

Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jiří Klučka

Významná čísla v matematice

Katedra matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

Studijní program: Finanční matematika

2009

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že bakalářskou práci na téma „Významná čísla v matematice“ jsem vypracoval samostatně. Veškerou použitou literaturu a podkladové materiály uvádím v přiloženém seznamu literatury.

V Českých Budějovicích dne:

Podpis

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval Mgr. Romanovi Haškovi, Ph.D. za cenné připomínky a odborné vedení během mé práce.

Abstrakt: ČJ

Tato práce je věnována asi nejznámější matematické a fyzikální konstantě, kterou je číslo π . Práce je rozdělena na dvě hlavní části. V první části se zabývám historickým vývojem této konstanty od první zmínky v Babylonii až po současné výpočty pomocí počítačů. Ve druhé části jsem vybral některé z metod, pomocí kterých můžeme vypočítat hodnotu π a provedl jejich rozbor. V závěru své práce jsem uvedl několik vybraných vzorců, kde se číslo π vyskytuje. Cílem práce je přiblížit celkový vývoj čísla π , jak ho chápaly dávné civilizace až po současnost. Pomocné výpočty jsou prováděny v aplikaci Derive 6 a konstrukce vytvořeny v aplikaci Cabri II plus.

Klíčová slova: Číslo pí, Ludolfovo číslo

Abstract: AJ

This bachelor is devoted to one of the most famous mathematical and physical constant which is the number π . The work is divided into two main parts. In the first part I'm dealing with the historical evolution of this constant from the first mention in Babylonia to the present calculations by using computers. In the second part, I chose some of the methods by which we can calculate the value of π and perform their analysis. At the end of my bachelor, I said selected number of patterns where the number of π occurs. The aim of this bachelor is to bring closer to the overall development of the number π , how the ancient civilization were declaratory of this constant to the present understanding. Auxiliary calculations are carried out in Derive 6 and the structure created in Cabri II plus.

Keywords: Number pi, Ludolph's number

Obsah

Úvod.....	6
1 Historický vývoj čísla π	8
1.1 První doklady	8
1.2 Babylonie a Egypt.....	12
1.3 Řecko.....	15
1.4 Čína	17
1.5 Indie	20
1.6 Evropa	25
1.7 Počítačový věk.....	28
2 Metody výpočtu čísla π	30
2.1 Archimedova metoda	30
2.2 Vieteho metoda.....	35
2.3 Wallisův vzorec.....	39
3 Vzorce obsahující π	42
4 π na 1 500 desetinných míst.....	45
Závěr.....	46
Literatura a ostatní použité zdroje	47

Úvod

Tématem bakalářské práce jsou významná čísla v matematice. Zabývat se budeme nejznámější konstantou, kterou známe z matematiky nebo fyziky. Je to samozřejmě Ludolfovo číslo π (pí).

Číslo π je všem známé, protože s touto konstantou se každý setkal na základní škole při výpočtech v geometrii: při výpočtech rovinných obrazců (obvod a obsah kruhu nebo kruhové výseče) a těles (objem a povrch koule, válce a kuželu), kde π představuje konstantu (3,14159...), která se za žádných okolností nemění. Například když je poloměr kružnice 10 jednotek, tak π je stejné, jako kdyby byl poloměr 1 jednotka.

Číslo π má několik vlastností. Jako první můžeme uvést fakt, že π je iracionální číslo, což znamená, že nemůže být vyjádřeno ve tvaru zlomku (nemůže být zapsáno jako podíl dvou celých čísel a/b , kde b je různé od nuly), tím pádem nejde vyčíslit konečným počtem cifer a také ho nelze vyjádřit ani číslem s nekonečným periodickým desetinným rozvojem.

Dále víme, že π je číslo transcendentní. To znamená, že je to takové komplexní číslo, které není kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty (Komplexní číslo vzniká rozšířením oboru reálných čísel. Například kvadratická rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá řešení v oboru reálných čísel, protože její diskriminant (-4) je záporný a tím pádem nemůžeme jeho odmocninu definovat. Ale komplexní číslo má dvě složky, reálnou a imaginární, a můžeme ho zapsat ve tvaru $a + bi$, kde a a b jsou reálná čísla a číslo i znamená imaginární jednotku, definovanou vztahem $i^2 = -1$. Daná rovnice má pak dvě řešení, $\pm i$).

Přesto má pro nás π velký význam v mnoha výpočtech. Proč má pro nás takový význam? Jak se k němu dospělo? Existuje vůbec nějaký spolehlivý způsob, jak zjistíme hodnotu tohoto čísla s libovolnou, předem zvolenou přesností? Jestli ano, tak kolik takových způsobů existuje? To jsou otázky,

které si každý položí, když se začne zajímat o číslo π . Ten, kdo se o číslo π blíže nezajímá, může v něm vidět například jenom konstantu 3,14, známou ze školních příkladů, která komplikuje výpočty a nutí zaokrouhlovat při snaze vyjádřit výsledek pomocí desetinného čísla.

Touto prací bych rád všem zájemcům přiblížil tuto konstantu, jak jsem ji poznal já. V následujícím textu se pokusím vysvětlit odvození této konstanty, její vlastnosti a zajímavosti, které úzce souvisí s danou problematikou. Důkazy a výpočty jsou prováděny podrobně, aby práce byla srozumitelná nejen odborné matematické veřejnosti, ale i širšímu publiku. Tyto důkazy a výpočty jsou prováděny pomocí matematického programu Derive 6 a pro znázornění konstrukcí byla použita aplikace Cabri II plus.

Práce je rozdělena do dvou hlavních částí. První část, která je převážně teoretická, se zabývá historickým vývojem čísla π . Tento vývoj od první zmínky až po současnost můžeme rozdělit do určitých oblastí, které se problematikou π zabývaly, a tyto oblasti pak navzájem porovnávat.

Ve druhé části se pak zaměříme na vybrané metody, pomocí kterých můžeme vypočítat π na libovolný počet desetinných míst. U těchto metod si můžeme ukázat, jak vznikly nebo jak rychle konvergují. Pomocí aplikace Derive si spočítáme hodnoty pro libovolně velké n (čím je n větší, tím je hodnota π přesnější).

Výše uvedené dvě hlavní části doplňuje zbývající část práce. V této části je uvedeno číslo π na 1500 správných desetinných míst a také přehled vzorců, kde se toto číslo vyskytuje.

1 Historický vývoj čísla π

1.1 První doklady

Už je to asi milion let od doby, co se člověk objevil na této planetě. Během této doby se naučil poznávat tvary, velikosti a uvědomoval si, že jsou nějaké vztahy mezi určitými veličinami. První dokumentovaná fakta se objevují kolem roku 2000 před n. l. Lidé kolem tohoto roku začali chápat význam konstanty, kterou v dnešní době značíme π , a našli její hrubou aproximaci. Jak k tomu dospěli? Už dávno před vynálezem kola si člověk uvědomoval zvláštnost pravidelného tvaru kruhu. Viděl ho jako okraj slunce nebo u některých rostlin. Když začal vnímat vztahy mezi různými veličinami, například že větší kameny jsou těžší, nebo že z větší kořisti je více potravy, potom si musel všimnout, že: čím větší je kruh „napříč“, tím delší je „kolem“. Za zmínku stojí skutečnost, že kruh je rovinný obrazec, který má při daném obvodu maximální plošný obsah. To samé samozřejmě platí pro kouli, že při daném povrchu zaujímá maximální objem.

Člověk začal kvantitativně uvažovat. Jestliže má kámen dvojnásobný objem, potom bude dvojnásobně těžký; jestliže bude pole dvakrát větší, tak z něj bude dvakrát více obilí. Toto pravidlo „čím více...., tím více“ neplatilo pořád, neznamena vždy přímou úměrnost. Třeba strom, který je dvojnásob starý, není vždy dvakrát vyšší. Pravděpodobně se lidé naučili, vědomě nebo nevědomě, uvažováním, zkušeností nebo instinktem, úměrnosti. Začali si uvědomovat, že jsou dvojice veličin takové, že je-li jedna z nich zvětšena dvakrát, třikrát nebo zmenšena na polovinu, pak druhá se taky zvětší dvakrát, třikrát nebo zmenší na polovinu. Někdo ale musel stanovit obecné pravidlo. Říci, že z jednoho pole máme poloviční úrodu, z dvou polí celou úrodu a z tří polí jeden a půl úrody, to platí pouze pro určitá pole a úrody. Ale někteří zvědaví jedinci zřejmě spatřili něco společného v tomto chování veličin. Rozhodujícím krokem pak mohlo být zjištění, že úměrné veličiny mají stálý

$$\text{obvod: průměr} = \text{konstanta všech kružnic} \rightarrow \pi = \frac{C}{D}, \quad (1)$$

Číslo π bylo nejdříve označováno jako Ludolfovo číslo. Bylo tak pojmenováno podle nizozemského matematika Ludolfa van Ceulena, který vypočítal toto číslo s přesností na 35 desetinných míst.

[illegible]

Obr. 1 Konstanta je značena řeckým písmenem π .

9

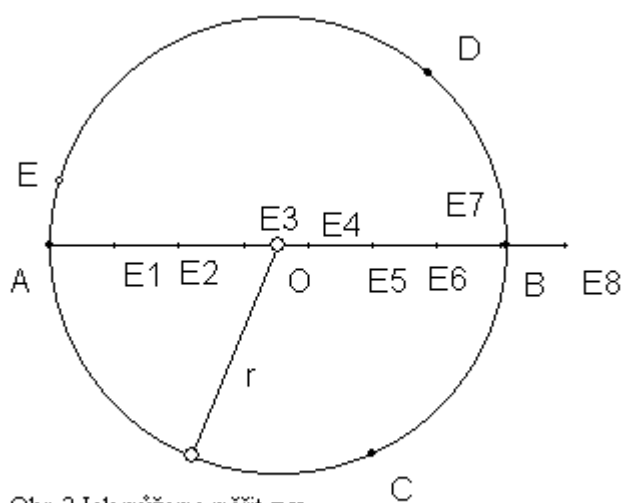
Okolo roku 2000 př. n. l. se
 Babyloňané dostali
 k hodnotě

$$\pi = 3\frac{1}{8} = 3,125$$

a Egypťané k hodnotě

$$\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,1605.$$

Jak byly tyto hodnoty asi
 získány? Představme si, že
 jsme asi 2000 let př. n. l.
 v Egyptě a máme



Obr. 2 Jak můžeme měřit π v písku.

k dispozici jenom kůly, plochu písku a provaz. Vezmeme kůl a zapíchneme ho do písku. Ke kůlu přivážeme jeden konec provazu a druhý konec navážeme k druhému kůlu s ostrou špičkou. Tento kůl držíme, aby provaz byl napnutý, a kreslíme kruh v písku. Když máme kruh, tak vyjmeme kůl, který byl uprostřed a vznikne nám střed O (obr. 2). Nyní si zvolíme nějaký bod A na vytvořené kružnici a vezmeme další provaz, který natáhneme z bodu A přes střed až protne kružnici na druhé straně v bodě B. Tento provaz, který nám vytvoří délku AB, si označíme například kusem uhlu nebo ho jednoduše v daném místě přeřízneme (toto je průměr kruhu). Dále vezmeme provaz délky AB a pokládáme ho do kruhové rýhy s počátkem v bodě A. Dosáhli jsme bodu C. Položíme znovu provaz s počátkem v bodě C a získáváme bod D. To samé ještě jednou a máme bod E. Vidíme, že provaz se vešel do obvodu třikrát a kousek. Abychom zjistili, jak je velký zbývajcí kousek, změříme délku EA a nanášíme ji na délku AB. Zjistíme, že se nám tam vejde sedmkrát až osmkrát. My dnes vidíme, že 7 je blíže ke správnému výsledku než 8, ale tehdy se měřilo za předpokladu, že máme jen lano, přibližný kruhový tvar a přibližně „rovný“ písek.

Změřili jsme, že délka EA je mezi $\frac{1}{7}$ a $\frac{1}{8}$ délky AB, takže naše aproximace je:

$$3 \frac{1}{7} < \pi < 3 \frac{1}{8}.$$

Toto mohl být jeden ze způsobů, jak se podařilo ve starých civilizacích určit přibližnou hodnotu π .

Ve Védách (Vědy – rozsáhlý posvátný komplex textů starých Indů, asi 1500 př. n. l.) se například objevuje hodnota $\pi = \sqrt{10}$. Tato hodnota nejspíš vznikla nesprávnou úvahou Hindů, kteří měli danou řadu obvodů vepsaných mnohoúhelníků s 12, 24, 48 a 96 stranami a průměrem 10 jednotek. Tato řada je:

$$\sqrt{965}, \sqrt{981}, \sqrt{986} \text{ a } \sqrt{987}$$

Hindové předpokládali, že se obvod blíží k $\sqrt{1000}$, takže provedli

$$\pi = \sqrt{1000} / 10 = \sqrt{10},$$

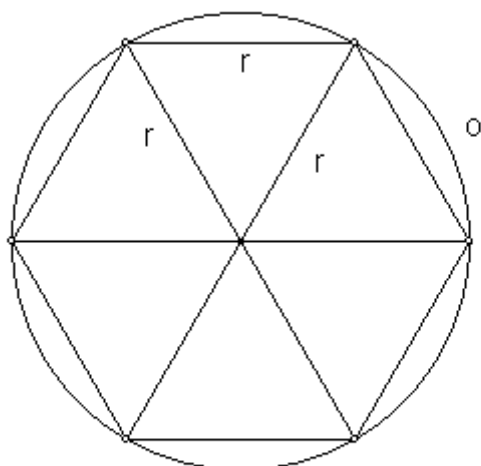
což je přibližně

$$\pi = 3,16228.$$

1.2 Babylónie a Egypt

Oblast Mezopotámie obývaly různé národy (Babyloňané, Sumerové, Asyřané

a jiní), kteří bojovali proti sobě nebo s Peršany či Chetity. Matematika z této oblasti se proto nazývá společně jako „Babylonská“. Právě Sumerové se zasloužili o předávání znalostí mezi generacemi, jelikož jako první začali používat písmo. Jejich klínové písmo zapisovali na hliněné destičky, které pak vytvrzovali na slunci. A právě zde je první zmínka o čísle π , jelikož roku



Obr. 3 Pravidelný šestiúhelník, jehož strana je rovna poloměru kružnice opsané.

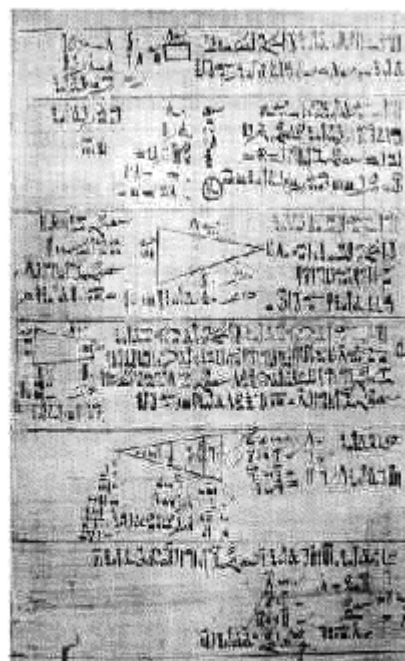
1936 byla nalezena jedna z destiček asi 200 mil od Babylonu. „Zmíněná destička, jejíž překlad byl částečně publikován až v r. 1950, je věnována různým geometrickým tvarům a stanoví, že poměr obvodu pravidelného šestiúhelníku k obvodu opsané kružnice je – vyjádřeno moderní notací – $57/60 + 36/(60)^2$ “ [1]. Babyloňané věděli, že obvod šestiúhelníku je roven šestinásobku poloměru kružnice opsané (obr. 3). To je také důvod, proč se rozhodli rozdělit kruh na 360 dílů (Babyloňané užívali šedesátkový systém, což je číselná soustava o základu 60, ne 10.). Takže ze vztahu (1) a našeho poměru $6r/C$, kde r je poloměr a C je obvod opsané kružnice dostaneme:

$$\frac{3}{\pi} = \frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2},$$

což nám dává

$$\pi = 3 \frac{1}{8} = 3,125.$$

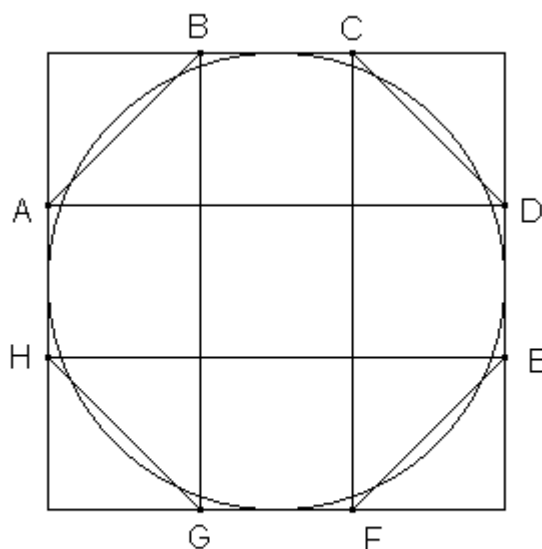
Prvním egyptským matematickým dílem byl Rhindův papyrus neboli Ahmesův papyrus (obr. 4). Henry Rhind byl skotský antikvář (antikvář neboli starožitník, který sbírá nebo studuje starožitnosti a starověky), který koupil tento papyrus v letovisku na Nilu r. 1858. Autorem tohoto papyru byl Ahmes. Ahmes byl egyptským knězem, který žil asi 1700 př. n. l. Ve svém papyru uvádí 87 matematických problémů i jejich řešení (některé jsou bez postupu, jak řešení našel). Papyrus začíná takto:



Obr. 4 Rhindův neboli Ahmesův papyrus.

„Přesné výpočty. Vstup do znalosti všech existujících věcí a všech temných záhad. Tato kniha byla přepsána roku 33, ve 4. měsíci období záplav, za panování krále Horního a Dolního Egypta „A-user-Re“, život plodícího, podobná spisům vytvořeným dříve v čase Krále Horního a Dolního Egypta Ne-Mat'et-Re. Je to písmo Ahmese, který přepsal tento spis.“ [1]

Z tohoto tvrzení usuzujeme, že Ahmes opsal tuto „knihu“. Egyptská hodnota $\pi = 4(\frac{8}{9})^2$ vychází ze vztahu kružnice a jejího opsaného čtverce. Ahmes použil mnohoúhelník (nepravidelný). Jeho plocha se příliš neliší od plochy kruhu, který je vepsán do čtverce (obr. 5). Plocha osmiúhelníku



Obr. 5 Osmiúhelník a kruh, který je vepsán do čtverce o straně 9 jednotek.

ABCDEFGH je rovna 5 čtvercům (každý má plochu 9 plošných jednotek) a 4 trojúhelníků (každý s plochou $4 \frac{1}{2}$ plošných jednotek). Dohromady je to 63 plošných jednotek. Tím pádem můžeme říci, že plocha kruhu s průměrem 9 jednotek je přibližně rovna 64 plošným jednotkám, což je 8^2 (tj. plocha čtverce o straně 8 jednotek). To nás vede k hodnotě

$$\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 64,$$

což je

$$\pi = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2,$$

a to se přibližně rovná

$$\pi = 3,1605.$$

My ovšem víme, že Ahmes provedl (možná úmyslně) dvě nepřesnosti ve výpočtu. A to když položil plochu kruhu rovnou ploše osmiúhelníku a po druhé když místo 63 použil 64. Zajímavé je, že se tyto dvě nepřesnosti částečně kompenzují.

1.3 Řecko

Jeden z nejskvělejších matematiků a fyziků byl Archimédes, který se narodil v Syrakusách (287 – 212 př. n. l.). Byl první, kdo poskytl metodu výpočtu π s libovolnou přesností. Tento princip je založen na výpočtu obvodu pravidelného mnohoúhelníku vepsaného do kruhu, který je menší než obvod kruhu a obvodu pravidelného mnohoúhelníku opsaného kruhu, který je větší než obvod kruhu (obr. 6). Jestliže zvolíme počet stran dostatečně velký, budou se oba obvody mnohoúhelníků blížit k obvodu kruhu, jeden zdola, druhý shora. Archimédes jako první použil šestiúhelník (je pravidelný) a potom zdvojnásoboval strany, až dosáhl mnohoúhelníku s 96 stranami, což znamenalo aproximaci:

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$$

neboli

$$3,14084 < \pi < 3,14286.$$

Podle Herona z Alexandrie, který ve své práci Metrica (60 př. n. l., objevené až 1896) uvádí, že Archimédes dospěl ještě dále a to ve své práci, která se ztratila, v níž uvádí hranice:

$$197\,888 : 62\,991 < \pi < 211\,875 : 67\,441$$

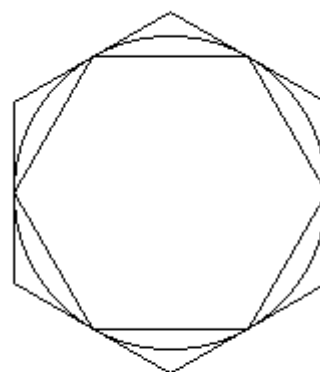
neboli

$$3,14152816 < \pi < 3,14163491.$$

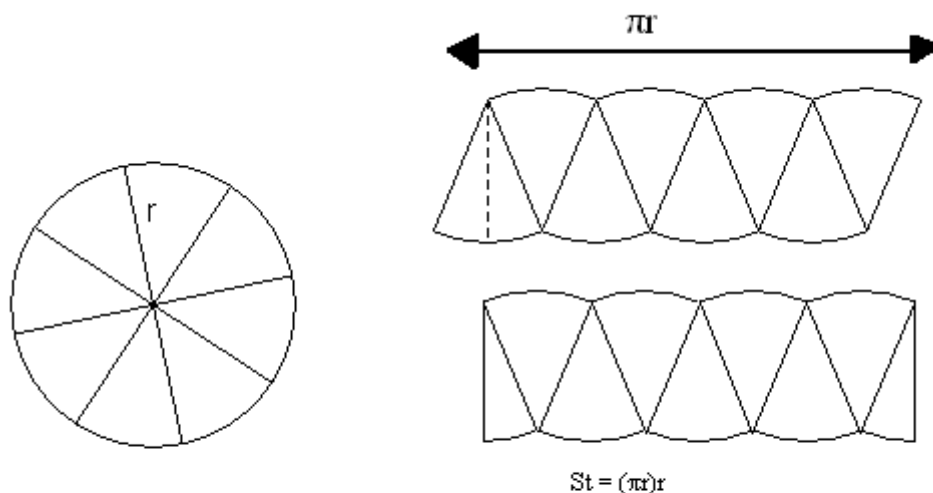
Archimédes také ve své práci "Měření kruhu" uvedl tři věty:

1. Kruh a pravoúhlý trojúhelník mají stejný obsah, když jedna odvěsna trojúhelníku je rovna obvodu kruhu a druhá jeho poloměru (obr. 7).

$$a = 2 \cdot \pi \cdot r, b = r; \quad S_t = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2; \quad S_k = \pi \cdot r^2$$



Obr. 6 Opsaný a vepsaný mnohoúhelník kruhu.



Obr. 7 Když rozdělíme kruh na nekonečně mnoho částí, které do sebe poskládáme jako na pravém obrázku, tak nám vznikne obdélník, kde jedna jeho strana bude πr a druhá bude r .

2. Poměr plochy kruhu a čtverce jeho průměru je přibližně 11:14.

$$\frac{11}{14} = \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot d^2} = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad \pi = \frac{44}{14} = \frac{22}{7}$$

3. Obvod kruhu je třikrát větší než jeho průměr a rozdíl obvodu kružnice a trojnásobku průměru je menší než $1/7$ a větší než $10/71$.

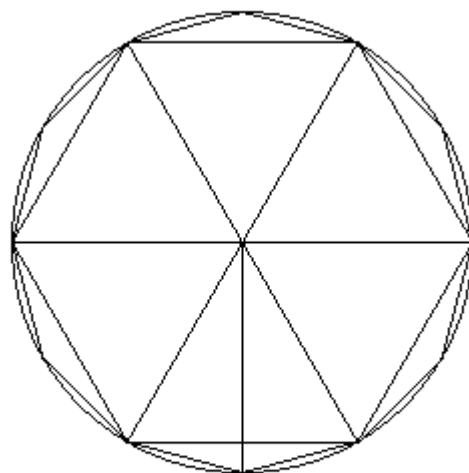
Poslední ze svých tvrzení Archimédes založil na výpočtu obvodů opsaných a vepsaných mnohoúhelníků. Použil mnohoúhelník s 96 stranami, jak je uvedeno výše.

Dalším řeckým učencem byl Ptolemaios, který byl především astronom a geograf (asi 85 – 165 n. l.). Sestavil něco jako náhražku za kdysi neznámé tabulky goniometrických funkcí (sin, cos, tg, cotg) a logaritmů. „Ptolemaios dělil kruh na 360 dílů a jeho průměr na 120 shodných dílů a jejich zlomky vyjadřuje v šedesátkové soustavě“ [9]. Jeho hodnota pro π byla $3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600}$, takže 3,14167..., což se liší od správné hodnoty až na čtvrtém desetinném místě. Podle mého názoru dospěl Ptolemaios k této hodnotě podle způsobu, který je uveden v první části této kapitoly (viz str. 10).

1.4 Čína

V Číně se v učebnicích matematiky nebo v běžné práci zeměměřičů používala přibližná hodnota $\pi = 3$. Tato hodnota byla pravděpodobně původně získána pro obsah kruhu a délku kruhu zvlášť, protože nebyla známa souvislost mezi těmito veličinami. Odhad $\pi = 3$ se používal ještě řadu století po *Matematice v devíti knihách*. Matematika v devíti knihách byl nejdůležitější čínský matematický spis z období před začátkem našeho letopočtu, který zřejmě vznikl během dlouhého období. Některé jeho počátky se datují až k roku 2673 př. n. l. Její autoři už znali závislost mezi obsahem kruhu a délkou kružnice. Zřejmě ale nespojovali kvadraturu kruhu a kubaturu koule, protože pro výpočet koule používali hodnotu $\pi = 27/8$. V 1. až 3. století provedli vědci přesnější výpočty čísla π . Často nejsou uváděny postupy, jak vědci k těmto výpočtům došli. Proto je možné, že vliv z Řecka pronikl do Číny. Například astronom a filosof Čang Cheng (78 – 139), který aproximoval $\pi = 3,162$, jelikož předpokládal, že poměr délky kružnice a obvodu čtverce jí opsané je 5:8. To odpovídá hodnotě $\pi = \sqrt{10}$. Dalším, který došel k hodnotě π neznámým způsobem byl vzdělaný vojevůdce Wang Fan. Jeho aproximace byla $\pi = 142/45$, tj. 3,155...

U Liu Huie (3. století), narozdíl od jeho předchůdců, víme, jakou metodu použil. Ve svém komentáři k první knize „*Matematiky v devíti knihách*“ použil způsob, který byl obdobný jako Archimédova metoda. Byl založen na principu postupné aproximace kruhu posloupností obsahů vepsaných pravidelných n -úhelníků (obr. 8). Liu Hui vycházel



Obr. 8 N -úhelník a $2n$ -úhelník vepsaný do kruhu.

z toho, že obsah kruhu S je menší než obsah útvaru, který je vytvořen pravidelným vepsaným mnohoúhelníkem (S_n) a obdélníky sestrojenými z jeho stran a opsaným odpovídajícím kruhovým úsečím $2(S_{2n} - S_n)$ (obr. 9). Z těchto poznatků mu vyplynula nerovnost:

$$S_{2n} < S < S_n + 2 \cdot (S_{2n} - S_n), \quad (1)$$

kde S je obsah kruhu, S_n a S_{2n} je obsah pravidelných vepsaných n -úhelníků s n a $2n$ počtem stran. Liu Hui tedy získal při poloměru $r = 10$ jednotek hodnoty:

$$S_{96} = 313 \frac{584}{625} \text{ a } S_{192} = 314 \frac{64}{625},$$

takže

$$\begin{aligned} 2 \cdot (S_{2n} - S_n) &= 2 \cdot (314 \frac{64}{625} - 313 \frac{584}{625}) = \\ &= 2 \cdot (\frac{196314}{625} - \frac{196209}{625}) = 2 \cdot \frac{105}{625} = \frac{210}{625}, \end{aligned}$$

kde je

$$S_n + 2 \cdot (S_{2n} - S_n) = \frac{196209 + 210}{625} = 314 \frac{169}{625},$$

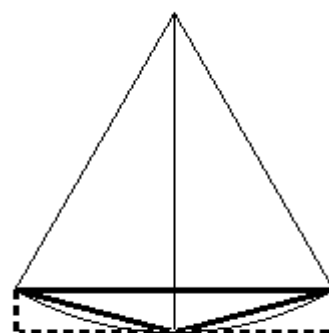
což je podle (1)

$$314 \frac{64}{625} < S < 314 \frac{169}{625} \rightarrow 314,1024 < S < 314,2704$$

Z této nerovnosti po vydělení ($r = 10$ a $S = \pi \cdot r^2$, takže vydělíme nerovnost 100) dostáváme aproximaci:

$$3,141024 < \pi < 3,142704$$

Liu Hui ale nevzal průměr dolní hranice (3,141024) a horní hranice (3,142704), ale vzal část výsledku 3,14, takže jeho hodnota je $\pi = 3,14$. Tuto hodnotu dále vyjádřil jako podíl $\frac{157}{50}$. Liu Hui dodává, že je možné pokračovat dále v aproximaci opsaných a vepsaných mnohoúhelníků. „Čím jemněji budeme dělit, tím menší bude chyba. Děleme neustále dál a dál, dokud se dělení nestane nemožným, pak dospějeme k ztotožnění s kružnicí a chyba se už neobjeví“ [2]. Liu Hui těmito slovy mohl myslet, že kruh splývá s vepsaným mnohoúhelníkem v limitě při neomezeném růstu počtu stran, nebo také mohl



Obr. 9 Detail kruhových úsečí.

myslet, že kruh a mnohoúhelník s dostatečně velkým počtem stran jsou identické.

Pro další své výpočty později použil mnohoúhelník s 3072 stranami a získal přesnost na 5 desetinných míst (3,14159).

Tsu Chung-Chih (5. století) byl ještě přesnější a v nedochované práci získal aproximaci

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927.$$

Je také autorem vyjádření π ve zlomku $355/113$, který je správný na 6 desetinných míst. Jeho přesnost byla v Číně překonána až o 1000 let později. Tato přesnost nebyla dosažena v Evropě až do 16. století.

1.5 Indie

V Indii se rozvíjela myšlenka pro výpočet čísla π pomocí rozkladu oblouku kružnice podle mocnin tangenty a kotangenty. Mělo to vést k přesnějšímu výpočtu čísla π . V 5. století dospěl k přibližnému vyjádření čísla π astronom a matematik Aryabhata. Jeho zlomek $62832/20000$, což je 3,1416, je pro dnešní π správný na tři desetinná místa.

Asi prvním důvěryhodným dílem se stal sanskrtský „Vědecký sborník“ („Tantra-sangraha“). Napsal ho jihoindický učenec Nilakantha (byl napsán 1501-1502). Nilakantha byl přesvědčen, že poměr délky kružnice a jejího průměru je iracionální. „Jestliže průměr měřený nějakou jednotkou délky je souměřitelný s touto jednotkou, pak délka kružnice nemůže být přesně změřena pomocí téže jednotky; a jestliže vzhledem k některé jednotce je měřitelná délka kružnice, pak touto jednotkou nelze měřit průměr“ [2].

Ve „Vědeckém sborníku“, pro větší přesnost výpočtu čísla π , byla délka čtvrtiny kružnice vyjadřována formou různých nekonečných řad, které jsou získány z obecné mocninné řady pro arkustangens. Obecné pravidlo rozkladu říká:

„Vezmi takový oblouk kružnice, že jeho sinus je menší než kosinus. Vynásob sinus oblouku poloměrem a děl kosinem. To dá první veličinu. Vynásob tuto veličinu čtvercem sinu a děl čtvercem kosinu, dostaneš druhou veličinu. Opakuj to, násobíš čísla 1, 3, 5,... Jestliže získané veličiny začneš střídavě odečítat a přičítat k první, pak konec konců dostaneš oblouk kružnice“ [2].

Zmíněnému návodu odpovídá:

$$r \cdot \alpha = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{r \cdot \sin^3 \alpha}{3 \cdot \cos^3 \alpha} + \frac{r \cdot \sin^5 \alpha}{5 \cdot \cos^5 \alpha} - \dots$$

V našem případě, kde $r = 1$, se vzorec změní na tvar:

$$\alpha = \tan \alpha - \frac{\tan^3 \alpha}{3} + \frac{\tan^5 \alpha}{5} - \dots,$$

takže naše řada pro $\alpha = 45^\circ$ je

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot n - 1} + K_n.$$

Zajímavé je, že $\pi/4$ se vyjadřuje jako součet S_n plus „opravné členy“ K_n . Tyto opravy K_n jsou dobré pro zlepšení aproximace pro malá n . „Opravné členy“ jsou vyjádřeny ve třech tvarech:

$$K_n^{(1)} = \frac{(-1)^n}{4 \cdot n}, \quad K_n^{(2)} = \frac{(-1)^n \cdot n}{4 \cdot n^2 + 1},$$

$$K_n^{(3)} = \frac{(-1)^n \cdot (n^2 + 1)}{n \cdot (4 \cdot n^2 + 5)}.$$

Takže například S_n pro $n=3$ je

$$S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15} \approx 0,86667$$

a „opravný člen“ je

$$K_3^{(1)} = \frac{(-1)^3}{4 \cdot 3} = -\frac{1}{12} \approx -0,08333.$$

Jestliže je $\pi/4 \approx 0,785$ a náš součet je

$$S_3 + K_3^{(1)} = \frac{13}{15} - \frac{1}{12} = \frac{47}{60}, \text{ což je asi } 0,7833,$$

pak vidíme, že při použití opravného členu se nám mnohem více zmenšila chyba.

Ve „Vědeckém sborníku“ jsou uvedeny i jiné řady, které konvergují mnohem rychleji než tato řada. Nejjednodušší je tato řada:

$$\frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{4^2 - 1} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n)^2 - 1} + \dots,$$

kde v případě malého n můžeme použít „opravný člen“, který je vyjádřen ve dvou tvarech:

$$K_n^{(1)} = \frac{(-1)^n}{2 \cdot (2 \cdot n + 1)^2}, \quad K_n^{(2)} = \frac{(-1)^n}{2 \cdot ((2 \cdot n - 1)^2 + 2)}.$$

A ještě vhodnější je řada:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \left(\frac{1}{1^5 + 4 \cdot 1} - \frac{1}{3^5 + 4 \cdot 3} + \frac{1}{5^5 + 4 \cdot 5} - \dots \right).$$

Hodnota π ve „Vědeckém sborníku je také zapsána ve zlomku:

$$\pi = \frac{104348}{33215} \approx 3,1415926539,$$

což je správná hodnota na 10 desetinných míst.

Porovnání konvergence řad

Pro každou řadu bereme prvních 50 členů a porovnáváme rychlost konvergence.

Řada 1

$$\frac{x}{4} = \sum_{n=1}^{50} \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot n - 1}$$

$$x = 3.121594652$$

$$a = \frac{(-1)^{50}}{4 \cdot 50}$$

$$a = 0.005$$

$$b = \frac{(-1)^{50} \cdot 50}{4 \cdot 50^2 + 1}$$

$$b = 0.004999500049$$

$$c = \frac{(-1)^{50} \cdot (50^2 + 1)}{50 \cdot (4 \cdot 50^2 + 5)}$$

$$c = 0.004999500249$$

$$p = 3.121594652 + 0.005$$

$$p = 3.126594652$$

$$r = 3.121594652 + 0.004999500049$$

$$r = 3.126594152$$

$$s = 3.121594652 + 0.004999500249$$

$$s = 3.126594152$$

Řada 1: Pro první řadu máme 3 tvary opravných členů (a, b, c). Vidíme, že konvergence řady je příliš pomalá (x). Ani při použití opravných členů nedostáváme příliš přesnou hodnotu π (p, r, s) pro prvních 50 členů řady.

Řada 2

$$\frac{x - 2}{4} = \sum_{n=1}^{50} \frac{(-1)^{n-1}}{(2 \cdot n)^2 - 1}$$

$$x = 3.141396632$$

$$a = \frac{(-1)^{50}}{2 \cdot (2 \cdot 50 + 1)^2}$$

$$a = 4.901480247 \cdot 10^{-5}$$

$$b = \frac{(-1)^{50}}{2 \cdot ((2 \cdot 50 - 1)^2 + 2)}$$

$$b = 5.100479445 \cdot 10^{-5}$$

$$s = 3.141396632 + 4.901480247 \cdot 10^{-5}$$

$$s = 3.141445646$$

$$r = 3.141396632 + 5.100479445 \cdot 10^{-5}$$

$$r = 3.141447636$$

Řada 2: Pro druhou řadu máme 2 tvary opravných členů (a, b). Vidíme, že konvergence (x) je rychlejší než u první řady. Při použití opravných členů dostáváme lepší přesnost pro π (s, r) než bez nich (x). Konvergence je ale stále pomalá, protože musíme použít prvních 50 členů řady, abychom získali přesnost π na 3 desetinná místa.

Řada 3

$$\frac{x}{4} = 4 \cdot \sum_{n=0}^{50} \frac{(-1)^n}{(1 + 2 \cdot n)^5 + 4 \cdot (1 + 2 \cdot n)}$$

$$x = 3.1415926543113$$

π

$$3.1415926535914$$

Řada 3: Třetí řada nemá žádné opravné členy, protože její konvergence je mnohem rychlejší než u předešlých řad. Pro prvních 50 členů řady dostaneme přesnost π na 7 desetinných míst (x). Výsledek můžeme porovnat se správnou hodnotou π .

1.6 Evropa

V Evropě v době feudalismu nebyly podmínky pro vědeckou práci v přírodních vědách. V této době měla církev neomezenou moc a každého učeně obžalovali z čarodějnictví. Až koncem 11. století, kdy začínají křížové výpravy, do Evropy pronikají poznatky z blízkého a středního východu, začíná překlad vědeckých děl z arabštiny. Ve druhé polovině 11. století žil byzantský matematik Michael Psellos (1018 – 1078). „Přisuzuje se mu jedno dílo o kvadriviu. V aritmetice však uvádí pouze různé typy čísel a proporcí a v geometrii poznamenává, že mínění o tom, jak najít obsah kruhu, se sice velmi rozcházejí, ale nejoblíbenější je prý metoda, při níž se za obsah bere geometrický průměr obsahů vepsaného a opsaného čtverce, což dává pro π hodnotu $\sqrt{8} = 2,82842\dots$ “ [2]. Výpočet je následující (viz obr. 10):

poloměr $r = 1$ jednotka,

takže obsah čtverce opsaného kruhu je

$$S_{\text{ops.}} = a^2,$$

kde

$$a = 2 \cdot r,$$

takže

$$S_{\text{ops.}} = (2 \cdot r)^2 = 2^2 = 4$$

a obsah čtverce vepsaného do kruhu je

$$S_{\text{veps.}} = b^2,$$

kde

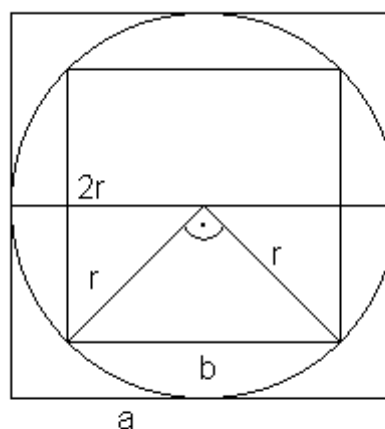
$$b^2 = r^2 + r^2 = 2 \cdot r^2,$$

takže

$$S_{\text{veps.}} = 2 \cdot r^2 = 2 \cdot (1^2) = 2.$$

Geometrický průměr (obecně zapsán jako $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n}$) vepsaného a opsaného čtverce je

$$GP = (4 \cdot 2)^{1/2} = \sqrt{8}.$$



Obr. 10 Opsaný a vepsaný čtverec kruhu.

A jelikož obsah kruhu, kde poloměr r je 1 jednotka, je

$$S_{\text{kruhu}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1^2) = \pi.$$

A jestli máme předpoklad, že obsah kruhu je roven geometrickému průměru opsaného a vepsaného čtverce, pak hodnota $\pi = \sqrt{8}$.

Zde je vidět, že byla matematika v Evropě na velmi nízké úrovni, odkud se musela znovu rozvíjet.

Začátkem 13. století Leonardo z Pisy zvaný Fibonacci (syn Bonacciho) dosáhl pomocí obvodů pravidelných opsaných a vepsaných 96–úhelníků nerovnosti

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}.$$

Z hodnot $\frac{4}{9}$ a $\frac{1}{5}$ udělal aritmetický průměr $\frac{29}{90}$. To je blízké $\frac{1}{3}$, takže Leonardo

pak bere jako π hodnotu $\frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1440}{5}}{\frac{1375}{15}} = \frac{288}{\frac{275}{3}} = \frac{864}{275} = 3,141818\dots$ Oproti

Archimédovi měl výhodu, že příslušné odmocniny mohl počítat pomocí decimální aritmetiky.

V roce 1573 Valentinus Otho nachází pomocí odečtení čitatele a jmenovatele Archimédovi ($22/7$) a Ptolemaiovi ($377/120$) aproximace hodnotu: $(377-22) / (120-7) = 355/113 = 3,14159292\dots$

Francois Viete vyjádřil v roce 1593 π jako nekonečný iracionální součin (více str. 35). Také pomocí Archimédovy metody vypočítal π na 9 desetinných míst, když použil mnohoúhelník s 393 216 stranami.

Významný krok udělal Holanďan Ludolph van Ceulen, který roku 1596 vypočítal π na 20 desetinných míst. Použil mnohoúhelník s 60×2^{29} stranami. Po jeho smrti (1615) jeho žena publikovala hodnotu π správně na 32 míst a podle Snelliuse (1621) to zlepšil ještě o další 3 místa. Jak bylo již dříve uvedeno, právě podle Ludolpha van Ceulena se číslo π nazývá Ludolfovo číslo.

V roce 1761 Johann Heinrich Lambert dokazuje, že π je číslo iracionální.

Jako poslední ve výzkumu π podal F. Lindeman roku 1882 důkaz, že číslo π je číslo transcendentní, což znamená, že není kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty [11].

1.7 Počítačový věk

Už je to asi 4000 let od doby, co se objevila první přibližná hodnota čísla π (Babylónie 2000 př. n. l.). Od této doby je snahou lidstva co nejpřesněji, tedy na co největší počet desetinných míst, vyjádřit tuto základní konstantu. Průlomem v počítání byly nekonečné řady, které umožnily vypočítat toto číslo s libovolnou přesností. S postupem času se objevovaly stále vhodnější nekonečné řady, tedy řady, které rychleji konvergují, kde každý další člen znamená zlepšení přesnosti výsledku o určitý počet desetinných míst. V době, kdy ještě neexistovaly počítače, trávili lidé nad výpočtem π často mnoho měsíců. Někteří byli pilní a snaživí počtáři, jiní zase vymysleli lépe konvergující řadu a tím pádem potřebovali k výpočtu daleko méně času. I v dnešní počítačové době pokračují podobné závody. Stále je nejdůležitější najít co nejlépe konvergující řadu, aby byl výpočet na počítači co nejrychlejší. Také je zajímavé si uvědomit, že vhodná řada pro počítání na papíře často není vhodná pro počítání na počítači. Důvodem je, že počítač používá jinou číselnou soustavu než člověk. Počítač počítá ve dvojkové soustavě, zatímco člověk v desítkové. Takže výsledek, který počítač spočítá, musí být nakonec převeden do desítkové soustavy, a to zabírá zhruba stejnou dobu, jako samotný výpočet.

První výpočet pomocí počítače provedl John von Neumann v roce 1949. Vypočítal číslo π na 2037 desetinných míst. Výpočet trval 70 hodin. V následujících letech bylo π spočítáno na desetitisíce desetinných míst a až v roce 1973 bylo spočítáno na milion desetinných míst. Pokrok byl nejen díky rychlejšímu hardware, ale také novým algoritmům. Dalším důležitým krokem ve vývoji bylo objevení rychlé Fourierovy transformace, která umožňuje počítači provádět velký počet aritmetických operací extrémně rychle. Pomocí nových algoritmů, které několikanásobně zlepšovaly přesnost v každém dalším kroku předešlých algoritmů, jsme dostávali π na více desetinných míst. Jonathan a Peter Borweinovi objevili algoritmus, který v každém dalším

kroku čtyřikrát znásobil přesnost předešlého algoritmu. Tento algoritmus byl použit v roce 1999 v Kanadě pro výpočet π na

206 158 430 000

desetinných míst. Aktuální světový rekord, který je z prosince 2002, byl vypočítán v Kanadě počítačovými vědci (Ushio a Kuroda). Celková doba výpočtu byla 601 hodin a 56 minut. Jejich výpočet π je na

1 241 100 000 000 neboli $1,2411 \cdot 10^{12}$

desetinných míst. Pro jejich výpočet byly použity následující dva vzorce [10]:

Hlavní výpočet (vzorec objevil K. Takano v roce 1982):

$$\pi = 48 \arctg\left(\frac{1}{49}\right) + 128 \arctg\left(\frac{1}{57}\right) - 20 \arctg\left(\frac{1}{239}\right) + 49 \arctg\left(\frac{1}{110443}\right).$$

Kontrolní výpočet (vzorec objevil F. C. M. Stoemer v roce 1896):

$$\pi = 176 \arctg\left(\frac{1}{57}\right) + 28 \arctg\left(\frac{1}{239}\right) - 48 \arctg\left(\frac{1}{682}\right) + 96 \arctg\left(\frac{1}{12943}\right).$$

Pro výpočet počítačem jsou vždy potřeba 2 metody. Když obě dvě metody vyjdou shodně, pak si můžeme být jisti, že jsme počítali správně.

2 Metody výpočtu čísla π

2.1 Archimédova metoda

Číslo π můžeme vypočítat pomocí několika způsobů. Úplně první metodou byla Archimédova metoda. Pomocí této metody můžeme vypočítat π na libovolný počet desetinných míst. Tato metoda je založena na obvodech nebo obsahích pravidelných n -úhelníků a je pouze na nás, jak velké n si zvolíme. Čím více stran bude n -úhelník mít, tím naše aproximace bude lepší a přesnější. Tato metoda je velmi jednoduchá na pochopení i na aplikaci. I proto většina vědců používala tento způsob pro svoje výpočty. Třeba Francois Viete vyjádřil π jako nekonečný iracionální součin, ale jeho vzorec se nehodí pro výpočet numerické hodnoty π , protože s odmocninami se špatně pracuje. Proto pro svoje výpočty používá Archimédovu metodu s pravidelnými mnohoúhelníky, které mají 393 216 stran. Archimédova metoda byla v historii matematiky asi nejpoužívanější metodou vědců.

V historii použili Archimédovu metodu například:

Archimédes (287 – 212 př.n.l.): 96-úhelník; přesnost na 3 desetinná místa

Aryabhatta (476-550): 384-úhelník; přesnost na 4 desetinná místa

Adriaen van Rooman (1561-1615): 2^{30} -úhelník (1 073 741 824 stran);
přesnost na 15 desetinných míst

Ludolph van Ceulen (1539-1610): 2^{62} -úhelník (4 611 686 018 427 387 904 stran); přesnost na 20 desetinných míst,
později na 32 a podle Snelliuse na 35 desetinných míst

Podstata Archimédovy metody

Podstatou této metody je postupné vepisování pravidelných n -úhelníků do kruhu a opisování stejných n -úhelníků kruhu. U těchto n -úhelníků se

zajímáme o jejich obvod. Základem je šestiúhelník, který se postupným zdvojnásobováním stran (s rostoucím n) blíží k obvodu kruhu. U vepsovaných n -úhelníků je tak stanovena hranice dolního odhadu. A u n -úhelníků, které jsou kruhu opsány, je stanovena hranice horního odhadu. Mezi horním a dolním odhadem se nalézají naše hodnoty čísla π , která jsou přesná na určitý počet desetinných míst. Tato přesnost závisí na velikosti n .

Archimédes věděl, že když $\alpha = \pi/n$ je poloviční úhel, který přísluší jedné straně ve středu pravidelného mnohoúhelníku, pak délka této strany vepsaného mnohoúhelníku je:

$$i = 2 \cdot r \cdot \sin \alpha$$

a délka strany opsaného mnohoúhelníku

$$c = 2 \cdot r \cdot \tan \alpha.$$

Z toho plyne, že pro obvod O máme aproximaci

$$n \cdot i < O < n \cdot c.$$

To znamená

$$n \cdot 2 \cdot r \cdot \sin \alpha < 2 \cdot r \cdot \pi < n \cdot 2 \cdot r \cdot \tan \alpha,$$

což nám po vydělení $2 \cdot r$ dává

$$n \cdot \sin \alpha < \pi < n \cdot \tan \alpha.$$

A jestliže počet stran n zdvojíme k -krát, pak dostaneme

$$2^k \cdot n \cdot \sin (\alpha / 2^k) < \pi < 2^k \cdot n \cdot \tan (\alpha / 2^k)$$

A když zvolíme k dostatečně velké, potom se bude dolní i horní limita blížit k hodnotě π .

Aproximace π pomocí Archimédovy metody

$$y := 2^k \cdot 6 \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{k}{2}}\right) < \pi < 2^k \cdot 6 \cdot \tan\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{k}{2}}\right)$$
$$y := 2^k \cdot 6 \cdot \sin\left(\frac{30}{\frac{k}{2}}\right) < \pi < 2^k \cdot 6 \cdot \tan\left(\frac{30}{\frac{k}{2}}\right)$$

PrecisionDigits := 200

NotationDigits := 20

Popis: Na prvních dvou řádkách máme vzorec pro výpočet π (y). Čím větší je k , tím lepší je naše aproximace. Hodnota proměnné „PrecisionDigits“ je přesnost, kterou požadujeme (v našem případě je to přesnost na 200 desetinných míst) a „NotationDigits“ je počet desetinných míst, které se nám zobrazí za desetinnou čárkou.

Pro k dosazujeme hodnoty od 0 do 10. V tabulce můžeme porovnat, jak se nám liší aproximace pro různé k . Vidíme, že pro $k=10$ je naše metoda přesná na 6 desetinných míst.

$$\text{Výsledek} := \text{TABLE} \left(2^{\frac{k}{2}} \cdot 6 \cdot \sin \left(\frac{30}{k} \cdot 1^\circ \right) < \pi < 2^{\frac{k}{2}} \cdot 6 \cdot \tan \left(\frac{30}{k} \cdot 1^\circ \right), k, 0, 10 \right)$$

Výsledek :=

0	$3 < \pi < 3.464101615137754587$
1	$3.1058285412302491481 < \pi < 3.2153903091734724776$
2	$3.1326286132812381971 < \pi < 3.1596599420975004833$
3	$3.1393502030468672071 < \pi < 3.146086215131434971$
4	$3.1410319508905096381 < \pi < 3.1427145996453682981$
5	$3.1414524722854620754 < \pi < 3.1418730499798238717$
6	$3.1415576079118576455 < \pi < 3.1416627470568485262$
7	$3.1415838921483184086 < \pi < 3.1416101766046895387$
8	$3.1415904632280500957 < \pi < 3.1415970343215261519$
9	$3.1415921059992715505 < \pi < 3.1415937487713520279$
10	$3.1415925166921574475 < \pi < 3.1415929273850970335$

V následující tabulce je hodnota k od 10 do 30 a v každém kroku vzrůstá o 2. Vidíme, že aproximace poměrně rychle roste. Když je $k=30$, tak je aproximace přesná na 18 desetinných míst.

$$\text{Výsledek} := \text{TABLE} \left(2^{\frac{k}{2}} \cdot 6 \cdot \sin \left(\frac{30}{k} \cdot 1^\circ \right) < \pi < 2^{\frac{k}{2}} \cdot 6 \cdot \tan \left(\frac{30}{k} \cdot 1^\circ \right), k, 10, 30, 2 \right)$$

$$\text{Výsledek} := \begin{bmatrix} 10 & 3.1415925166921574475 < \pi < 3.1415929273850970335 \\ 12 & 3.1415926450336908966 < \pi < 3.1415926707019980478 \\ 14 & 3.1415926530550368416 < \pi < 3.1415926546593060324 \\ 16 & 3.1415926535563709636 < \pi < 3.141592653656637788 \\ 18 & 3.1415926535877043462 < \pi < 3.1415926535939710228 \\ 20 & 3.1415926535896626827 < \pi < 3.1415926535900543499 \\ 22 & 3.1415926535897850787 < \pi < 3.1415926535898095579 \\ 24 & 3.1415926535897927284 < \pi < 3.1415926535897942584 \\ 26 & 3.1415926535897932065 < \pi < 3.1415926535897933022 \\ 28 & 3.1415926535897932364 < \pi < 3.1415926535897932424 \\ 30 & 3.1415926535897932383 < \pi < 3.1415926535897932387 \end{bmatrix}$$

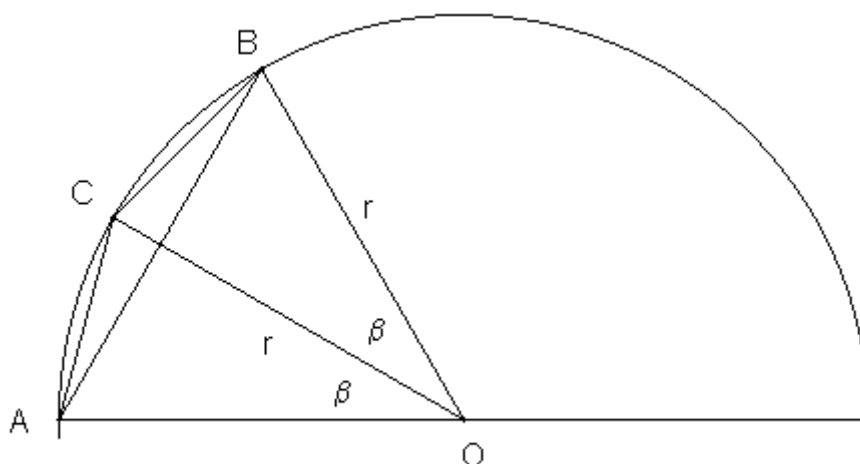
Pomocí Archimédovy metody můžeme spočítat hodnotu π na libovolný počet desetinných míst. Jestliže se k blíží k nekonečnu, pak se obvod n -úhelníků blíží k obvodu kruhu.

2.2 Vieteho metoda

Francois Viète (1540 – 1603) byl francouzský právník, advokát a také jeden z amatérských matematiků. Další amatérští matematici byli Joost Bürgi (švýcarský hodinář) nebo třeba John Napier (skotský šlechtic a teolog). Byl také v radě britského parlamentu, než byl nucen uprchnout před Hugenoty. Když uprchl a byl tak následujících 6 let v nemilosti, zabýval se matematikou. Matematika mu pomohla k získání hodnosti Master of Request (1580) a Královský tajný rada (1589). Tyto tituly si vysloužil od Jindřicha IV. za rozluštění španělského kódu, který byl sestaven z asi 500 cifer. Viète měl výborné výsledky v aritmetice, algebře, trigonometrii a geometrii. Také v terminologii zavedl několik nových slov a některá přežila až do dnešní doby, jako „negativní“ nebo „koeficient“. Viète byl svázán metodou Archimédova mnohoúhelníku. Byl jeden z těch, co použili mnohoúhelník k rozvinutí teorie výpočtu π (další byl třeba Descartes nebo Huygens).

Podstata Vieteho metody

Viète se zčásti řídil podle Archimédových zásad, ale místo šestiúhelníku začal od čtverce. Jeho postup spočíval v tom, že udělal poměr plochy mnohoúhelníku s n stranami k ploše mnohoúhelníku s $2n$ stranami (obr. 11).



Obr. 11 N -úhelník a $2n$ -úhelník.

Plocha mnohoúhelníku s n stranami je:

$$S(n) = n \cdot \text{plocha trojúhelníku OAB}$$

$$S(n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot r^2 \cdot \sin 2\beta, \quad (1)$$

$$S(n) = n \cdot r^2 \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta, \quad (2)$$

a podobně pro plochu mnohoúhelníku s 2n stranami

$$S(2n) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot n \cdot r^2 \cdot \sin \beta = n \cdot r^2 \cdot \sin \beta. \quad (3)$$

Takže poměr $S(n) / S(2n)$ je

$$S(n) / S(2n) = \frac{n \cdot r^2 \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta}{n \cdot r^2 \cdot \sin \beta} = \cos \beta. \quad (4)$$

Jestliže znovu zdvojnásobíme počet stran mnohoúhelníku, pak dostaneme

$$\frac{S(n)}{S(4n)} = \frac{S(n)}{S(2n)} \cdot \frac{S(2n)}{S(4n)} = \cos \beta \cdot \cos(\beta/2). \quad (5)$$

Takže jestli tímto způsobem budeme pokračovat, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{S(n)}{S(2^k n)} &= \frac{S(n)}{S(2n)} \cdot \frac{S(2n)}{S(4n)} \cdot \dots \cdot \frac{S(2^{k-1}n)}{S(2^k n)} = \\ &= \cos \beta \cdot \cos(\beta/2) \cdot \dots \cdot \cos(\beta/2^k). \end{aligned} \quad (6)$$

Viete předpokládal, že plocha n-úhelníku s 2^k stranami je nerozlišitelná od plochy kruhu, když k se blíží k nekonečnu. Takže

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(2^k n) = \pi \cdot r^2. \quad (7)$$

Jestliže dosadíme (7) a (1) do (6), tak dostaneme

$$\frac{\frac{1}{2} n \cdot r^2 \cdot \sin 2\beta}{\pi \cdot r^2} = \cos \beta \cdot \cos(\beta/2) \cdot \dots \cdot \cos(\beta/2^k),$$

což je

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} n \cdot 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta}{\cos \beta \cdot \cos(\beta/2) \cdot \dots \cdot \cos(\beta/2^k)}. \quad (8)$$

Viete zvolil jako počáteční n-úhelník čtverec, kde $n=4$, $\beta = 45^\circ$, $\cos \beta = \sqrt{1/2}$, $\sin \beta = \sqrt{1/2}$. Takže ve vzorci (8) můžeme každý faktor kosinu vyjádřit pomocí předchozího faktoru. Použijeme vzorec pro poloviční úhel

$$\cos(\beta/2) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \beta}, \quad (9)$$

takže z (8) dostáváme

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \sqrt{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right]} \cdot \dots},$$

což je

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \sqrt{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right]} \cdot \dots}. \quad (10)$$

Tento vzorec (10) Viete publikoval v roce 1593 v jeho díle „Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII“ (Různé matematické problémy, svazek 8). Také je třeba poznamenat, že Vietův vzorec se nehodí pro numerický výpočet čísla π . A to z důvodu, že odmocniny jsou příliš nepohodlné. Sám Viete použil pro výpočet π na 9 desetinných míst Archimédovu metodu s mnohoúhelníkem s 393 216 stranami.

Aproximace π pomocí Vieteho vzorce

NotationDigits := 60

PrecisionDigits := 60

$$\text{TABLE} \left(2 \cdot \frac{2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}, n, 0, 10 \right)$$

0	0
1	2
2	2.82842712474619009760337744841939615713934375075389614635335
3	3.0614674589207181738276798722431909340907564998850163314704
4	3.12144515225805228557255789563235585484306588403127692407203
5	3.13654849054593926381425804443653906755637354136001815223247
6	3.14033115695475291231711852433169013214370323364818689344784
7	3.14127725093277286806201977078821440837966326264978912982486
8	3.14151380114430107632851505945682230793531381549292800978986
9	3.14157294036709138413580011027076142953363779450436063064701
10	3.14158772527715970062885426270191873939928085857484328667842

Popis: Počet zobrazených desetinných čísel (NotationDigits) je 60 a přesnost (PrecisionDigits) je také na 60 desetinných míst. Pomocí vzorce na třetím řádku můžeme vidět postupnou aproximaci pro n od 0 do 10.

$$\text{TABLE} \left[2 \cdot \frac{2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}, n, 20, 100, 10 \right]$$

20	3.14159265358509323106890579533581234924440819423328266788262
30	3.14159265358979323398036704495047629200792776570843377643956
40	3.14159265358979323846263910864767998435338687167087222882706
50	3.14159265358979323846264338327542627761557698854124379668821
60	3.14159265358979323846264338327950288030941440441774380442867
70	3.14159265358979323846264338327950288419716569172301865002880
80	3.14159265358979323846264338327950288419716939937156992840523
90	3.14159265358979323846264338327950288419716939937510581760285
100	3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494

Další aproximace je pro n od 20 do 100 a každý krok je po deseti. Vidíme, že už pro $n=20$ je přesnost aproximace na 11 desetinných míst.

2.3 Wallisův vzorec

John Wallis (1616-1703) byl anglický matematik, který má částečnou zásluhu na rozvoji moderních výpočtů. V letech 1643-1689 působil jako hlavní šifrant pro parlament a později pro královský dvůr. Wallis měl významné příspěvky do trigonometrie, diferenciálního počtu, geometrie a analýzy (nekonečné řady). Wallis odmítl jako absurdní dnes obvyklou představu o záporném čísle (důvod: jak může být něco menšího než nic). Na druhou stranu ale přijal názor, že existuje něco většího než je nekonečno (stejný názor měl také Euler).

Podstata Wallisova vzorce

Základem Wallisova vzorce je vzorec pro $\sin x$, který je

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \cdot \pi^2} \right).$$

Wallis použil tento vzorec a bere $x = \pi / 2$. Potom platí

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{n^2 \cdot \pi^2} \right).$$

To je

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{n^2 \cdot \pi^2} \right) \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4 \cdot n^2 - 1}{4 \cdot n^2} \right).$$

Hodnotu $\pi/2$ tedy vypočítáme

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2 \cdot n) \cdot (2 \cdot n)}{(2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1)} \right),$$

což můžeme vyjádřit jako nekonečný součin čísel

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots$$

Aproximace π pomocí Wallisova vzorce

NotationDigits := 50

PrecisionDigits := 50

TABLE $\left(2 \cdot \prod_{n=1}^k \frac{(2 \cdot n) \cdot (2 \cdot n)}{(2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1)}, k, 0, 100, 10 \right)$	
0	2
10	3.0677038066434989710316881013507949531410011157812
20	3.1035169615392332650699784041307704915358741372044
30	3.1159482858879592966531868319849010209255152106494
40	3.122260326421436974550640128547266794051783168178
50	3.1260789002154111932053632987196277794400050535643
60	3.1286377978915914401766798470762012182212997705099
70	3.1304720763190645023599220225815079980622925622868
80	3.1318513513726093757253306328588557311160929131912
90	3.1329262406275088682445408875739638891787423928848
100	3.1337874906281622412510360824623408115660859560249

Popis: Počet zobrazených čísel (NotationDigits) je 60, stejně jako přesnost (PrecisionDigits). Podle vzorce na třetím řádku můžeme sledovat aproximaci pro n od 0 do 100. Vidíme, že když zvolíme $n=100$, tak je π správně pouze na jedno desetinné místo. Z tohoto faktu můžeme vyvodit, že konvergence tohoto vzorce je velmi pomalá a vzorec tím pádem není vhodný pro numerický výpočet π .

$$WV(k) := 2 \cdot \prod_{n=1}^k \frac{(2 \cdot n) \cdot (2 \cdot n)}{(2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1)}$$

WV(1000)

3.1408077460303945604858682015535018789749826215746

$$\frac{x}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot n) \cdot (2 \cdot n)}{(2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1)}$$

x = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751

Ve druhé části jsme použili vzorec pro výpočet π pro $n=1000$. Dostali jsme π správně pouze na dvě desetinná místa. A v posledním vzorci jsme použili n od 1 do nekonečna. Tento vzorec nám vrátí přesnou hodnotu π .

3 Vzorce obsahující π

Číslo π je obsaženo v mnoha vzorcích a některé z nich si můžeme připomenout:

Geometrie

Obvod kruhu o poloměru r

$$o = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Obsah kruhu o poloměru r

$$S = \pi \cdot r^2$$

Obsah elipsy o poloosách a a b

$$S = \pi \cdot a \cdot b$$

Objem koule o poloměru r

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Povrch koule o poloměru r

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Objem válce o poloměru r a výšce h

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Povrch válce o poloměru r a výšce h

$$S = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$$

Objem kuželovu o poloměru r a výšce h

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Povrch kuželu o poloměru r a výšce h

$$S = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$

Analýza

Leibnizova řada

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n + 1)} = \frac{\pi}{4}$$

Stirlingův vzorec

$$n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Bailey-Borwein-Plouffeho vzorec

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \cdot \left[\frac{4}{8 \cdot k + 1} - \frac{2}{8 \cdot k + 4} - \frac{1}{8 \cdot k + 5} - \frac{1}{8 \cdot k + 6} \right]$$

Eulerova rovnost

$$e^{\pi \cdot i} + 1 = 0$$

Řetězové zlomky

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5 + \frac{9}{7 + \frac{16}{9 + \frac{25}{11 + \dots}}}}}$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{6 + \frac{9}{6 + \frac{25}{6 + \frac{49}{6 + \frac{81}{6 + \dots}}}}}$$

Pravděpodobnost a statistika

Hustota pravděpodobnosti u normálního rozdělení se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Hustota pravděpodobnosti u Cauchyova rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\pi \cdot (1 + x^2)}$$

Fyzika

Kosmická konstanta

$$\Lambda = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3 \cdot c^2} \cdot \rho$$

Planckova konstanta

$$\hbar = \frac{h}{2 \cdot \pi} = 1,0546 \cdot 10^{-34}$$

Einsteinova rovnice z obecné teorie relativity

$$R_{ik} - \frac{g_{ik} \cdot R}{2} + \Lambda g_{ik} = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} \cdot T_{ik}$$

Colombův zákon elektrické síly

$$F = \frac{|Q_1 \cdot Q_2|}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

Princip neurčitosti Heisenberga

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4 \cdot \pi}$$

4 π na 1 500 desetinných míst

3.14159265359140397848254241421927966391989323482583519907484
7977463121346731960768731177020276065801985678778229331374875
6552931794701750828279617333446602340831924321687635134949974
3774543521332481988857618117195057452050214708711391482353328
0535360483183662955279751612028072444664892727855680669090988
8110316705625724487754615483690633109809735471194503895449052
2398489502977422015658526826942312277172915188003715954213744
0979082685462014233529635831006294651053812826618947529959195
7535083704883081720848531019722509200823209915788146763749167
6098138460400150172780909422245850380775691740223012060408919
3862646713052152156815460123371872199674991025258075212447898
5401999928750140444434700873906931241145149665810754892261991
2143442409560635000671392907350519164842030840227670705072167
8865921466212494484986832477878288797603812415562065478620931
5645098968795301893876074571199162540112300740176425613776434
3829899181448728875101736578307706220386777122218172550717568
2971009528298525950020963900984618251473638922154047677117559
5278874690679696256367956197778648609394568020322652248618163
7815040845352179834645518246814994258905547349642243493654651
9307341749951358268957258305404301847289627938714159265359140
3978482542414219279663919893234825835199074847977463121346731
9607687311770202760658019856787782293313748756552931794701750
8282796173334466023408319243216876351349499743774543521332481
9888576181171950574520502147087113914823533280535360483183662
9552797516120280724446648927278556806

Závěr

Přesvědčili jsme se, že číslo π má velmi zajímavou historii a lidé byli a jsou touto konstantou doslova posedlí. Od objevení konstanty až do dnešní doby se lidé hnali za rekordem spočítat π na co nejvíce desetinných míst. Přitom pro matematické výpočty stačí π na dvě desetinná místa (3,14), pro navrhování těch nejpřesnějších strojů čtyři desetinná místa (3,1416) a pro určení obvodu Země na milimetry (za předpokladu, že by Země byla hladká koule, i když v měřítku je ve skutečnosti hladší než kulečnicková koule) stačí deset desetinných míst (3,1415926535). Konstanta π je jednou z nejdůležitějších a je obsažena v mnoha matematických a fyzikálních vzorcích. Také je spousta textů, jak si zapamatovat co nejvíce cifer čísla π . S tím souvisí další rekordy, které spočívají v zapamatování si co nejvíce cifer čísla π (rekordmanem je Lu Chao, který si zapamatoval π na 67 890 desetinných míst).

Literatura a ostatní použité zdroje

- [1] Beckmann, P.: Historie čísla π , Academia, Praha 1998
- [2] Juškevič, A. P.: Dějiny matematiky ve středověku, Academia, Praha 1978
- [3] Folta, J., Nový, L.: Dějiny přírodních věd v datech, Mladá fronta, Praha 1979
- [4] Mrázek, J.: Taje matematiky, Nakladatelství ROH, Praha 1986
- [5] Eymard, P., Lafon, J.-P.: The number $[\pi]$, AMS Brookstore, 2004
- [6] Kowal, S.: Matematika pro volné chvíle, SNTL- nakladatelství, Praha 1975
- [7] Berggren, L., Borwein, M. J., Borwein, B. P.: Pi, a source book, Springer, 2004
- [8] Arndt, J., Haenel, Ch.: Pi-unleashed, Springer, 2001
- [9] http://www.kmt.zcu.cz/subjects/DEJINY_M/w_rim.htm
- [10] http://www.super-computing.org/pi_current.html
- [11] http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_topics_related_to_%CF%80
- [12] http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_constant
- [13] http://en.wikipedia.org/wiki/Liu_Hui%27s_%CF%80_algorithm
- [14] http://en.wikipedia.org/wiki/Wallis_product
- [15] <http://www.joyofpi.com/>
- [16] <http://mathworld.wolfram.com/topics/Pi.html>
- [17] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html
- [18] <http://books.google.com/books?id=QwwwcmweJCDQC&printsec=frontcover&dq=pi+unleashed&hl=cs#PPP1,M1>
- [19] http://books.google.com/books?id=QlbzjN_5pDoC&printsec=frontcover&dq=pi,+a+source+book&hl=cs#PPA25,M1

[20]

<http://books.google.com/books?id=qZcCSskdtwcC&printsec=frontcover&dq=the+number+pi&hl=cs#PPA56,M1>