník)
- 2) Klikneme libovolně na náčrtnu.
- 3) Objeví se okno s posuvníkem. V tomto okně zvolíme interval (např. „od“ (-5) „do“ 5).
- 4) Ve složce „interval“ zadáme „Celé číslo“.
- 5) Ve složce „Posuvník“ necháme „vodorovně“ a šířku „100“.
- 6) Ve složce „Animace“ necháme rychlost „1“ a opakování „oscilující“. Nesmíme zapomenout na název například „n“.
- 7) Do vstupní lišty napíšeme „Posloupnost[Vektor[$e^{i 2 \pi / n k}$], k, 0, n - 1]“ a klikneme na ENTER.
- 8) Do vstupní lišty napíšeme „Posloupnost[$e^{i 2 \pi / n k}$], k, 0, n - 1]“.
- 9) Máme-li řešit binomickou rovnici $x^5 - 1 = 0$, musíme bod „n“ na náčrtně posunout na „n=5“. Na (Obr. 9) je znázorněný výsledek



Obr. 8: Řešení binomické rovnice v GeoGebře 1.způsobem



Obr. 9: Řešení binomické rovnice v GeoGebře 2.způsobem

2.2 Komplexní čísla v programu wxMaxima

2.2.1 O programu wxMaxima

Program wxMaxima je volně šiřitelný počítačový algebraický program. (Pro tyto programy používáme zkratku CAS z anglického Computer Algebra System). Základem tohoto programu je příkazový řádek, do kterého se vypisují nějaké funkce a příkazy. Některé funkce lze vložit pomocí grafických ikon [15].

Instalace programu je volně dostupná na adrese: <http://sourceforge.net/projects/wxmaxima/>.

2.2.2 Zadávání komplexních čísel v programu wxMaxima

Imaginární část komplexního čísla zadáváme takto „%i“.

Komplexní čísla můžeme do programu zadat ve všech možných tvarech.

2.2.3 Operace s komplexními čísly

2.2.3.1 Převod komplexních čísel:

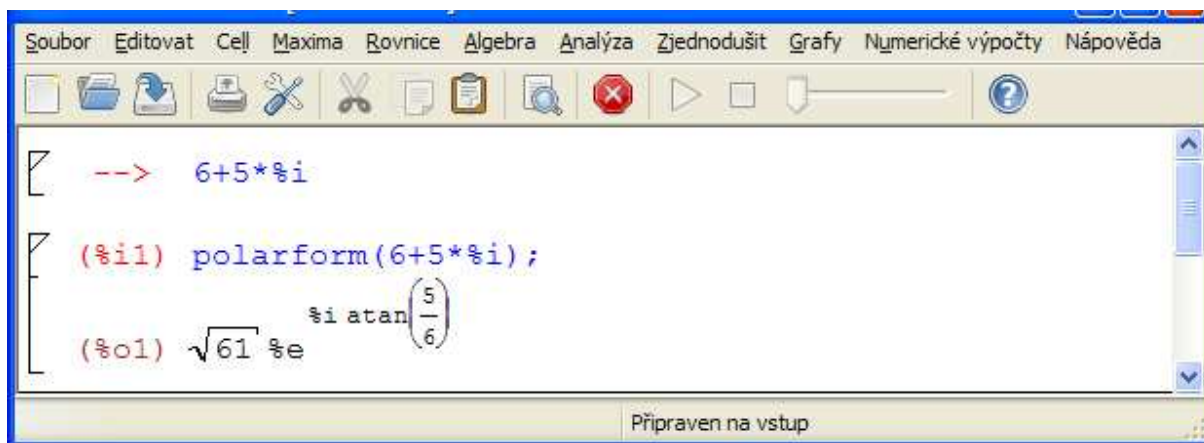
Příklad 1: Komplexní číslo $a = 5i + 6$ máme převést do exponenciálního tvaru.

Řešení:

- 1) Číslo $a = 5i + 6$ zapíšeme ve tvaru „6+5*%i“.
- 2) Levým tlačítkem myši klikneme na panel „Zjednodušit“.
- 3) Myší najedeme na „Komplexní zjednodušení“.
- 4) Poté zvolíme „Převod na polární tvar“.
- 5) Program wxMaxima číslo $a=5i+6$ zapíše v exponenciálním tvaru takto: $\sqrt{61}\%e^{\%i\operatorname{atan}\left(\frac{5}{6}\right)}$ (Obr. 10).

Poznámka:

$\%e$ je Eulerovo číslo a $\%i$ je imaginární jednotka.

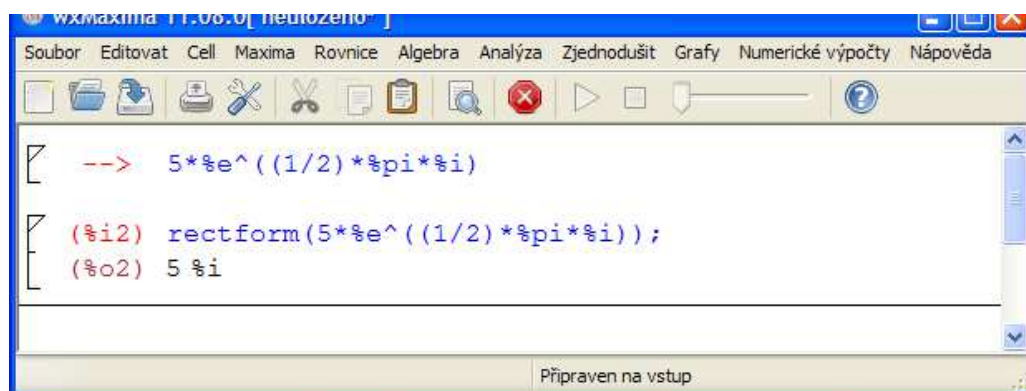


Obr. 10: Převod na exponenciální tvar

Příklad 2: Komplexní číslo zadané v exponenciálním tvaru $b = 5e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)i}$ máme převést do algebraického tvaru.

Řešení:

- 1) Komplexní číslo $b = 5e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)i}$ zadáme v tomto tvaru „5*%e^((1/2)*%pi*i)“,
- 2) Levým tlačítkem myši klikneme na panel „Zjednodušit“,
- 3) Myši najedeme na „Komplexní zjednodušení“, poté zvolíme „Konverze na algebraický tvar“. Číslo v algebraickém tvaru ve wxMaximě: $b = 5\%i$. Vše je znázorněno na (Obr. 11).



Obr. 11: Převod na algebraický tvar

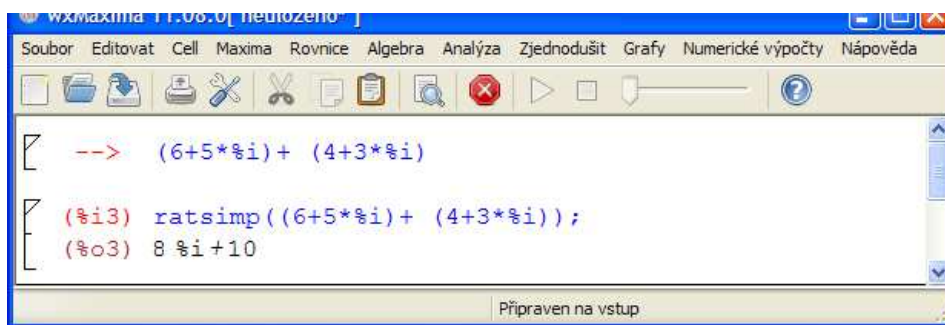
2.2.3.2 Součet komplexních čísel:

Příklad 3: Máme sečíst dvě komplexní čísla $a = 6 + 5i$, $b = 4 + 3i$.

Řešení: (Obr. 12)

- 1) Zapišeme v tomto tvaru: „(6+5*%i)+(4+3*%i)“.
- 2) Levým tlačítkem myši klikneme na ikonu „Zjednodušit“.
- 3) Levým tlačítkem myši klikneme na „Zjednodušit výraz“.

Program tento příklad vypočítá v algebraickém tvaru $8i+10$.



Obr. 12: Součet komplexních čísel

2.2.3.3 Rozdíl komplexních čísel

Příklad 4: Máme odečíst dvě komplexní čísla zadaná v goniometrickém tvaru:

$$c = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right); d = \sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right).$$

Řešení: (Obr. 13)

1) Čísla napíšeme v tomto tvaru:

$$\text{„sqrt(2)*(cos((%pi/4))+%i*sin((%pi/4)))-sqrt(3)*(cos((3*%pi/4))+%i*sin((3*%pi/4)))“}.$$

2) Levým tlačítkem myši klikneme na panel „Zjednodušit“.

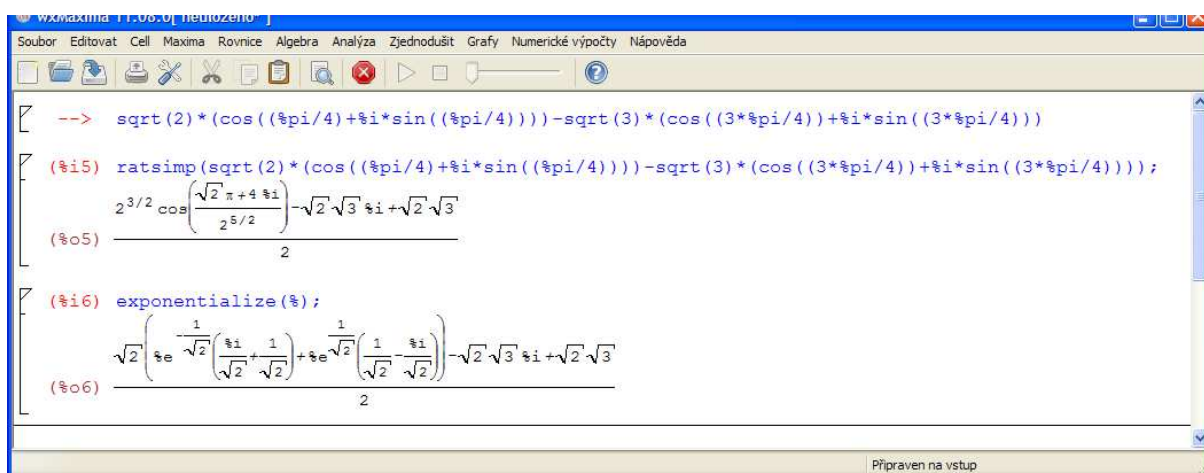
3) Levým tlačítkem klikneme „Zjednodušit výraz“.

Program vypíše tento výsledek v algebraickém tvaru:

$$-\frac{(\sqrt{2}\sqrt{3}-2)\%i-\sqrt{2}\sqrt{3}-2}{2}.$$

Pro exponenciální tvar program vypíše tento výsledek:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+1\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} \%e^{-\%i \operatorname{atan}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+1}\right)}.$$



Obr. 13: Rozdíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru

2.2.3.4 Násobení komplexních čísel

Příklad 5: Máme vypočítat součin těchto komplexních čísel zadaných v exponenciálním tvaru: $b = 5e^{(\frac{\pi}{2})i}$; $c = \sqrt[3]{4}e^{(\frac{\pi}{2})i}$.

Řešení: (Obr. 14)

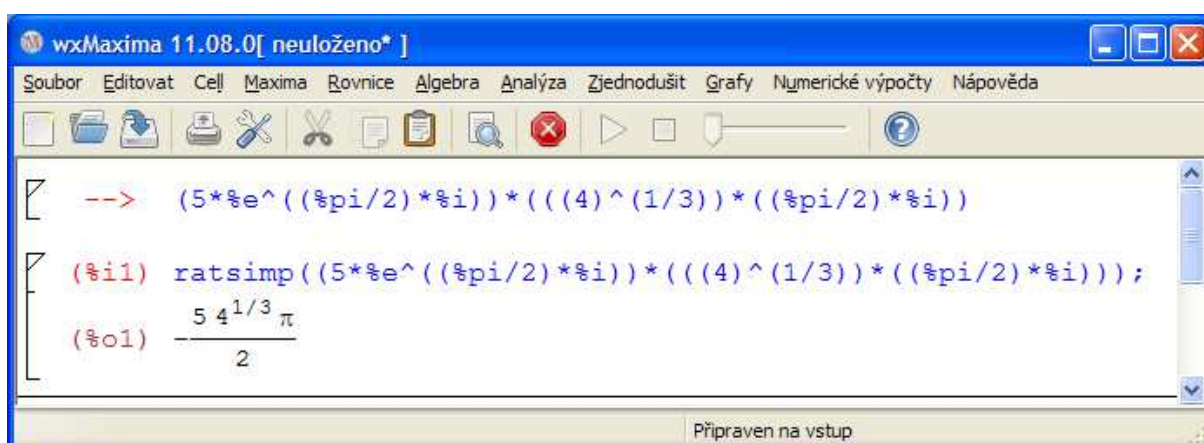
1) Komplexní čísla b, c zapíšeme do programu v tomto tvaru:

„ $(5*e^{((\pi/2)*i)})*((4)^{(1/3)})*((\pi/2)*i)$ “.

2) Levým tlačítkem myši klikneme na panel „Zjednodušit“.

3) Levým tlačítkem klikneme „Zjednodušit výraz“.

Program vypíše tento výsledek: $-\frac{54^{1/3}\pi}{2}$, což je výsledek v algebraickém tvaru.



Obr. 14: Násobení komplexních čísel zadaných v exponenciálním tvaru

2.2.3.5 Dělení komplexních čísel

Příklad 6: Máme vypočítat podíl dvou komplexních čísel zadaných algebraicky

$$z_1 = 8 + 3i; z_2 = 3 + 3i.$$

Řešení:(Obr. 15)

- 1) Komplexní čísla z_1, z_2 zapíšeme do programu v tomto tvaru: „(8+3*%i)/(3+3*%i)“.
- 2) Levým tlačítkem myši klikneme na panel „Zjednodušit“.
- 3) Levým tlačítkem klikneme „Zjednodušit výraz“.

Program vypíše tento výsledek: $\frac{3\%i+8}{3\%i+3}$.

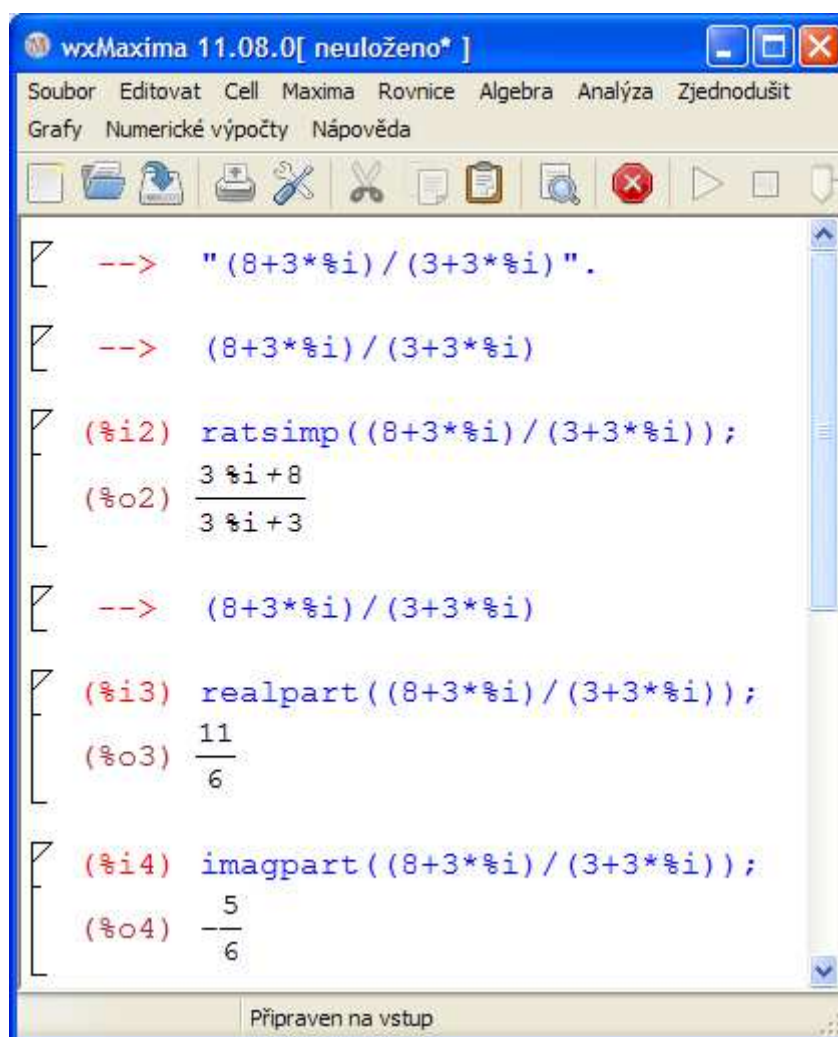
Pokud chceme znát hodnotu podílu těchto dvou komplexních čísel, postupujeme takto:

- 1) Komplexní čísla z_1, z_2 zapíšeme do programu v tomto tvaru: „(8+3*%i)/(3+3*%i)“.
- 2) Levým tlačítkem myši klikneme na panel „Zjednodušit“.
- 3) Levým tlačítkem myši klikneme na „Komplexní zjednodušení“.
- 4) Levým tlačítkem myši klikneme na „Reálná část“.
- 5) Opakujeme krok 2 a 3, poté klikneme na „Imaginární část“.

Program vypíše zvlášť hodnotu reálné a imaginární části.

Hodnota reálné části je $\frac{11}{6}$; hodnota imaginární části je $-\frac{5}{6}$. Spojíme-li tyto dvě hodnoty, máme

výsledek podílu komplexních čísel z_1 a z_2 tj. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{11}{6} - \frac{5}{6}i$.



Obr. 15: Podíl komplexních čísel v algebraickém tvaru

2.2.3.6 Binomická rovnice

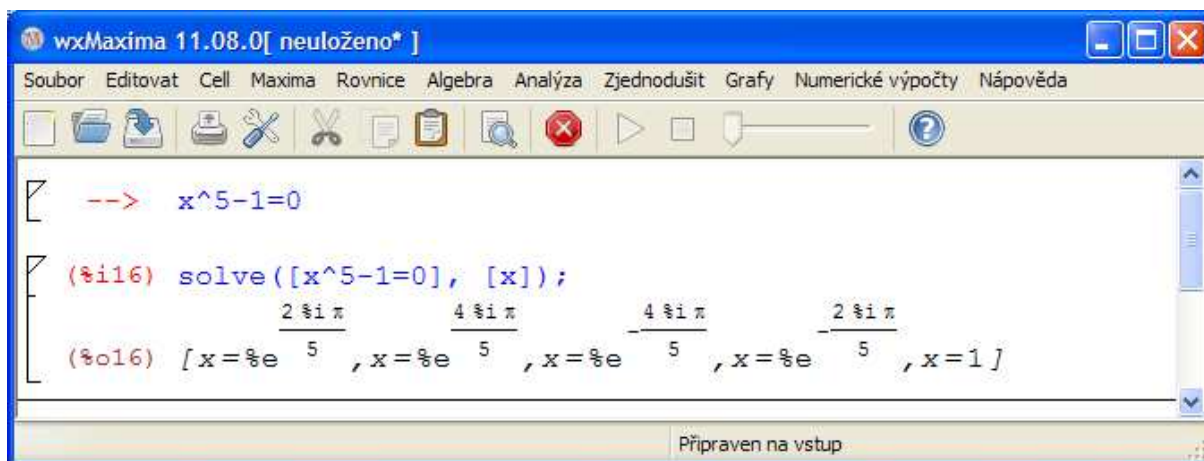
Příklad 7: Máme najít kořeny binomické rovnice $x^5 - 1 = 0$.

Řešení: (Obr. 16)

- 1) Do programu zapíšeme binomickou rovnici v tomto tvaru: „x^5-1=0“.
- 2) Levým tlačítkem myši klikneme na panel „Rovnice“.
- 3) Levým tlačítkem myši klikneme na „Řešit...“

Program vypíše tyto kořeny rovnice v exponenciálním tvaru:

$$x_1 = e^{\frac{2\%i\pi}{5}}; x_2 = e^{\frac{4\%i\pi}{5}}; x_3 = e^{-\frac{4\%i\pi}{5}}; x_4 = e^{-\frac{2\%i\pi}{5}}; x_5 = 1$$



Obr.16: Řešení binomické rovnice

2.3 Komplexní čísla v programu Wolfram Alpha

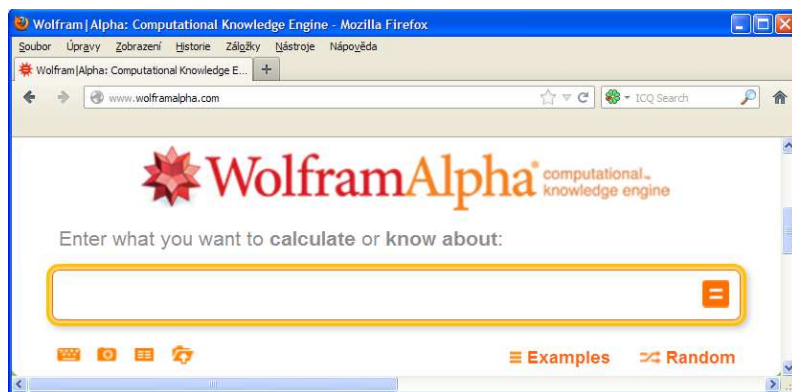
2.3.1 O programu Wolfram Alpha

Aplikace Wolfram Alpha je volně dostupná na <http://www.wolframalpha.com>, vytvořená firmou Wolfram Research. Je vytvořená na základech produktu Mathematica, který využívá pro řešení algebraických úloh, numerických a statistických výpočtů, a vizualizaci výsledků. Výsledek se zobrazí v čitelné a přehledné formě. Často je uveden i postup vedoucí k výsledku [17].

Na (Obr. 17) je znázorněno vstupní okno do aplikace.

2.3.2 Základní operace s komplexními čísly

Komplexní čísla obecně zadáváme do aplikace Wolfram Alpha v tomto tvaru $(b+ai)$, kde i je imaginární část, b je reálná část komplexního čísla. Do aplikace můžeme zadat i komplexní čísla v exponenciálním a goniometrickém tvaru. Aplikace vypíše výsledek, v témže tvaru.



Obr. 17: Vstupní okno aplikace Wolfram Alpha

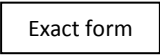
2.3.2.1 Součet a rozdíl komplexních čísel

Příklad 1: Máme vypočítat součet a rozdíl komplexních čísel $z_1 = 6 + 6i$; $z_2 = 4 + 3i$.

Řešení:

a) Pro součet komplexních čísel napíšeme do aplikace tento zápis: „6+6i+4+3i“ a klikneme na klávesu ENTER, nebo levým tlačítkem myši na ikonu rovná se .

Aplikace vypíše výsledek v algebraickém tvaru, určí přibližně hodnotu polárních souřadnic jak v radiánech, tak ve stupních a znázorní výsledek v komplexní rovině.

Když klikneme na ikonu  aplikace vypíše přesné hodnoty polárních souřadnic.

Výsledky:

algebraický tvar: $10 + 9i$,

exponenciální tvar (přibližná hodnota): $r \approx 13,4536 \text{ rad}$; $\theta = 41,9872^\circ$,

exponenciální tvar přesná hodnota: $r = \sqrt{181}$; $\theta = \frac{180 \arctg(\frac{9}{10})}{\pi}^\circ$.

Na (Obr. 18) je ukázáno, co aplikace Wolfram Alpha vypsala:

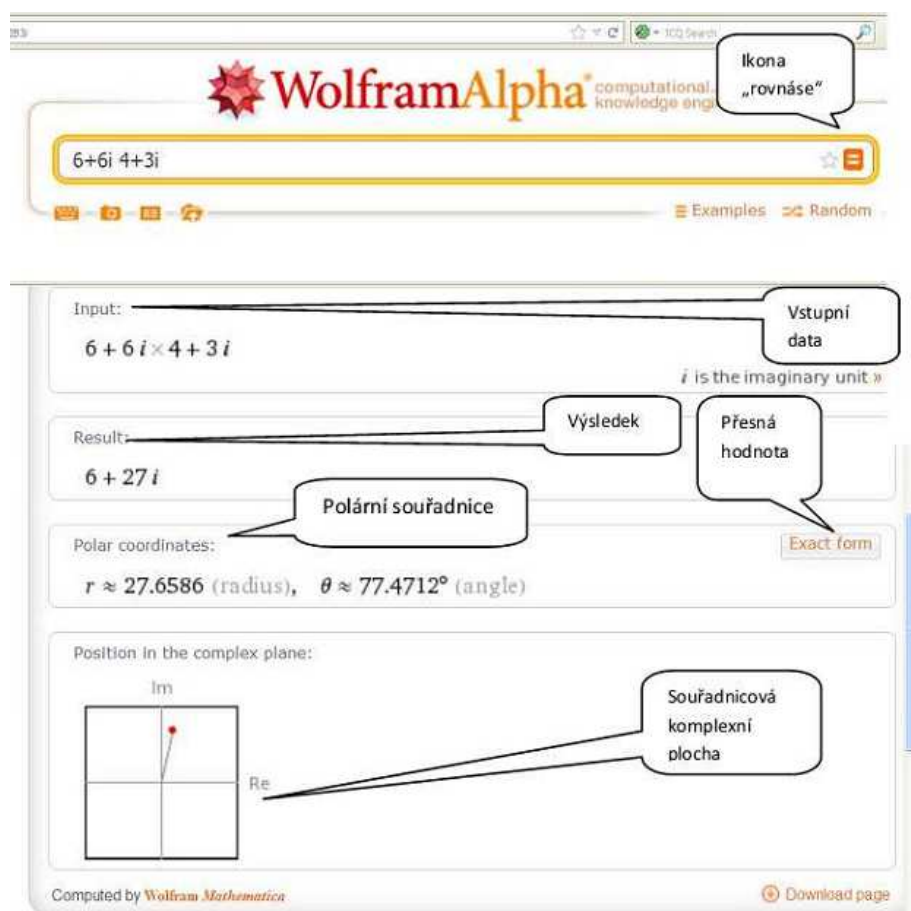
b) Pro rozdíl komplexních čísel napíšeme do programu tento zápis: „ $(6+6i)-(4+3i)$ “, poté postupujeme stejně jako u součtu.

Výsledky:

algebraický tvar: $2+3i$,

exponenciální tvar (přibližná hodnota): $r \approx 3,6055 \text{ rad}$; $\theta = 56,3099^\circ$,

exponenciální tvar přesná hodnota: $r = \sqrt{13}$; $\theta = \frac{180 \arctg(\frac{3}{2})}{\pi}^\circ$.



Obr. 18: Součet v aplikaci Wolfram Alpha

2.3.2.2 Součin a podíl komplexních čísel

Příklad 2: Máme vypočítat součin a podíl komplexních čísel: $z_3 = 5e^{\frac{1}{2}\pi i}$; $z_4 = 4e^{\frac{3}{2}\pi i}$.

Řešení:

a) Při součinu zadáme do aplikace tento tvar: „ $5*e^{i(1/2)*\pi}*4*e^{i(3/2)*\pi}$ “

a klikneme na .

Program výsledek vypíše v exponenciálním tvaru: $20e^{\pi\left(i\left(\frac{1}{2}\right)+i\left(\frac{3}{2}\right)\right)}$.

Na (Obr. 19) je ukázáno, co aplikace Wolfram Alpha vypsala:

b) Při podílu zadáme čísla do programu takto: „ $5*e^{i(1/2)*\pi}/4*e^{i(3/2)*\pi}$ “

a klikneme na .

Program výsledek vypíše v exponenciálním tvaru $\frac{5}{4}e^{\pi\left(i\left(\frac{1}{2}\right)+i\left(\frac{3}{2}\right)\right)}$

The screenshot shows the Wolfram Alpha interface. At the top, the input field contains the expression $5e^{i(1/2)\pi} \cdot 4e^{i(3/2)\pi}$. Below the input field, the exact result is displayed as $20e^{\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)}$. Underneath, the alternate form is shown as a large fraction involving square roots and π terms. Three callouts are present: one pointing to the input field labeled 'Vstupní data', one pointing to the exact result labeled 'Výsledek', and one pointing to the alternate form labeled 'Alternativní zápis'.

Obr. 19: Součin v aplikaci Wolfram Alpha

2.3.2.3 Řešení binomických rovnic.

Příklad 3: Máme najít kořeny binomické rovnice $x^5 - 1 = 0$.

Řešení:

Do programu napíšeme tento zápis $x^5-1=0$ a klikneme na .

Program znázorní na kartézských souřadnicích funkci $x^5 - 1$,

zobrazí alternativní zápis $x^5 = 1$; nebo $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$;

vypíše reálný kořen $x=1$, a komplexní kořeny v tomto tvaru:

$$x = -\sqrt{-1}; x = (-1)^{2/5}; x = (-1)^{2/5}; x = -(-1)^{2/5}; x = (-1)^{4/5}$$

a znázorní kořeny v komplexní rovině.

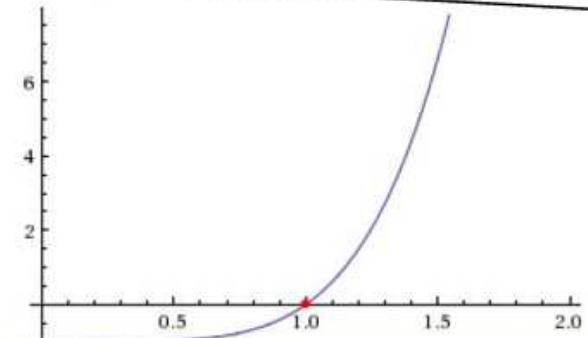
Na (Obr. 20) je ukázáno, co aplikace Wolfram Alpha vypsala:

 **WolframAlpha** computational knowledge engine

$x^5 - 1 = 0$

Input:
 $x^5 - 1 = 0$

Root plot:



Root plot: $x^5 - 1$

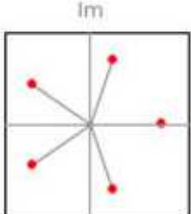
$x^5 = 1$
 $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

Real solution:
 $x = 1$

Complex solutions:

$x = -\sqrt[5]{-1}$
 $x = (-1)^{2/5}$
 $x = -(-1)^{3/5}$
 $x = (-1)^{4/5}$

Roots in the complex plane:



Obr. 20: Řešení binomické rovnice v aplikaci Wolfram Alpha

2.3.2.4 Řešení algebraických rovnic

Příklad 4: Máme najít komplexní a reálné kořeny algebraické rovnice

$$x^8 + x^7 + 3x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 = 0.$$

Řešení:

Do programu napíšeme tento tvar rovnice „ $x^8+x^7+3*x^5+x^4+2*x^3-x^2-x+1=0$ “ a klikneme na .

Program znázorní funkci $x^8 + x^7 + 3x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$ na ose kartézských souřadnic; zobrazí alternativní zápis, vypíše reálné a komplexní kořeny a znázorní všechny kořeny v komplexní rovině.

Výsledky:

Reálné kořeny: $x \approx -1,87316; x \approx -0,73772$,

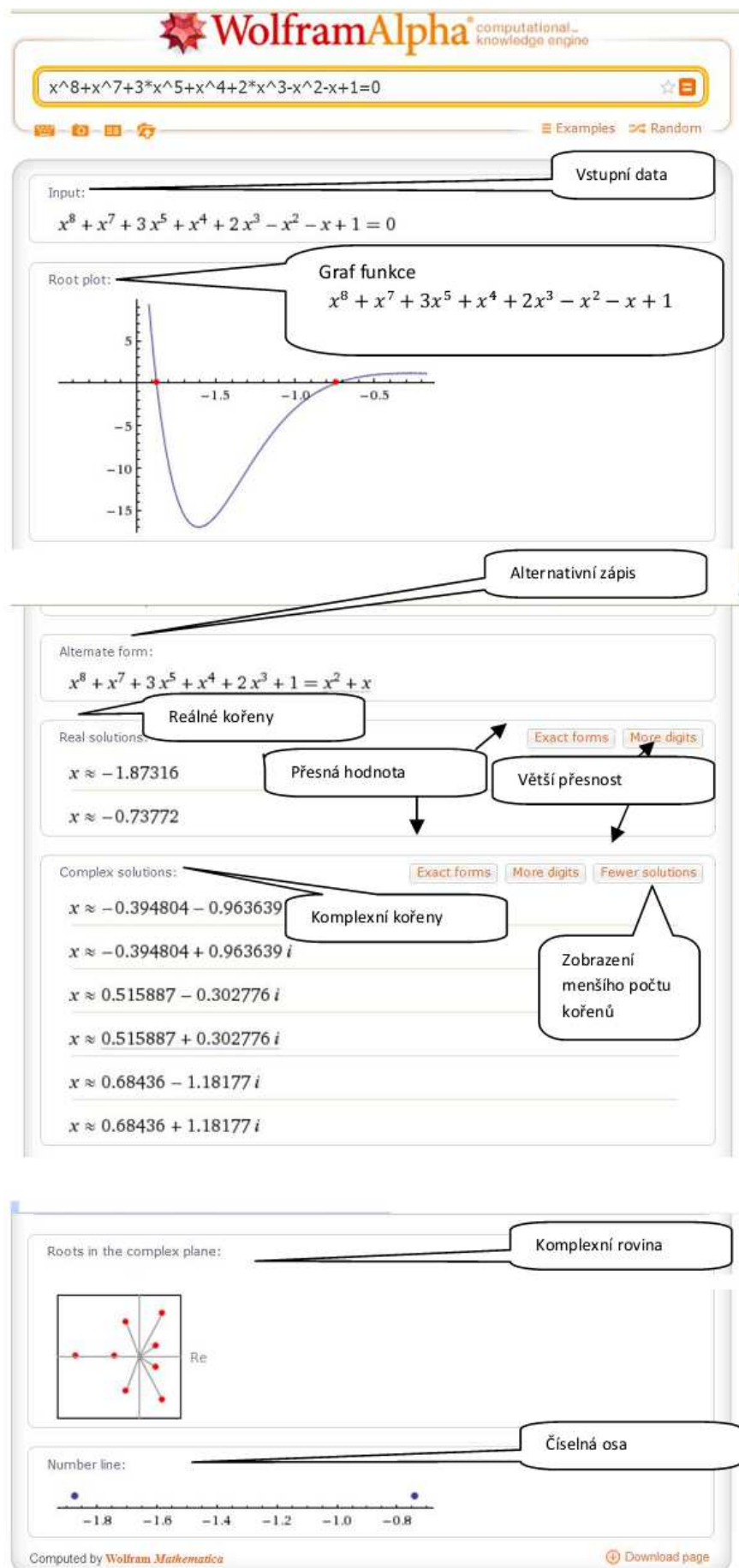
komplexní kořeny:

$$x = -0,39480 - 0,96364i; x = 0,39480 + 0,96364i;$$

$$x = 0,51859 - 0,30278i; x = 0,51859 + 0,30278i;$$

$$x = 0,68436 - 1,18177i, x = 0,68436 + 1,18177i.$$

Na (Obr. 21) je ukázáno, co aplikace Wolfram Alpha vypsala.



Obr. 21: Řešení algebraické rovnice v aplikaci Wolfram Alpha

3 Užití komplexních čísel

3.1 Komplexní čísla v geometrii

Při řešení některých geometrických úloh, zejména planimetrických, například úlohy s rovnostrannými trojúhelníky, dělení úseček do daného poměru, rotace (otočení) bodu, můžeme použít komplexní čísla, která usnadní postup řešení.

Existuje ale mnoho geometrických úloh, u kterých je řešení pomocí komplexních čísel velice složité, například úlohy s více kružnicemi [25].

Tato kapitola by měla čtenáře seznámit s řadou geometrických úloh, jejichž řešení pomocí komplexních čísel je méně náročné, než řešení těchto úloh běžným geometrickým postupem.

Než se pustíme do jednotlivých příkladů, ujednotme si značení.

Pokud budeme psát bod $Z(z)$, $C(c)$, $F(f)$, $X(x)$, atd., bude to znamenat, že máme v rovině body Z , C , F , X , kterým přísluší komplexní čísla z , c , f , x . Každému komplexnímu číslu z odpovídá bod v Gaussově rovině a každému bodu v rovině odpovídá komplexní číslo.

Pokud zapíšeme komplexní číslo $z=a+bi$, pak bod $Z(z)$ má souřadnice $[a,b]$.

3.1.1 Dělení úseček do daného poměru

Nechť bod $A(a)$ a $B(b)$ tvoří přímku AB . Bod $Z(z)$ leží na přímce AB právě tehdy, když platí:

$$Z(z) \in AB \Leftrightarrow z = ua + (1 - u)b; u \in \mathbb{R}.$$

O těchto bodech můžeme říci, že jsou kolineární.

Jestliže parametr $u \in (0,1)$, pak body $A(a)$, $B(b)$ tvoří úsečku AB a bod $Z(z)$ leží na této úsečce. Tomuto zápisu se říká konvexní zápis.

Podle konvexního zápisu pro bod $Z(z)$ ležící na úsečce AB , který dělí tuto úsečku v poměru $|AZ|:|ZB| = m:n$ platí podle [25] vztah

$$z = \frac{n}{m+n}a + \frac{m}{m+n}b.$$

Podle [1] můžeme definovat kolineární body pomocí vektorového zápisu. $Z \in AB$ právě tehdy, když vektory $a-z$ a $a-b$ jsou až na násobek stejné, neboli

$$Z \in AB \Leftrightarrow k = \frac{a-z}{a-b}, k \in \mathbb{R}.$$

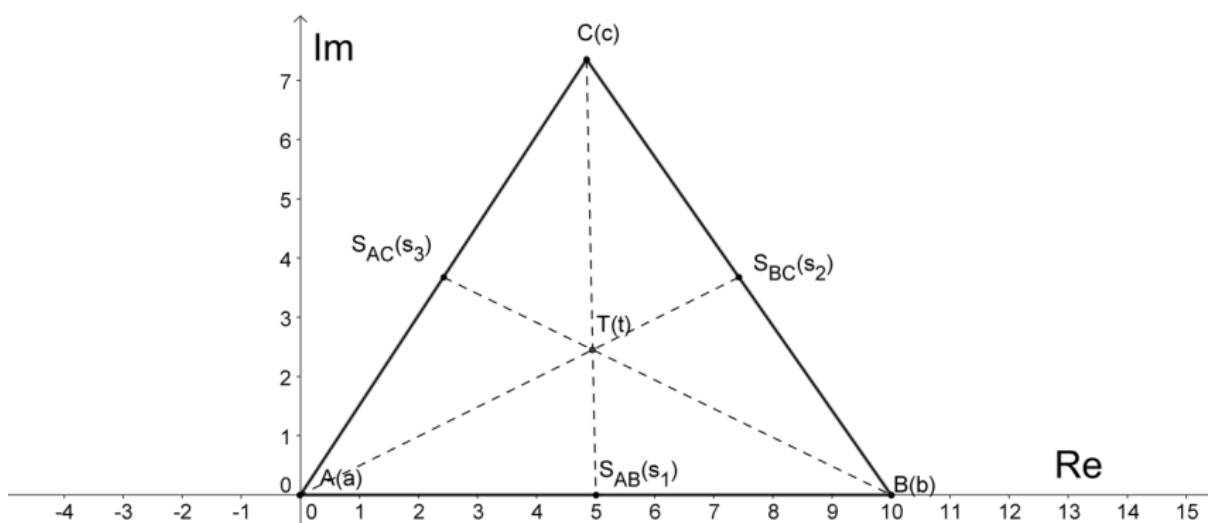
Jestliže $k \in (0,1)$, pak $Z(z)$ leží na úsečce AB a tyto body jsou v pořadí $A(a)$, $Z(z)$, $B(b)$.

Příklad 1: Nekolineární body $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ tvoří libovolný trojúhelník. Odvoďte souřadnice těžiště $T(t)$ tohoto trojúhelníka tak, že když spojíme středy stran $S_{AC}(s_3)$, $S_{BC}(s_2)$ a $S_{AB}(s_1)$ s protilehlými vrcholy, budou mít úsečky AS_{BC} , BS_{AC} , CS_{AB} společný průsečík $T(t)$ (těžiště).

Řešení:

Uvedené tvrzení můžeme verifikovat pomocí programu Geograbra (Obr. 22).

Trojúhelník ABC znázorníme do Gaussovy roviny. Určíme středy stran $S_{AC}(s_3)$, $S_{BC}(s_2)$ a $S_{AB}(s_1)$. Středy spojíme s protilehlými vrcholy. Úsečky AS_{BC} , BS_{AC} , CS_{AB} tvoří společný průsečík $T(t)$.



Obr. 22: Trojúhelník ABC s těžištěm T znázorněný v Gaussově rovině

Spojme přímkou $z(t)$ dva libovolné body $A(a)$, $B(b)$. Přímka má rovnici

$$z(t) = ta + (1 - t)b; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Když parametr $t \in (0,1)$, dostaneme rovnici úsečky AB .

Pro střed úsečky $S_{AB}(s_1)$ platí:

$$s_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Spojme bod $S_{AB}(s)$ s třetím bodem $C(c)$ (vrcholem). Dostaneme rovnici přímky

$$z(t) = tc + (1 - t)\frac{(a+b)}{2}.$$

Pro $t = \frac{1}{3}$ je

$$z\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{(a+b+c)}{3}.$$

Spojíme-li středy stran $S_{AC}(s_3)$, $S_{BC}(s_2)$ a $S_{AB}(s_1)$ s protilehlými vrcholy, budou mít úsečky AS_{BC} , BS_{AC} , CS_{AB} společný průsečík $T(t)$ (těžiště).

Poznámka:

Z Obr.22 vyplývají další vlastnosti těžiště trojúhelníka:

- 1) Těžnice rozdělují trojúhelník na šest stejných částí. Těžiště T je takový bod, že trojúhelníky ABT , BCT , ACT mají stejnou plochu.
- 2) Těžiště rozděluje každou těžnici na dva díly v poměru $2:1$, přitom vzdálenost těžiště od vrcholu je dvojnásobek vzdálenosti od středu protější strany [20].
- 3) Pokud jsou v trojúhelníku dvě těžnice stejné, pak je trojúhelník rovnoramenný [20].
- 4) Vzdálenost těžiště od středu kterékoliv strany je rovna jedné třetině délky příslušné těžnice. Označíme-li $|AS_{BC}| = t_a$, $|BS_{AC}| = t_b$, $|CS_{AB}| = t_c$, kde t_a, t_b, t_c jsou těžnice trojúhelníka, platí:

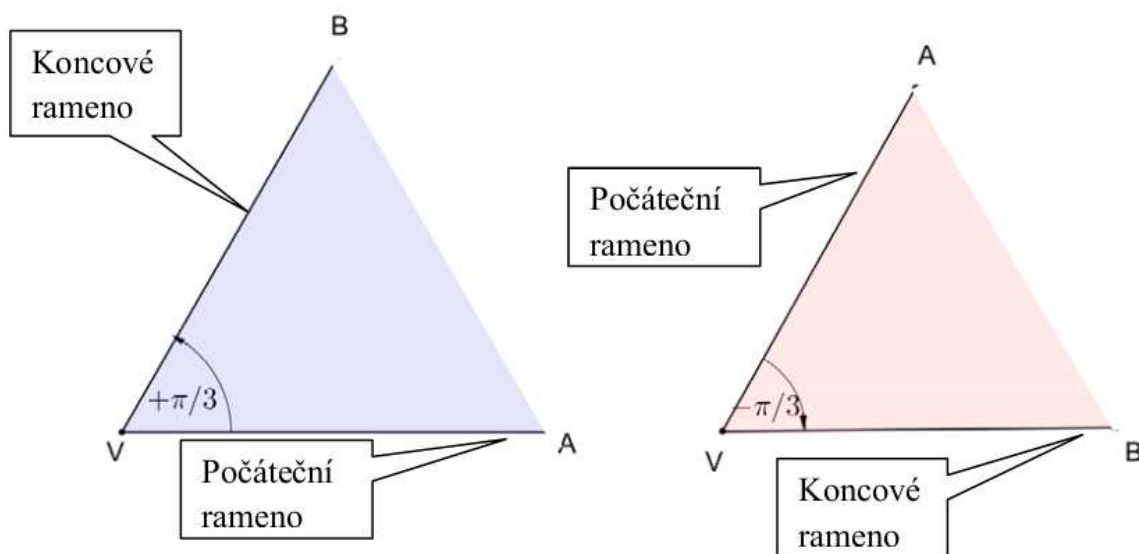
$$|TS_{BC}| = \frac{1}{3}t_a, |TS_{AC}| = \frac{1}{3}t_b, |TS_{AB}| = \frac{1}{3}t_c \text{ [8].}$$

3.1.2 Měření úhlů

K měření úhlů (konvexních i nekonvexních) se zavádí míra zvaná velikost úhlu: Zvolí se určitý úhel, jehož velikost se vezme za jednotku velikosti úhlu; tento úhel se nazývá jednotkový úhel. Libovolnému úhlu se pak přiřazuje velikost úhlu ve tvaru nezáporného násobku zvolené jednotky velikosti úhlu. Postup měření úhlů popisuje Polák ([8], s. 419).

Orientovaným úhlem AVB ($\widehat{AVB}$) nazýváme podle [14] uspořádanou dvojici polopřímek VA , VB se společným počátkem V , kde VA je **počáteční rameno**, VB **koncové rameno** a bod V **vrchol orientovaného úhlu**.

Při $VA \neq VB$ je $\widehat{AVB} \neq \widehat{BVA}$. Otáčí-li se počáteční rameno VA kolem vrcholu V tak, aby splynulo s koncovým ramenem **ve směru pohybu hodinových ručiček**, bude hodnota úhlu **záporná**, v opačném případě kladná, (obr. 23).



Obr. 23: Orientace úhlu (obrázek je překreslen podle ([14], s. 44)

Příklad 1: Mějme čtyři shodné čtverce, které jsou umístěny vedle sebe (Obr. 24). Délka strany každého z daných čtverců se rovná jednotce délky. Určete součet velikostí vyznačených úhlů.

Řešení

Čtverce znázorníme do Gaussovy roviny podle (Obr. 25). Body CH, H, G, F jsou obrazy komplexních čísel $CH(z_1), H(z_2), G(z_3), F(z_4)$ s argumenty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

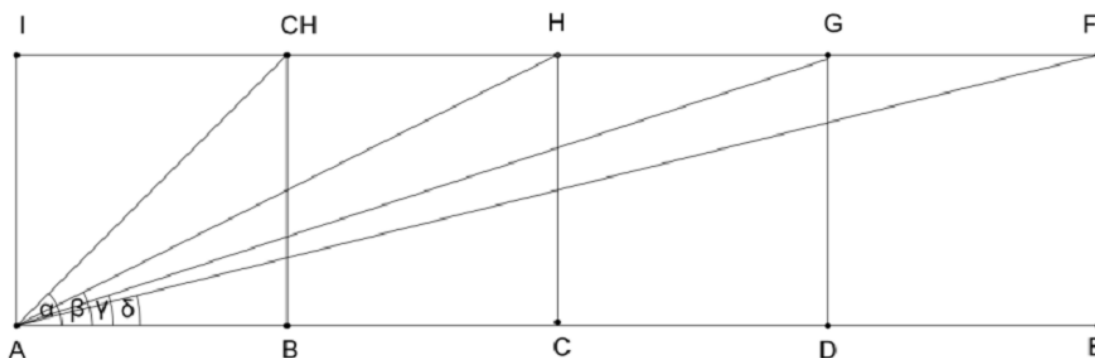
$$z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + i, z_3 = 3 + i, z_4 = 4 + i.$$

Argument součinu komplexních čísel je roven součtu jejich argumentů.

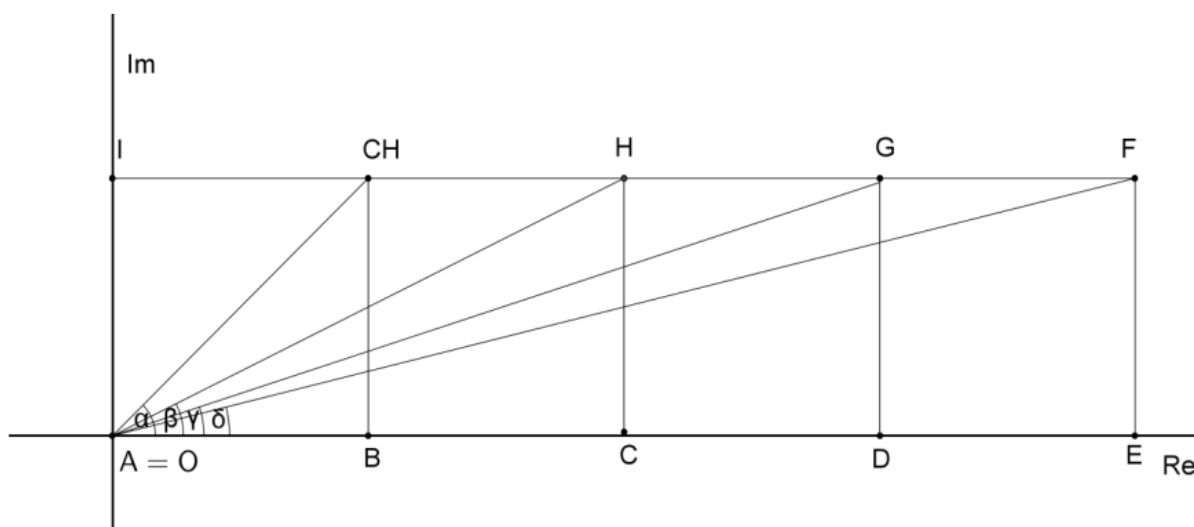
Takže číslo $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4$ má argument $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = (1 + i) \cdot (2 + i) \cdot (3 + i) \cdot (4 + i) = -10 + 40i$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 104,036^\circ.$$



Obr. 24: Čtyři shodné čtverce, které jsou umístěny vedle sebe



Obr. 25: Čtyři shodné čtverce, umístěny vedle sebe, jsou znázorněny v Gaussově rovině

Poznámka:

- a) Příklad 3 se dá uplatnit i pro více shodných čtverců umístěných vedle sebe.
 b) Speciální případ je, když jsou 3 čtverce umístěny vedle sebe. Součet úhlů α, β, γ je 90° .
 c) Příklad se třemi shodnými čtverci umístěnými vedle sebe řeší Emil Calda v učebnici Matematika pro gymnázia, komplexní čísla na straně 119 až 121.

3.1.3 Úhel mezi dvěma úsečkami

V komplexní rovině mějme dány čtyři body $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, kde $A \neq B$ a $C \neq D$. Body $A(a)$, $B(b)$ tvoří úsečku AB , body $C(c)$, $D(d)$ tvoří úsečku CD . Pro úhel, který svírají úsečky AB a CD v komplexní rovině bude podle [1] platit tento vztah

$$\arg \frac{a-b}{c-d}.$$

Poznámka:

Budeme vlastně zjišťovat, jaký úhel svírají vektory čísel $a-b$ a $c-d$.

Pokud $(a-b)/(c-d) \in \mathbb{R}$, tj. $\arg \frac{(a-b)}{(c-d)} = 0$, pak jsou podle [25] obě úsečky rovnoběžné, protože svírají orientovaný úhel 0° nebo 180° .

Pokud nastane, že $(a-b)/(c-d)$ je reálným násobkem čísla i , tj. $\Re((a-b)/(c-d)) = 0$, kde $\Re$ je reálná část, pak úsečky AB a CD jsou na sebe kolmé. Pro kolmost vektorů $a-b$ a $c-d$ nás zajímá jen reálná část podílu, tj.

$$\frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} [25].$$

Příklad 1: Mějme body $A(a)$, $B(b)$, $O(o)$. Vypočítejte velikost orientovaného úhlu $\widehat{AOB}$ a $\widehat{BOA}$ těchto komplexních čísel $a = 6 + 4i$; $b = 4 - i$. Bod $O(o)$ je počátek.

Řešení:

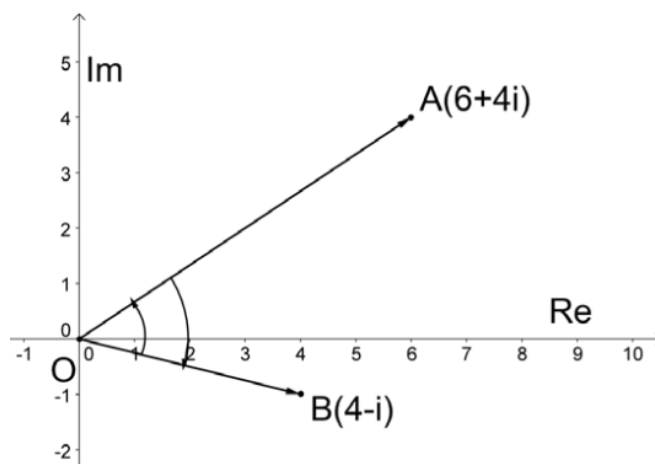
a) Řešení pomocí komplexních čísel:

$$\widehat{AOB} = \arg \left(\frac{a}{b} \right) = \arg \left(\frac{6+4i}{4-i} \right) = \arg \left(\frac{20}{17} - \frac{22}{17}i \right) = 47,7263^\circ,$$

$$\widehat{BOA} = \arg \left(\frac{b}{a} \right) = \arg \left(\frac{4-i}{6+4i} \right) = \arg \left(\frac{5}{13} - \frac{11}{26}i \right) = -47,7263^\circ.$$

b) grafické řešení (Obr. 26):

Využijeme programu GeoGebra. Do programu zadáme komplexní čísla $z_1 = 6 + 4i$, $z_2 = 4 - i$ jako vektory. Poté vyznačíme podle počátku O úhly kladně a záporně orientované.

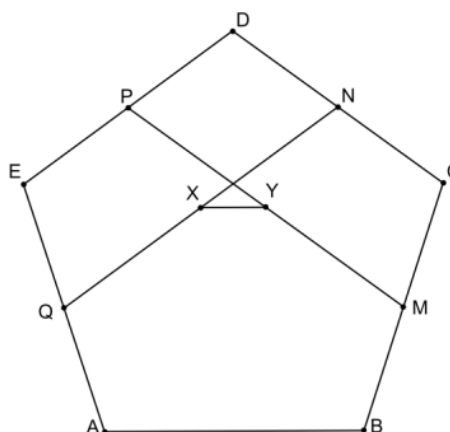


Obr. 26: Grafické řešení příkladu 1

Příklad 2: Mějme konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Označme postupně M, N, P, Q, X a Y středy úseček BC, CD, DE, EA, QN a PM . Dokažte, že $XY \parallel AB$. (Převzato [25]).

Řešení:

Uvedené tvrzení, že $XY \parallel AB$, můžeme verifikovat pomocí programu Geogebra (Obr. 27).



Obr. 27: Znázornění příkladu 2

Podle dohody, malá písmena udávají souřadnice příslušných velkých bodů. Pro souřadnice středů platí:

$$m = \frac{1}{2}(b + c); n = \frac{1}{2}(c + d); p = \frac{1}{2}(d + e); q = \frac{1}{2}(e + a).$$

$$x = \frac{1}{4}(c + d + e + a); y = \frac{1}{4}(b + c + d + e).$$

Aby $XY \parallel AB$, musí být podíl $(x - y)/(a - b)$ reálné číslo.

$$\frac{x-y}{a-b} = \frac{a-b}{4(a-b)} = \frac{1}{4},$$

je $XY \parallel AB$.

3.1.4 Otočení (rotace) kolem středu v rovině

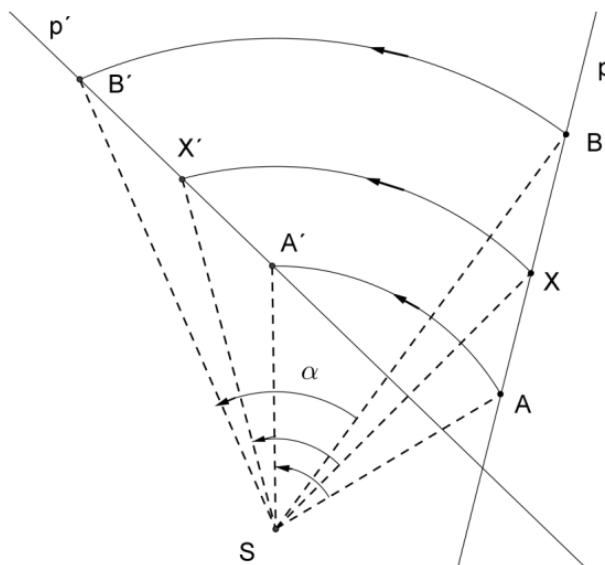
Otočení (rotace) kolem středu S o úhel $0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ v daném (kladném, resp. záporném) smyslu je přímá shodnost, která přiřazuje bodu S týž bod $S'=S$ a každému bodu $X \neq S$ roviny přiřazuje takový obraz X' , že platí (Obr. 28).

a) bod X' leží na kružnici o středu S a poloměru $|SX|$,

b) polopřímka SX' se získá otáčením polopřímky SX o úhel otočení $X'SX$ velikosti α v daném smyslu (kladném, tj. proti pohybu hodinových ručiček, nebo záporném, tj. souhlasně s pohybem hodinových ručiček).

Otočení je jednoznačně určeno **středem otočení** S , velikostí **úhlu otočení** α a daným (kladným, resp. záporným) **smyslem otočení**. Úhel otočení je orientovaný úhel. Samodružným bodem otočení je buď právě jen střed otočení S (je-li velikost úhlu otočení $\alpha \neq 360^\circ$), anebo všechny body jsou samodružné (je-li $\alpha = 360^\circ$). Otočení buď nemá žádné samodružné přímky (je-li $\alpha \neq 180^\circ$ a $\alpha \neq 360^\circ$), nebo jsou samodružné všechny přímky procházející středem otočení S (je-li $\alpha = 180^\circ$), nebo jsou samodružné všechny přímky roviny (je-li $\alpha = 360^\circ$).

Takto popisuje otočení kolem středu Polák ([8], s. 466).



Obr. 28: Znázornění rotace bodů A, X, B . (Obrázek je překreslen podle ([8], s. 465))

3.1.5 Podobnost trojúhelníků

Dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ se nazývají podobné trojúhelníky, právě když existuje takové kladné číslo k (zvané koeficient podobnosti), že platí

$$|A'B'| = k|AB|, |B'C'| = k|BC|, |A'C'| = k|AC|$$

V podobných trojúhelnících $ABC, A'B'C'$ jsou odpovídající si úhly shodné [8]. (obr. 29).

Věty o podobnostech trojúhelníka:

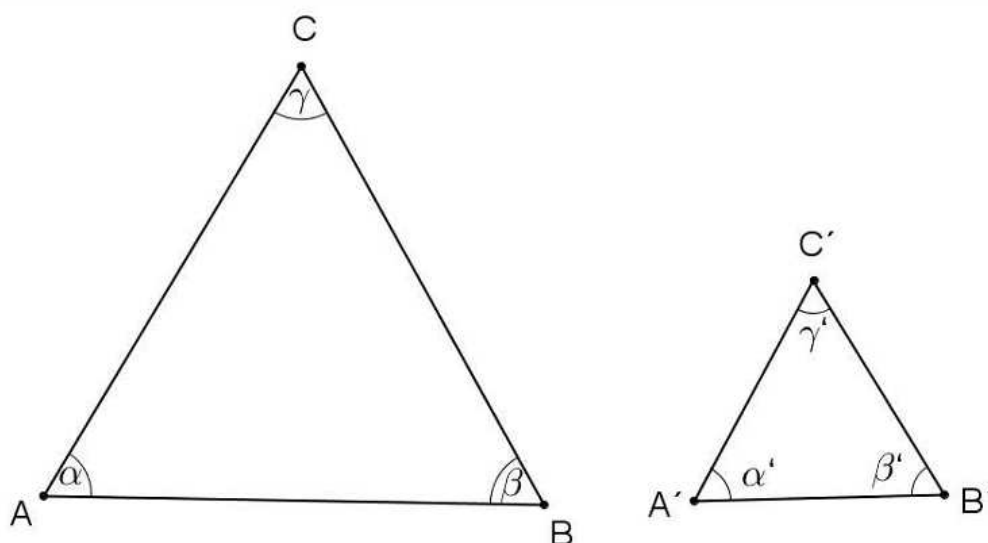
Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže

- a) se shodují ve dvou úhlech (věta *uu*),
- b) jsou si rovny poměry délek dvou stran a jsou-li shodné úhly jimi sevřené (věta *sus*),
- c) jsou si rovny poměry délek dvou stran a jsou-li shodné úhly proti větší z nich (věta *ssu*).

Z těchto vět plyne speciálně pro pravoúhlé, rovnoramenné a rovnostranné trojúhelníky věta:

Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom ostrém úhlu nebo v poměru délek dvou odpovídajících si stran. Dva rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v úhlu při základně nebo v úhlu při vrcholu. Každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou podobné.

Věty o podobnostech trojúhelníka jsou převzaty ([8], s. 437).



Obr. 29: Dva podobné trojúhelníky

Poznámka:

Pro podobnost trojúhelníků v komplexní rovině platí:

Máme-li 6 bodů $A_1(a_1), A_2(a_2), A_3(a_3), B_1(b_1), B_2(b_2), B_3(b_3)$ v komplexní rovině, pak trojúhelníky $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$ jsou podobné, mají-li stejnou orientaci a právě když platí

$$\frac{|A_1A_2|}{|A_1A_3|} = \frac{|B_1B_2|}{|B_1B_3|}$$

Podle dohody, malá písmena udávají souřadnice příslušných velkých bodů, pak platí:

$$\frac{|a_2 - a_1|}{|a_3 - a_1|} = \frac{|b_2 - b_1|}{|b_3 - b_1|} \Leftrightarrow \arg \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \arg \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1} \Leftrightarrow \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1} \cdot [1]$$

Příklad1: Mějme dva rovnoramenné trojúhelníky $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$, kde malá písmena udávají souřadnice příslušných velkých bodů

$$a_1 = 0; a_2 = 2; a_3 = 1 + 2i; b_1 = 4; b_2 = 8; b_3 = 6 + 4i.$$

Dokažte, že trojúhelníky jsou podobné.

Řešení:

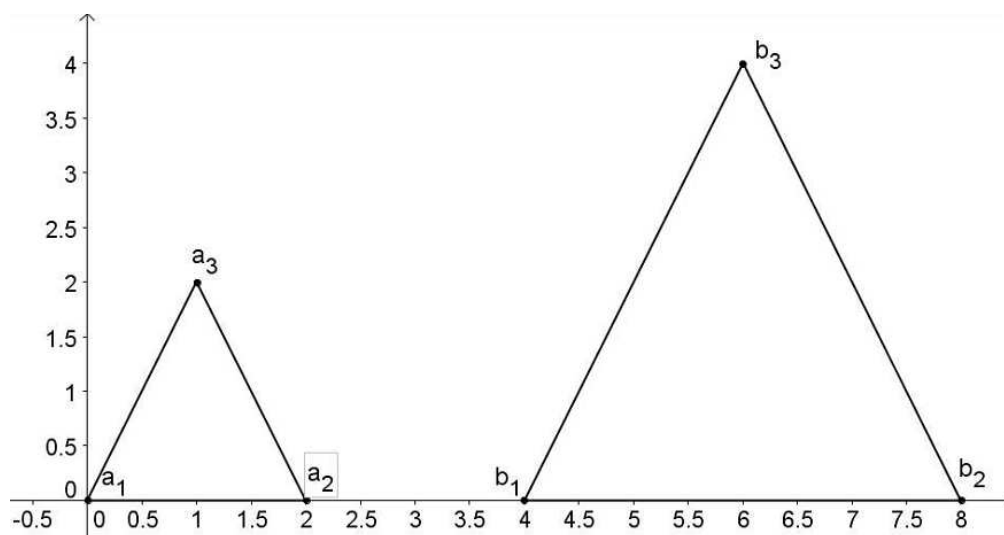
Příklad můžeme znázornit v GeoGebře (Obr.30).

Užijeme vztahu pro podobnost trojúhelníků v komplexní rovině $\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{2 - 0}{1 + 2i - 0} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i,$$

$$\frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1} = \frac{8 - 4}{6 + 4i - 4} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Požadovaná rovnost platí. Trojúhelníky jsou podobné.



Obr. 30: Znázornění příkladu 1

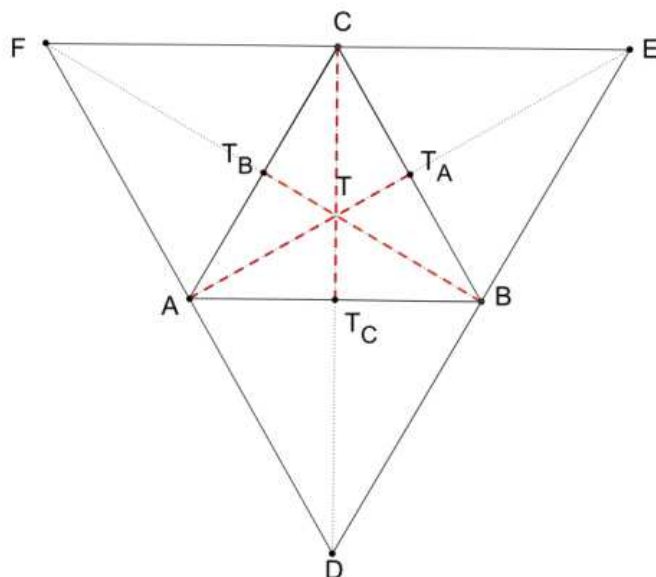
Příklad 2: Na stranách AB , BC , CA trojúhelníku ABC narýsujeme podobné trojúhelníky ADB , BEC , CFA , mající stejnou orientaci. Dokažte, že trojúhelníky ABC a DEF mají stejné těžiště.

Převzato z ([1], s. 68).

Řešení:

Příklad můžeme znázornit v GeoGebře (obr. 31).

Narýsujeme v programu trojúhelník ABC (pro jednoduchost – rovnostranný). Narýsujeme trojúhelníky ADB , BEC , CFA , které jsou podobné a mají stejnou orientaci jako trojúhelník ABC . Na trojúhelníku ABC a DEF vyznačíme těžiště. Protože středy stran trojúhelníku DEF jsou právě body A , B , C , tak trojúhelníky ABC a DEF mají stejné těžiště.



Obr. 31: Znázornění příkladu 2

Podle dohody označme malými písmeny souřadnice bodů označené velkými písmeny. Trojúhelníky ADB , BEC , CFA jsou podobné se stejnou orientací, pokud platí

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{e-b}{c-b} = \frac{f-c}{a-c} = z.$$

Vyjádříme-li si souřadnice d, e, f , dostaneme:

$$d = a + (b - a)z; e = b + (c - b)z; f = c + (a - c)z.$$

Pak podle definice těžiště trojúhelníka bude platit

$$\frac{d+c+f}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Dospěli jsme k závěru, že trojúhelníky ABC a DEF mají stejné těžiště.

3.1.6 Rovnostranné trojúhelníky

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC , kladně orientovaný, v komplexní rovině. Jestliže podle dohody, malá písmena a, b, c označují souřadnice bodů A, B, C (Obr. 32), pak pro rovnostranný trojúhelník platí tyto vztahy [1]:

- 1) $|a - b| = |b - c| = |c - a|$.
- 2) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$;
- 3) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{c-b}{a-b}$;
- 4) $\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b} + \frac{1}{z-c} = 0$, kde $z = \frac{a+b+c}{3}$ (Obr. 32);

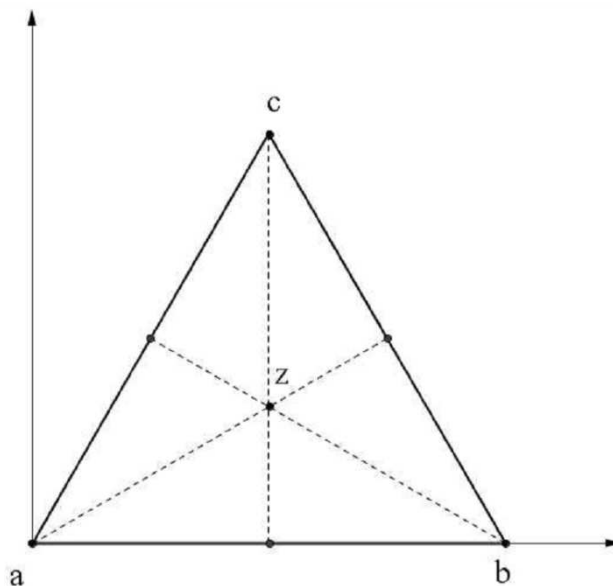
$$5) (a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c)(a + \varepsilon^2 b + \varepsilon c) = 0, \text{ kde } \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3};$$

$$6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b & c & a \end{vmatrix} = 0$$

$$7) c - a = \varepsilon(b - a), \text{ kde } \varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3};$$

$$8) b - a = \varepsilon(c - a), \text{ kde } \varepsilon = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3};$$

$$9) a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c = 0, \text{ kde } \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$



Obr. 32 Znázornění trojúhelníku ABC pomocí souřadnic v komplexní rovině

Poznámka:

- Pro rovnostranný trojúhelník ABC podle [1] platí $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b & c & a \end{vmatrix} = 0$. Vypočítáme-li hodnotu

tohoto determinantu, tj.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b & c & a \end{vmatrix} = ba + cb + ac - (a^2 + c^2 + b^2),$$

pak můžeme postupně dokázat bod (5), (4), (3), (2), (1). Důkaz je naznačen v [1].

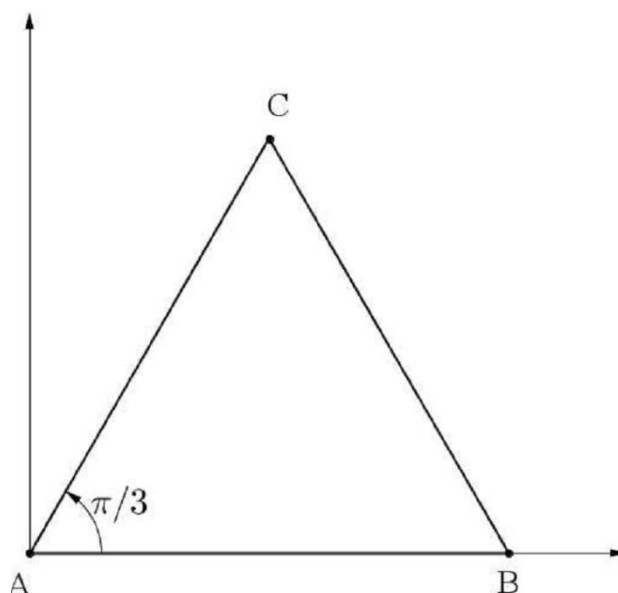
- Body (7) až (9) dokážeme pomocí rotace.

Trojúhelník ABC je rovnostranný a kladně orientovaný, jestliže bod C je získán z bodu B rotací kolem bodu A přes úhel $\frac{\pi}{3}$. (Obr. 33).

Napišeme-li místo bodů A, B, C jejich souřadnice a, b, c , pak dostaneme pro souřadnici c :

$$c = a + \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (b - a).$$

Tím je dokázán bod (7).



Obr. 33: Znázornění důkazu bodu (7).

Rotace bodu A přes úhel $\frac{5\pi}{3}$ zobrazí bod C na bod B.

$$c = a + \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) (b - a) = a + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (b - a) = a \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + b \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Tím je dokázán bod (8).

Bod (9) dokážeme takto:

$$\begin{aligned} a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c &= a + \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) b + \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 c = \\ &= a + \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) b + \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left[\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) b \right] = \\ &= a + \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) b - a + \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) b = 0. \end{aligned}$$

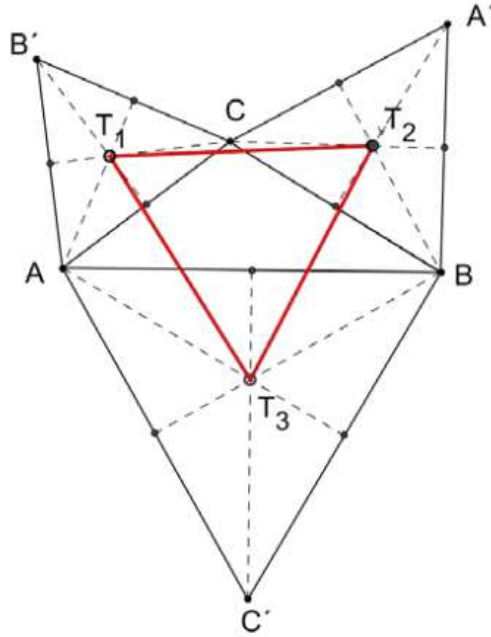
Vztah (9) je cyklický, tzn. $a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c = 0$; $b + \varepsilon a + \varepsilon^2 c = 0$; $c + \varepsilon b + \varepsilon^2 a = 0$.

Příklad 1 Mějme trojúhelník ABC. K trojúhelníku ABC narýsujeme rovnostranné trojúhelníky $AC'B$, $BA'C$ a $CB'A$. Dokažte, že těžiště trojúhelníků $AC'B$, $BA'C$ a $CB'A$ jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka. Převzato z ([1], s. 71).

Řešení:

Příklad můžeme znázornit v programu GeoGebra (Obr. 34).

V programu narýsujeme libovolný trojúhelník ABC. Narýsujeme rovnostranné trojúhelníky $A'BC$, $AB'C$, ABC' . V trojúhelnících $A'BC$, $AB'C$, ABC' vyznačme, těžiště T_1, T_2 a T_3 . Z těžišť trojúhelníků $A'BC$, $AB'C$, ABC' , vytvoříme trojúhelník $T_1T_2T_3$.



Obr. 34: Znázornění příkladu 1

Vrcholy A, B, C, A', B', C' přepíšeme, podle dohody na souřadnice a, b, c, a', b', c' .

Užijeme vztahu (9) pro rovnostranný trojúhelník $a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c = 0$,

kde $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ a a, b, c jsou příslušné souřadnice vrcholů kladně orientovaného rovnostranného trojúhelníka ABC v komplexní rovině (Obr. 32).

Vztah (9) platí i pro souřadnice a', b', c' . Vztah (9) je cyklický.

To znamená, že:

$$a + c'\varepsilon + b\varepsilon^2 = 0; b + a'\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0; c + b'\varepsilon + a\varepsilon^2 = 0,$$

Těžiště trojúhelníků $A'BC, AB'C, ABC'$, mají souřadnice:

$$t_1 = \frac{1}{3}(a + b' + c); t_2 = \frac{1}{3}(a' + b + c); t_3 = \frac{1}{3}(a + b + c').$$

Musíme ověřit, zda platí

$$t_3 + t_2\varepsilon + t_1\varepsilon^2 = 0$$

$$\begin{aligned} 3(t_3 + t_2\varepsilon + t_1\varepsilon^2) &= (a + b + c') + (a' + b + c)\varepsilon + (a + b' + c)\varepsilon^2 = \\ &= (b + a'\varepsilon + c\varepsilon^2) + (c + b'\varepsilon + a\varepsilon^2)\varepsilon + (a + c'\varepsilon + b\varepsilon^2)\varepsilon^2 = 0 \end{aligned}$$

Těžnice trojúhelníků $A'BC, AB'C, ABC'$, jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka.

Příklad 2 - Fundamental Theorem of 3-Bar Motion

Tuto větu objevil v r. 1930 M. Gardner. Tato věta popisuje spojení 15 tyčí a 10 otáčivých kloubů. Nejjednodušší sestava je ta, která je zobrazena pohybem tyčí a na trojúhelníku ABC s bodem 7 jsou přes tento bod narysovány 3 přímky rovnoběžné se stranami trojúhelníku. Průsečíky jsou označeny 1,2,3,4,5 a 6. Trojúhelníky 127, 348, 567 jsou všechny podobné trojúhelníku ABC , a vznikly tam i tři rovnoběžníky. Zatímco se celá soustava může měnit, trojúhelníky 127, 347, 567 zůstávají ve stejném tvaru a velikosti. V deformaci rovnoběžníky zůstávají vždy rovnoběžníky, protože jejich protější strana zůstává stejná, ale úhel se mění [18].

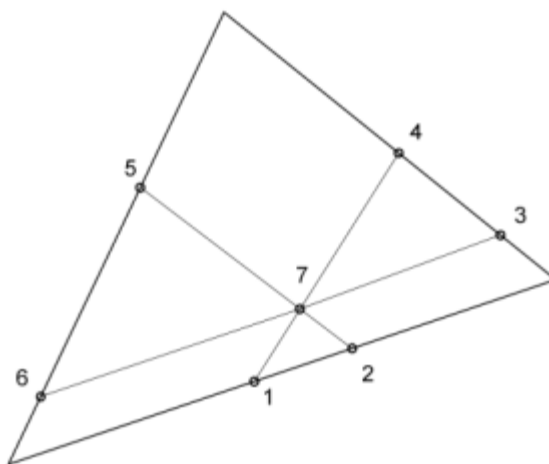
Je mnoho videí, které znázorňují tento případ. Níže uvádím dva odkazy na YouTube.

<https://www.youtube.com/watch?v=KUjMfZLEKv4>

<https://www.youtube.com/watch?v=As5JSV9Hgtk>

Fundamental Theorem of 3-Bar Motion tvrdí:

Trojúhelník ABC může měnit velikost, ale vždy zůstává jeho původní tvar (pokud dva vrcholy trojúhelníku ABC jsou pevné, třetí se ani nemůže pohybovat). Trojúhelník ABC vždy zůstává podobný vůči malým trojúhelníkům 127, 347, 567 [18]. (Obr. 35).

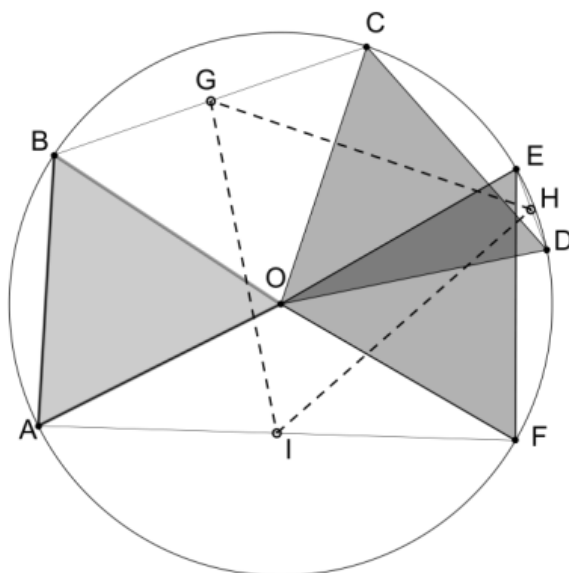


Obr. 35: Popisuje Fundamental Theorem of 3-Bar Motion

(obrázek je překreslen podle [18])

Věta „**Asymmetric Propeller**“ se v průběhu času objevila v několika variantách, postupně více obecněji. První se zabývala třemi shodnými rovnostrannými trojúhelníky OAB , OCD , OEF . Tvrdila, že středy úseček BC , DE , FA tvoří další rovnostranný trojúhelník [18].

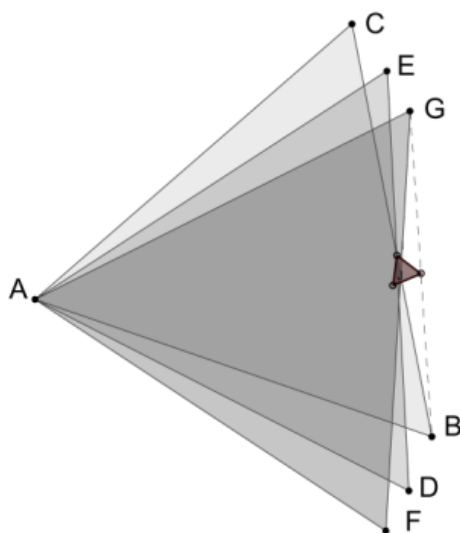
(Obr. 36).



Obr. 36: Znáznorněny tři shodné rovnostranné trojúhelníky a rovnostranný trojúhelník GHI vzniklý ze středů stran BC, DE, FA

V roce 1973, si Bankoff, Erdős a Klamkin všimli, že trojúhelníky nemusí být shodné. Pokud tři trojúhelníky jsou rovnostranné, „středový“ trojúhelník je také rovnostranný.

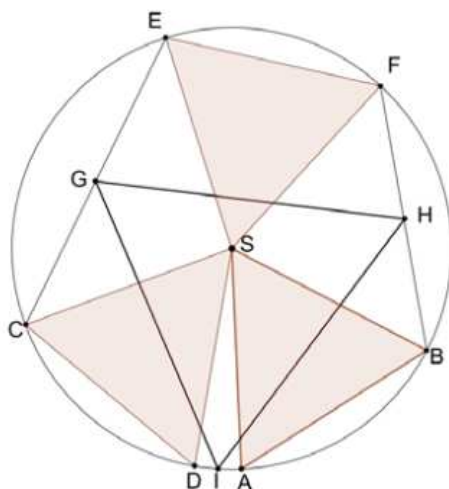
Na (Obr. 37) jsou znázorněny rovnostranné trojúhelníky ABC, ADE, AFG a „středový“ rovnostranný trojúhelník [18].



Obr. 37: Znáznorněny rovnostranné trojúhelníky ABC, ADE, AFG a „středový“ rovnostranný trojúhelník (obrázek je překreslen podle [18])

Asymmetric Propeller je zobecněním věty o třech rovnostranných trojúhelnících [19].

Věta o třech rovnostranných trojúhelnících: Tři stejné rovnostranné trojúhelníky mají jeden vrchol ve středu kruhu a ostatní dva na jeho obvodu. Středů jejich stran na kruhu tvoří další rovnostranný trojúhelník [19] (Obr. 38).



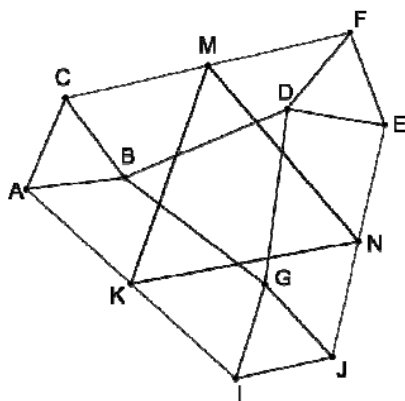
Obr. 38: Znázorněný tři shodné rovnostranné trojúhelníky ABS , CDS , EFS a rovnostranný trojúhelník GHI , kde body G a H jsou středy stran CE a FB

Věta Asymmetric Propeller (asymetrická vrtule): Vrcholy tří podobných trojúhelníků jsou spojeny na odpovídajících vrcholech čtvrtého trojúhelníka podobného prvním třem. Všechny čtyři trojúhelníky mají stejnou orientaci. Tři páry nezávislých vrcholů z vnějších trojúhelníků jsou spojeny a středy těchto úseček jsou spojeny. Trojúhelník takto získaný je podobný uvedeným čtyřem trojúhelníkům [19].

Poznámka:

Asymmetric Propeller se dá do českého jazyka přeložit jako asymetrická vrtule.

Na (Obr. 39) je obrázek asymetrické vrtule. Asymetrickou vrtuli“ tvoří tři shodné trojúhelníky ABC , DEF , IJK ; trojúhelník BDG , který vznikne spojením vrcholů B , D , G a trojúhelník KMN , který vznikne spojením středů úseček AI , JE , CF .



Obr. 39: Znázornění asymetrické vrtule

Důkaz věty Asymmetric Propeller:

Tato věta se dá dokázat pomocí komplexních čísel [19]. V níže uvedeném diagramu (obr. 40), je jeden z vrcholů označen jako počátek O a strany trojúhelníků označujeme komplexními čísly, směr je vyznačen pomocí šipek. X, Y, Z jsou vrcholy „středového“ trojúhelníka. Čtyři podobné trojúhelníky jsou podobné obecnému trojúhelníku se stranami $1, k$, a $(1-k)$, kde k je komplexní číslo. Trojúhelníky 1, 2, 3, 4 mají tyto strany:

trojúhelník 1: $a, ka, (1-k)a$; trojúhelník 2: $b, kb, (1-k)b$; trojúhelník 3: $c, kc, (1-k)c$;

trojúhelník 4: $d, kd, (1-k)d$.

Abychom určili souřadnice pro body X, Y, Z , které jsou středy úseček HI, OE, FG , musíme určit souřadnice bodů E, F, G, H, I, O . Tyto souřadnice zjistíme pomocí šipek, které vyznačují směr.

Podle dohody označme malými písmeny souřadnice bodů označené velkými písmeny.

Pak pro body E, F, G, H, I, O platí:

$$e = a - (1 - k)c - kb,$$

$$f = a - (1 - k)c + (1 - k)b;$$

$$g = a - c + d,$$

$$h = a - c + kd,$$

$$I = ka; O \text{ je počátek.}$$

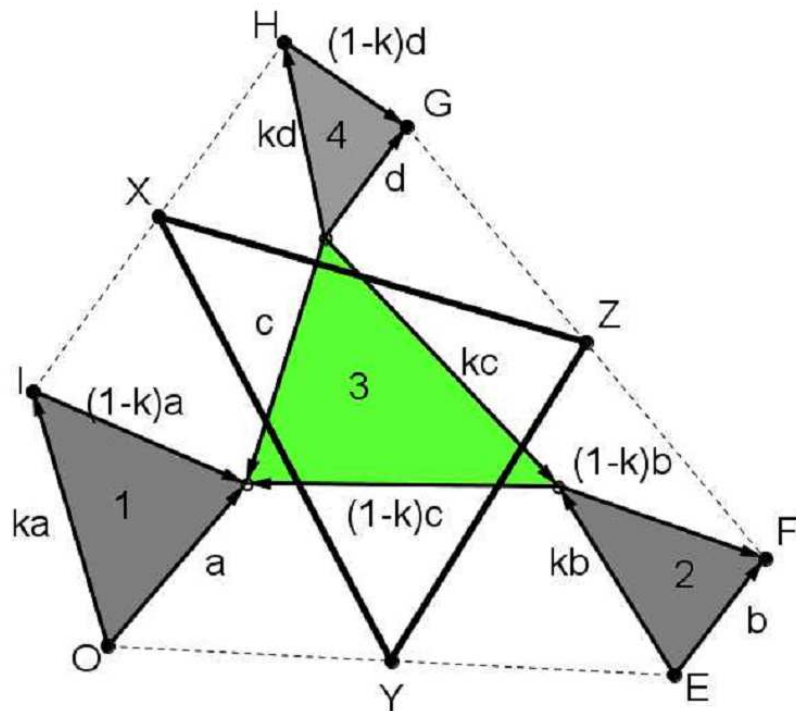
Pro středy X, Y, Z platí:

$$x = \frac{h+i}{2} = \frac{(ka)+(a-c+kd)}{2}, y = \frac{o+e}{2} = \frac{a-(1-k)c-kb}{2}, z = \frac{f+g}{2} = \frac{(a-c+d)+(a-(1-k)c+(1-k)b)}{2},$$

odkud můžeme vypočítat strany YZ, YX, XZ

$$YZ = z - y = \frac{a+b-c+d}{2}, YX = x - y = \frac{k(a+b-c+d)}{2}, XZ = z - x = \frac{(1-k)(a+b-c+d)}{2},$$

Trojúhelník XYZ je skutečně podobný obecnému trojúhelníku $(1, k, (1-k))$.



Obr. 40: Diagram

3.2. Příklady z kinematiky

Příklad 1 Po kružnici se pohybují konstantní rychlostí v opačném směru dva hmotné body. Body se začaly pohybovat v téže časové okamžiku a z téhož místa. Určete, ve kterých časových okamžicích bude jejich vzájemná vzdálenost d , je-li poměr jejich úhlových rychlostí roven $\frac{1}{2}$.

Řešení:

Tento příklad můžeme řešit pomocí komplexních čísel. Kružnici můžeme překreslit do Gaussovy roviny, kde střed kružnice S umístíme do počátku. (Obr. 39).

Polohu hmotného bodu určuje polohový vektor $\mathbf{r}$, jehož velikost se rovná poloměru kružnice r . Při konstantní úhlové rychlosti ω opíše polohový vektor za dobu t úhel $\varphi = \omega t$ [12].

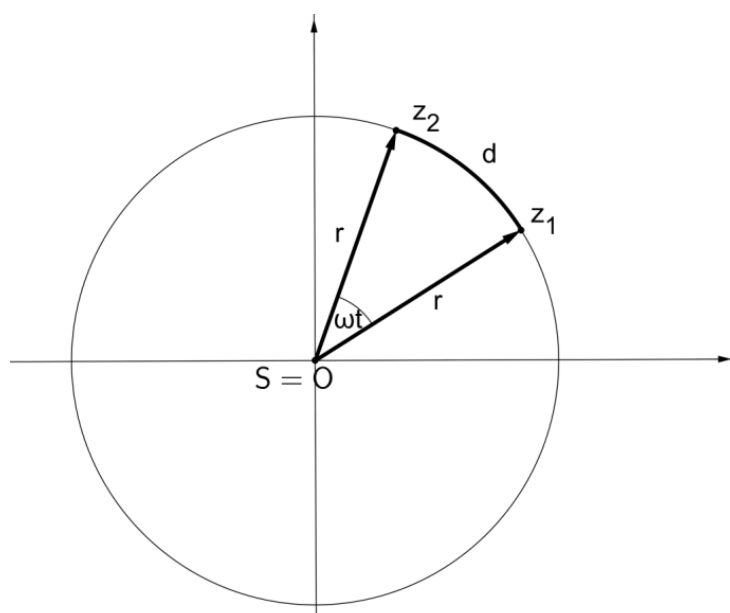
Pro první hmotný bod platí

$$\varphi_1 = 2\omega t.$$

Pro druhý hmotný bod platí

$$\varphi_2 = \omega t.$$

Za dobu t , bude první hmotný bod v bodě z_1 a druhý hmotný bod v bodě z_2 .(Obr.41).



Obr. 41: Reprezentace pohybu hmotného bodu po kružnici v Gaussově rovině.

Pro vzdálenost d platí :

$$d = |z_1 - z_2|.$$

Pro komplexní čísla z_1 a z_2 platí:

$$z_1 = r(\cos(2\omega t) + i \sin(2\omega t)); z_2 = r(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)).$$

Čas t si vyjádříme z této rovnice:

$$d = |z_1 - z_2| = |r(\cos(2\omega t) + i \sin(2\omega t)) - r(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))|$$

$$d = |(r \cos(2\omega t) - r \cos(\omega t)) + (r i \sin(2\omega t) - r i \sin(\omega t))|$$

$$d^2 = (r \cos(2\omega t) - r \cos(\omega t))^2 + (r i \sin(2\omega t) - r i \sin(\omega t))^2$$

$$\cos(3\omega t) = \frac{2r^2 - d^2}{2r^2}$$

$$t = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{2r^2 - d^2}{2r^2}\right)}{\omega}.$$

3.3 Řešení elektrických obvodů se střídavým proudem (RLC obvody)

Střídavý proud

Proměnné napětí s harmonickým průběhem označujeme názvem střídavé napětí a elektrickým obvodem prochází střídavý proud, který má také harmonický průběh. Střídavé napětí představuje harmonické elektrické kmitání a pro okamžitou hodnotu u střídavého napětí platí:

$$u = U_m \sin(\omega t).$$

kde U_m je amplituda střídavého napětí, ω je úhlová frekvence, t je čas [12].

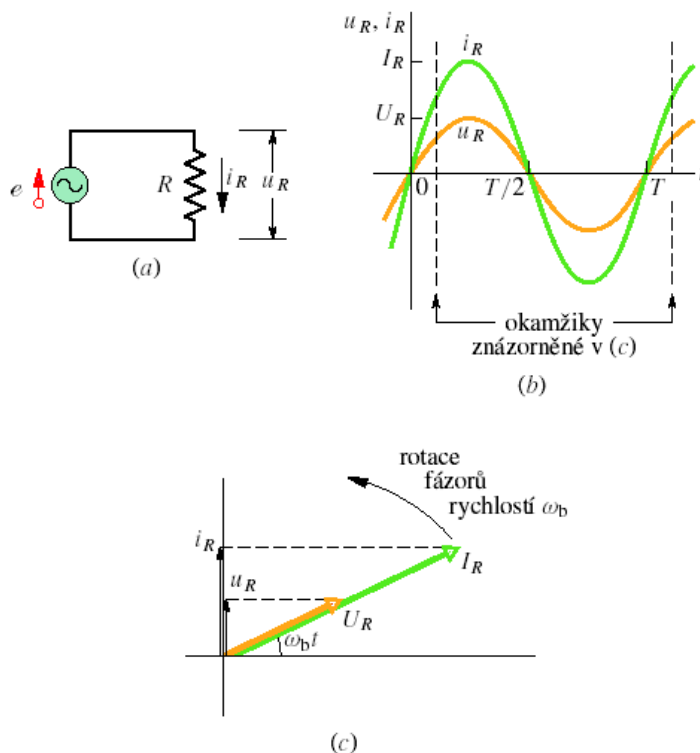
Pro úhlovou frekvenci platí:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

T je perioda, f je frekvence [12].

Obvod střídavého proudu s odporem (s rezistorem) (obr. 42).

Nejjednodušší střídavý obvod je tvořen rezistorem, který má jen odpor. Jestliže obvod připojíme ke střídavému napětí, prochází obvodem střídavý proud. Harmonické napětí na rezistoru má amplitudu $U_R = IR$. Proud je ve fázi s napětím [4].



Obr. 42: a) Rezistor je připojen ke zdroji. b) Proud a napětí na rezistoru jsou ve fázi a uskuteční jeden kmit za jednu periodu T . c) Fázorový diagram ukazuje též situaci jako obr (b). Obrázek je převzat z ([4], s. 868).

Obvod střídavého proudu s indukčností (obvod s cívkou) (Obr. 43).

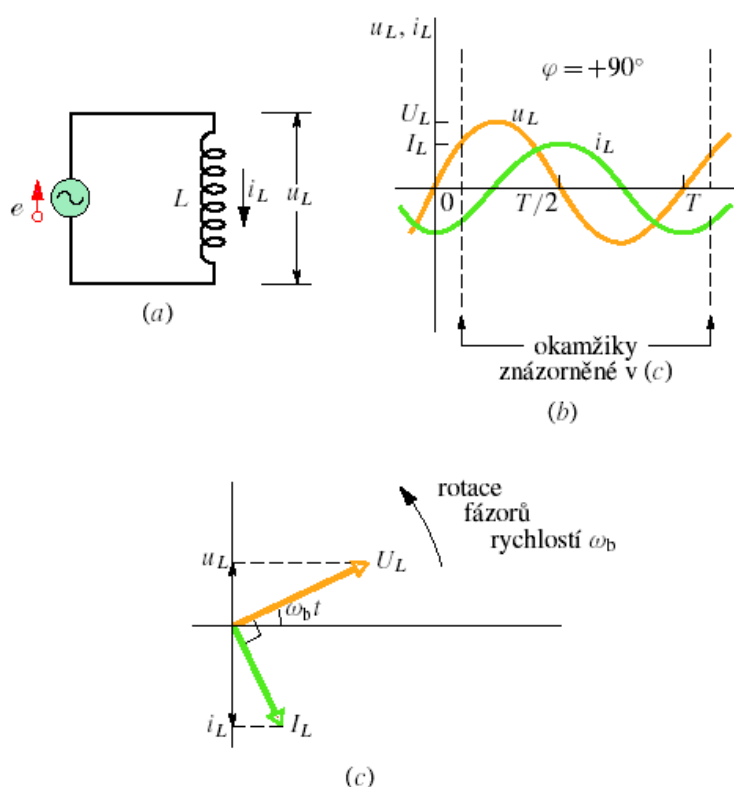
Indukčnost L cívky obvodu střídavého proudu způsobuje fázový posun proudu za napětím o úhel $\varphi = -90^\circ$ a ovlivňuje proud v obvodu svou induktivní reaktancí (induktancí) x_L . Jednotkou indukčnosti je **ohm** Ω . Pro její velikost platí:

$$U_L = I x_L; x_L = L \omega_b [4].$$

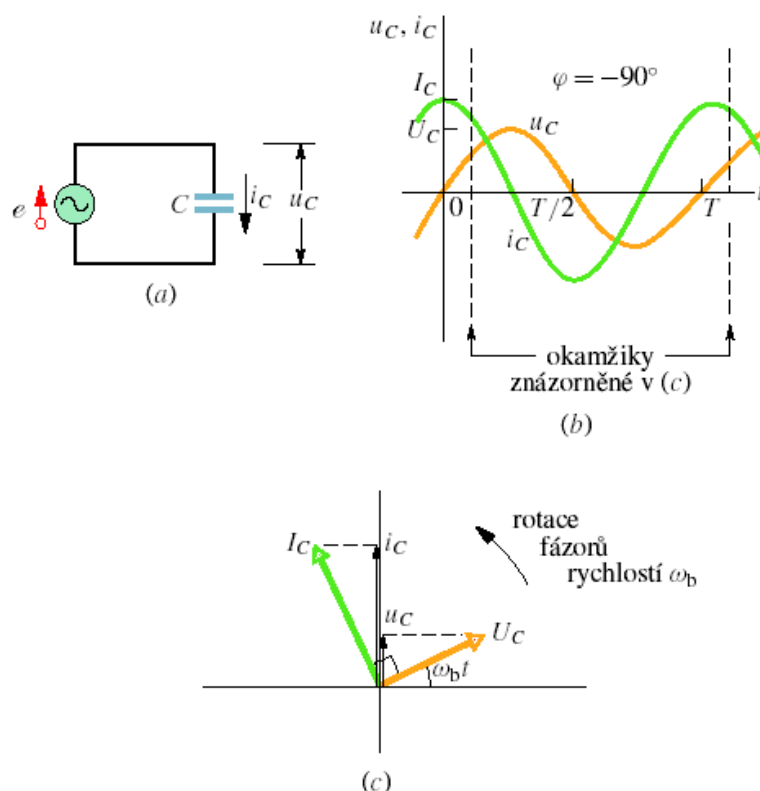
Obvod střídavého proudu s kapacitou (obvod s kondenzátorem) (Obr. 44).

Kapacita kondenzátoru v obvodu střídavého proudu způsobuje fázový posun proudu před napětím o úhel $\varphi = 90^\circ$ a ovlivňuje proud v obvodu svou kapacitní reaktancí (kapacitancí) x_C . Jednotkou kapacitance je **ohm** Ω . Pro její velikost platí

$$U_C = I x_C; x_C = \frac{1}{\omega_b C} [4].$$



Obr. 43: a) Cívka je připojena ke zdroji. b) Proud je zpožděn za napětím o 90° . c) Fázorový diagram ukazuje totéž. Obrázek je převzat z ([4], s. 870).



Obr. 44: a) Kondenzátor je připojen ke zdroji. b) Proud předbíhá před napětím o 90° . c) Fázorový diagram ukazuje tutěž situaci. Obrázek je převzat z ([4], s. 869).

RLC obvody

RLC obvody jsou elektrické obvody, které tvoří rezistor s odporem (rezistancí), cívka (s indukčností) a kondenzátor (s kapacitou).

Obvod jako celek charakterizuje veličina nazývaná impedance Z , která je definovaná:

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Jednotkou impedance je **ohm** Ω [12].

Metody řešení střídavých elektrických obvodů

K řešení obvodů se střídavými napětími a proudy lze užít:

- 1) fázorovou metodu (fázorové diagramy),
- 2) komplexní symbolickou metodu.

Fázorová metoda

Slouží k řešení jednodušších elektrických obvodů. Tato metoda je založena na tzv. fázorovém diagramu. Veličiny jsou symbolicky znázorněny orientovanou úsečkou umístěnou v souřadnicové soustavě, tzv. fázor. Fázor má délku rovnou amplitudě veličiny a s osou x svírá úhel rovný počáteční fázi (tzn. fázi v okamžiku $t=0$). Pomocí fázorového diagramu, v němž jsou zakresleny fázory střídavého napětí i proudu, lze snadno posoudit jejich fázorový rozdíl [12]. (obr. 42c, obr. 43c, obr. 44c).

Komplexní symbolická metoda

Spočívá ve vyjádření elektrických veličin komplexními čísly. Nad takto vyjádřenými elektrickými veličinami píšeme obvykle stříšku. Komplexní impedanci $\hat{Z}$ můžeme zapsat těmito způsoby:

- | | |
|-----------------------|---|
| 1) algebraický tvar | $\hat{Z} = \text{Re}(\hat{Z}) + \text{Im}(\hat{Z})j,$ |
| 2) goniometrický tvar | $\hat{Z} = Z (\cos\varphi + j.\sin\varphi),$ |
| 3) exponenciální tvar | $\hat{Z} = Z e^{j\varphi},$ |

j v zápisech značí imaginární jednotku [6], [3].

Nejčastěji se používá algebraického a exponenciálního tvaru vyjádření.

Pro odpor (rezistanci) platí: $\varphi = 0^\circ \Rightarrow \hat{R} = R(\cos 0^\circ + j\sin 0^\circ) = R.$

Pro konduktanci platí $\varphi = 90^\circ \Rightarrow \hat{X}_L = \omega L(\cos 90^\circ + j\sin 90^\circ) = j\omega L$ (v cívice).

Pro kapacitanci platí $\varphi = -90^\circ \Rightarrow \hat{X}_C = \frac{1}{\omega C}(\cos(-90^\circ) + j\sin(-90^\circ)) = \frac{1}{j\omega C}$

(v kondenzátoru) [3].

Sériově RLC:

$$\hat{Z} = \hat{R} + \hat{X}_L + \hat{X}_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad [6], [3],$$

impedance:

$$\hat{Z} = |\hat{Z}| = \sqrt{(\text{Re}(\hat{Z}))^2 + (\text{Im}(\hat{Z}))^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad [6],[3],$$

fázové posunutí:

$$\text{tg}\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \Rightarrow \varphi = \arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \quad [6], [3].$$

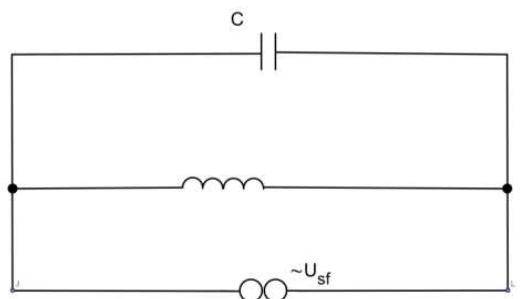
Paralelně RLC

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \Rightarrow \hat{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)} [3],$$

impedance:

$$Z = |\hat{Z}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}} [3].$$

Příklad 1: Elektrický proud I protéká obvodem složeným z $L = 6H$ a $C = 20\mu F$, které jsou zapojeny paralelně a připojeny ke zdroji střídavého napětí $U = 220 V$ s frekvencí $f = 50 Hz$. Daný obvod je znázorněn na (Obr. 45).



Obr. 45: Znázornění elektrického obvodu k příkladu 1

Řešení:

Proud I vypočítáme podle Ohmova zákona jako podíl napětí v obvodu ku celkové impedanci obvodu Z . Stačí nám určit pouze impedanci obvodu Z .

Budeme postupovat na základě komplexní symbolické metody.

Pro impedanci $\hat{Z}$ v obvodu na obrázku 1 můžeme psát:

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = j \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

$$\frac{1}{Z} = \left| \frac{1}{\hat{Z}} \right| = \sqrt{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

Pro proud I pak lze psát:

$$I = \frac{U}{Z} = U \cdot \left(2\pi f C - \frac{1}{2\pi f L} \right) = 1,26 A.$$

Tento příklad můžeme vyřešit i pomocí programu GeoGebra. V tomto programu můžeme ilustrovaný příklad zobecnit pro více hodnot.

Postup:

1) Pomocí ikony  (Posuvník) si na nákrese nadefinujeme rozsah (interval) jednotlivých fyzikálních veličin U (napětí), L (indukčnost), f (frekvence), C (kapacita).

(Např. pro $U = \langle 0, 500 \rangle V$, $C = \langle 0, 100 \rangle \mu F$, ...).

2) Do vstupní lišty nadefinujeme veličinu proud v tomto tvaru:

„ $proud = U * (2 * 3,14 * f * C * 0.000001 - (1 / (2 * 3,14 * f * L)))$ “

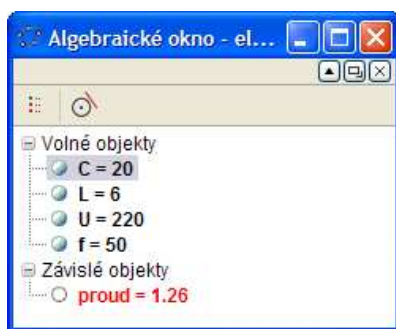
3) Hodnota proudu se zobrazí v algebraickém okně.

Poznámka:

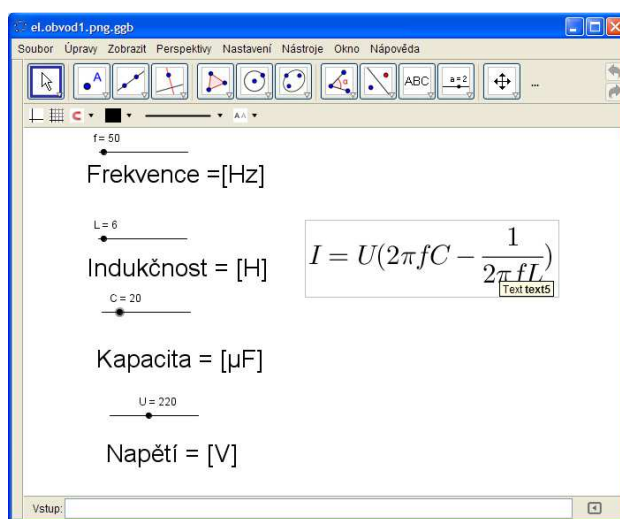
Je potřeba počítat ve stejných fyzikálních jednotkách. (např.: μF je potřeba převést na F).

Pokud budeme měnit na nákrese hodnoty U , L , f , C , bude se měnit v algebraickém okně hodnota proudu.

Pro lepší názornost uvádím na (Obr. 46) algebraické okno GeoGebry a na (Obr. 47) nákrese GeoGebry.



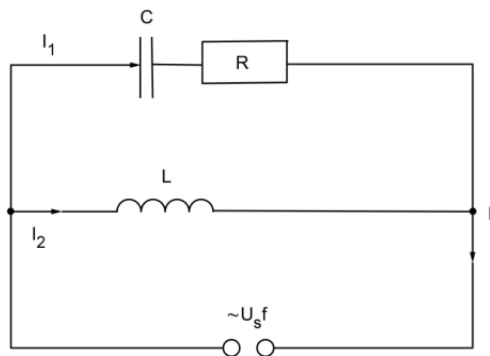
Obr. 46: Algebraické okno programu GeoGebra k příkladu 1



Obr. 47: Nákrese v programu GeoGebra k příkladu 1

Příklad 2

Je dán obvod podle (Obr. 48). $R = 250 \, \Omega$, $L = 0,5 \, \text{H}$, $C = 10 \, \mu\text{F}$, střídavé napětí $U = 220 \, \text{V}$ s frekvencí $f = 50 \, \text{Hz}$. Určete proudy I_1 , I_2 a I tekoucí v obvodu.



Obr. 48: Znázornění elektrického obvodu k příkladu 2

Řešení:

Nejprve určíme pomocí komplexní symbolické metody impedance

$$\hat{Z}_2 = \widehat{X}_L = j\omega L \Rightarrow Z_2 = |\hat{Z}_2| = \sqrt{\omega^2 L^2} = \omega L$$

$$\hat{Z}_1 = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j \cdot \frac{1}{\omega C} \Rightarrow Z_1 = |\hat{Z}_1| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

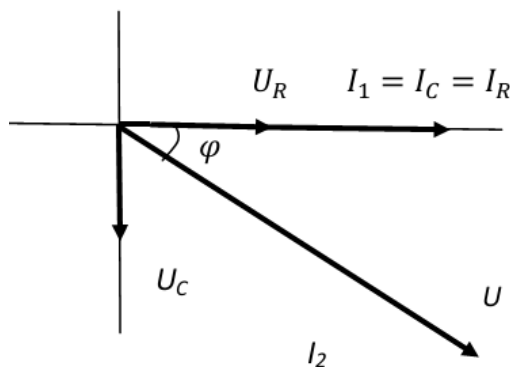
Proudy I_1 a I_2 již můžeme určit:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(2\pi f)^2 C^2}}} = 0,54 \, \text{A}$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{2\pi f L} \approx 1,4 \, \text{A}.$$

Abychom získali proud I , musíme proudy I_1 a I_2 sečíst jako fázory. Budeme postupovat ve dvou krocích. Nejprve zjistíme fázové posunutí a pak teprve vypočítáme proud I .

Sériové spojení C a R (I_C a I_R jsou ve fázi, U_C a U_R však ne). Fázorový diagram je pro tuto situaci na (Obr. 49).



Obr. 49: Fázorový diagram

Pro fázové posunutí lze psát:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{\frac{I_1}{\omega C}}{\frac{I_1}{\omega RC}} = \frac{1}{\omega RC} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2\pi f RC} \right) \cong -51^\circ 51'.$$

Zjistili jsme, že proud předbíhá napětí přibližně o 51°

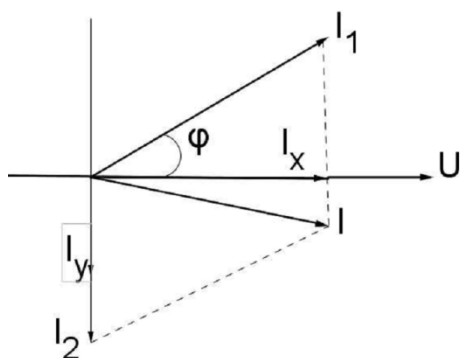
$$I_x = I_1 \cos(\varphi) = 0,33 \text{ A},$$

$$I_y = I_2 - I_1 \sin(\varphi) = 0,98 \text{ A}.$$

Celkové paralelní spojení větví nyní zakreslíme fázory proudů (Obr. 50).

Pro výsledný proud I pak podle fázorového diagramu na (Obr. 49) podle Pythagorovy věty vyplývá:

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = \sqrt{0,33^2 + 0,98^2} \text{ A} = 1,03 \text{ A}.$$



Obr. 50: Zakreslení fázorů

Tento příklad vyřešíme pro srovnání ještě použitím čisté komplexní symbolické metody.

Celková impedance zapojení je $\hat{Z}$. Dále pro obvod z (Obr. 48) platí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{Z}} &= \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} = \frac{1}{R - \frac{j}{\omega C}} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{\omega C(R\omega C + j)}{R^2\omega^2 C^2 + 1} - \frac{j}{\omega L} = \\ &= \left(\frac{R\omega^2 C^2}{R^2\omega^2 C^2 + 1} \right) + j \cdot \left(\frac{\omega C}{R^2\omega^2 C^2 + 1} - \frac{1}{\omega L} \right). \end{aligned}$$

Pro proud I pak platí Ohmův zákon:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{|\hat{Z}|} = \frac{U}{\sqrt{\left(\frac{R\omega^2 C^2}{R^2\omega^2 C^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{\omega C}{R^2\omega^2 C^2 + 1} - \frac{1}{\omega L} \right)^2}}.$$

Po dosazení číselných hodnot vyháží proud $I = 1,03 \text{ A}$

Poznámka:

Z příkladu je vidět, že komplexní symbolická metoda je jednodušší než fázorová.

4 Historie kvaternionů.

Po objevu komplexních čísel začaly další pokusy, jak rozšířit obor komplexních čísel.

Objevil se výraz

$$a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n,$$

kde n bylo zvolené přirozené číslo, $a_0 \dots a_n$ byla reálná čísla, $\alpha_0 \dots \alpha_n$ nové základní jednotky [26]. Těmto číslům, které rozšiřovaly obor komplexních čísel se začalo říkat hyperkomplexní čísla [7].

Sčítání těchto formálních výrazů bylo definováno po složkách a mělo tyto vlastnosti: asociativita, komutativita, existence nulového prvku a existence opačných prvků. Násobení mělo být se sčítáním spojeno distributivním zákonem. Bylo třeba definovat jen násobení jednotek $\alpha_0 \dots \alpha_n$. Na násobení byly kladeny mnohem větší požadavky, například asociativita, komutativita, existence jednotkového prvku a existence inverzních prvků, které nalezení vhodných vzorců pro násobení jednotek $\alpha_0 \dots \alpha_n$ velmi komplikovaly. Těmito problémy se v první polovině 18. století zabývali William Rowan Hamilton (1805-1865), Arthur Cayley (1821-1860), Augustus de Morgan (1806-1871), bratři Charles Graves (1810-1860), John T. Graves (1806-1870) a Williams Kingdon Clifford (1845-1879) [7].

U základů kvaternionů stál Sir William Rowan Hamilton. Napřed se pokoušel najít obor trojsložkových čísel. Nakonec dne 16. října 1843, když šel po Broughamském mostu přes Roal Canal v Dublinu na zasedání Královské irské akademie věd, napadl ho vzorec pro násobení základních jednotek. Nadšen vyřešeným problémem, vyryl tento vzorec kapesním nožem do kamene Broughamského mostu. Toto místo dodnes připomíná deska s nápisem

*„Here as he walked by
on the 16th October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication*

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

& cut it on a stone of this bridge”.

Tento text je převzat z Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 38 (1993), č.6.

Hamilton přišel na nový druh čísel, které se skládají ze čtyř podstatně se od sebe lišících částí, tato čísla obdržela od něho název kvaterniony. Hamilton sestavil pomocí nových jednotek imaginárních i, j, k číslo

$$\xi = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3,$$

kde x_0, x_1, x_2, x_3 značí čísla buď reálná, nebo komplexní, a nazval nové číslo v případě prvním kvaternion, ve druhém pak bikvaternion [26]. Přišel na to, že je potřeba mít jednu složku reálnou a tři složky imaginární, aby byla zavedena algebra kvaternionů. Hamilton objevil vztah pro násobení čtyř základních jednotek. Za předpokladu asociativity násobení platí:

$$ij = -ji = k; jk = -kj = i; ki = -ik = j \text{ [21].}$$

Pro přehlednost toto násobení můžeme přepsat do tabulky. (Tab. 1)

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Tab. 1: násobení kvaternionů. (tabulka je převzata z [7])

Ba Kirkmann zobecnil tato čísla tak, že složil z $2n$ různých částí pomocí $(2n-1)$ imaginární jednotky nové číslo

$$\alpha = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_{2n-1} i_{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k i_k,$$

kde a_k značí číslo reálné, i_k jednotky imaginární kromě $i_0=1$, obdržel čísla mnohospřežná nebo plusquaterniony, z nichž pro $k>3$ a $a_k=0$ se obdrží

$$\alpha = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3,$$

což je kvaternion, pro $k>1$ a $a_k=0$, pak

$$\alpha = a_0 + a_1 i_1,$$

což je číslo komplexní

a pro $k>0$ a $a_k=0$

$$\alpha = a_0,$$

což je číslo reálné [26].

Hamilton v roce 1853 napsal spis „Lectures on Quaternions“ který byl vydán v Dublinu. Po smrti Hamiltona byl v roce 1866 uveřejněn synem Hamiltona spis „Elements of Quaternions“. Oba tyto spisy činí základ této nauky [26].

Kvaternion lze zapsat jako uspořádaná čtveřice $(x_0, (x_1, x_2, x_3))$. Častěji bývá zapsán ve zkráceném tvaru $(x_0, \mathbf{v})$, kde x_0 je skalár a $\mathbf{v}$ je chápán jako vektor v trojrozměrném prostoru [21].

V současné době se kvaterniony využívají například v klasické mechanice, kvantové mechanice a v prostorové geometrii.

5 Užití kvaternionů

5.1 Algebraické operace s kvaterniony

Kvaternion $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$, kde q_0, q_1, q_2, q_3 jsou reálná čísla a lze je zapsat jako uspořádanou čtveřici $(q_0, (q_1, q_2, q_3))$, ve zkráceném tvaru $(q_0, \mathbf{q})$, kde q_0 je skalár a $\mathbf{q}$ je chápán jako vektor v trojrozměrném prostoru. Kvaternion q můžeme psát i takto

$$q = q_0 + \mathbf{q}, \text{ případně } q = q_0 + \vec{q} \text{ [21],[10].}$$

Úmluva: množinu všech kvaternionů budeme značit $\mathbb{H}$.

5.1.1 Součet a rozdíl kvaternionů

Součet kvaternionů

Mějme dva kvaterniony p, q , kde $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ a $p = p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3$.

Pro součet $p+q$ platí:

$$p + q = p_0 + q_0 + (p_1 + q_1)\mathbf{i} + (p_2 + q_2)\mathbf{j} + (p_3 + q_3)\mathbf{k} \text{ [10].}$$

Sčítání kvaternionů je komutativní. Platí

$$p + q = q + p.$$

Odečítání kvaternionů

Mějme dva kvaterniony p, q , kde $p = p_0 + \mathbf{p}$ a $q = q_0 + \mathbf{q}$. Odečítání kvaternionů je definováno:

$$p - q = p + (-1)q.$$

Odečítání kvaternionů není komutativní.

Příklad: Vypočítejte součet a rozdíl kvaternionů $q = (2, (2, 3, -5)), p = (1, (2, 2, 1))$.

Řešení:

$$\begin{aligned} q + p &= (2 + 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) + (1 + 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = \\ &= 2 + 1 + (2 + 2)\mathbf{i} + (3 + 2)\mathbf{j} + (-5 + 1)\mathbf{k} = 3 + 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k} = (3, (4, 5, -4)), \\ q - p &= (2 + 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) - (1 + 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = \\ &= (2(2, 3, -5)) + (-1)(1, (2, 2, 1)) = (1, (0, 1, -6)), \end{aligned}$$

$$p - q = (1 + 2i + 2i + 5) - (2 + 2i + 3j - 5k) = \\ = (1, (2,2,1)) + (-1)(2, (2,3, -5)) = (-1, (0, -1, 6)).$$

5.1.2 Násobení kvaternionů

Mějme dva kvaterniony p, q , kde $p = p_0 + \mathbf{p}$ a $q = q_0 + \mathbf{q}$. Násobení kvaternionů pq je definováno:

$$p \cdot q = p_0 \cdot q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0 \cdot \mathbf{q} + q_0 \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \text{ [10].}$$

Příklad: Vypočtete součin $p \cdot q$ a $q \cdot p$, kde $q = (1, (2,3,4)), p = (2, (3,2,1))$.

Řešení:

a)

$$p \cdot q = p_0 \cdot q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0 \cdot \mathbf{q} + q_0 \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \\ p \cdot q = 2 \cdot 1 - (3,2,1) \cdot (2,3,4) + 2 \cdot (2,3,4) + 1 \cdot (3,2,1) + (3,2,1) \times (2,3,4) = \\ = 2 - 16 + 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k} + 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} + 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = \\ = -14 + 12\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 14\mathbf{k} = (-14, (12, -2, 14))$$

b)

$$q \cdot p = q_0 \cdot p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + q_0 \cdot \mathbf{p} + p_0 \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \\ q \cdot p = 2 - (2,3,4) \cdot (3,2,1) + 1 \cdot (3,2,1) + 2 \cdot (2,3,4) + (2,3,4) \times (3,2,1) = \\ = 2 - 16 + 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} + 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k} - 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = \\ = -14 + 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = (-14, (2, -2, 4))$$

5.1.3 Konjugovaný kvaternion

Konjugovaný kvaternion značíme q^* nebo $\bar{q}$.

$$q^* = q_0 - \mathbf{i}q_1 - \mathbf{j}q_2 - \mathbf{k}q_3 \text{ [10].}$$

Platí tyto tři vztahy: $(q^*)^* = q$, $q + q^* = 2q_0$, $q^* \cdot q = q \cdot q^*$

Odvození těchto tří vztahů najdeme například v [10].

Příklad: Mějme kvaternion $q = (1, (2,3,4))$.

a) Dokažte $q + q^* = 2$

b) Vypočtěte $q^* \cdot q$ a $q \cdot q^*$

Řešení:

a)

$$\begin{aligned} q &= 1 + 2i + 3j + 4k; \quad q^* = 1 - 2i - 3j - 4k \\ &= q + q^* = 1 + 2i + 3j + 4k + 1 - 2i - 3j - 4k = 2 \end{aligned}$$

Platí $q + q^* = 2$

b)

$$\begin{aligned} q^* \cdot q &= 1 - (-2, -3, -4) \cdot (2, 3, 4) + 1(-2, -3, -4) + 1(2, 3, 4) + (-2, -3, -4) \times (2, 3, 4) = \\ &= 30 - 2i - 3j - 4k + 2i + 3j + 4k + 0 = 30 \end{aligned}$$

$$q \cdot q^* = 1 - (-2, -3, -4) \cdot (2, 3, 4) + (2, 3, 4) + (-2, -3, -4) + (2, 3, 4) \times (-2, -3, -4) = 30$$

5.1.4 Norma kvaternionu

Mějme kvaternion $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$. Norma kvaternionu je dána tímto vztahem:

$$\|q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \sqrt{q^* \cdot q}. \quad [21]$$

Norma může být definována i takto:

$$|q|^2 = q \cdot q^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \quad [5]$$

Poznámka:

V jiné literatuře se norma může psát i tímto zápisem $|q|$.

Kvaterniony jejichž norma je 1, nazýváme jednotkové [10].

Jednotkový kvaternion může být například $q = (1, (0,0,0))$.

Příklad: Vypočtěte normu kvaternionu $q = (1, (2,3,4))$.

Řešení:

Využijme předchozího příkladu, kde jsme počítali součin $q^* \cdot q$ a dosadíme do vztahu pro normu kvaternionu:

$$|q| = \sqrt{q^* \cdot q} = \sqrt{30}.$$

5.1.5 Inverzní kvaternion

Inverzní kvaternion q^{-1} je definován tímto vztahem:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2} [10].$$

Příklad: Určete inverzní kvaternion q^{-1} ke kvaternionu $q = 1 + 2i + 3j + 4k$.

Řešení:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2} = \frac{q^*}{q^*q} = \frac{1 - 2i - 3j - 4k}{30}$$

Pro inverzní kvaternion platí $q^{-1} \cdot q = q \cdot q^{-1} = 1$ [10].

Inverzní kvaternion k jednotkovému je konjugovaný kvaternion [10].

5.1.6 Skalární a vektorový součin kvaternionů

Mějme dva kvaterniony $p = (p_0, (p_1, p_2, p_3))$; $q = (q_0, (q_1, q_2, q_3))$.

Skalární součin kvaternionů je definován p, q je definován:

$$p \cdot q = q_0 p_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 [24].$$

Kvaterniony p, q nazýváme ortogonální, jestliže platí:

$$p \cdot q = 0 [24].$$

Vektorový součin kvaternionů p, q je definován

$$p \times q = \frac{pq - qp}{2} [24].$$

Kvaterniony p, q jsou rovnoběžné, jestliže

$$p \times q = 0 [24].$$

Příklad: Mějme dva kvaterniony $p = (2, (3, 2, 1))$, $q = (1, (2, 3, 4))$. Vypočtěte skalární a vektorový součin.

Řešení:

Skalární součin:

$$p \cdot q = 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 = 18.$$

Vektorový součin:

Využijeme příkladu 2, kde jsme počítali součin kvaternionů pq a qp , součiny stačí dosadit do vztahu pro vektorový součin

$$p \times q = \frac{-14+12i-2j+14k-(-14+2i-2j+4k)}{2} = \frac{10i+10k}{2} = 5i + 10k.$$

5.1.7 Zápís kvaternionů do matice

Prvky $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ můžeme zapsat jako komplexní matice

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} [21].$$

Kvaternion $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$, kde q_0, q_1, q_2, q_3 jsou reálné koeficienty, můžeme zapsat do matice A , kde

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

kde $x = q_0 + iq_1$; $y = q_2 + iq_3$ a $\bar{y}, \bar{x}$ jsou komplexně sdružená čísla [21].

Příklad: Zapište kvaternion $q = (1, (2,3,4))$ do matice A .

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2 Rotace (otočení) v prostoru

5.2.1 Rotace ve dvourozměrném prostoru

Rotace v dvourozměrném prostoru je popsána v kapitole 3.1.4 Otočení (rotace) kolem středu v rovině. Pro výpočet rotace máme dvě metody: metoda pomocí matic a metoda pomocí komplexních čísel.

5.2.1.1 Metoda pomocí matic

Chceme-li provést rotaci bodu (x,y) užitím matic, použijeme tohoto vztahu:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

kde (x',y') jsou souřadnice bodu pro rotaci, (x,y) jsou souřadnice bodu před rotací, θ je úhel otočení. Výše uvedený vztah můžeme zapsat jako

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta,$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta.$$

Vektory (x,y) a (x',y') mají stejnou velikost a jsou od sebe odděleny úhlem θ [22].

5.2.1.2 Metoda pomocí komplexních čísel

Pro rotaci pomocí komplexních čísel uijeme Eulerův vzorec:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} z &= (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta) = x' + iy'. \end{aligned}$$

Blíže se můžeme dočíst ve [22].

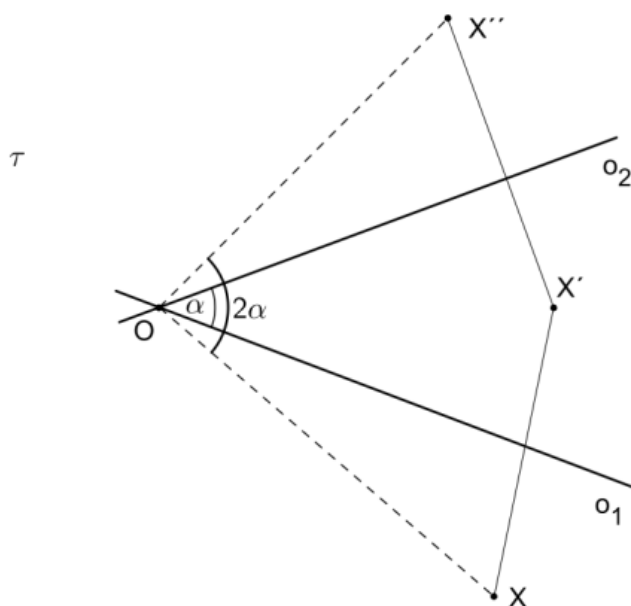
5.2.2 Rotace v trojrozměrném prostoru

Rotace (otočení) kolem přímky (osy) v trojrozměrném prostoru může být definována několika způsoby. Například podle ([8], s. 531) je rotace kolem tzv. osy otočení o v prostoru o orientovaný úhel velikosti φ shodné zobrazení, které přiřazuje každému bodu X prostoru takový obraz X' , že platí:

a) pro $X \in o$ je $X' = X$,

b) pro $X \notin o$ je $|X'P| = |XP|$, kde P je společná pata kolmic vedených body X , X' k ose o , přičemž rovina XPX' je kolmá k ose o a orientovaný úhel $\widehat{XPX'}$ má velikost φ .

Příklad 1: Mějme dvě roviny ϱ_1 a ϱ_2 , kde $\varrho_1 \nparallel \varrho_2$. Zvolme libovolnou rovinu τ , která je nákresnou. Označme její průsečnice s rovinami ϱ_1 , ϱ_2 po řadě o_1 , o_2 . Složením dvou rovinných souměrností S_1 , S_2 podle roviny ϱ_1 , ϱ_2 vznikne v rovině τ rovinné geometrické zobrazení ze dvou osových souměrností podle os o_1 , o_2 . Průsečnici rovin ϱ_1 , ϱ_2 označíme o . Jestliže $\varrho_1 \nparallel \varrho_2$, pak i $o_1 \nparallel o_2$ a vzniklé složené zobrazení je v každé rovině τ otočením kolem bodu $O \in o$, který je průsečíkem přímek o_1 , o_2 o úhel velikosti 2α , kde α je odchylka rovin ϱ_1 , ϱ_2 (Obr. 51). Toto složené prostorové zobrazení $S_1 \circ S_2$ nazýváme **otočení (rotace) kolem přímky $o = o_1 \cap o_2$** . [8].



Obr. 51: Otočení rotace kolem přímky (překresleno podle ([8], s. 532))

Těleso T je **rotační těleso**, existuje-li taková přímka o (zvaná **osa rotace**), že při každém otočení kolem této přímky se těleso zobrazí samo na sebe. Zvolíme-li libovolnou polorovinu s hraniční přímkou o a označíme M průnik rotačního tělesa T s touto polorovinou, pak každý bod rotačního tělesa T dostaneme jako obraz některého bodu množiny M při určitém otočení kolem přímky o [8].

Rotace pomocí kvaternionů

Podle [5] je rotace pomocí kvaternionů popsána takto: označme U množinu jednotkových kvaternionů, V prostor ryze imaginárních kvaternionů. Pro ryze imaginární kvaterniony $q=0+\mathbf{u}$, $p=0+\mathbf{v}$ platí:

$$q \cdot p = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Označme $int(\alpha)(\beta) = \alpha\beta\bar{\alpha}$ zobrazení prostoru kvaternionů do prostoru kvaternionů, určené kvaternionem α . Toto zobrazení zachová číslo 1, protože

$$int(\alpha)(1) = \alpha 1 \bar{\alpha} = 1.$$

Toto zobrazení také zachová normu vektorů (ryze imaginárních kvaternionů).

Zapišme jednotkový kvaternion α ve tvaru

$$\alpha = \cos \varphi + \vec{u} \sin \varphi,$$

kde $\vec{u}$ je jednotkový vektor. Pak platí:

$$\text{int}(\alpha)(\vec{u}) = (\cos \varphi + \vec{u} \sin \varphi) \cdot \vec{u} \cdot (\cos \varphi - \vec{u} \sin \varphi) = \vec{u}.$$

Kvaternion α odpovídá otočení kolem osy určené vektorem $\vec{u}$.

Doplňme vektor $\vec{u}$ vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ do pravotočivé báze. Pak $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{w}$ a podobně cyklicky i pro ostatní. Dále je

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + \vec{u} \sin \varphi) \cdot \vec{v} (\cos \varphi - \vec{u} \sin \varphi) &= (\cos \varphi \vec{v} + \sin \varphi \vec{w}) (\cos \varphi - \vec{u} \sin \varphi) = \\ &= \cos(2\varphi) \vec{v} + \sin(2\varphi) \vec{w}. \end{aligned}$$

Jedná se o otočení o úhel 2φ .

Necháme-li nyní kvaternion α působit na vektory báze, získáme matici otočení kolem osy

$$\vec{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$$

o úhel φ . Pro její prvky a_{rs} dostaneme

$$a_{rs} = \delta_{rs} \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) u_r u_s + \varepsilon_{rst} u_t \sin \varphi.$$

Zde δ_{rs} je Kroneckerovo delta, ε_{rst} je znaménkový tenzor, ε_{rst} je rovno znaménku permutace čísel rst , ve formuli se sčítá podle t .

Poznámka:

Popis rotace kvaternionů by se dal podle [9] zformulovat do jedné věty:

Nechť $q \in \mathbb{H}_1$, $q = (\cos \varphi, \sin \varphi \hat{\mathbf{v}})$. Nechť $r = (x, y, z) \in R^3$ a $p = (0, \mathbf{r}) \in \mathbb{H}$. Pak

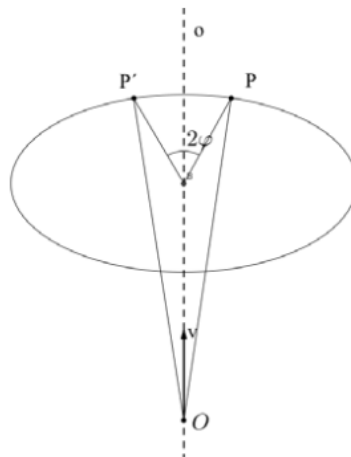
$$\hat{p} = qp\bar{q}$$

je obrazem p v rotaci o úhel 2φ kolem osy, která je daná směrovým vektorem $\hat{\mathbf{v}}$. (Obr. 52).

$\mathbb{H}_1$ je množina jednotkových kvaternionů. $\|\hat{\mathbf{v}}\| = 1$.

Důkaz této věty můžeme najít v [9].

Tuto větu můžeme znázornit graficky v GeoGebře.



Obr. 52: Otočení bodu P o úhel 2φ kolem osy o , který je daný směrovým vektorem $\mathbf{v}$.

Převod reprezentace osa-úhel do kvaternionů

Tato reprezentace osa-úhel je jednou z možností, jak určit rotaci. Udává osu rotace $\mathbf{n}$ a úhel φ kolem této osy podle pravidla pravé ruky. Vektor $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ je jednotkový vektor a platí $\mathbf{n}\mathbf{n} = 1$. Tato reprezentace popisuje rotaci čtveřicí čísel. První tři určují vektor osy rotace a čtvrtá značí úhel otočení kolem této osy.

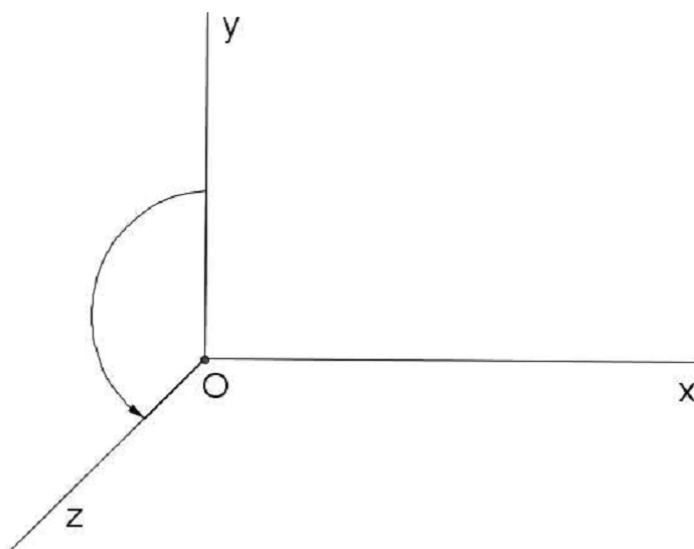
Vzorec pro převod reprezentace osa-úhel do kvaternionů je:

$$q = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i} \left(n_x \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \mathbf{j} \left(n_y \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \mathbf{k} \left(n_z \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

kde φ je úhel rotace a n_x, n_y, n_z je vektor reprezentující osu otočení.

Odvození výše uvedeného vztahu nalezneme v [9].

Příklad 2: Vytvořte rotaci z bodu $P[0,1,0]$ o $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ do pozice $P'[0,0,1]$. (Obr. 53)



Obr. 53: Znázornění příkladu 2

Řešení:

Použijeme vztahu

$$q = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i} \left(n_x \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \mathbf{j} \left(n_y \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \mathbf{k} \left(n_z \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

Vektor $\mathbf{n}$ bude $[0,1,0]$.

$$q = \cos \frac{\pi}{4} + \mathbf{i} \left(1 \sin \frac{\pi}{4} \right) + \mathbf{j} \left(0 \sin \frac{\pi}{4} \right) + \mathbf{k} \left(0 \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{j} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Výsledný kvaternion q je $\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.3 Užití kvaternionů v praxi

V této poslední kapitole bych chtěl čtenáře seznámit s tím, že kvaterniony se dají v běžném životě využít v mnoha vědních oborech

Využití kvaternionů ve kvantové fyzice

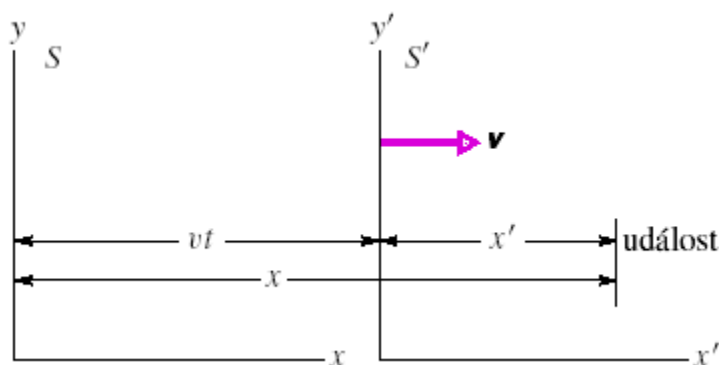
Kvaterniony můžeme ve kvantové fyzice využít například při Lorentzově transformaci a Maxwellových rovnic.

Podle [4] rovnice Lorentzovy transformace spojují prostoročasové souřadnice události, jak je vidí pozorovatelé ve dvou inerciálních soustavách S a S' , kde S' se pohybuje relativně k S rychlostí v vkladném směru os x a x' . Čtyři souřadnice jsou spojeny vztahy:

$$x' = \gamma(x - vt); y' = y; z' = z; t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right),$$

kde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ je Lorentzův faktor, $\beta = \frac{v}{c}$ je rychlostní parametr, v je rychlost uvažovaného bodu, c je rychlost světla $c = 3 \cdot 10^8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, t je čas.

Inerciální vztažná soustava S' se pohybuje rychlostí v vzhledem k soustavě S ve společném kladném směru jejich vodorovných os, označených jako x a x' . Pozorovatel v S přiřazuje události prostoročasové souřadnice x, y, z, t a pozorovatel v S' jí přiřazuje souřadnice x', y', z', t' . Z (Obr. 54) vyplývají rovnice Lorentzovy transformace.



Obr. 54: Dvě inerciální vztažné soustavy: soustava S' má rychlost v vůči S .

(obrázek převzat z ([4], s. 1016))

Lorentzovu transformaci můžeme popsat pomocí kvaternionů, tak, že čas t je skalár, a složky x, y, z nebo x', y', z' tvoří vektor třírozměrného prostoru například $q = t + (x, y, z)$.

Využití kvaternionů v simulaci

Kvaterniony obecně popisují kinematiku tělesa v prostoru, například pro letové simulace, pomocí nich můžeme popisovat, jak se letadlo chová v reálném prostředí, popisují oběhy družic.

V [23] je popsána simulace vztlakového tělesa NASA HL-20 pomocí systému MATLAB. K popisu této simulace se využívají kvaterniony.

Využití kvaternionů v animaci

Jednotkové kvaterniony můžeme použít k animaci.

V trojrozměrné grafice je animace proces provádějící modifikaci bodů trojúhelníkové sítě (triangle mesh), který reprezentuje povrch animovaného objektu. Jako metoda využívající triangle mesh se používá skeletální animace.

Skeletální animací se zabývá [13], kde je kvaternionů využito k popisu modifikace trojúhelníkové sítě na povrchu objektu.

Lékařství

V lékařství se kvaterniony využívají jako prostředek grafické vizualizace nebo pomocí kvaternionů může lékař ovládat lékařskou sondu, kdy například zkoumá tlusté střevo nebo jiné orgány. Podrobněji se můžeme dočíst například v [9].

Robotika

Pomocí kvaternionů můžeme popsat vztah mezi souřadnicovými systémy úchopu robota a kamery, která je k úchopu připevněna. Tento popis můžeme najít v [16].

Závěr

V této bakalářské práci jsem čtenáře seznámil s pomocí volně dostupných matematických programů Geogebra, wxMaxima, a volně dostupné internetové aplikace Wolfram Alpha s číselným oborem komplexních čísel $\mathbb{C}$ a číselným oborem kvaternionů $\mathbb{H}$, včetně jejich historie.

Čtenář se v této práci dozvěděl, že komplexní čísla jsou velice důležitá pro řešení některých geometrických úloh. Lze jimi řešit například úlohy s rovnostrannými trojúhelníky, podobnost trojúhelníků, poměr délek stran a popis rotace v rovině. Komplexní čísla jsou také důležitá při řešení některých úloh ve fyzice. Příkladem mohou být úlohy řešení elektrických obvodů se střídavým proudem a úlohy na pohyb.

O kvaternionech se čtenář dozvěděl, že jsou zobecněním komplexních čísel, v geometrii popisují rotaci v prostoru, a že mají široké uplatnění v dalších vědních oborech.

Díky této práci jsem se mohl dozvědět o dalším číselném oboru, kvaternionech, s nímž jsem se během studia matematiky a fyziky na Pedagogické fakultě JU nesetkal.

Použité zdroje

Literatura

- [1] ANDREESCU T., ANDRICA D. *Complex numbers A to Z*. 1. vydání. [s.n.]. Boston. 2006. ISBN 0-8176-4326-5. Kniha je v elektronické podobě dostupná na:
<http://thunhan.files.wordpress.com/2008/08/tituadreescu-complexnumbersfromatoz.pdf>.
- [2] CALDA EMIL.: *Matematika pro gymnázia: Komplexní čísla*. 4. vydání. Praha. Prometheus. 1994. ISBN 978-80-7196-364-6.
- [3] GREGA J., KLUVANEC D., RAJČAN E.: *Matematika pre fyzikov*. 1. vydání. Bratislava. Slovenské pedagogické nakladateľstvo. 1975.
- [4] HALLIDAY D., RESNICK R., WALKER J.; red. čes. překl. OBDRŽÁLEK J., DUB P. *Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. Vysoké učení technické v Brně – nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha. 2000. ISBN 80-214-1868-0 (VUTIUM).
- [5] KARGER ADOLF: *Historie a užití kvaternionů v geometrii*. MFF UK. Geometry and Computer Graphics. 2007.
- [6] NAHIN, P.J. *An Imaginary Tale: The Story of i*. Princeton University Press. 1998. ISBN-13: 978-0691027951.
- [7] Jednota českých matematiků a fyziků. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. Ročník 38. 1993. Č. 6.
- [8] POLÁK JOSEF. *Přehled středoškolské matematiky*. 9. vydání. Praha. Prometheus. 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.
- [9] PROŠKOVÁ, J. *Kvaterniony a jejich užití v geometrii. Bakalářská práce*. Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta aplikovaných věd. 2006. Bakalářská práce je volně dostupná na:
<http://www.aldebaran.cz/studium/VNP/kvaterniony.pdf>.
- [10] *Quaternions and Rotations*. Com S 477/577Notes. Yan-Bin Jia. Sep 20. 2010.
- [11] REKTORYS KAREL. *Přehled užití matematiky I*. Ročník C. Číslo spisů 487. Praha. Prometheus. 2000. ISBN 80-7196-180-9.
- [12] SVOBODA E. *Přehled středoškolské fyziky*. 4. vydání. Praha. Prometheus. 2006. ISBN 80-7196-307-0.

- [13] ŠEBOŘ PETR. *Skeletální animace, bakalářská práce*. Univerzita Karlova v Praze. Matematicko-fyzikální fakulta. 2006. Bakalářská práce je volně dostupná na: <http://cgg.mff.cuni.cz/thesis/sebor/sebor.pdf>.
- [14] VOŠICKÝ ZDENĚK. *Matematika v kostce*. 2. vydání. Havlíčkův Brod. Fragment. 2004. ISBN 80-7200-964-8.

Internetové odkazy

- [15] Stopka M. *Hra s písmenky - wxMaxima - AbcLinuxu.cz*. [online]. 18-05-2006. [cit.2013-04-16]. Dostupné z: <http://www.abclinuxu.cz/clanky/programovani/hra-s-pismenky-wxmaxima>.
- [16] Kucuk S.; Bingul Z. *Robot Kinematics: Forward and Inverse Kinematics - InTech*. [online]. 2006-12-01. [cit.2013-04-16]. Dostupné z: http://cdn.intechopen.com/pdfs/379/InTech-robot_kinematics_forward_and_inverse_kinematics.pdf.
- [17] *Wolfram Alpha - Wikipedie*. [online]. 2013-03-23. [cit. 2013-04-16]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Wolfram_Alpha.
- [18] Bogomolny A. *A Case of Similarity - Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*. [online]. 2013-04-12. [cit. 2013-04-16]. Dostupné z: www.cut-the-knot.org/ctk/Similarity.shtml.
- [19] Bogomolny A. *Asymmetric Propeller (An Interactive Gizmo)*. [online]. 2013-03-15. [cit. 2013-04-16]. Dostupné z: <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/AsymmetricPropeller.shtml#Explanation>.
- [20] Bogomolny A. *All about medians - Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*. [online]. 2013-04-14 [cit. 2013-04-16]. Dostupné z: <http://www.cut-the-knot.org/triangle/medians.shtml#complex>.
- [21] *Quaternion - Wikipedia, the free encyclopedia*. [online]. 2013-04-14 [cit.2013-04-16]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>.
- [22] *Rotation (mathematics) - Wikipedia, the free encyclopedia*. [online]. 2013-03-17. [cit. 2013-04-16]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_%28mathematics%29.

[23] Bittner K. *Simulace pohybu vztlakového tělesa NASA HL-20 ...* - Humusoft. [online].
[cit. 2013-04-16]. Dostupné z:

http://www.humusoft.cz/pub/matlab/03_04/aerosp.htm.

[24] Kvaterniony a rotace ve 3D. [online]. [cit. 2013-04-16]. Dostupné z:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~sir/soubory/Kvaterniony.pdf>.

[25] Šír Z. *Kvaternniony a rotace ve 3D*. [online]. 2012-11-7. [cit. 2013-04-16]. Dostupné z:

<http://mks.mff.cuni.cz/archive/30/9.pdf>

[26] STUDNIČKA, F.J., O kvaternionech I, II, III. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, Vol. 5 (1876), No. 2, 49-66, No. 3, 97-102, No. 4, 145-151.[online]. [cit. 2013-04-16].
Čísla dostupná na adresách:

<http://dml.cz/dmlcz/121222>, <http://dml.cz/dmlcz/108849>, <http://dml.cz/dmlcz/121715>.

[27] *Tutorials - Tutorial:Main Page - GeoGebraWiki*. [online]. 2013-01-25. [cit. 2013-04-16].

Dostupné z: <http://wiki.geogebra.org/en/Tutorial%3>