

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

Studijní obor: Finanční matematika

SBÍRKA ÚLOH Z FINANČNÍ MATEMATIKY PRO SŠ

Bakalářská práce

Knihovna JU - PF



Vedoucí bakalářské práce:

RNDr. Pavel LEISCHNER, Ph.D.

Katedra matematiky

Autor:

Tereza BERANOVÁ

České Budějovice, duben 2006

Prohlášení

Prohlašuji, že bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Pavla Leischnera, Ph.D. a uvedla v seznamu literatury všechny použité literární a odborné zdroje.

V Českých Budějovicích dne 26. 04. 2006

Annotation

Název práce: *Účast a zapojení žáků při výuce*

Vypracoval: *Barbora Křiváňová*

Vyučující: *RNDr. Pavla Leischnerová Ph.D.*

✓

Abstract: *Účast žáků při výuce je důležitou součástí učebního procesu.*

Účast žáků při výuce lze rozdělit na pasivní a aktivní. Pasivní účast žáků

je charakterizována tím, že žáci pouze poslouchají a zapisují si poznámky.

Aktivní účast žáků je charakterizována tím, že žáci se aktivně účastní výuky.

Účast žáků při výuce lze rozdělit na pasivní a aktivní. Pasivní účast žáků

je charakterizována tím, že žáci

Annotation

Poděkování vedoucímu práce

Děkuji tímto RNDr. Pavlu Leischnerovi Ph.D. za odborné vedení a pomoc při zpracování bakalářské práce.

Author: *Barbora Křiváňová*

Supervisor: *RNDr. Pavla Leischnerová Ph.D.*

Key words: *participation, involvement, interest, learning, motivation*

active participation

This work is a collection of research results for the students of

the Faculty of Education, University of Jyväskylä and other teachers.

The work is a collection of research results for the students of

and teachers.

Anotace

Název: Sbírka úloh z finanční matematiky pro SŠ

Vypracovala: Tereza Beranová

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Klíčová slova: Finanční matematika, úročení, spoření, důchod, úvěr

Práce je sbírkou úloh z finanční matematiky pro studenty středních škol. Obsahuje řešené příklady a úlohy k procvičování. K úlohám jsou uvedeny výsledky. Každá kapitola obsahuje zavedení a odvození základních vzorců a pojmů. Cílem je vytvoření vhodné sbírky úloh pro studenty středních škol.

Annotation

Title: The collection of rider on financial mathematic for elementary school

Author: Tereza Beranová

Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Key words: Financial mathematic, interest running, saving, monetary incomes, credit

This work is collection on financial mathematic for students of secondary school. Includes solutions schedules and rider for practice. Every chapter includes introduction and inference elementary formula and notions.

OBSAH

Úvod	1
1. Úročení	2
1.1 Jednoduché úročení	3
1.2 Cvičení.....	8
1.3 Složené úročení	10
1.4 Cvičení	14
2. Spoření	17
2.1 Spoření krátkodobé	17
2.2 Cvičení	22
2.3 Spoření dlouhodobé	24
2.4 Cvičení	28
3. Důchody	30
3.1 Důchod bezprostřední	31
3.2 Důchod odložený	33
3.3 Cvičení	39
4. Úvěr	41
4.1 Splácení úvěru stejnými splátkami	42
4.2 Úmor úvěru nestejnými splátkami	49
4.3 Cvičení	51
Závěr	54

Úvod

V dnešní době se na nás ze všech stran valí „výhodné“ nabídky na spoření, půjčky, pojištění a další finanční investice.

Vznikají tak stále nové firmy soustřeďující se speciálně na finanční půjčky. Bohužel je ale veřejnost nedostatečně informovaná a vzdělaná v tomto oboru, aby mohli lidé zjistit zda jsou všechny nabídky opravdu „výhodné“.

Jedním z cílů školní reformy je výuka finanční matematiky nejen na odborných školách, ale zavést tento předmět na všeobecné střední školy. A k tomu by měla trochu přispět i moje práce. Budu se snažit ukázat a objasnit základní pojmy ve finančních operacích.

1. ÚROČENÍ

Úrok je částka, kterou získává věřitel od dlužníka jako odměnu za půjčení peněz. Výše úroku závisí kromě jiného také na době, po kterou je kapitál úročen. Pro tuto dobu se užívá název **úroková doba**. Pro výpočet úrokové doby se používají různé standardy. V této sbírce budu užívat standard 30E/360.

Typy úročení

Dva základní způsoby úročení jsou **jednoduché** a **složené**.

Dále dělíme úročení podle toho, kdy dochází k placení úroku. Jestliže úroky platíme na konci úrokového období, hovoříme o úročení **polhůtním**.

Dochází-li k placení úroků na začátku úrokového období, mluvíme o úročení **předlhůtním**.

1.1 Jednoduché úročení

Jednoduché úročení je takový způsob úročení, při kterém se úrok na konci každého úrokovacího období počítá z počátečního kapitálu.

Úroková doba – poměrná část úrokovacího období.

Úrokovací období – celé dohodnuté časové období, ke kterému je vztažena úroková sazba.

Úroková sazba – podíl úroku ze zapůjčeného kapitálu (uvádí se v procentech)

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$

K_n výše kapitálu na konci n -tého roku

K_0 počáteční kapitál

i úroková sazba

n počet úrokovacích období

Skonto: je sleva, kterou poskytuje prodávající kupujícímu v případě, že kupující zaplatí za zboží okamžitě nebo během dohodnuté krátké lhůty.

Diskont: je úrok, který se nevztahuje k počátečnímu vloženému kapitálu či k poskytovanému úvěru, nýbrž ke splatné částce (částce, kterou vyplácí dlužník věřiteli na konci úrokové doby).

Příklad 1:

Chceme si půjčit na půl roku peníze. Víme už předem, že po půl roce budeme mít na splacení dluhu k dispozici 35 000 Kč. Kolik korun si teď můžeme od banky půjčit?

Zjistili jsme, že banka by nám půjčila peníze s úrokovou mírou 12,4% a že úročí jednou, v den splatnosti úvěru. Banka půjčuje jen celé stokoruny.

Řešení:

Podle vzorce $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$ vyjádříme neznámou K_0 .

$$\frac{K_n}{(1 + i \cdot n)} = K_0$$

$$K_n \dots\dots 35\,000$$

$$i \dots\dots 0,124$$

$$n \dots\dots 0,5$$

$$K_0 = \frac{35000}{(1 + 0,124 \cdot 0,5)}$$

$$K_0 = 32\,956,69$$

Můžeme si vypůjčit nejvýše 32 900 Kč.

Příklad 2:

Zboží v ceně 600 000 Kč je splatné za 2 měsíce. Při okamžitém zaplacení poskytne prodávající kupujícímu skonto ve výši 0,3% z ceny. Kupující zvažuje dvě možnosti:

A – využít skonto

B – Peníze, které by za zboží se slevou zaplatil, vložit do banky a za dva měsíce ode dne dodání zaplatit zboží v plné ceně. Banka nabízí úrokovou míru 3,2%, úročí v den splatnosti, daň z úroku je 15%.

Která z uvedených možností je pro kupujícího finančně výhodnější?

Řešení:

Výše skonta je $0,003 \cdot 600000 = 1800$

Pokud kupující využije skonto, zaplatí 598 200 Kč.

Předpokládejme, že částku 598 200 vloží na 2 měsíce do banky. Banka kapitál zúročí v den splatnosti.

Částka, kterou banka vyplatí činí 600 912 Kč. Kupující zaplatí za 2 měsíce od dodání zboží 600 000 Kč a zbude mu 912 Kč.

Finančně je výhodnější varianta B.

Příklad 3:

Máme zájem o koupi cenných papírů s dobou splatnosti 1 rok.

První banka nabízí nákup cenného papíru za 50 000 Kč s úrokovou mírou 2,8%.

Po roce bychom tedy získali zpět vložených 50 000 Kč spolu s úrokem po zdanění.

Daň z úroku činí 15%.

Druhá banka nabízí ke koupi cenný papír o hodnotě 50 000 Kč s diskontní mírou 2,8%.

To znamená, že bychom zaplatili jen 97,2% z 50 000 Kč a po roce bychom obdrželi částku 50 000 Kč sníženou o daň z diskontu, ta je 15%.

Která z obou bank nabízí finančně výhodnější investici?

Řešení:

První banka

Zaplaceno	50 000 Kč
Úrok před zdaněním	$50\,000 \cdot 0,028 = 1\,400$ Kč
Daň z úroku	$1\,400 \cdot 0,15 = 210$ Kč
Úrok po zdanění	1 190 Kč
Vyplaceno	51 190 Kč

Druhá banka

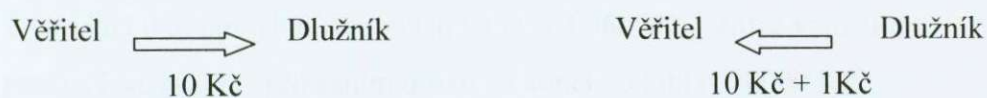
Zaplaceno	$50\,000 \cdot 0,972 = 48\,600$ Kč
Diskont před zdaněním	$50\,000 \cdot 0,028 = 1\,400$ Kč
Daň z diskontu	$1\,400 \cdot 0,15 = 210$ Kč
Diskont po zdanění	1 190 Kč
Vyplaceno	49 790 Kč

V obou případech by náš čistý zisk byl 1 190 Kč.

Finančně výhodnější je však nákup cenného papíru v druhé bance, získám totiž stejný zisk jako v první, ale z nižšího vkladu.

Ukážeme si na obecném příkladu rozdíl mezi **úrokovou mírou** a **diskontní mírou**.

Úroková míra 10%



Jako věřitel investuji celou částku a při splacení inkasuji částku zvětšenou o úrok.

Diskontní míra 10%



U diskontní míry investuji nižší částku (diskontovanou) a při splacení inkasuji celou částku.

Mám tedy stejný zisk, ale u diskontní míry mě počáteční náklady stojí méně.

1.2 Cvičení:

1. Paní Doležalová založila na konci roku vkladní knížku s výpovědní lhůtou a uložila na ni 48 000 Kč. Banka úročí jednou ročně, vždy na konci kalendářního roku. Paní Doležalová vybírá pravidelně na začátku roku úrok za předchozí rok.

Kolik korun obdržela na úrocích za čtyři roky?

Předpokládáme, že úroková míra se neměnila a byla po celou dobu 2,35%.

2. Po jakou dobu byl uložen vklad ve výši 3 960 Kč, jestliže vzrostl při úrokové sazbě 2% připsáním úroků na konci období na 4 000 Kč?

3. Při jaké úrokové sazbě bude činit úrok z vkladu 100 000 Kč za sedm měsíců 1 500 Kč?

4. Pan Bouška zakoupil cenný papír na 3 roky za 50 000 Kč. Úroková míra je pro první rok 2,3% , pro druhý rok 2,5% a pro třetí rok 2,7%. Daň z úroku je 15%. Banka vypočítá úrok najednou, na konci třetího roku.

Kolik korun pan Bouška od banky celkem obdrží?

5. Nabízí se mi koupě pozemku na stavbu domu. Majitel požaduje 850 000Kč . V současné době mám k dispozici 600 000Kč, požadovanou finanční hotovost budu mít až za tři čtvrtě roku. Majitel pozemku je ochoten obchod uskutečnit až po této době, bude však požadovat částku o 20 000Kč vyšší.

Mám dvě možnosti: A) uskutečnit nákup za tři čtvrtě roku

B) vypůjčit si 250 000 a koupit pozemek ihned,
úroková míra je 16% a banka úročí v den splatnosti úvěru.

Kolik korun bych musel za poskytnutý úvěr zaplatit celkem?

Která z uvedených možností je pro mě finančně výhodnější?

6. Podnikatel Mareš získal od banky úvěr na půl roku ve výši 250 000 Kč s úrokovou mírou 9,9 %. Úvěr splatí jednorázově, v den splatnosti.

Kolik korun celkem bance zaplatí?

7. Co je pro nás výhodnější při koupi daru : dát za něj nyní hotově 48 500 Kč, nebo zaplatit za rok 51 000 Kč? Uvedenou hotovost máme možnost investovat při úrokové míře 4,2% p.a.

8. Slečna Vomáčková zakoupila cenný papír na půl roku o hodnotě 20 000 Kč s diskontní mírou 2,75%.

Kolik korun za něj zaplatila?

9. Cenný papír se splatností 4 měsíce o hodnotě 100 000 Kč je nabízen s diskontní mírou 2,9%. Paní Lutavská má k dispozici 98 000 Kč.

Kolik korun je nutno za cenný papír zaplatit?

Výsledky:

1. 3 836 Kč
2. 182 dní
3. 2,57%
4. 53 188 Kč
5. 280 000 Kč , výhodnější je varianta A
6. 262 375 Kč
7. zaplatit ihned 48 500 Kč
8. 19 725 Kč
9. 99 033 Kč

1.3 Složené úročení

Složené úročení je takový způsob úročení, při kterém se úrok na konci každého úrokovacího období přičítá k již dosažené hodnotě kapitálu a spolu s ním se dále úročí.

Odvození vzorce za předpokladu, že úrokovací období je jeden rok:

Na počátku 1. roku : K_0

Na konci 1. roku : $K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1 + i)$

Na konci 2. roku : $K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot (1 + i)^2$

.

po n letech : $K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot i = K_0 \cdot (1 + i)^n$

Obecně tedy platí:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

K_n kapitál zvětšený o úroky

K_0 původní kapitál

n počet úrokovacích období

i úroková sazba

Připisování úroků m -krát do roka

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

$\frac{i}{m}$ poměrná část úroku

m počet úročení za rok

n počet úrokovacích období

Příklad 1:

Klient uložil do banky na začátku roku kapitál 150 000 Kč na 3 roky. Banka úročí jeho vklad s úrokovou mírou 5% . Úrokovací období je 1 rok. Banka má pro své klienty jedno překvapení : daň z úroku je 15%, ale z částky do 50 000 Kč se daň z úroku neplatí.

Jakou částku bude mít klient v bance na konci třetího roku, po zúročení bankou?

Řešení:

Částka na konci prvního roku

$$50000 \cdot (1 + 0,05) + 100000 \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,05) = 50000 + [50000 \cdot 0,05 + 100000 \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,05)]$$

Částka na konci druhého roku

$$\begin{aligned} & 50000 \cdot (1 + 0,05) + [50000 \cdot 0,05 + 100000 \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,05)] \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,05) = \\ & = 50000 + [50000 \cdot 0,05 + 50000 \cdot 0,05 \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,05) + 100000 \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,05)^2] \end{aligned}$$

Částka na konci třetího roku

$$\begin{aligned} & 50000 \cdot (1 + 0,05) + [50000 \cdot 0,05 + 50000 \cdot 0,05 \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,05) + 100000 \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,05)^2] \cdot \\ & \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,05) = 50000 + 50000 \cdot 0,05 \cdot [1 + (1 + 0,85 \cdot 0,05) + (1 + 0,85 \cdot 0,05)^2] + 100000 \cdot \\ & \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,05)^3 = 171123 \end{aligned}$$

Klient bude mít v bance na konci třetího roku částku 171 123 Kč.

Příklad 2:

Výpočet úrokové sazby

Upravením vzorce $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+i)^n$$

$$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = (1+i)$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Jaká byla roční úroková sazba z vkladu, jestliže částka 20 000 Kč vzrostla za čtyři roky na 23 400 Kč? Úroky byly připisovány jedenkrát ročně.

Řešení:

$$\sqrt[4]{\frac{23400}{20000}} - 1 = 0,04$$

Úroková sazba byla 4% p.a.

Příklad 3:

Výpočet doby splatnosti získáme následující úpravou

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+i)^n$$

$$\log \frac{K_n}{K_0} = n \cdot \log(1+i)$$

$$n = \frac{\log \frac{K_n}{K_0}}{\log(1+i)}$$

Určete dobu splatnosti kapitálu 10 000 Kč, jestliže bylo v době splatnosti vyplaceno 11 000 Kč při úrokové sazbě 2% p.a. a pololetním úročení.

Řešení:

$$n = \frac{\log \frac{11000}{10000}}{\log(1+0,01)} \quad i = \frac{0,02}{2}$$

$$n = 9,579$$

Doba splatnosti je 9,579 roku.

Příklad 4:

Paní Závěská uložila dne 1.1. na vkladní knížku 22 500. Banka úročí vklad čtvrtletně. Při úrokové sazbě 1,8%. Kolik bude mít na konci roku?

Řešení:

Použiji vzorec $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$

$$K_n = 22500 \cdot \left(1 + \frac{0,018}{4}\right)^{4 \cdot 1}$$

$$K_n = 22\,907,7$$

Na konci roku dostane paní Závěská 22 908,- Kč.

1.4 Cvičení:

1. Slečna Dolejší získala na začátku roku od banky úvěr ve výši 75 000 Kč na tři roky, s úrokovou mírou 12,5%. Úvěr spolu s úroky splatí najednou, po třech letech. Banka úročí dvakrát ročně, vždy na konci kalendářního pololetí.

Kolik korun slečna Dolejší na konci třetího roku bance celkem splatí?

2. Pan Svoboda uložil na termínovaný účet na jeden rok částku 42 000 Kč s úrokovou mírou 2,15%. Banka úročí čtvrtletně, poprvé čtvrt roku po založení účtu.

Vypočítejte kolik korun pan Svoboda obdrží po dni splatnosti termínovaného účtu.

3. Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční kapitál při úrokové sazbě 6% při ročním připisování úroků?

4. Pan Šikla půjčil paní Kolářové 80 000 Kč s úrokovou mírou 12%. Pan Šikla úročí dluh jednou měsíčně. Požaduje, aby paní Kolářová splatila dluh dříve, než přesáhne 100 000 Kč.

Za kolik měsíců to bude?

5. Potřebovali bychom, aby se náš kapitál 10 000 Kč zvýšil za 2 roky na 15 000 Kč.

Předpokládáme, že bychom peníze uložili na termínovaný vklad na 2 roky a že by banka úročila jednou měsíčně.

Jak vysokou úrokovou míru by nám musela banka nabídnout, aby splnila náš požadavek?

6. Rozhodli jste se založit svému právě narozenému dítěti termínovaný bankovní účet, spojený s pevnou úrokovou sazbou 2,5% p.a. a uložit dnes na tento účet takovou částku, aby si dítě mohlo v den svých osmnáctých narozenin vyzvednout z tohoto účtu milion korun.

Kolik musíte uložit dnes do banky, předpokládáme-li roční úrokové období?

7. Jaký byl počáteční kapitál a úroková sazba, při které byl uložen, víme-li, že po roce byl jeho stav 50 000 Kč a po dvou letech 52 500 Kč při ročním úrokovém období?

8. Jaká bude výše úroku z kapitálu 200 000 Kč za tři roky při pevné úrokové sazbě 2,5% p.a., jsou-li úroky připisovány čtvrtletně?

Výsledky:

1. 107 903 Kč
2. 42 773 Kč
3. 11,9 roku
4. 22 měsíců
5. 24,06%
6. 641 165,9 Kč
7. úroková sazba 5%, počáteční vklad 47 619,05 Kč
8. 15 526,52 Kč

2. Spoření

Pod pojmem spoření rozumíme pravidelné ukládání stále stejně velké finanční částky po danou dobu, při dané úrokové sazbě.

Pravidelně ukládanou částku označujeme jako **anuitu**.

Podle toho jak dlouho spoříme, rozlišujeme spoření **krátkodobé a dlouhodobé**.

2.1 Spoření krátkodobé

Předpokládejme, že úrokové období je jeden rok. To znamená, že úroky jsou připisovány najednou vždy na konci roku. Pravidelné částky budeme ukládat m krát za rok a budou úročeny jednoduše.

Podle toho, kdy ukládáme anuitu rozlišujeme spoření **předlůtní** nebo **polhůtní**.

Předlůtní = úroky platíme na konci úrokového období

Polhůtní = dochází-li k placení úroků na začátku úrokového období

Spoření krátkodobé předlůhnutí

- celkový úrok počítáme jako součet úroků z jednotlivých úložek, které tvoří aritmetickou posloupnost

$$u = \frac{i}{m^2} \cdot [m + (m-1) + (m-2) + \dots + 1] = \frac{i}{m^2} \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2}$$

po úpravě získáme

$$u = \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i$$

u = úrok za jedno úrokové období

m = počet vkladů v rámci jednoho úrokového období

i = roční úroková sazba

Celková naspořená částka za rok, spoříme-li každou m -tinu roku 1 Kč, tedy činí:

$$S = 1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i \quad \text{je to celková roční uložená částka plus úrok}$$

pro výši splátky x odvodíme vzorec tím, že naspořená částka bude

$(x \cdot m)$ krát větší

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i\right)$$

x částka, kterou spoříme

m počet vkladů v rámci jednoho roku a zároveň počet období, ve kterých se ukládá

Spoření krátkodobé polhůtní

- tím, že částky jsou ukládány vždy na konci příslušného období, je proti předhlůtnímu spoření počet těchto období o jedno období nižší
- z poslední úložky v tomto případě nebudeme mít žádný úrok, protože bude uložena konci roku
- celkový úrok tedy vypočítáme stejně, součtem aritmetické řady

$$u = \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i$$

celková částka na konci roku včetně úroků je tedy:

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i\right)$$

Příklad 1:

Chceme si založit bankovní konto a ukládat na něj na počátku každého měsíce 2 000 Kč. Banka úročí jednou ročně, na konci kalendářního roku. Úroková míra je 2,3%.

Kolik korun bychom měli na bankovním kontě k 31.12. po připsání zdaněného úroku?

Daň je 15%.

Řešení:

$$S_x = 12 \cdot 2000 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot \frac{13}{24} \cdot 0,023\right)$$

$$S_x = 24\,254,15 \text{ Kč}$$

Na bankovním kontě bychom k 31.12. měli 24 254,15 Kč.

Příklad 2:

Pan Kukačka by si chtěl naspořit během jednoho roku 15 000 Kč na nové horské kolo. Peníze by ukládal v bance na spořicí účet pravidelně jednou měsíčně. Poprvé na začátku ledna. Předpokládá úrokovou míru 2% a čtvrtletní úrokovací období (úročí na začátku úrokovacího období). Kolik korun musí měsíčně ukládat? Částku zaokrouhlete na celé koruny nahoru.

Řešení:

$$15000 = 4 \cdot x \cdot \left(1 + \frac{5}{8} \cdot 0,02\right)$$

$$x = \frac{15000}{4 \cdot \left(1 + \frac{5}{8} \cdot 0,02\right)}$$

$$x = 3\,704,- \quad (\text{čtvrtletní úspora})$$

$$\frac{3704}{3} = 1\,235,- \quad (\text{měsíční úložka})$$

Měsíčně musí ukládat 1 235 Kč, aby měl na konci roku 15 000 Kč.

Příklad 3:

Při kolika procentní sazbě uspoříme za jeden rok 10 000 Kč, jestliže koncem každého čtvrtletí ukládáme 2 400 Kč?

Řešení:

Získáme úpravou vzorce pro spoření předlhu

$$\frac{S_x}{m \cdot x} = \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i \right)$$

$$\frac{S_x}{m \cdot x} - 1 = \frac{m-1}{2m} \cdot i$$

$$i = \frac{\frac{S_x}{m \cdot x} - 1}{\frac{m-1}{2 \cdot m}}$$

$$i = \frac{\frac{10000}{4 \cdot 2400} - 1}{\frac{4-1}{2 \cdot 4}}$$

$$i = 11,1\%$$

Požadovanou částku uspoříme při 11,1% sazbě.

2.2 Cvičení:

1. Kolik uspoříme do konce roku, ukládáme-li koncem každého měsíce 1 700 Kč při úrokové sazbě 2% p.a.?
2. Kolik naspoříme do konce čtvrtletí, ukládáme-li počátkem měsíce 1 000 Kč při úrokové sazbě 4,8% ročně?
3. Banka úročí spořicí účty do výše 100 000 Kč s úrokovou mírou 2,1% a předpokládá se, že se po celý tento rok úroková míra nebude měnit. Úročení probíhá jednou ročně, na konci kalendářního roku.
 - a) Paní Lukešová založila na začátku tohoto roku spořicí účet a uložila na něj ihned 15 000 Kč. Stejně částky pak vložila na začátku dalších tří kalendářních čtvrtletí. Jakou částku bude mít paní Lukešová na konci roku na spořicím účtu?
 - b) Vypočítejte celkovou částku na spořicím účtu paní Lukešové za předpokladu, že by šlo o jednorázový vklad 60 000 Kč na začátku roku a další peníze už by se neukládali.
4. Kolik je nutno koncem každého měsíce splácet věřiteli, jestliže nám zapůjčil částku 18 000 Kč, kterou chce splácet měsíčními splátkami po dobu dvanácti měsíců? Úroková sazba činí 5% p.a.
5. Kolik musíme spořit na počátku každého měsíce, abychom za rok našetřili 20 000 Kč při úrokové sazbě 2% p.a.?

Výsledky:

1. 20 587 Kč

2. 3 024 Kč

3. a) 60 669,38 Kč , b) 61 071 Kč

4. 1 539,71 Kč

5. 1 648,80 Kč

Společnost rozhodla přecházet

z banky A na banku B, roční úroková sazba je 5 %, roční úroková sazba banky B je 6 %.

Společnost má v bankě A vklad 100 000 Kč.

$$S = 100 000 \cdot (1 + 0,05)^0 + (1 + 0,05)^1 + (1 + 0,05)^2 + \dots + 1$$

Společnost rozhodla přecházet

$$S = 100 000 \cdot (1 + 0,05)^0 + (1 + 0,05)^1 + (1 + 0,05)^2 + \dots + 1$$

Společnost má v bankě A vklad 100 000 Kč.

Společnost má v bankě B vklad 100 000 Kč.

Společnost má v bankě B vklad 100 000 Kč.

Společnost má v bankě B vklad 100 000 Kč.

2.3 Spoření dlouhodobé

O dlouhodobém spoření budeme hovořit, jestliže půjde o spoření za několik úrokových období. Podle toho, zda částka bude uložena na počátku či na konci úrokového období, budeme opět rozlišovat spoření předlůhnutí či polhůtní.

Spoření dlouhodobé předlůhnutí

- konečný stav úspor S' vypočítáme jako součet hodnot jednotlivých úložek na konci n -tého období:

$$S' = a \cdot (1+i) \cdot \left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1 \right]$$

součtem geometrické řady dostaneme:

$$S = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

S' naspořená částka

a částka, kterou ukládáme na počátku úrokovacího období

n počet úrokových období (let)

i roční úroková sazba

Spoření dlouhodobé polhůtní

- konečný stav úspor S opět vypočítáme jako součet konečných hodnot jednotlivých úložek
- konečný stav úložek na konci n -tého období je dán konečnou geometrickou řadou s kvocientem $1+i$ a prvním členem a , tedy platí:

$$S = a \cdot \left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1 \right]$$

sečteme a dostaneme

$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Příklad 1:

Kolik uspoříme za tři roky, budeme-li ukládat na počátku každého roku 12 000 Kč při neměnné 2,5% sazbě p.a. a ročním připsování úroků?

Řešení:

Jedná se o spoření předlhůtní, dosadím do vzorce $a = 12\,000$, $i = 0,025$, $n = 3$

$$S = 12000 \cdot 1,025 \cdot \frac{1,025^3 - 1}{0,025}$$

$$S = 37\,830,19$$

Za tři roky uspoříme 37 830 Kč.

Příklad 2:

Za jak dlouho uspoříme 50 000 Kč při ročním polhůtním ukládání 7 000 Kč při neměnné 4% úrokové sazbě p.a. ? Předpokládáme roční připisování úroků.

Řešení:

Upravíme si vzorec na polhůtní spoření

$$S_n \cdot i = a \cdot (1 + i)^n - 1$$

$$1 + \frac{S_n \cdot i}{a} = (1 + i)^n$$

$$\ln\left(1 + \frac{S_n \cdot i}{a}\right) = n \cdot \ln(1 + i)$$

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{S_n \cdot i}{a}\right)}{\ln(1 + i)}$$

a dosadíme $S = 50\,000$, $a = 7\,000$, $i = 0,04$

$$n = \frac{\ln\left(1 + 50000 \cdot \frac{0,04}{7000}\right)}{\ln(1,04)}$$

$$n = 6,4$$

50 000 Kč uspoříme za 6,4 roku.

Příklad 3:

Za pět let plánujeme nákup nového automobilu. Částka, kterou bychom měli zaplatit je 750 000 Kč. Kolik musíme spořit na počátku každého roku, abychom za pět let uspořili 750 000 Kč? Úspory dáváme na účet úročený sazbou 2,5% p.a. s ročním připisováním úroků.

Řešení:

Upravíme vzorec na předlhuční spoření

$$S_n \cdot i = a \cdot (1+i) \cdot [(1+i)^n - 1]$$

$$a = \frac{S_n \cdot i}{(1+i) \cdot [(1+i)^n - 1]}$$

a dosadíme $S = 750\,000$, $i = 0,025$, $n = 5$

$$a = \frac{750000 \cdot 0,025}{1,025 \cdot (1,025^5 - 1)}$$

$a = 139\,205,02$ Kč

Počátkem každého roku je třeba spořit 139 205 Kč.

2.4 Cvičení:

1. Klient ukládal na začátku každého roku na své konto částku 3 000 Kč, a to po dobu pěti let. Banka úročila klientův kapitál jednou ročně, vždy na konci kalendářního roku. Úroková míra byla neměnná a činila 3%. Kolik korun měl klient na kontě na konci pátého roku po připsání zdaněného úroku? Daň je 15%.

2. Pan Mourek si chce ušetřit za 3 roky 60 000 Kč na dovolenou. Předpokládá, že by ukládal pravidelně jednou za čtvrt roku částky o stejné výši. Spořit začne začátkem roku. Banka poskytuje 3% úrokovou míru a úročí jednou ročně na konci kalendářního roku. Daň z úroku je 15%. Kolik korun budou činit čtvrtletní vklady?

3. Paní Králová si chce naspořit na nový nábytek. Měsíčně chce ukládat 1 000 Kč. Předpokládá úrokovou míru 2,5% s úročením na konci kalendářních měsíců. Kolik měsíců musí paní Králová spořit, aby dosáhla částky 100 000 Kč?

4. Jedna z bank nabízí spořicí program pro děti. Pokud budou např. rodiče spořit měsíčně 415 Kč od narození dítěte, dosáhne naspořená částka po dovršení jeho 18. roku výše 125 000 Kč. Vypočítejte odpovídající úrokovou míru tohoto produktu. Předpokládejte, že platby proběhnou vždy začátkem měsíce, úrokovací období je měsíční a daň z úroku je 15%.

5. Pan Drda chce naspořit 600 000 Kč za dva roky, úroková míra je 4,8%. Jaký musí být minimální měsíční vklad? Úročení je měsíční.

Výsledky:

1. 16 187,27 Kč
2. 4 800 Kč
3. 92 měsíců
4. 4,2%
5. 23 869 Kč

3. Důchody

Finanční matematika rozumí pojmem **důchod** pravidelné výplaty stále stejně velké finanční částky po určitou dobu, při dané úrokové sazbě.

Podle toho, kdy je důchod vyplácen rozlišujeme důchod **polhůtní** a **předlhůtní**.

Předlhůtní = úroky platíme na konci úrokového období

Polhůtní = dochází-li k placení úroků na začátku úrokového období

Podle toho, jak dlouho bude důchod vyplácen rozlišujeme na důchod **dočasný** a **trvalý**.

Trvalý - vyplácen neomezeně dlouhou dobu, aniž by došlo k vyčerpání uložené částky,

- principem věčného důchodu je to, že roční výplata je rovna ročnímu úroku z uložené částky
- setkat se s ním můžeme u některých druhů cenných papírů, které nemají splatnost

Začne-li se s výplatou důchodu nyní, mluvíme o důchodu **bezprostředním**, začne-li jeho výplata až po uplynutí určité doby, mluvíme o důchodu **odloženém**.

Počáteční (současná) hodnota důchodu

- součet současných hodnot všech v budoucnu realizovaných plateb důchodu, udává kolik si musíme dnes uložit, abychom si zajistili při dané úrokové sazbě vyplácení příslušných výplat důchodu.

Konečná (budoucí) hodnota důchodu

- součet všech výplat důchodu přepočtených ke konci posledního roku, kdy se důchod vyplácí

Mezi počáteční a konečnou hodnotou důchodu platí vztah:

$$S = D \cdot (1 + i)^n$$

S budoucí hodnota důchodu

D současná hodnota důchodu

i roční úroková sazba

n počet úrokových období ve kterých dochází k výplatě anuit

3.1. Důchod bezprostřední

Výplata začíná hned v daném období.

Důchod bezprostřední polhůtní

Chceme vypočítat počáteční hodnotu důchodu D , budeme-li vždy koncem úrokového období získávat jednotlivé platby a po n období při úrokové sazbě i .

Současnou hodnotu každé výplaty důchodu vypočítáme tak, že výplatu diskontujeme k výchozímu datu.

1. výplata $a \cdot v$

2. výplata $a \cdot v^2$

.

n výplata $a \cdot v^n$

kde v je diskontní faktor - $v = \frac{1}{(1 + i)}$

Součet všech současných hodnot výplat důchodu je dán součtem geometrické řady, která nám dává počáteční hodnotu důchodu

$$D = a \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad \text{nebo} \quad D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

D počáteční hodnota důchodu

a pravidelná výplata

n počet období (let) v kterých jsou placeny anuity

v diskontní faktor

Pokud jsou výplaty m -krát do roka, použijeme výše uvedený vzorec. S tím, že nejprve musíme vypočítat jaká bude celková hodnota výplat důchodu na konci roku. Použijeme k tomu vztah pro krátkodobé polhůtní spoření. Částku a nahradíme částkou S_x . Tím jsme nahradili m výplat důchodu ve výši x Kč jednou výplatou důchodu ve výši S_x Kč na konci úrokového období.

Počáteční hodnota důchodu se tedy vypočte:

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

m počet úrokovacích období

v diskontní faktor

x výše pravidelné platby

n počet úrokových období – v každém z nich je vyplaceno m plateb

Důchod bezprostřední předlůhnutí

Na základě stejných úvah jako u důchodu polhůtním dostaneme počáteční hodnotu předlůhnutího důchodu ve tvaru:

$$D = a \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \text{nebo} \quad D = a \cdot \frac{1-v^n}{i \cdot v}$$

Pokud vyplácíme m -krát do roka použijeme tento vzorec:

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i\right) \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

3.2. Důchod odložený

Výplata započne po k letech.

Důchod odložený polhůtní

Potřebujeme vypočítat počáteční hodnotu takového důchodu, který je vyplácen po dobu n let při úrokové sazbě i .

Využijeme poznatků o bezprostředním polhůtním důchodu. Je to stejné s tím rozdílem, že současnou hodnotu výplaty důchodu, která bude vyplacena v j -tém roce splatnosti důchodu, vypočítáme tak, že hodnotu této výplaty a diskontujeme k výchozímu datu, což znamená, že diskontní faktor umocníme na $j+k$.

$$K = v^k \cdot a \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

K současná hodnota odloženého důchodu

a pravidelné výplaty

n počet úrokových období (let) ve kterých dochází k výplatě

v diskontní faktor

k počet úrokových období po které nejsou platby vypláceny

Důchod vyplácen m -krát do roka

$$K = v^k \cdot m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

x pravidelná platba

m počet stejně dlouhých částí roku, v nichž jsou výplaty placeny

Důchod odložený předlůhnutí

$$K = v^{k-1} \cdot a \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

Důchod je vyplácen m -krát do roka

$$K = v^k \cdot m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

Příklad 1:

Kolik musíme zaplatit za investici, jejíž životnost je dvacet let aby nám z ní koncem každého roku plynula platba ve výši 16 000 Kč? Uvažujeme roční úrokovou sazbu 5% p.a.

Řešení:

Chceme vypočítat současnou hodnotu polhůtního důchodu. Je to cena, kterou jsme ochotni zaplatit za to, že budeme ročně získávat platby ve výši a , požadujeme-li výnosnost i .

Dosadíme do $D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}$

$$a = 16\,000, n = 20, i = 0,05$$

$$D = 16000 \cdot \frac{1 - 1,05^{-20}}{0,05}$$

$$D = 199\,395,37$$

Investujeme-li dnes částku 199 395,37 Kč, zajistí nám výplaty pravidelných částek 16 000 Kč ročně po dobu 20 let.

Příklad 2:

Jaká je počáteční hodnota důchodu 4 000 Kč, který se vyplácí na konci každého čtvrtletí po dobu dvaceti let při neměnné roční úrokové sazbě 5%?

Řešení:

Dosadíme do vztahu $K = v^k \cdot m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i\right) \cdot \frac{1-v^n}{i}$

$$x = 4\,000, m = 4, n = 20, i = 0,05$$

$$D = 4 \cdot 4000 \cdot \left(1 + \frac{3}{8} \cdot 0,05\right) \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,05^{20}}}{0,05}$$

$$D = 203\,134,03$$

Počáteční hodnota důchodu je 203 134 Kč.

Příklad 3:

Máme k dispozici 30 000 Kč. Touto částkou si chceme zajistit roční polhůtní důchod na pět let s tím, že s jeho výplatou začneme za dva roky. Jak vysoké budou výplaty při neměnné 4% roční úrokové sazbě?

Řešení:

Upravíme vzorec pro odložený důchod polhůtní

$$K \cdot i = v^k \cdot a \cdot (1 - v^n)$$

$$a = \frac{K \cdot i}{v^k \cdot (1 - v^n)}$$

a dosadíme $K = 30\,000$, $k = 2$, $n = 5$, $i = 0,04$

$$a = \frac{30000 \cdot 0,04}{\frac{1}{1,04^2} \cdot (1 - \frac{1}{1,04^5})}$$

$$a = 7\,288,7$$

Vyplácená částka bude každý rok činit 7 288,7 Kč.

Příklad 4:

Kolik bychom měli uložit na účet, úročený úrokovou sazbou 5% p.a. našemu studujícímu synovi, aby si mohl po dobu tří let vždy koncem roku vybrat 5 000 Kč? Poté si ještě po dva roky bude moci vybrat částku 6 000 Kč.

Řešení:

Výpočet rozdělíme na dvě části. První část bude výpočet současné hodnoty bezprostředního polhútního důchodu a druhá část bude výpočet současné hodnoty odloženého polhútního důchodu. Částku, kterou je třeba uložit, získáme jejich součtem.

a) dosadíme $a = 5\,000$, $n = 3$, $i = 0,05$

$$D = 5000 \cdot \frac{(1 - 1,05)^{-3}}{0,05}$$

$$D = 13\,616,24$$

b) dosadíme $a = 6\,000$, $n = 2$, $i = 0,05$, $k = 3$

$$K = 1,05^{-3} \cdot 6000 \cdot \frac{1 - 1,05^{-2}}{0,05}$$

$$K = 9\,637,37$$

$$13\,616,24 + 9\,637,37 = 23\,253,61$$

Nyní je nutno uložit 23 254 Kč.

3.3 Cvičení:

1. Paní Bednářová zdělila po svém bohatém strýci 200 000 Kč. Uložila je do banky na rentový účet s tím, že si bude od konce prvního měsíce po uložení peněz vybírat měsíční rentu, a to po dobu čtyř let. Jak vysoká bude měsíční renta? Úroková míra je 3,4%, úrokovací období je 1 měsíc.
2. Pan Mrázek uložil na začátku roku na rentový účet s úrokovou mírou 3,1% částku 85 000 Kč. Dále už peníze neukládal. První výběr důchodu se uskuteční na konci 6 roku. Výběrová fáze má délku 5 let. Důchod je roční a úrokovací období je jeden rok. Vypočítejte výši ročního důchodu.
3. Dvořákovi chtějí uložit peníze na rentový účet po nástupu svého syna na vysokou školu. Ten by začal pobírat měsíční rentu 5 000 Kč po jednom měsíci po uložení peněz. A to po dobu 5 let. Banka nabízí úrokovou míru 4%, úrokovací období je jeden měsíc. Kolik korun by museli Dvořákovi na rentový účet vložit?
4. Klient založil rentový účet s úrokovou mírou 4,5% a spořil na něm po dobu patnácti let měsíčně, vždy na začátku měsíce, částku 1 500 Kč. Po dobu deseti let pak bude pobírat měsíční rentu. Úrokovací období je 1 měsíc. Kolik korun bude klientovi celkem vyplaceno?
5. Paní Malá uložila na začátku roku na rentový účet s úrokovou mírou 3,2% jednorázově 100 000 Kč na dobu 10 let a dále již žádné peníze na tento účet neukládala. Podle smlouvy s bankou jí bude z účtu po dalších 5 let vyplácena měsíční renta. Úrokovací období je 1 měsíc, banka poprvé úročí za měsíc po uložení vkladu. První měsíční rentu obdrží klient na konci prvního měsíce pětileté výběrové fáze. Jaká bude výše měsíční renty?

Výsledky:

1. 4 418 Kč

2. 20 918 Kč

3. 253 161 Kč

4. 439 920 Kč

5. 2 342 Kč

4. Úvěr

Úvěr (dluh, půjčka) je důležitý finanční instrument. Úvěrem rozumíme poskytnutí peněžní částky na určitou dobu za odměnu zvanou **úrok**.

Podle doby splatnosti je možno rozdělit úvěry na:

Krátkodobé – doba splatnosti nepřesahuje jeden rok

Střednědobé – doba splatnosti je od jednoho do čtyř let

Dlouhodobé – doba splatnosti je delší než čtyři roky

Přehled výše splátek úvěru včetně úroků z hlediska jejich časového rozložení sestavují banky pro své klienty do tzv. **umořovacích plánů**.

Umořovací plán obsahuje:

- výši anuity (splátky)
- výši úroku z úvěru
- výši úmoru (částky, o kterou je v každém období snížen úvěr)
- zůstatek úvěru (po odečtení úmoru)

Každá splátka se skládá z úmoru úvěru a z úroku z úvěru.

Úmor = ta část splátky úvěru, která snižuje dlužnou částku

Anuita = splátka dané výše opakující se v pravidelných časových intervalech po určité období

4.1 Splácení úvěru stejnými splátkami (konstantní anuita)

Daný úvěr D má být splacen i s úroky n stejnými anuitami a , splatnými vždy koncem úrokového období při neměnné roční úrokové sazbě i .

Budeme nyní předpokládat, že úrokové období je roční.

Abychom určili výši anuity, je třeba si uvědomit, že počáteční hodnota úvěru se musí rovnat současné hodnotě všech anuit.

Platí tedy:

$$1.\text{rok} - D_1 = D_0 \cdot (1+i) - a$$

$$2.\text{rok} - D_2 = D_1 \cdot (1+i) - a$$

.

.

$$n\text{-tý rok} - D_n = D_0 \cdot (1+i)^n - a \cdot (1+i)^{n-1} - \dots - a$$

$$D_0 \cdot (1+i)^n = a \cdot (1+i)^{n-1} + a \cdot (1+i)^{n-2} - \dots + a$$

$$D_0 = \frac{a}{1+i} + \frac{a}{(1+i)^2} + \dots + \frac{a}{(1+i)^n} = av + av^2 + \dots + av^n$$

Součet na pravé straně uvedené rovnice je součtem geometrické posloupnosti s kvocientem v .

$$D_0 = a \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

kde $v = \frac{1}{1+i}$ je diskontní faktor

D_0 počáteční výše úvěru

aanuita

Anuitu a vypočítáme následovně:

$$a = D_0 \cdot \frac{i}{1-v^n}$$

Podíl $\frac{i}{1-v^n}$ se nazývá **umořovatel**.

Udává výši anuity nutné k tomu, aby se zaplatil jednotkový úvěr za n období při úrokové sazbě i .

Sestavení umořovacího plánu:

Potřebujeme znát hodnotu **úmoru a úroku**.

První splátka $a = U_1 + M_1$

$U_1 = D_0 \cdot i = a \cdot (1 - v^n)$ úrok

$M_1 = a - U_1 = a - a \cdot (1 - v^n)$ úmor

Po zaplacení r splátek je zůstatek úvěru D_r a platí:

$U_{r+1} = D_r \cdot i$

$M_{r+1} = a - D_r \cdot i$

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				D_0
1	a	$a \cdot (1 - v^n)$	$a \cdot v^n$	$D_1 = D_0 - a \cdot v^n$
2	a	$a \cdot (1 - v^{n-1})$	$a \cdot v^{n-1}$	$D_2 = D_1 - a \cdot v^{n-1}$
.	.	.	.	.
r	a	$a \cdot (1 - v^{n-(r-1)})$	$a \cdot v^{n-(r-1)}$	.
$r+1$	a	$a \cdot (1 - v^{(n-r)})$	$a \cdot v^{n-r}$	.
.	.	.	.	.
$n-1$	a	$a \cdot (1 - v^2)$	$a \cdot v^2$	.
n	a	$a \cdot (1 - v)$	$a \cdot v$	.
celkem	$a \cdot n$	$a \cdot n - D_0$	D_0	0

Příklad 1.

Úvěr 40 000 Kč má být umořen polhůtními ročními anuitami za šest let při neměnné roční 5% úrokové sazbě. Určete výši anuity a sestavte umořovací plán.

Řešení:

Anuitu spočítáme podle vzorce $a = D \cdot \frac{i}{1 - v^n}$

Dosadíme $D = 40\,000$, $n = 6$, $i = 0,05$

$$a = 40000 \cdot \frac{0,05}{1 - 1,05^6}$$

$$a = 7\,880,7$$

Sestavíme umořovací plán

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Zůstatek
0				40 000
1	7 881	2 000	5 881	34 119
2	7 881	1 706	6 175	27 945
3	7 881	1 397	6 484	21 461
4	7 881	1 073	6 808	14 653
5	7 881	733	7 148	7 506
6	7 881	375	7 506	0

Příklad 2:

Vytvořme umořovací plán pro úvěr ve výši 500 000 Kč s dobou splatnosti deset let, který bude splácen ročními polhůtními konstantními anuitami při úrokové sazbě $i = 12\%$ p.a.

Řešení:

Vypočteme si výši anuity $a = D \cdot \frac{i}{1 - v^n}$

a dosadíme: za $D = 500\,000$, $i = 0,12$, $n = 10$, $v = \frac{1}{1+i}$

$$a = 500000 \cdot \frac{0,12}{1 - 0,89^{10}}$$

$$a = 87\,186,-$$

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Zůstatek
0	87 186	60 000	27 186	472 814
1	87 186	56 738	30 448	442 366
2	87 186	53 084	34 102	408 264
3	87 186	48 992	38 194	370 070
4	87 186	44 408	42 778	327 292
5	87 186	39 275	47 911	279 381
6	87 186	33 526	53 660	225 721
7	87 186	27 087	60 099	165 622
8	87 186	19 875	67 311	98 311
9	87 186	11 797	75 389	22 922
10	25 673	2 751	22 922	0

Určení počtu předem daných konstantních anuit a poslední splátky úvěru.

Vyjdeme ze vztahu $D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}$

$$D \cdot i = a \cdot (1 - v^n)$$

$$\frac{D \cdot i}{a} = 1 - v^n$$

$$1 - \frac{D \cdot i}{a} = v^n$$

$$\ln\left(1 - \frac{D \cdot i}{a}\right) = n \cdot \ln v$$

$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{D \cdot i}{a}\right)}{\ln v}$$

Příklad 3:

Máme určit počet anuit, výši poslední splátky a sestavit umořovací plán. Pro úvěr ve výši 500 000 Kč. Splácet se má ročními anuitami ve výši 90 000 Kč při 7% roční úrokové sazbě.

Řešení:

Dobu splatnosti vypočítáme dosazením do výše uvedeného vzorce:

$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{500000 \cdot 0,07}{90000}\right)}{\ln\left(\frac{1}{1,07}\right)}$$

$$n = 7,27$$

Z toho vyplývá, že budeme platit sedmkrát danou anuitu 90 000 Kč a poslední, osmá splátka bude nižší.

Tu vypočítáme pomocí následujícího vztahu:

$$b = \left(D - a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i} \right) \cdot (1 + i)^{n_0 + 1}$$

$$b = \left(500000 - 90000 \cdot \frac{1 - 1,07^{-7}}{0,07} \right) \cdot 1,07^8$$

$$b = 25\,710,86$$

kde $n_0 = 7$

Poslední splátka bude ve výši 25 710,86 Kč

Sestavme umořovací plán:

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				500 000
1	90 000	35 000	55 000	445 000
2	90 000	31 150	58 850	386 150
3	90 000	27 031	62 969	323 181
4	90 000	22 623	67 377	255 804
5	90 000	17 906	72 094	183 710
6	90 000	12 860	77 140	106 570
7	90 000	7 460	82 540	24 030
8	25 711	1 682	24 030	0

Dosud jsme řešili případy, kdy jsme spláceli na konci každého úrokového období (roční). Dochází-li ke splácení úvěru vícekrát za úrokové období, vypočítáme nejprve hodnotu splátek do jeho konce a na základě tohoto výpočtu pak sestavíme umořovací plán.

Příklad 4:

Kolik zaplatíme bance celkem na úrocích při splácení desetiletého úvěru ve výši 500 000 Kč konstantními anuitami na konci každého měsíce?

Úroková sazba je 0,5% p.m.

Řešení:

Nejprve spočítáme anuitu podle vztahu $a = D \cdot \frac{i}{1 - v^n}$

a dosadíme $D = 500\,000$, $i = 0,005$ p.m. (měsíční úroková sazba),

$n = 10 \cdot 12$ (deset let po dvanácti měsících)

$$a = 500000 \cdot \frac{0,005}{1 - 1,005^{-120}}$$

$$a = 5\,551,-$$

Máme spočítanou anuitu. Úrok vyjádříme jako rozdíl součtu všech zaplacených anuit a výše úvěru.

$$U = n \cdot a - D$$

$$U = 120 \cdot 5551 - 500000$$

$$U = 166\,120,-$$

Na úroku zaplatíme 166 120,- Kč.

4.2 Úmor úvěru nestejnými splátkami

a) úmor úvěru stejnými úmory

- každá splátka se skládá z konstantní části úvěru – úmoru a proměnlivého úroku, který závisí na zůstatku úvěru
- úmor zůstává stále stejný a úrok se snižuje se vzrůstajícím n

$$\text{Úmor} - M = D/n$$

$$\text{Původní stav úvěru} - D_0 = n \cdot \frac{D}{n}$$

$$\text{Úrok v prvním období} - U = D_0 \cdot i$$

Podle těchto vztahů sestavíme umořovací plán:

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				$n \cdot D/n$
1	$D/n \cdot (n \cdot i + 1)$	$n \cdot D/n \cdot i$	D/n	$(n-1) \cdot D/n$
2	$D/n \cdot [(n-1) \cdot i + 1]$	$(n-1) \cdot D/n \cdot i$	D/n	$(n-2) \cdot D/n$
r	$D/n \cdot [(n-r+1) \cdot i + 1]$	$(n-r+1) \cdot D/n \cdot i$	D/n	$(n-r) \cdot D/n$
$r+1$	$D/n \cdot [(n-r) \cdot i + 1]$	$(n-r) \cdot D/n \cdot i$	D/n	$(n-r-1) \cdot D/n$
$n-1$	$D/n \cdot (2 \cdot i + 1)$	$2 \cdot D/n \cdot i$	D/n	D/n
n	$D/n \cdot (i + 1)$	$D/n \cdot i$	D/n	-
celkem	$D \cdot [(n+1) \cdot i/2 + 1]$	$(n+1) \cdot D/2 \cdot i$	$n \cdot D/n$	0

Ukážeme si nyní jak bude vypadat umořovací plán při splácení konstantním úmorem.

Příklad 5:

Úvěr ve výši 500 000,- Kč, doba splatnosti je stanovena na 10 let, přičemž splácen bude ročními splátkami vždy na konci roku při úrokové sazbě 6% p.a.

Řešení:

Úmor bude stále stejný. Jeho výši získáme vydělením zapůjčené částky počtem období splácení.

$$M = D / n = 500000 / 10$$

$$M = 50\,000,-$$

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				500000
1	80 000	30 000	50000	450 000
2	77 000	27 000	50000	400 000
3	74 000	24 000	50000	350 000
4	71 000	21 000	50000	300 000
5	68 000	18 000	50000	250 000
6	65 000	15 000	50000	200 000
7	62 000	12 000	50000	150 000
8	59 000	9 000	50000	100 000
9	56 000	6 000	50000	50 000
10	53 000	3 000	50000	0

4.3 Cvičení:

1. Podnikatelka Vránová získala na začátku roku úvěr na 3 roky ve výši 1 500 000,- Kč s úrokovou mírou 16%. Banka úročí jednou ročně.

Podnikatelka bude úvěr splácet pravidelně jednou ročně, poprvé na konci prvního roku. Každá splátka se bude skládat z konstantního úmoru 500 000,- a úroku za předchozí rok.

Sestavte umořovací plán.

Kolik korun splatí podnikatelka bance celkem?

Kolik korun bude činit celkem úrok z úvěru?

2. Pan Vávra obdržel na začátku roku od banky úvěr ve výši 3 000 000,- Kč s úrokovou mírou 15%. Od konce prvního roku bude pravidelně jednou ročně splácet úvěr takto: Na konci prvního roku splatí úmor 200 000 Kč spolu s úrokem za první rok, na konci každého dalšího roku se bude splátka sestávat z úmoru vyššího o 200 000,- než v předchozím roce a z úroku za stávající rok. Banka úročí jednou ročně.

Sestavte umořovací plán.

Za kolik let pan Vávra dluh splatí?

Kolik korun pan Vávra bance celkem splatí?

3. Obchodník s elektronikou získal od banky úvěr ve výši 4 500 000,- Kč s úrokovou mírou 13,8%. Banka stanovila měsíční anuity ve výši 90 000,-. Poslední splátka, kterou se dluh doplatí, může být nižší. Úrokové období banky je 1 měsíc, první úročení a následná první anuita budou realizovány za měsíc po poskytnutí úvěru.

Kolik korun bude činit poslední splátka?

Kolika splátkami bude úvěr splacen?

4. Paní Bednářová chce zakoupit nemovitost o hodnotě 18 600 000,- Kč. K dispozici má 7 500 000,-, zbývajících částku získá formou úvěru. Banka jí poskytne úvěr s úrokovou mírou 13,6% na dobu pěti let. Paní Bednářová bude dluh splácet čtvrtletními anuitami, úrokové období banky je čtvrt roku. První úročení a následná první splátka se budou poprvé realizovat za čtvrt roku po poskytnutí úvěru.

Vypočítejte výši jedné splátky. (Banka zaokrouhluje na koruny)

Kolik korun činí celkem úrok?

5. Pan Pešek chce získat od banky úvěr na nákup nábytku ve výši 75 000 Kč. Mohl by splácet měsíčně maximálně 6 000,- . Banka nabízí úvěr s úrokovou mírou 12%.

Jak dlouho by musel úvěr splácet?

6. Banka nabízí neúčelový spotřební úvěr v výši 10 000,- Kč na 48 měsíců s měsíční anuitou 265,-.

Zjistěte příslušnou úrokovou míru.

(ve vzorci pro anuitu zkoušejte různé hodnoty i)

7. Banka poskytla firmě Sůja úvěr ve výši 16 000 000,- Kč s úrokovou mírou 14,2%. Společnost bude úvěr splácet čtvrtletními anuitami ve výši 800 000,- poslední splátkou, která může být nižší, bude splacen zbytek dluhu. Úrokové období je čtvrt roku. První úročení a následná první splátka budou poprvé realizovány za čtvrt roku po poskytnutí úvěru.

Kolika splátkami bude úvěr splacen?

Kolik korun bude činit poslední splátka?

Výsledky:

1.

Roky	Splátka	Úrok	Úmor	Stav dluhu
0				1 500 000
1	740 000	240 000	500 000	1 000 000
2	660 000	160 000	500 000	500 000
3	580 000	80 000	500 000	0

Celkem zaplatí 1 980 000,-Kč

Celkový úrok bude 480 000,-Kč

2.

Roky	Splátka	Úrok	Úmor	Stav dluhu
0				3 000 000
1	650 000	450 000	200 000	2 800 000
2	820 000	420 000	400 000	2 400 000
3	960 000	360 000	600 000	1 800 000
4	1 070 000	270 000	800 000	1 000 000
5	1 150 000	150 000	1 000 000	0

Celkem zaplatí 4 650 000,- Kč

Dluh bude splacen za 5 let.

3. Poslední splátka = 75 021,-Kč

Splátek bude 75

4. Splátka bude činit 773 958,-Kč

Celkový úrok = 4 379 160,-Kč

5. 14 měsíců

6. 12,3%

7. Splátek bude 36

Poslední splátka je 391 517,-Kč

Závěr

Tato sbírka úloh obsahuje jen základní pojmy a operace. Vzhledem k omezenému rozsahu jsem nezařadila různé kombinace uvedených metod a složitější operace (například na kapitálových trzích). Ty jsou obsaženy spíše v knihách pro pokročilé. A je třeba k nim mít ekonomické základy. Metody použité v této sbírce by měli sloužit hlavně k osvojení určitých základních znalostí potřebných v běžném životě.

Literatura

- [1] Odvárko, O.: *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*,
Praha: Prométheus, 2005
- [2] Radová, J., Dvořák, P.: *Finanční matematika pro každého*,
Praha: Grada, 2003