

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

TANGRAM

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Knihovna JU - PF



Vypracovala: Zuzana Berounová

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

České Budějovice, duben 2006

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem na diplomové práci pracovala samostatně a že jsem uvedla veškerou literaturu, kterou jsem v této práci použila.

V Českých Budějovicích, dne 24. 4. 2006

Berounová Zuzana

ANOTACE

Diplomová práce poukazuje na využití tangramu v zájmové matematice, jakožto vhodné pomůcky k rozvoji geometrického myšlení a kombinačních schopností. V závěru práce je přiložena sbírka úloh a problémů pro samostatné procvičení.

ANNOTATION

The thesis refers to the use of tangrams in optional mathematics as a suitable teaching aid for the development of geometric cogitation and combinational abilities. At the conclusion of the work a collection of exercises and issues for individual practicing is enclosed.

Poděkování:

Děkuji RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D., vedoucímu mé diplomové práce, za podnětné rady a připomínky, kterými mi pomohl při jejím vypracování.

Berouna / Leischner
.....

Obsah:

1. ÚVOD.....	7
2. PŘEHLED ZÁKLADNÍCH POJMŮ A PRAVIDEL.....	8
3. HISTORIE.....	11
4. KLASIFIKACE OBRAZCE TANGRAMU.....	17
4.1 Konvexní n -úhelníky.....	17
4.2 Mřížové obrazce tangramu.....	42
4.3 Dělitelné obrazce tangramu.....	44
4.4 Paradoxy obrazce tangramu.....	45
5. SBÍRKA ÚLOH.....	46
5.1 Vyřešte paradoxy.....	46
5.2 Řešte dělitelné obrazce tangramu.....	47
5.3 Mřížové obrazce tangramu.....	48
5.4 Konvexní n -úhelníky.....	51
5.5 Pomocí tangramu vytvořte obrázek.....	51
5.6 Sestavte dané obrázky.....	51
6. ŘEŠENÍ.....	53
6.1 Paradoxy.....	53
6.2 Dělitelné obrazce tangramu.....	54
6.3 Mřížové obrazce tangramu.....	55
6.4 Konvexní n -úhelníky.....	57
6.5 Obrázky pomocí tangramu.....	60
6.6 Obrázky.....	63
7. ZÁVĚR.....	65
8. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	66
9. PŘÍLOHY.....	67

1. Úvod

Tangram je stará hra původem z Číny. Je to čtverec důmyslně rozdělený na sedm přesně určených dílů, pomocí kterých můžeme sestavit nejenom různé geometrické tvary, ale také obrazy osob, zvířat, rostlin i věcí.

Jak je patrné, těchto tangramových obrazců může existovat velmi mnoho, vše záleží pouze na fantazii a šikovnosti hráče. Tangramová hra fascinuje lidi již po několik staletí. Například Napoleon Bonaparte, Lewis Carroll nebo třeba Edgar Allan Poe byli vášnivými hráči.

Cílem této diplomové práce je ukázat, že tangram není pouze výborná hra, ale může sloužit jako vhodná pomůcka k rozvoji geometrického myšlení a kombinačních schopností. Zaměřím se na to, jak by se dal tangram využít v zájmové matematice.

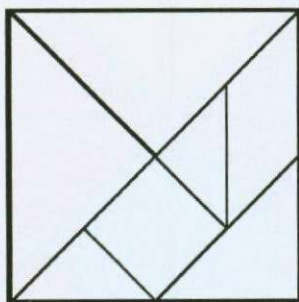
Po úvodní části textu, ve které se zmíním o některých větech z rovinné geometrie a zavedu pojmy, na které se dále v textu budu odkazovat, bude následovat krátké seznámení s historií této skládačky. Dále ve své práci uvedu několik způsobů rozdělení tangramových obrazců (mřížkové obrazce tangramu, konvexní n -úhelníky a dělitelné obrazce tangramu). Ke každému tématu přiložím několik příkladů. Ve své práci se zmíním také o paradoxech obrazce tangramu.

Poslední kapitola v mé práci bude řešena jako sbírka řešených příkladů, které mohou nalézt využití v individuální výuce nebo samostudiu.

V příloze přikládám popis dvou internetových stránek, kde si zájemci o tuto hru mohou vyzkoušet složit několik desítek figur. Stránky se od sebe liší tím, jakým způsobem hráč má dané obrazce skládat. Ať je to do předem daného obrysu obrazce nebo podle vzoru, který je ukázán vedle hlavní plochy ve zmenšené podobě.

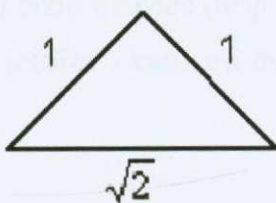
2. Přehled základních pojmů a pravidel

Tangram: je stará čínská skládačka v Číně nazývána Chi'i Ch'ae pan, jedná se o velký čtverec rozdělený na sedm menších částí: *dvou velkých trojúhelníků, jednoho středně velkého trojúhelníku, dvou malých trojúhelníků, čtverce a rovnoběžníku.*



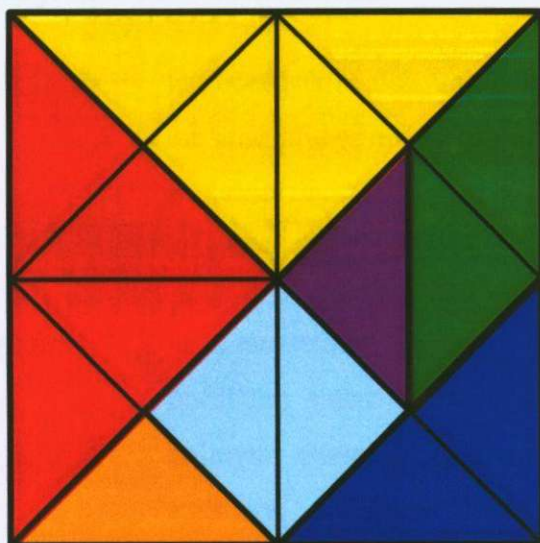
Obr. 1: Tangram

Základní trojúhelník: je to pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, jehož ramena a, b mají délku $a = b = 1$ a odvěsna c je rovna $c = \sqrt{2}$.



Obr. 2: Základní trojúhelník

Tany: jsou jednotlivé díly tangramu, složené ze základních trojúhelníků (celý tangram se skládá z 16 základních trojúhelníků).



Obr. 3: Rozdělení tangramu na tany. Jednotlivé tany jsou rozlišeny barvou, v obrázku je také vyznačeno všech 16 základních trojúhelníků.

Konvexní množina: Množina M bodů v rovině (resp. v prostoru), se nazývá „konvexní množina,“ jestliže s každými dvěma body $X, Y \in M$ obsahuje i úsečku XY .

Racionální strana mnohoúhelníku: je strana složená z odvěsen základních trojúhelníků.

Iracionální strana mnohoúhelníku: je strana složená z přepon základních trojúhelníků.

Konvexní obal: Je - li M libovolná množina, pak průnik všech konvexních množin obsahujících množinu M nazveme „konvexní obal množiny M “ a označíme jej symbolem $K(M)$. Z definice plyne, že konvexní obal je konvexní mnohoúhelník.

Stupeň nekonvexivity: je počet základních trojúhelníků, které k tangramu musíme přidat, aby se stal konvexním tangramem. Budeme jej označovat ν . Konvexní obrazec tangramu má $\nu = 0$.

Kartézská soustava souřadnic: je to pravoúhlá soustava souřadnic, která je dána počátkem soustavy souřadnic a dvěma navzájem kolmými osami x , y , které procházejí počátkem soustavy, každému bodu roviny přiřazujeme uspořádanou dvojici reálných čísel $[x, y]$.

Mříž: tvořena body s celočíselnými souřadnicemi kartézské soustavy.

Pravidla skládání obrazce tangramu: jednotlivé tany se musí dotýkat, nesmějí být přes sebe přeloženy a musí být použito všech sedmi dílů.

Slovo tangram můžeme využívat ve dvojím významu: skládačka a libovolný obrazec,

který z ní složíme.

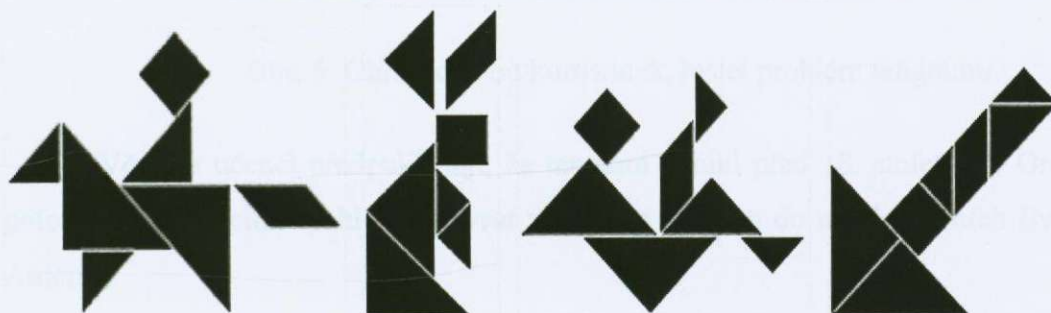
3. Historie

Tangram stará čínská skládačka původem z Číny. Skládá se ze sedmi dílů, kterým se často říká tany a všechny společně tvoří čtverec. Jeho objevení není historicky přesně dáno, nicméně se uvádí několik názorů či příběhů, které se nám snaží původ jeho vzniku i samotný název přiblížit.

Jeden z pramenů [1] uvádí, že asi před čtyřmi tisíci lety žil vynikající řemeslník jménem Tan, který navrhl a vyrobil nádherně glazovanou dlaždici jako poctu nejvyššímu císaři. Když šel Tan předat svůj dar císaři, zakopl na chodbách paláce, upadl a svůj dar rozbil na sedm kousků. Tan se rychle pokoušel složit tyto díly zpátky do dlaždice, ale stále se mu to nedařilo, místo původního obrazu mu vznikaly nové a nové geometrické tvary a obrázky. Císaře hluk na chodbách vyrušil, poslal proto sloužící, aby zjistili, co se to děje. Když se sloužící vrátili, předali císaři skládanku sedmi dílků jako dar k jeho potěšení a zábavě.

Publikace [6] zmiňuje legendu o lidu Tanka, který žil v okolí řeky. Tato řeka byla velkou vodní cestou pro obchod s opiem. Tito lidé si na svých cestách velmi často hráli s podivnou skládačkou a sestavovali s její pomocí roztodivné obrázky.

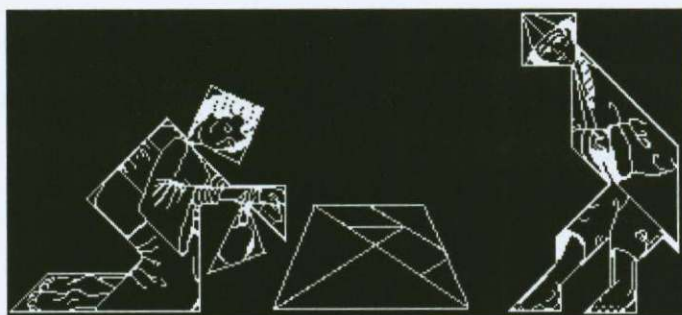
Podle odborníků tyto legendy nepochází z Číny, ale z anglicky mluvících zemí.



Obr. 4: Obrazce tangramu

Nejstarší známá dochovaná knižní zmínka o hlavolamu podobnému tangramu podle [2] je z Japonska z roku 1742. Až v dobách císaře Chia Ch'inga (1796-1820), kdy byl tento hlavolam už značně populární, teprve byly tištěny první knihy o tomto hlavolamu. Jedním z důvodů [6], proč nebyly publikovány knihy o této skládačce dříve, je, že původně byla tato hra určena pouze dětem a ženám a nikdo se jí proto nezabýval příliš podrobně.

Za nejstarší knihu o tangramech je považována ta, která byla vydána v Číně roku 1813. O existenci této knihy se dozvídáme až od Shan-Chiao, který se o ní zmiňuje ve své knize „New Figures of the Tangram“ v roce 1815, protože žádný originál knihy z roku 1813 se nedochoval. Ale hra tangram musela být známa už před rokem 1813. Jak nám dokazuje dřevorytina dvou kurtizánek, které se snaží řešit problém tangramu, kterou vytvořil starý dřevorubec Utamaro kolem roku 1800.



Obr. 5: Obrazec dvou kurtizánek, řešící problém tangramu

Vědci a učenci předpokládají, že tangram vznikl před 18. stoletím v Orientě a potom se začal velmi rychle rozšiřovat západním směrem do mnoha zemí Evropy a Ameriky.

Již kolem roku 1818 se tangramová vyobrazení objevovala v Americe, Německu, Itálii, Rakousku, Anglii a Francii (dokonce i Napoleon ve svém vyhnanství byl vášnivým hráčem tangramu). Rozmach tangramové skládačky přes celou Evropu jistě souvisí s otevřením obchodu s Čínou, kdy si obchodníci ze svých cest přiváželi různé artefakty a hračky, mino jiné i jakousi podivnou skládačku ze sedmi dílků.

V „*Lipském magazínu pro průmysl*“ vycházely různé statě o tangramech. Jako například matematický článek pojednávající o nových způsobech budování Euklidových důkazů, pomocí tangramu (tedy pouze trojúhelníkových dílů tangramu). Nebo článek od učitele M. Williamse, který vyšel v roce 1817. Tento článek obsahuje celou řadu geometrických úloh, které mohou být řešeny pomocí tangramu. Sám Williams poukazuje na matematicko-didaktický aspekt této hry. Hra je univerzální zábavou pro muže a ženy, pro mladé i staré, pro lidi z rozdílných vrstev společnosti. Je poučná a člověk při hře nemůže prohrát peníze.

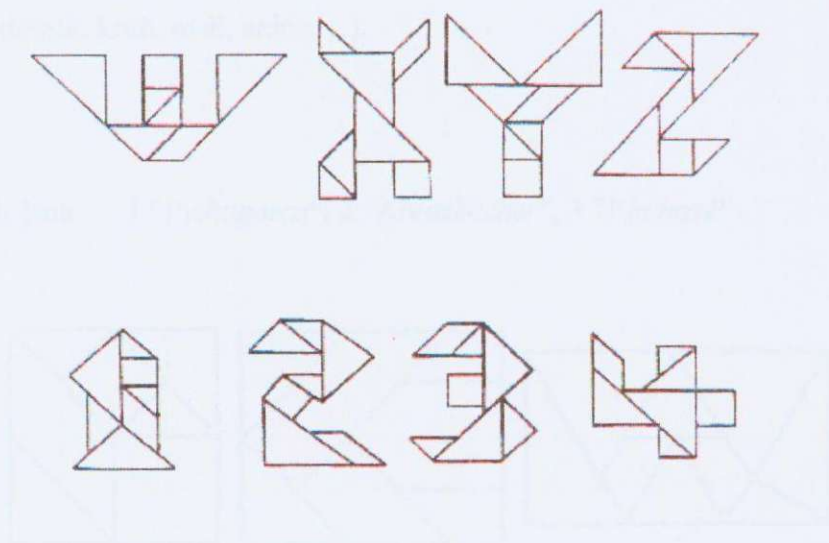
První zmínka o čínské hře pojmenované tangram (doposud se mluvilo jen o skládačce nebo hlavolamu) se objevila v publikaci z roku 1848 od Dr. Thomase Hilla „*Geometrical Puzzles for the Young*“, který doporučuje, aby byl tangram využit při výuce geometrie. V této knize současně i vysvětluje odkud se mohl vzít název tangram. Jedná se o složeninu čínského slova „T'ang“ (což je v překladu „čínský“) a evropské koncovky „-gram“ (což znamená „něco nakreslené“)

V publikaci [6] se uvádí, že v roce 1903 publikoval Sam Loyd knihu s názvem „*Osmá kniha Tanu*“, ve které popisuje stáří tangramu. Říká, že tuto hru objevil před 4000 lety Bůh Tan a popsal ji v „*Sedmi knihách Tanu*“. Každá z těchto 7 knih obsahovala více než 1000 figur, které ukazovaly podobu světa. Sedm dílů skládačky vzal Bůh Tan ze Slunce, Měsíce a pěti planet (Mars, Jupiter, Saturn, Merkur a Venuše). Téměř celá kniha byla podvrh, více než 600 figur si Sam Loyd vymyslel sám.

S. Loyd a H. F. Dudeney se také zabývali otázkou paradoxů u tangramů. (viz str. 45)

Všechny americké i evropské knihy o tangramech jsou více či méně kopiemi knih čínských. Jen s tím rozdílem, že v čínských knihách je kladen důraz na význam jednotlivých tangramů a na různé polohy tanů. Každá figura něco popisuje. Ale u amerických i evropských knih jde spíše o samotné skládání figur, u daného tangramu rozhoduje, jestli jsou všechny tany na svých pravých místech.

Toto je většinou způsobeno nepochopením čínských textů nebo úplným vynecháním čínských popisů figur. Další novinkou v amerických i evropských knihách, je vyobrazení abecedy a arabských číslic pomocí tanů (obr. 6).



Obr. 6: Některá písmena a číslice sestavená z tangramu

Tangram se vyskytuje v různých provedeních: od levné umělé hmoty z dnešní doby, z papíru či dřeva, až po luxusnější provedení ze slonoviny či z polodrahokamů v lakových krabičkách, které většinou sloužily jako dary pro panovníky.

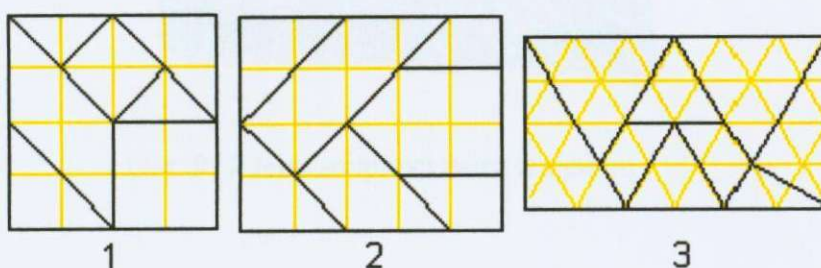
Jerry Slocum v publikaci [5] ukázal i nejstarší dochovanou tangramovou hru z roku 1802 (obr. 7), která patřila Francisi Walnovi, jehož otec byl majitel lodí, které vozily zboží do Číny. Tato hra je umístěna v muzeu blízko Philadelphie v USA.



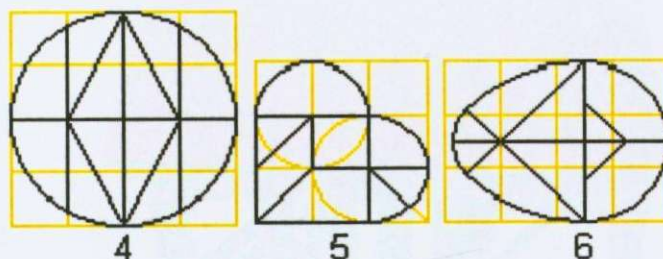
Obr. 7: Nejstarší dochovaná tangramová hra

Hlavolam si získal svou popularitu jako nástroj zábavy, nástroj rozvíjející tvořivost i fantazii, ale i jako nástroj pro matematické modely. Dokonce začaly vznikat i různé obměny klasického tangramu (obr. 8). Jedná se o tangramy, kde se daný čtverec rozdělil na jiných sedm dílů nebo se na domluvený počet dílů rozdělil jiný geometrický obrazec (obdélník, kruh, ovál, srdce,...).

Nejznámější jsou: 1 "*Pythagoras*", 2 "*Kreuzbecher*", 3 "*Vše nové*"



4 "*Záhadný kruh*", 5 "*Zlomené srdce*" a 6 "*Magické oko*"



Obr. 8: Různé obměny tangramové skládačky

jiné využití tangramu:



Obr. 9: Jídelní souprava tvaru tangramu

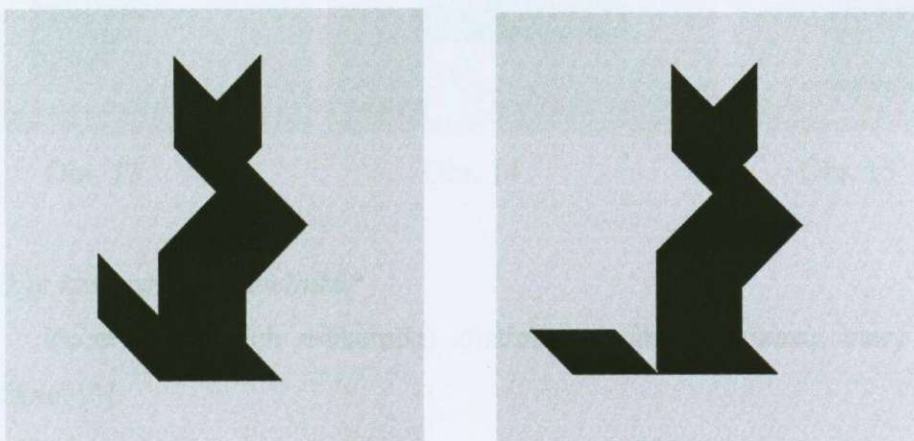


Obr. 10: Tangramový stůl

4. Klasifikace obrazce tangramu

Je počet různých tangramovým obrazců omezený? Obecně určitě ne. Přesunutím jen jedné části obrazce (např. pootočení ocasu kočky nebo posunutí její hlavy) vznikne jiný tangram. Na první pohled vypadají stejně (např. ukazují sedící kočku), ale stejné nejsou (např. kočky, které se liší pouze umístěním ocasu, těchto různých poloh kočičího ocasu může být nekonečně mnoho), proto je nemůžeme považovat za stejný tangram.

Formálně můžeme tedy z tangramu složit nekonečně mnoho různých obrazců např. postav, zvířat, písmen nebo různých dalších geometrických tvarů.



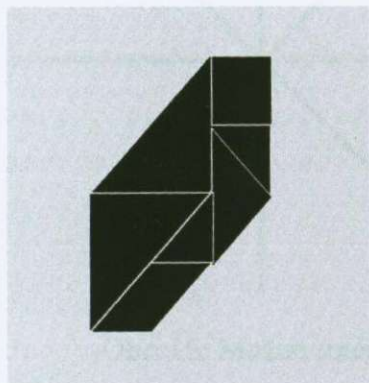
Obr. 11, 12: Různé tangramy zobrazující kočku

Chceme-li provést nějakou klasifikaci obrazců tangramu, musíme stanovit pravidla, nějakou vlastnost, podle které bychom mohli počet možných obrazců spočítat.

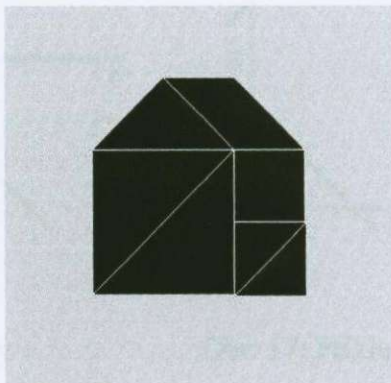
4. 1. KONVEXNÍ n -úhelníky

Tangramový obrazec označíme za konvexní, pokud pro každé dva libovolné body platí: $A, B \in U \Rightarrow \text{úsečka } AB \in U$ (neboli všechny body úsečky spojující libovolné dva body A, B leží uvnitř obrazce). Např. obrazec úplňku je konvexní útvar, ale srpek měsíce už ne. Dále budeme předpokládat, má-li vzniknout konvexní n -úhelník, musí se skládat jen racionální strany k racionálním a iracionální strany k iracionálním, toto tvrzení je dokázáno v publikaci [3].

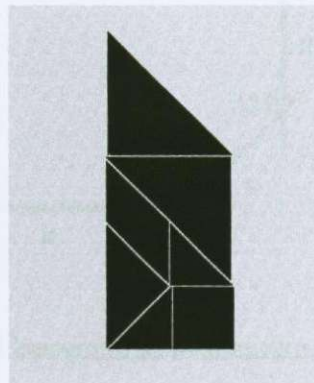
V roce 1942 Fu Traing Wang a Chuan Chih Hsiung ve své knize [3] také dokázali, že existuje konečná množina konvexních obrazců tangramu (tři z nich představují obr. 13, 14 a 15).



Obr. 13



Obr. 14



Obr. 15

Kolik je konvexních n -úhelníků?

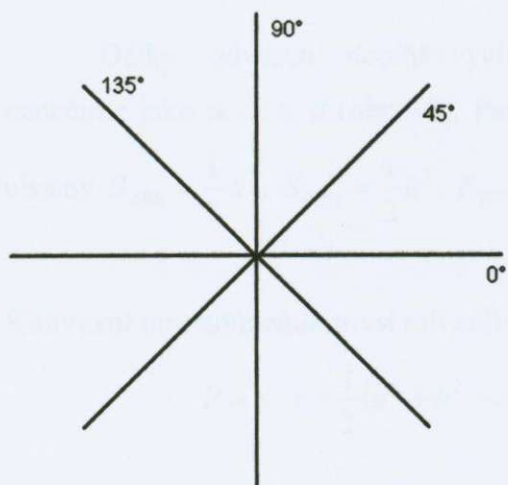
Počet konvexních n -úhelníků zjistíme na základě důkazu, který je popsán v publikaci [3].

Všechny díly tangramu vznikly sjednocením 16 základních trojúhelníků, odtud plyne, že úhly, které svírají sousední strany n -úhelníku jsou:

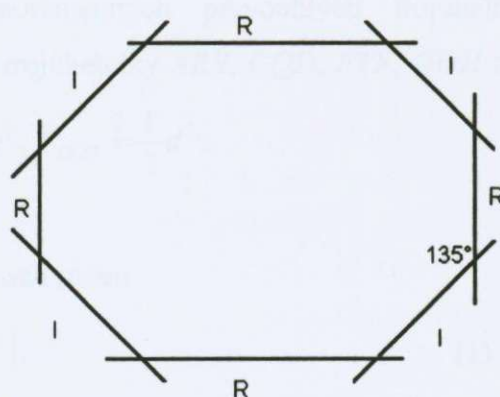
90° - a to v případě, že obě strany jsou racionální (resp. iracionální),

45° nebo 135° - pokud jedna strana je racionální a druhá iracionální.

Umístíme-li některou stranu skládaného n -úhelníku vodorovně, pak existují pouze určité směry (obr. 16), se kterými mohou strany tangramu být rovnoběžné.



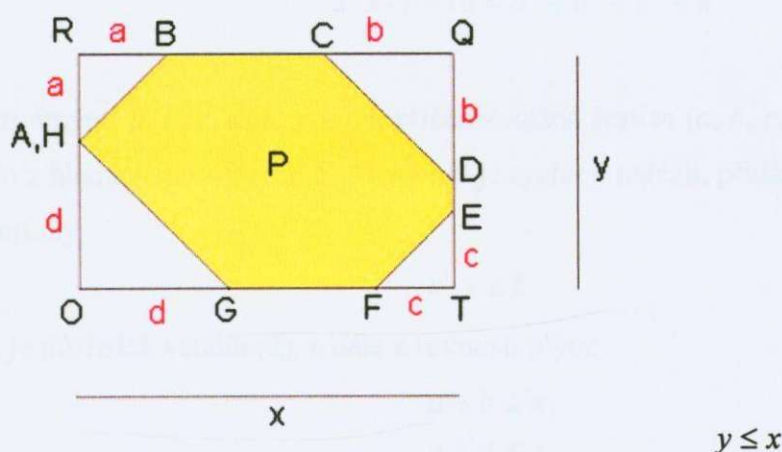
Obr. 16: Možné směry



Obr. 17: Příklad konvexního n -úhelníku

Omezíme-li se jen na konvexní útvary, pak odtud vidíme, že může existovat pouze n -úhelník, kde $n \leq 8$ (obr. 17).

Každý konvexní n -úhelník můžeme vkreslit do obdélníku $OTQR$ (podle obr. 18), takže racionální strany daného mnohoúhelníku $ABCDEFGH$ leží na stranách obdélníku.



Obr. 18: Způsob, jakým vepisujeme n -úhelník do obdélníku

Předpokládejme, že velikost strany OT je rovna x -násobku racionální strany základního trojúhelníku a strana TQ y -násobku racionální strany základního trojúhelníku.

Pak obsah obdélníku $OTQR$: $S = x \cdot y$

Délky odvěsen doplňkových rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků označíme jako a, b, c, d (obr. 18). Pak tyto trojúhelníky ARB, CQD, ETF, GOH mají

$$\text{obsahy } S_{ARB} = \frac{1}{2}a^2, S_{CQD} = \frac{1}{2}b^2, S_{ETF} = \frac{1}{2}c^2, S_{GOH} = \frac{1}{2}d^2.$$

Konvexní mnohoúhelník musí mít celkový obsah roven

$$P = x \cdot y - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2). \quad (1)$$

Každý obrazec tangramu je složen ze šestnácti základních trojúhelníků, proto je jeho

obsah $P = 16 \cdot P_1$, kde $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$ je obsah jednoho základního trojúhelníku.

Proto tedy platí

$$P = 8. \quad (2)$$

Po úpravě (1), (2) dostaneme diofantovskou rovnici

$$2 \cdot x \cdot y - 16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (3)$$

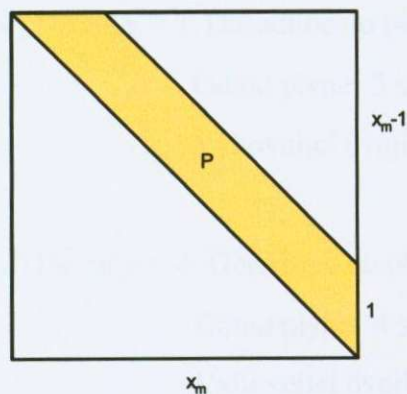
s neznámými $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{N}$, přičemž každá šestice (a, b, c, d, x, y) určuje nejvýše jeden z hledaných n -úhelníků. Abychom je rychleji našli, přidáme k rovnici doplňující podmínky

$$x \cdot y \geq 8. \quad (4)$$

Což je důsledek vztahu (2), a dále z rovnosti plyne

$$\begin{aligned} a + b &\leq x, \\ c + d &\leq x, \\ a + d &\leq y, \\ b + c &\leq y. \end{aligned} \quad (5)$$

Navíc budeme bez újmy na obecnosti předpokládat $y \leq x$ a nejprve odhadneme možné hodnoty x shora. Pokud $y = x$, je n -úhelník ohraničen čtvercem, jehož maximální délka strany odpovídá lichoběžníku (obr. 19).



Obr. 19

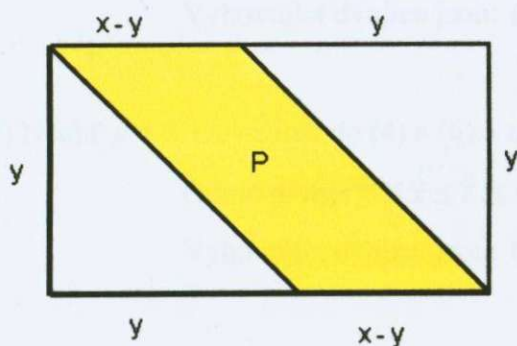
Obsah lichoběžníku vyjádříme pomocí proměnné x_m a pomocí vztahu (2) dostaneme

$$\frac{1}{2}[x_m^2 - (x_m - 1)^2] = 8,$$

odtud snadno vypočteme maximální hodnotu $x_m = 8$.

Pro $y = x$ tedy platí $x \leq 8$.

Pro druhou možnost, kde $y < x$ je n -úhelník ohraničen obdélníkem (obr. 20).



Obr. 20

Obsah lichoběžníka vyjádříme pomocí proměnných x, y a pomocí vztahu (2) dostaneme

$$P = (x - y)y \leq 8. \quad (6)$$

Všechny konvexní n -úhelníky zjistíme výčtem možností. Rozlišíme tyto situace:

a) Necht' $y = 1$. Dosadíme do (4) a (6) a zjistíme, že $x \geq 8$ a $(x - 1) \cdot 1 \leq 8$.

Odtud plyne: $8 \leq x \leq 9$.

Vyhovující dvojice jsou: $(x, y) = \{(8, 1), (9, 1)\}$.

b) Necht' $y = 2$. Dosadíme do (4) a (6) a zjistíme, že $x \cdot 2 \geq 8$ a $(x - 2) \cdot 2 \leq 8$.

Odtud plyne: $4 \leq x \leq 6$.

Vyhovující dvojice jsou: $(x, y) = \{(4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$.

c) Necht' $y = 3$. Dosadíme do (4) a (6) a zjistíme, že $x \cdot 3 \geq 8$ a $(x - 3) \cdot 3 \leq 8$.

Odtud plyne: $3 \leq x \leq 5, (x \in \mathbb{Z})$.

Vyhovující dvojice jsou: $(x, y) = \{(3, 3), (4, 3), (5, 3)\}$.

d) Necht' $y = 4$. Dosadíme do (4) a (6) a zjistíme, že $x \cdot 4 \geq 8$ a $(x - 4) \cdot 4 \leq 8$.

Odtud plyne: $4 \leq x \leq 6$.

Vyhovující dvojice jsou: $(x, y) = \{(4, 4), (5, 4), (6, 4)\}$.

e) Necht' $y = 5$. Dosadíme do (4) a (6) a zjistíme, že $x \cdot 5 \geq 8$ a $(x - 5) \cdot 5 \leq 8$.

Odtud plyne: $5 \leq x \leq 6, (x \in \mathbb{Z})$.

Vyhovující dvojice jsou: $(x, y) = \{(5, 5), (6, 5)\}$.

f) Necht' $y = 6$. Dosadíme do (4) a (6) a zjistíme, že $x \cdot 6 \geq 8$ a $(x - 6) \cdot 6 \leq 8$.

Odtud plyne: $6 \leq x \leq 7, (x \in \mathbb{Z})$.

Vyhovující dvojice jsou: $(x, y) = \{(6, 6), (7, 6)\}$.

g) Necht' $y = 7$. Dosadíme do (4) a (6) a zjistíme, že $x \cdot 7 \geq 8$ a $(x - 7) \cdot 7 \leq 8$.

Odtud plyne: $7 \leq x \leq 8, (x \in \mathbb{Z})$.

Vyhovující dvojice jsou: $(x, y) = \{(7, 7), (8, 7)\}$.

h) Necht' $y = 8$. Dosadíme do (4) a (6) a zjistíme, že $x \cdot 8 \geq 8$ a $(x - 8) \cdot 8 \leq 8$.

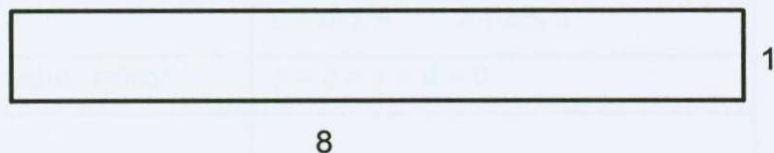
Odtud plyne: $8 \leq x \leq 9$.

Vyhovující dvojice jsou: $(x, y) = \{(8, 8), (9, 8)\}$.

Našli jsme dvojice stran obdélníků, do kterých budeme vepisovat mnohoúhelníky.

Nyní zjistíme možné kombinace a, b, c, d .

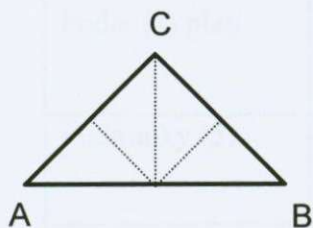
ad a) $y = 1, x = 8$ (resp. $y = 1, x = 9$)



Obr. 21

Nemá smysl uvažovat, zda-li existuje nějaká možná kombinace a, b, c, d .

Tzn. jestli jde do obdélníku o stranách $y = 1, x = 8$ (resp. $y = 1, x = 9$) vepsat n -úhelník, který by šel složit z tangramu. Důvod, proč nejde vepsat žádný n -úhelník, plyne z velikosti největšího trojúhelníkového tanu (obr. 22). Tento tan má alespoň dvě strany větší než jsou strany daného obdélníku.



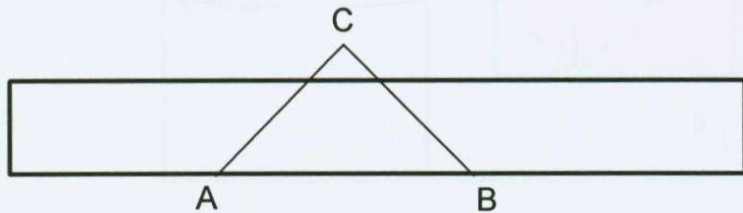
Obr. 22

Složen ze 4 základních trojúhelníků

$$a = 2$$

$$b = 2$$

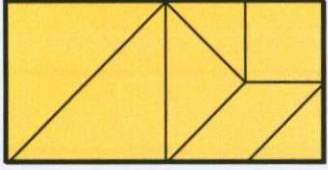
$$c = 2 \cdot \sqrt{2}.$$



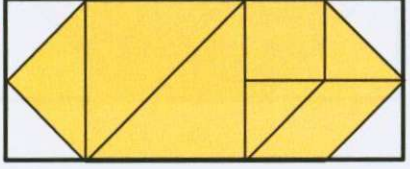
Obr. 23

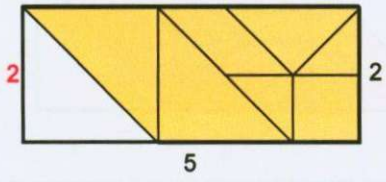
ad b)

❖ $y = 2, x = 4$

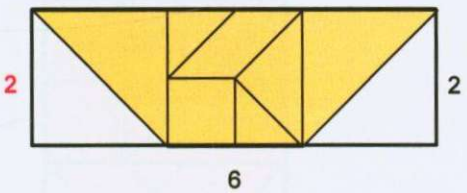
Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$
Podmínky (5)	$a + b \leq 4 \quad a + d \leq 2$ $c + d \leq 4 \quad b + c \leq 2$
Jediné řešení	$a = b = c = d = 0$
Obr. 24	 Diagram of a rectangle with width 4 and height 2. The rectangle is divided into four yellow triangles by two diagonals and a vertical line connecting the top and bottom vertices. The triangles are labeled a, b, c, and d.

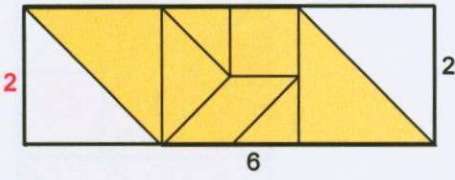
❖ $y = 2, x = 5$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$
Podmínky (5)	$a + b \leq 5 \quad a + d \leq 2$ $c + d \leq 5 \quad b + c \leq 2$
Řešení	$a = b = c = d = 1$
Obr. 25	 Diagram of a rectangle with width 5 and height 2. The rectangle is divided into four yellow triangles by two diagonals and a vertical line connecting the top and bottom vertices. The triangles are labeled a, b, c, and d.

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$
Podmínky (5)	$a + b \leq 5$ $a + d \leq 2$ $c + d \leq 5$ $b + c \leq 2$
Řešení	$a = b = c = 0$ $d = 2$
Obr. 26	

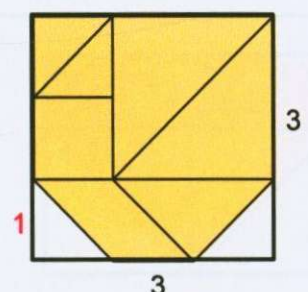
❖ $y = 2, x = 6$

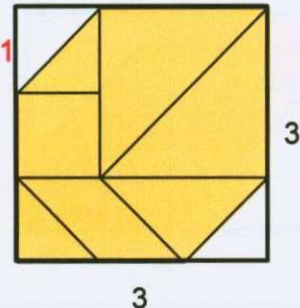
Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8$
Podmínky (5)	$a + b \leq 6$ $a + d \leq 2$ $c + d \leq 6$ $b + c \leq 2$
Řešení	$a = b = 0$ $c = d = 2$
Obr. 27	

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8$
Podmínky (5)	$a + b \leq 6$ $a + d \leq 2$ $c + d \leq 6$ $b + c \leq 2$
Řešení	$a = c = 0$ $b = d = 2$
Obr. 28	

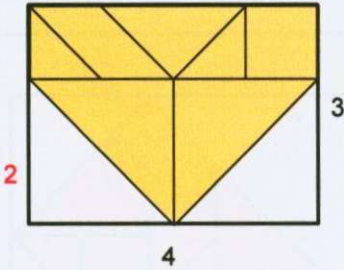
ad c)

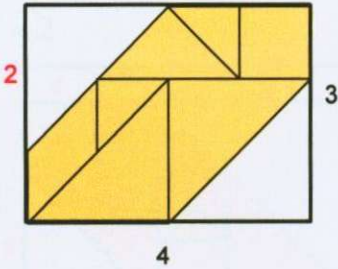
❖ $y = 3, x = 3$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2$
Podmínky (5)	$a + b \leq 3$ $a + d \leq 3$ $c + d \leq 3$ $b + c \leq 3$
Řešení	$a = b = 0$ $c = d = 1$
Obr. 29	

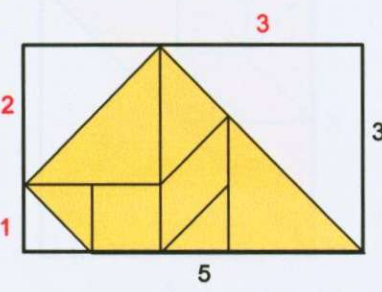
Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2$
Podmínky (5)	$a + b \leq 3$ $a + d \leq 3$ $c + d \leq 3$ $b + c \leq 3$
Řešení	$a = c = 0$ $b = d = 1$
Obr. 30	

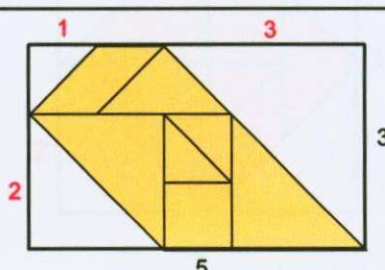
❖ $y = 3, x = 4$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8$
Podmínky (5)	$a + b \leq 4$ $a + d \leq 3$ $c + d \leq 4$ $b + c \leq 3$
Řešení	$a = b = 0$ $c = d = 2$
Obr. 31	

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8$
Podmínky (5)	$a + b \leq 4$ $a + d \leq 3$ $c + d \leq 4$ $b + c \leq 3$
Řešení	$a = c = 2$ $b = d = 0$
Obr. 32	

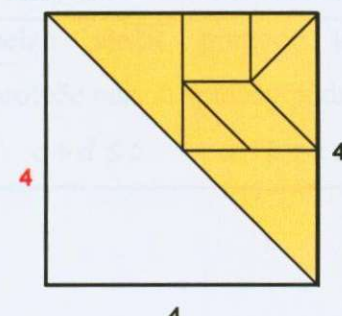
❖ $y = 3, x = 5$

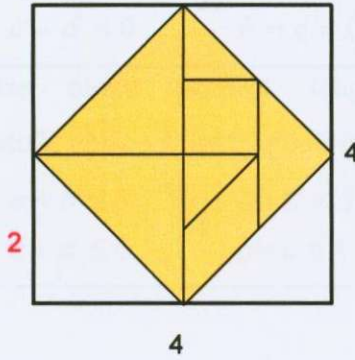
Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 14$
Podmínky (5)	$a + b \leq 5$ $a + d \leq 3$ $c + d \leq 5$ $b + c \leq 3$
Řešení	$a = 2$ $b = 3$ $c = 0$ $d = 1$
Obr. 33	

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 14$
Podmínky (5)	$a + b \leq 5$ $a + d \leq 3$ $c + d \leq 5$ $b + c \leq 3$
Řešení	$a = 1$ $b = 3$ $c = 0$ $d = 2$
Obr. 34	

ad d)

❖ $y = 4, x = 4$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16$
Podmínky (5)	$a + b \leq 4$ $a + d \leq 4$ $c + d \leq 4$ $b + c \leq 4$
Řešení	$a = b = c = 0$ $d = 4$
Obr. 35	

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16$
Podmínky (5)	$a + b \leq 4$ $a + d \leq 4$ $c + d \leq 4$ $b + c \leq 4$
Řešení	$a = b = c = d = 2$
Obr. 36	

❖ $y = 4, x = 5$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 24$
Podmínky (5)	$a + b \leq 5$ $a + d \leq 4$ $c + d \leq 5$ $b + c \leq 4$
Řešení	$a = d = 2$ $a = b = 2$ 1. $c = 4$ 2. $c = 4$ $b = 0$ $d = 0$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejsou splněny podmínky: 1. $c + d \leq 5$ 2. $b + c \leq 4$

$$\diamond y = 4, x = 6$$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 32$
Podmínky (5)	$a + b \leq 6$ $a + d \leq 4$ $c + d \leq 6$ $b + c \leq 4$
Řešení	1. $a = b = 4$ $c = d = 0$ 2. $a = d = 4$ $b = c = 0$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejsou splněny podmínky: 1. $a + b \leq 6$ $c + d \leq 6$ 2. $a + d \leq 4$ $b + c \leq 4$

ad e)

$$\diamond y = 5, x = 5$$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 34$
Podmínky (5)	$a + b \leq 5$ $a + d \leq 5$ $c + d \leq 5$ $b + c \leq 5$
Řešení	1. $a = b = 4$ $c = d = 1$ 2. $a = d = 1$ $b = c = 4$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejsou splněny podmínky: 1. $a + b \leq 5$ 2. $b + c \leq 5$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 34$
Podmínky (5)	$a + b \leq 5$ $a + d \leq 5$ $c + d \leq 5$ $b + c \leq 5$
Řešení	$a = 4$ $c = 4$ 3. $b = c = 3$ 4. $a = b = 3$ $d = 0$ $d = 0$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejsou splněny podmínky: 3. $b + c \leq 5$ 4. $b + c \leq 5$ $a + b \leq 5$ $a + b \leq 5$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 34$
Podmínky (5)	$a + b \leq 5$ $a + d \leq 5$ $c + d \leq 5$ $b + c \leq 5$
Řešení	$a = 5$ $a = d = 0$ 5. $b = 3$ 6. $b = 5$ $c = d = 0$ $c = 3$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejsou splněny podmínky: 5. $a + b \leq 5$ 6. $b + c \leq 5$

❖ $y = 5, x = 6$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 44$
Podmínky (5)	$a + b \leq 6$ $a + d \leq 5$ $c + d \leq 6$ $b + c \leq 5$
Řešení	$a = 6$ $a = b = 2$ 1. $b = c = 2$ 2. $c = 6$ $d = 0$ $d = 0$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejsou splněny podmínky: 1. $a + d \leq 5$ 2. $b + c \leq 5$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 44$
Podmínky (5)	$a + b \leq 6$ $a + d \leq 5$ $c + d \leq 6$ $b + c \leq 5$
Řešení	$a = 5$ $c = 5$ 3. $b = c = 3$ 4. $a = b = 3$ $d = 1$ $d = 1$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejsou splněny podmínky: $b + c \leq 5$ 3. $a + b \leq 6$ 4. $b + c \leq 5$ $a + d \leq 5$

ad f)

❖ $y = 6, x = 6$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 56$
Podmínky (5)	$a + b \leq 6$ $a + d \leq 6$ $c + d \leq 6$ $b + c \leq 6$
Řešení	$a = 6$ $a = 6$ 1. $b = 4$ 2. $b = 0$ $c = 2$ $c = 4$ $d = 0$ $d = 2$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejsou splněny podmínky: 1. $a + b \leq 6$ 2. $a + d \leq 6$

❖ $y = 6, x = 7$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 68$
Podmínky (5)	$a + b \leq 7$ $a + d \leq 6$ $c + d \leq 7$ $b + c \leq 6$
Řešení	$a = 8$ 1. $b = 2$ $c = d = 0$
Obrázek	nelze vepsat do daného obdélníku, tento n -úhelník má větší rozměr jedné strany než obdélník.

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 68$
Podmínky (5)	$a + b \leq 7$ $a + d \leq 6$ $c + d \leq 7$ $b + c \leq 6$
Řešení	$a = 6$ $a = c = 4$ $a = 7$ 2. $b = c = 4$ 3. $b = 6$ 4. $b = c = 3$ $d = 0$ $d = 0$ $d = 1$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejdou splněny podmínky: 2. $a + b \leq 7$ 3. $a + b \leq 7$ 4. $a + b \leq 7$ $b + c \leq 6$ $b + c \leq 6$ $a + d \leq 6$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 68$
Podmínky (5)	$a + b \leq 7$ $a + d \leq 6$ $c + d \leq 7$ $b + c \leq 6$
Řešení	$b = 7$ 5. $a = c = 3$ 6. $a = b = 5$ 7. $a = b = 5$ $d = 1$ $c = d = 3$ $c = d = 3$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejdou splněny podmínky: 5. $a + b \leq 7$ $a + b \leq 7$ $a + b \leq 7$ $b + c \leq 6$ 6. $a + d \leq 6$ 7. $c + d \leq 7$ $b + c \leq 6$ $a + d \leq 6$ $b + c \leq 6$

ad g)

❖ $y = 7, x = 7$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 82$
Podmínky (5)	$a + b \leq 7 \quad a + d \leq 7$ $c + d \leq 7 \quad b + c \leq 7$
Řešení	$a = 9 \quad a = 8$ 1. $b = 1 \quad 2. \quad b = c = 3$ $c = d = 0 \quad d = 0$
Obrázek	nelze vepsat do daného obdélníku, tento n -úhelník má větší rozměr jedné strany než obdélník.

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 82$
Podmínky (5)	$a + b \leq 7 \quad a + d \leq 7$ $c + d \leq 7 \quad b + c \leq 7$
Řešení	3. $a = b = 5 \quad 4. \quad a = c = 5$ $c = d = 4 \quad b = d = 4$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejsou splněny podmínky: $a + b \leq 7 \quad a + b \leq 7$ 3. $c + d \leq 7 \quad c + d \leq 7$ $a + d \leq 7 \quad 4. \quad a + d \leq 7$ $b + c \leq 7 \quad b + c \leq 7$

$$\diamond y = 7, x = 8$$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 96$
Podmínky (5)	$a + b \leq 8 \quad a + d \leq 7$ $c + d \leq 8 \quad b + c \leq 7$
Řešení	$a = 8 \quad a = c = 4$ 1. $b = c = 4$ 2. $b = 8$ $d = 0 \quad d = 0$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejsou splněny podmínky: 1. $a + d \leq 7$ 2. $a + b \leq 8$ $b + c \leq 7$ $b + c \leq 7$

ad h)

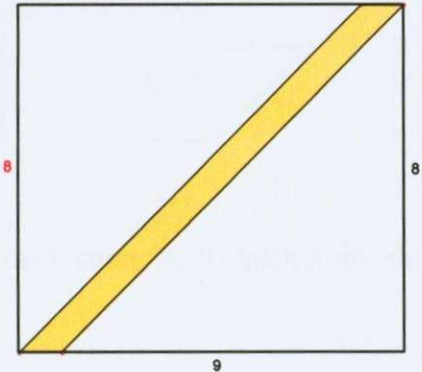
$$\diamond y = 8, x = 8$$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 112$
Podmínky (5)	$a + b \leq 8 \quad a + d \leq 8$ $c + d \leq 8 \quad b + c \leq 8$
Řešení	1. $a = 8$ 2. $a = c = d = 4$ $b = c = d = 4$ $b = 8$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejsou splněny podmínky: 1. $a + b \leq 8$ $a + b \leq 8$ $c + d \leq 8$ $c + d \leq 8$ $a + d \leq 8$ $a + d \leq 8$ $b + c \leq 8$ $b + c \leq 8$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 112$
Podmínky (5)	$a + b \leq 8$ $a + d \leq 8$ $c + d \leq 8$ $b + c \leq 8$
Řešení	1. $d = 2$ $a = b = c = 6$ 2. $a = c = d = 6$ $b = 2$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože nejsou splněny podmínky: 1. $a + b \leq 8$ $b + c \leq 8$ 2. $c + d \leq 8$ $a + d \leq 8$

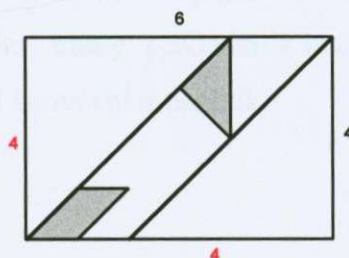
❖ $y = 8, x = 9$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 128$
Podmínky (5)	$a + b \leq 9$ $a + d \leq 8$ $c + d \leq 9$ $b + c \leq 8$
Řešení	1. $a = b = 8$ $c = d = 0$
Obrázek	nelze složit pomocí tangramu, protože není splněna podmínka: 1. $a + b \leq 9$

Podle (3) platí	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 128$
Podmínky (5)	$a + b \leq 9 \quad a + d \leq 8$ $c + d \leq 9 \quad b + c \leq 8$
Řešení	2. $a = c = 8$ $b = d = 0$
Obr. 37	nelze složit pomocí tangramu, protože n-úhelník, který bychom měli složit pomocí tangramu, je moc úzký se největší tan by se tam nevešel (viz ad a)). 

Speciální případy:

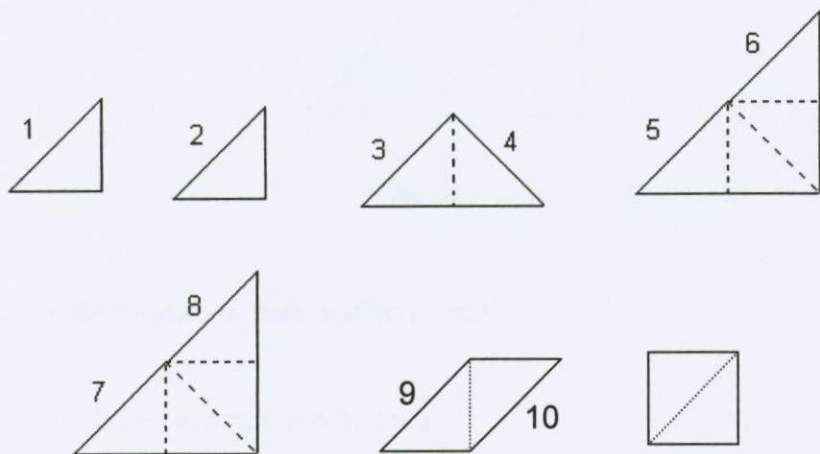
1. $y = 4, x = 6, a = c = 4, b = d = 0$



Obr. 38

Zdá se, že daný n -úhelník vkreslit do obdélníku jde. Teď se budu zabývat tím, jestli se tento n -úhelník dá složit pomocí tangramu.

Součet iracionálních stran, všech sedmi tanů, které leží po obvodu jednotlivých tanů (obr. 39) je roven deseti.

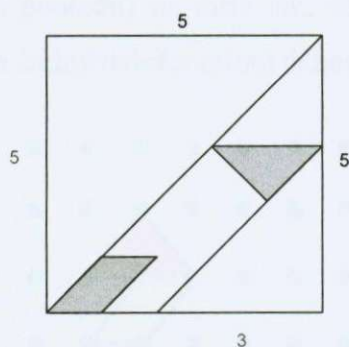


Obr. 39: Počet iracionálních strany základních trojúhelníků u jednotlivých tanů

Po obvodu n -úhelníka (obr. 38) bude ležet osm iracionálních stran, z toho tedy vyplývá, že zbývající dvě iracionální strany musí ležet uvnitř tangramového obrazce. Pouze dva tany (středně velký trojúhelník a rovnoběžníku) mají iracionální strany rozloženy tak, aby jedna iracionální strana mohla ležet po obvodu n -úhelníka a druhá uvnitř. Z (obr. 38) vidíme, že tyto dvě iracionální strany, které budou ležet uvnitř, však budou navzájem kolmé. A proto je nelze přiložit k sobě.

To znamená, že tento n -úhelník nepůjde sestavit pomocí tangramu, protože podle [3] se musí iracionální strany přikládat k iracionálním a racionální strany k racionálním, aby nám vznikl konvexní n -úhelník.

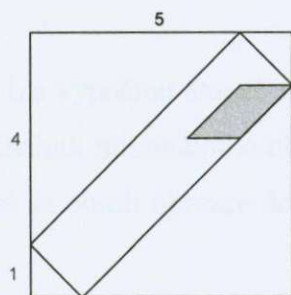
2. $y = 5, x = 5, a = 5, b = 0, c = 3, d = 0$



Obr. 40

Analogické vysvětlení jako u předchozího případu.

3. $y = 5, x = 5, a = 4, b = 1, c = 4, d = 1$

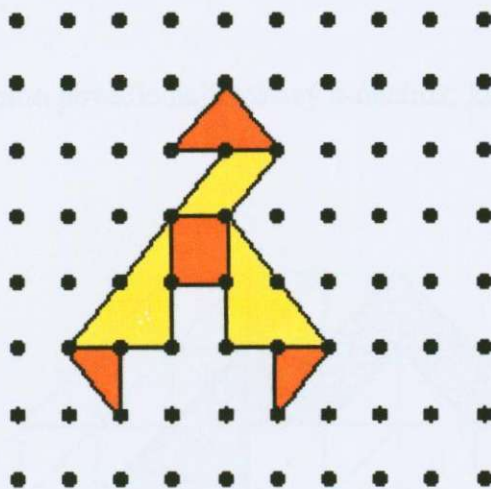


Obr. 41

V tomto případě musí ležet všech deset iracionálních stran po obvodu vepsaného n -úhelníka. Jak je z obr. 41 patrné, není možné umístit rovnoběžník tak, aby obě jeho iracionální strany ležely po obvodu n -úhelníka. Proto také tento n -úhelník nelze sestavit pomocí tangramu.

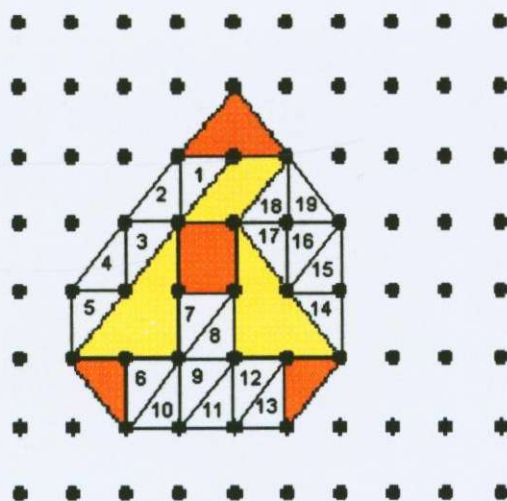
4.2. MŘÍŽOVÉ OBRAZCE TANGRAMU

Mřížový tangram je takový obrazec tangramu, který můžeme umístit (tangramem můžeme i vhodně pootočit) na mříž tak, aby se všechny vrcholy všech sedmi tanů kryly s body mříže a žádný neležel mimo danou mříž (např. obr. 42).



Obr. 42: Mřížový tangram

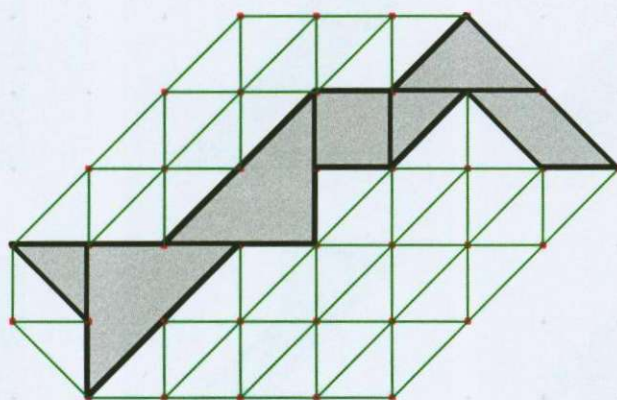
U mřížového tangramu lze vypočítat stupeň nekonvexity ν . Nejprve obrazec doplníme na konvexní mnohoúhelník minimálního obsahu, a pak určíme ν , jako počet základních trojúhelníků, o které se obsah obrazce doplněním zvýšil (v našem příkladu $\nu = 19$, obr. 43).



Obr. 43: Stupeň nekonvexity, tj. nejmenší počet základních trojúhelníků, které doplňují daný obrazec na konvexní n -úhelník

Mřížové tangramové obrazce jsou jedním z otevřených problémů, které nejsou stále plně dořešeny, mluví se o nich pouze v publikaci [2] a to velmi povrchně. Tam se také můžeme dozvědět, že ještě není úplně přesně řečeno, jaký největší stupeň nekonvexivity u n -úhelníků existuje. Autor uvádí, že může existovat n -úhelník, který má maximálně $\nu = 56$.

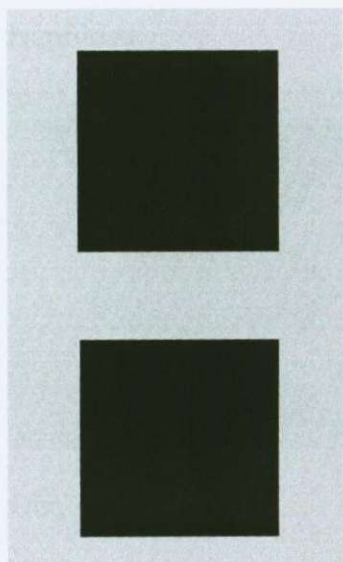
Mně osobně se zatím povedlo najít takový n -úhelník, který má $\nu = 41$ (obr. 44).



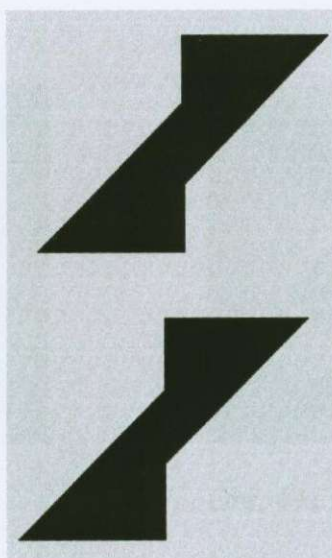
Obr. 44

4. 3. DĚLITELNÉ OBRAZCE TANGRAMU

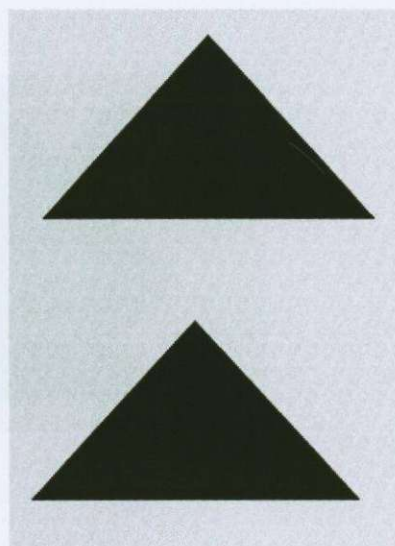
Dělitelný tangramový obrazec, je každý obrazec, který se dá rozložit na dva identické díly. Mluvíme o tzv. dělitelných spojitých mřížovaných obrazových tangramech. Podle [2] existuje 65 takových „dvojčatových“ obrazců. Např. na obr. 45a, 46a a 47a. Řešení rozkladu na obr. 45b, 46b, 47b.



Obr. 45a

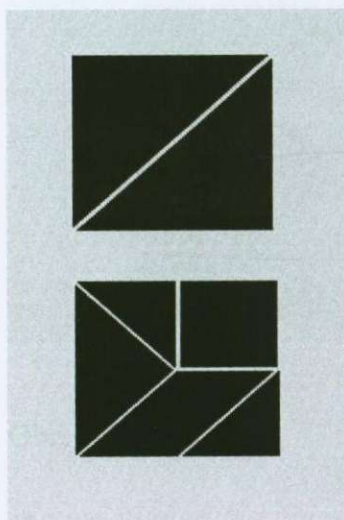


Obr. 46a

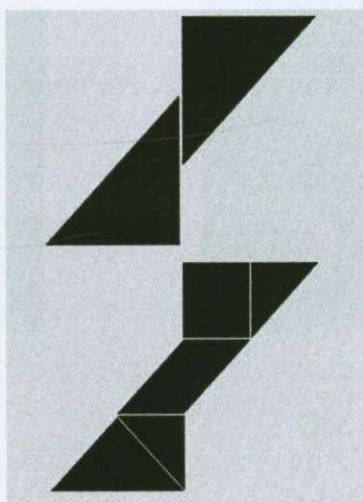


Obr. 47a

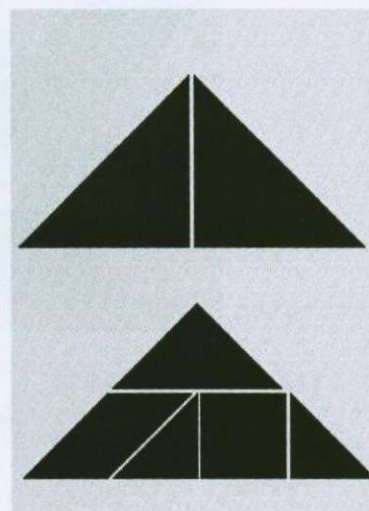
Řešení. :



Obr. 45b



Obr. 46b

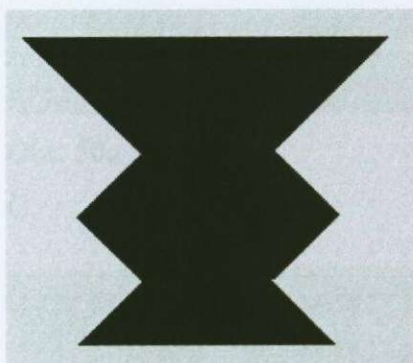


Obr. 47 b

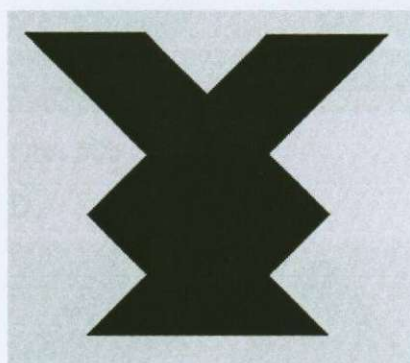
4. 4. PARADOXY OBRAZCE TANGRAMU

Jedná se o tangramové obrazce, které se zdají být stejné, ale vždy se liší jedním detailem. Jak je to možné? Není v tom nic zásadního, jde pouze o optický klam, každý obrázek je složen jiným způsobem a jeden obrázek má vždy základní rozměry poněkud jiné než ten druhý.

Například:

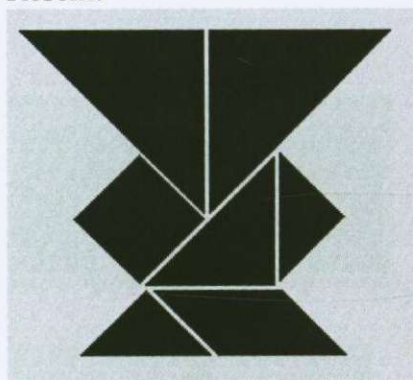


Obr. 48a

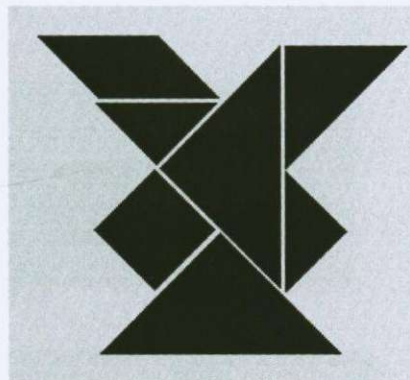


Obr. 49a

Řešení:



Obr. 48b

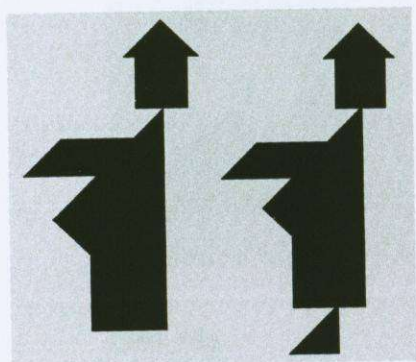


Obr. 49b

5. Sbírka úloh

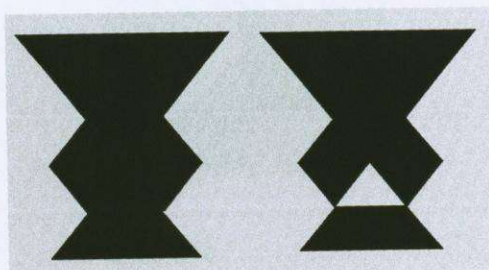
5. 1. Vyřešte paradoxy:

A,



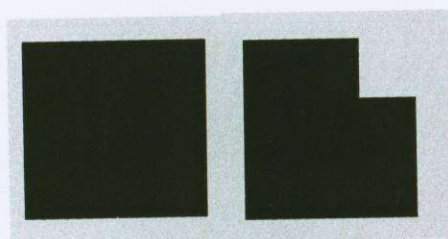
Obr. 50a

B,



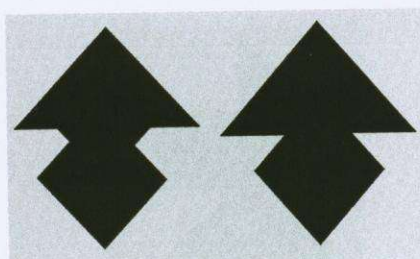
Obr. 50b

C,



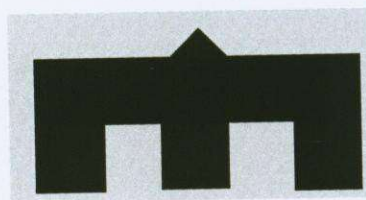
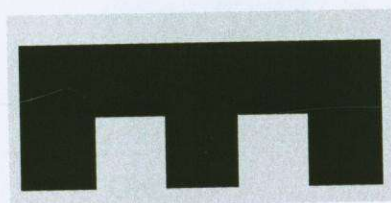
Obr. 50c

D,



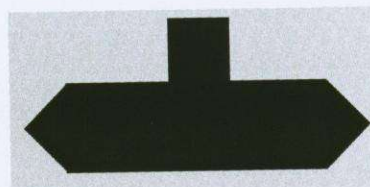
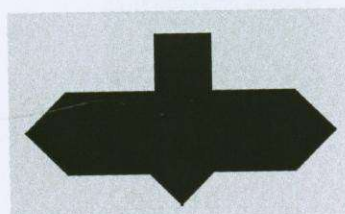
Obr. 50d

E,



Obr. 50e

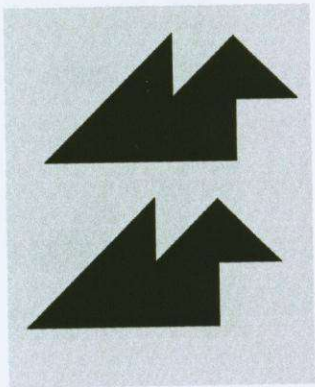
F,



Obr. 50f

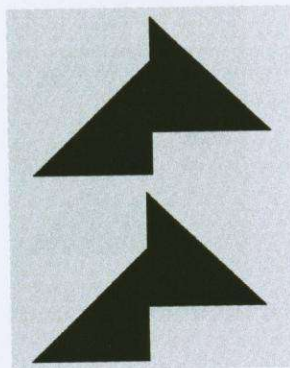
5. 2. Řešte dělitelné obrazce tangramu:

A,



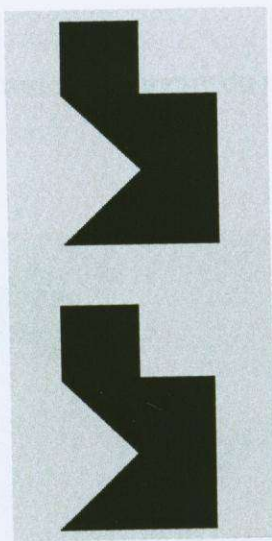
Obr. 51a

B,



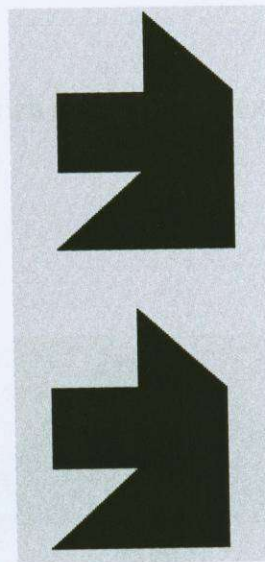
Obr. 51b

C,



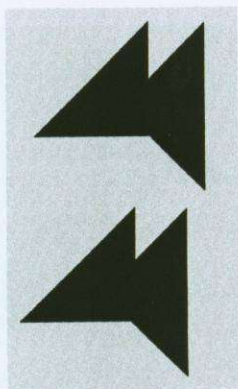
Obr. 51c

D,



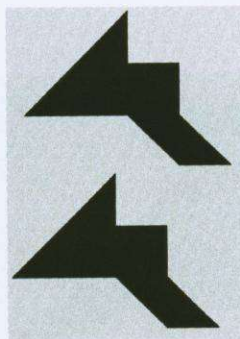
Obr. 51d

E,



Obr. 51e

F,

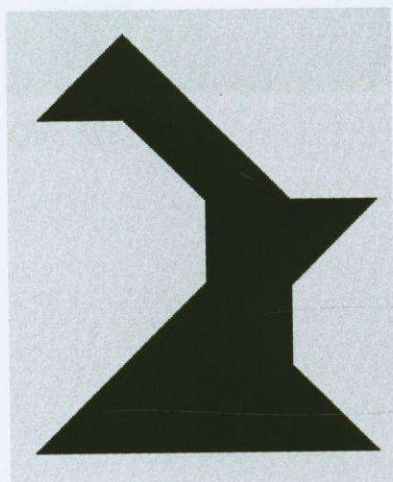


Obr. 51f

5. 3. Mřížové obrazce tangramu:

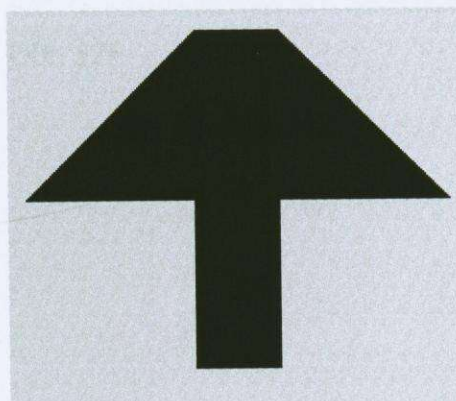
1. překreslete tangramy do mřížové sítě a určete jejich stupeň nekonvexivity (ν)

A,



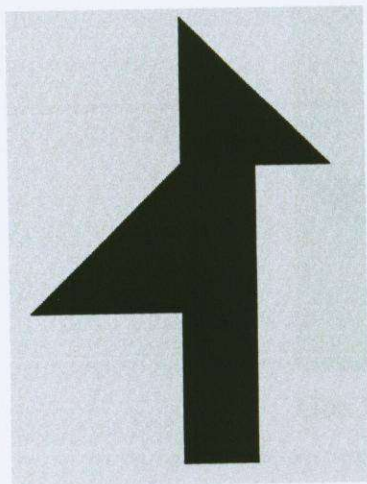
Obr. 52a

B,



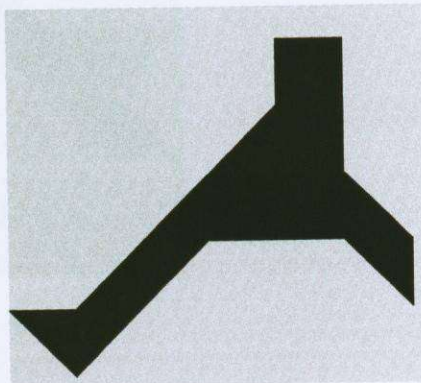
Obr. 52b

C,



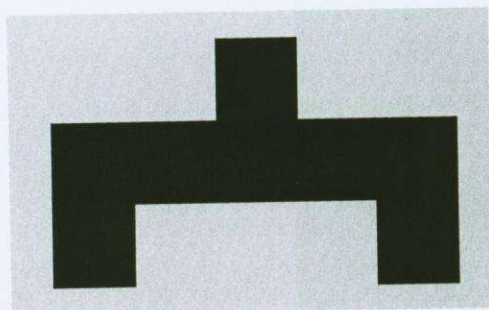
Obr. 52c

D,



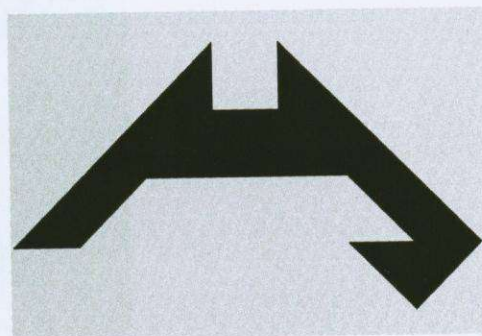
Obr. 52d

E,



Obr. 52e

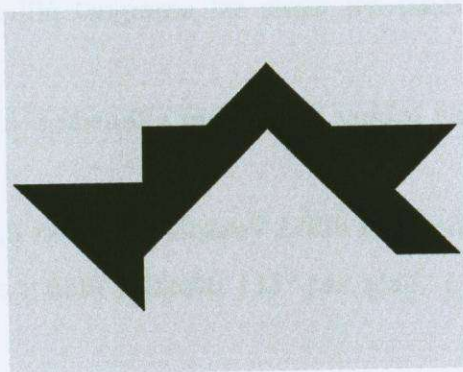
F,



Obr. 52f

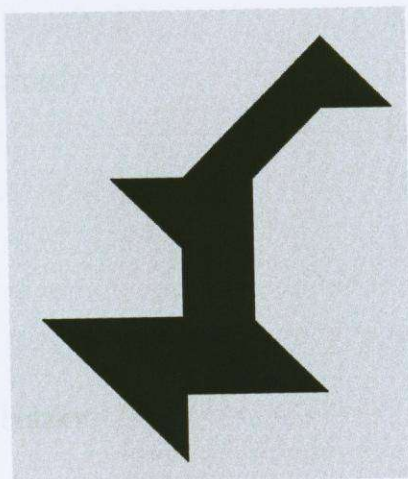
2.

A, Přesuňte nebo pootočte jedním tanem, tak aby se stupeň nekonvexivity snížil o tři



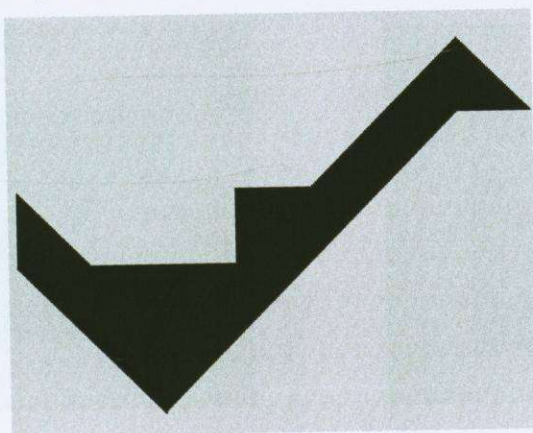
Obr. 53a

B, Přesuňte nebo pootočte jedním tanem, tak aby se stupeň nekonvexivity nezměnil



Obr. 53b

C, Přesuňte nebo pootočte jedním tanem, tak aby se stupeň nekonvexivity zvýšil o 7



Obr. 53c

5. 4. Konvexní n -úhelníky:

- A, Dokažte, že z dílů tangramu lze složit jen takové konvexní n -úhelníky, které mají $n \leq 8$.
- B, Ukažte, že tyto n -úhelníky mohou mít vnitřní úhly jen o velikostech 45° , 90° , 135° .
- C, Má-li konvexní n -úhelník složený z dílů tangramu p úhlů velikosti 45° , q úhlů velikosti 90° a r úhlů velikosti 135° pak platí: $q = 8 - n - 2p$ a $r = 2n + p - 8$. Dokažte.

5. 5. Pomocí tangramu vytvořte obrázek:

A, židle

C, písmen z abecedy

E, zajíce

G, plachetnice

I, domu

B, svíčky

D, číslic

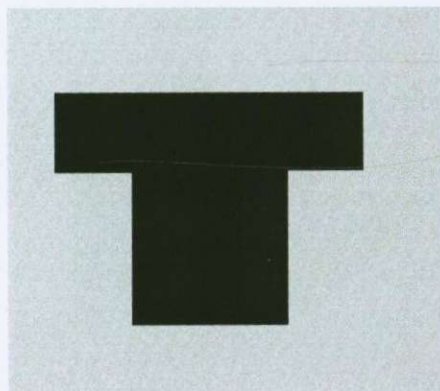
F, kladiva

H, šipky

J, stromu

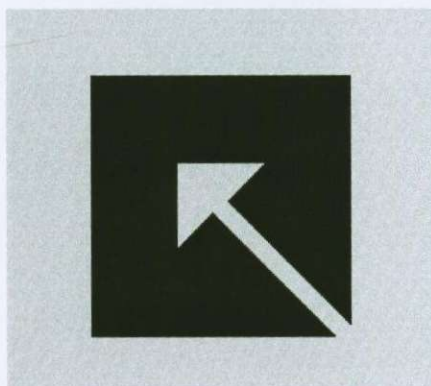
5. 6. Sestavte dané obrázky:

A,



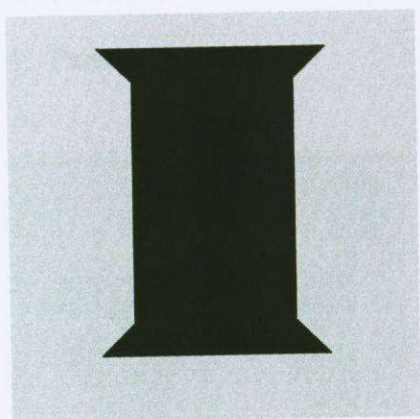
Obr. 54a

B,



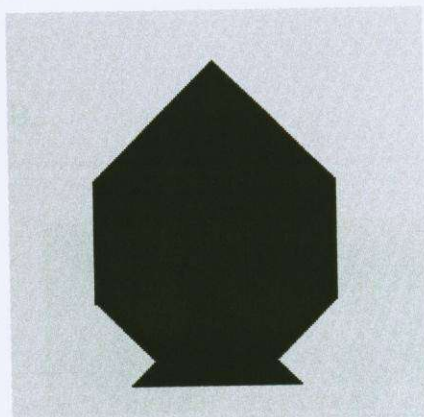
Obr. 54b

C,



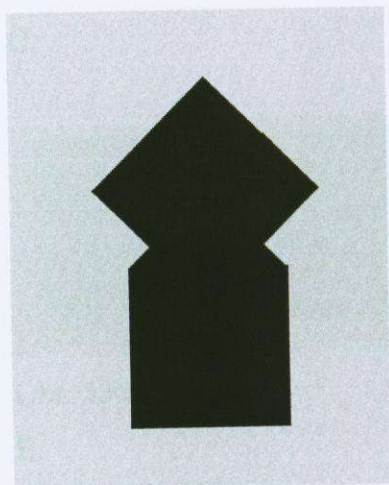
Obr. 54c

D,



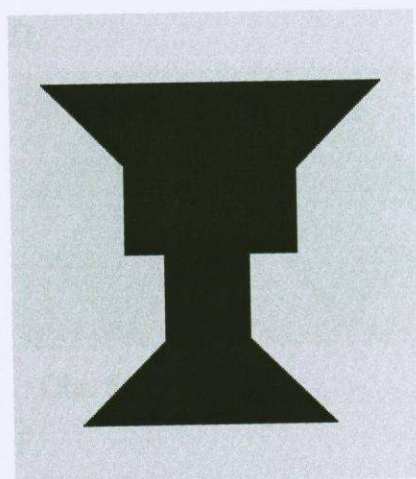
Obr. 54d

E,



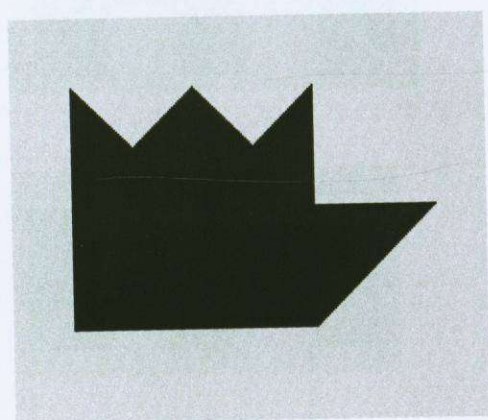
Obr. 54e

F,



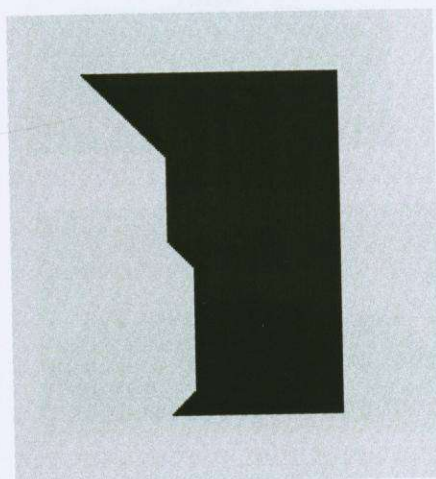
Obr. 54f

G,



Obr. 54g

H,

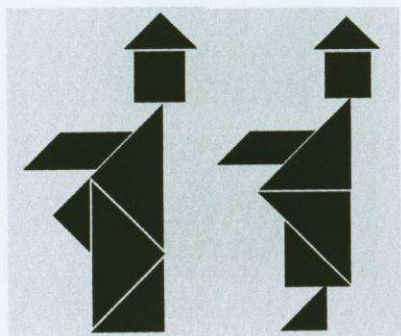


Obr. 54h

6. Řešení

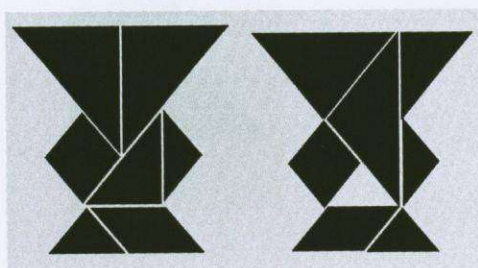
1. Paradoxy:

A,



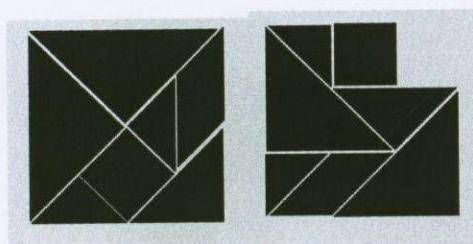
Obr. 55a

B,



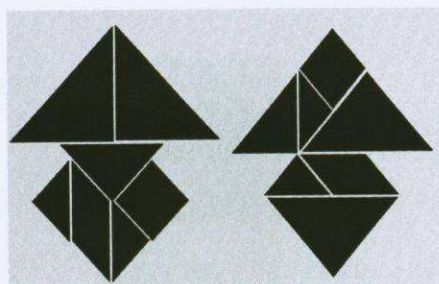
Obr. 55b

C,



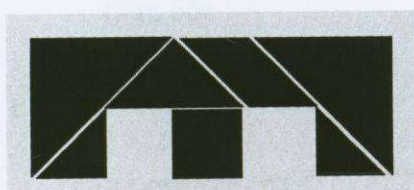
Obr. 55c

D,



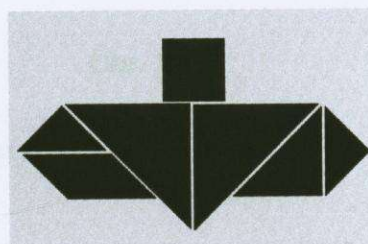
Obr. 55d

E,



Obr. 55e

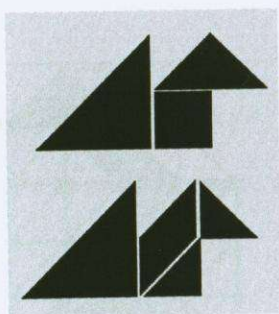
F,



Obr. 55f

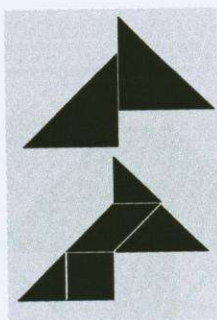
2. Dělitelné obrazce tangramu:

A,



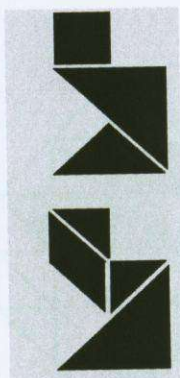
Obr. 56a

B,



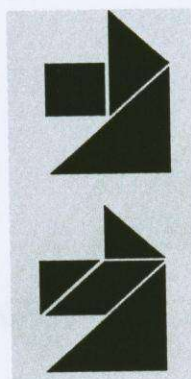
Obr. 56b

C,



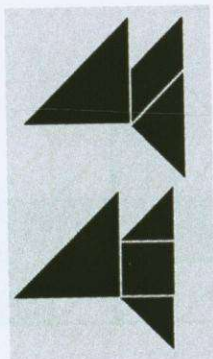
Obr. 56c

D,



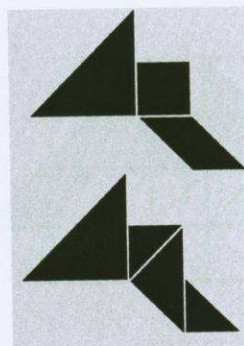
Obr. 56d

E,



Obr. 56e

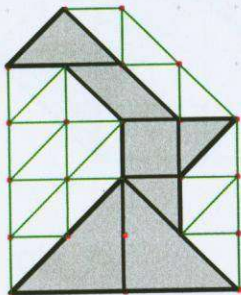
F,



Obr. 56f

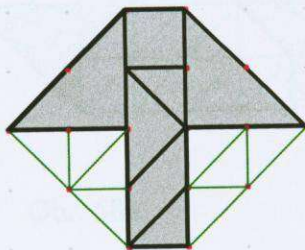
3. Mřížové obrazce tangramu:

1. A, $\nu = 19$



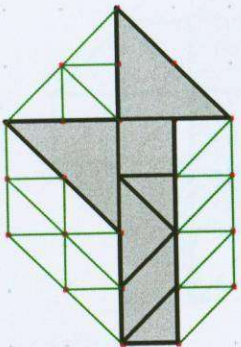
Obr. 57a

B, $\nu = 8$



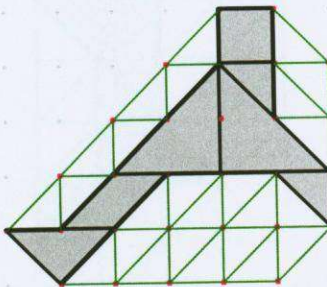
Obr. 57b

C, $\nu = 19$



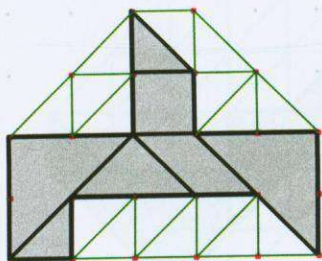
Obr. 57c

D, $\nu = 25$



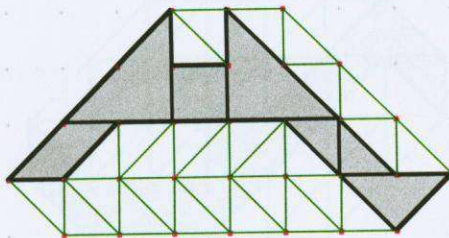
Obr. 57d

E, $\nu = 16$



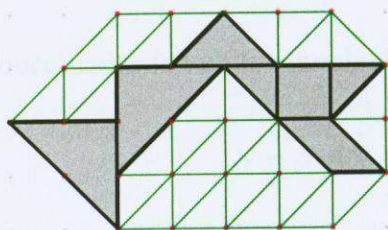
Obr. 57e

F, $\nu = 28$



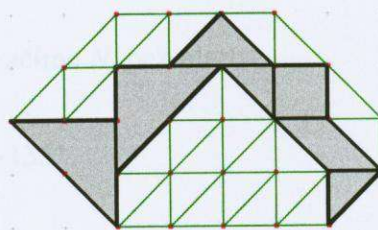
Obr. 57f

2. A, $\nu = 30$



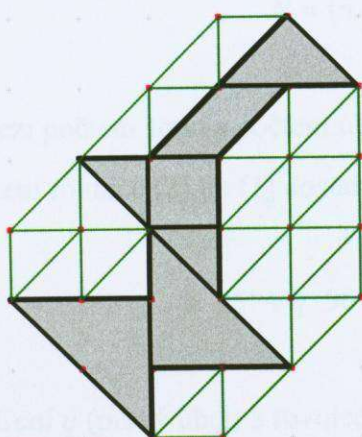
Obr. 58a

např. $\nu = 27$



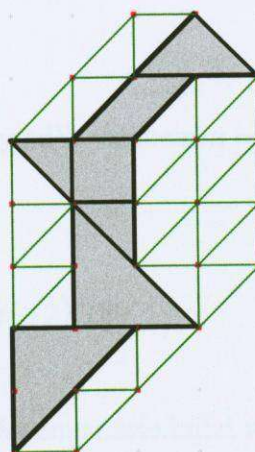
Obr. 58b

B, $\nu = 26$



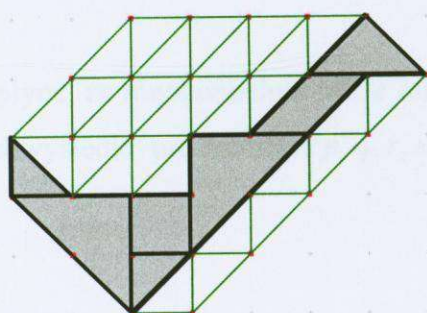
Obr. 58c

např. $\nu = 26$



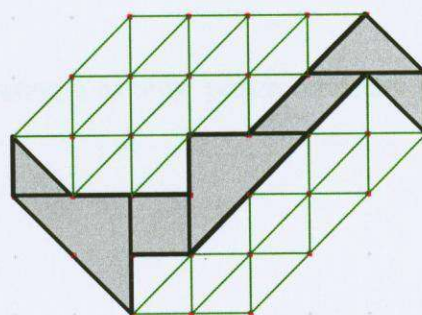
Obr. 58d

C, $\nu = 29$



Obr. 58e

např. $\nu = 36$



Obr. 58f

4. Konvexní n -úhelníky:

A, B, viz strana 18-19

C, Součet vnitřních úhlů v mnohoúhelníku označíme N , pak platí

$$N = p \cdot 45^\circ + q \cdot 90^\circ + r \cdot 135^\circ, \quad (1)$$

kde p je počet ostrých úhlů, q je počet pravých úhlů, r je počet tupých úhlů mnohoúhelníku. Dále je v tomto důkazu důležitá jednoduchá vlastnost mnohoúhelníku, a sice ta, že součet všech úhlů konvexního mnohoúhelníku (který má n stran) je roven

$$N = (n - 2) \cdot 180^\circ. \quad (2)$$

Vztah mezi počtem stran a počtem úhlů můžeme vyjádřit vztahem $n = p + q + r$. (3)

Po dosazení rovnice (2) do (1) dostaneme:

$$p \cdot 45^\circ + q \cdot 90^\circ + r \cdot 135^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ. \quad (4)$$

Po vyjádření q (pravý úhel) z rovnice (3) a (4) dostaneme následující vztah

$$q = 8 - n - 2p \quad (5)$$

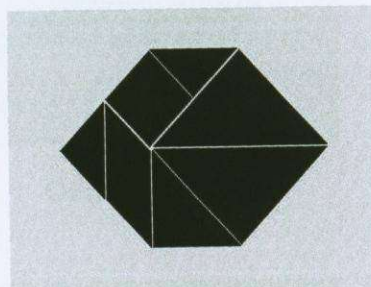
kde $p, q \geq 0$

Z toho plyne, že mnohoúhelník může mít max. 8 stran a existuje pouze omezený počet možných výsledků pro neznámé p, q, r, n .

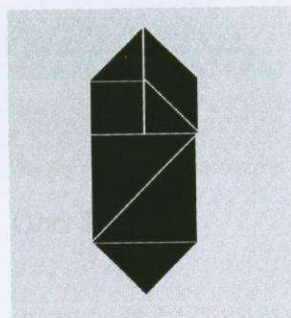
Některá řešení:

Počet stran: **6-úhelník**

$$p = 0, r = 4, q = 2$$



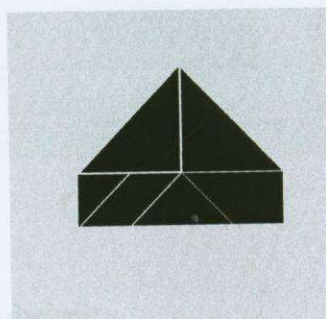
Obr. 59a



Obr. 59b

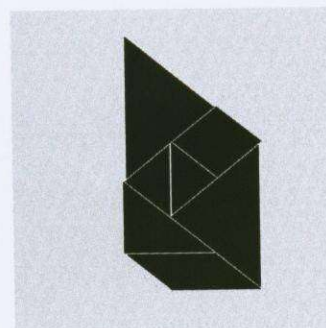
5-úhelník

$$p=0, r=2, q=3$$



Obr. 59c

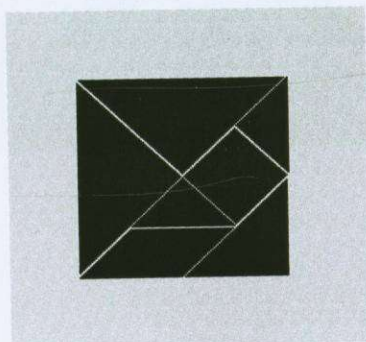
$$p=1, r=3, q=1$$



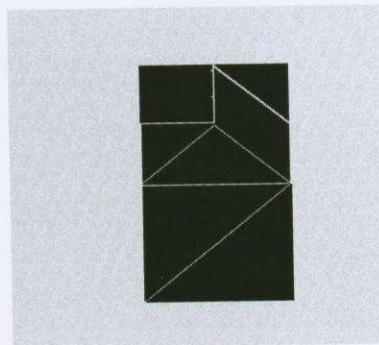
Obr. 59d

4-úhelník

$$p=0, r=0, q=4$$

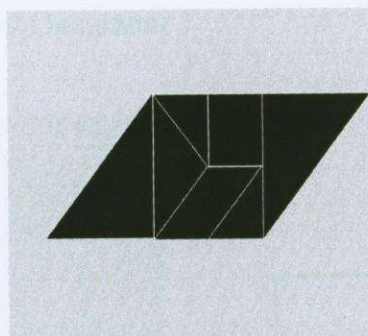


Obr. 59e

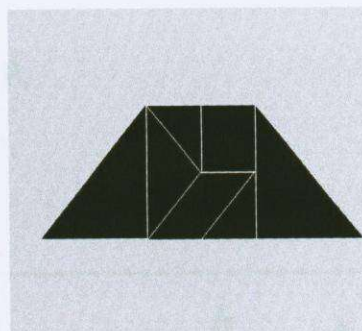


Obr. 59f

$$p=2, r=2, q=0$$

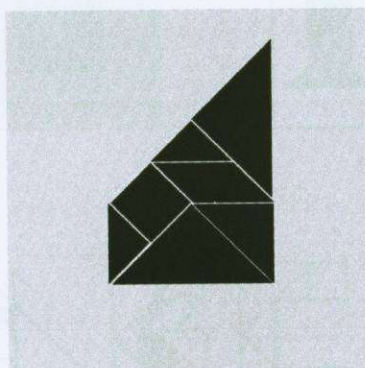


Obr. 59g



Obr. 59h

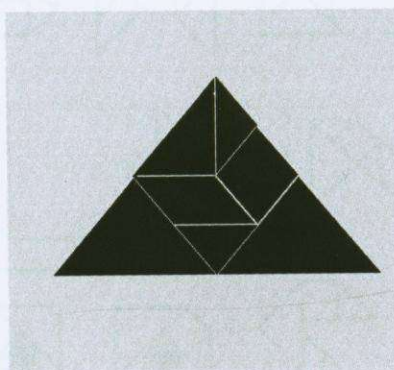
$$p=1, r=1, q=2$$



Obr. 59j

3-úhelník

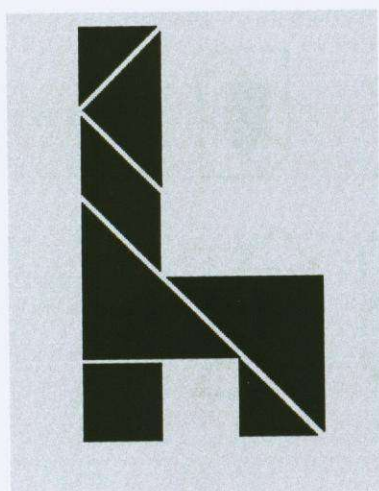
$$p=2, r=0, q=1$$



Obr. 59k

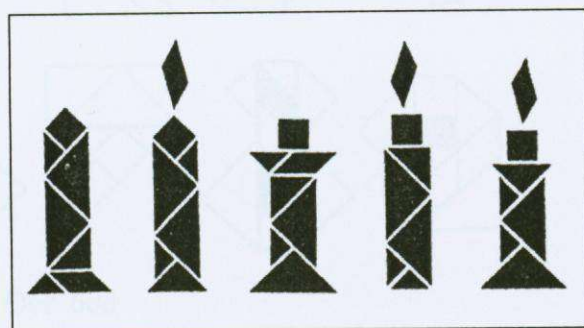
5. obrázky pomocí tangramu

A,



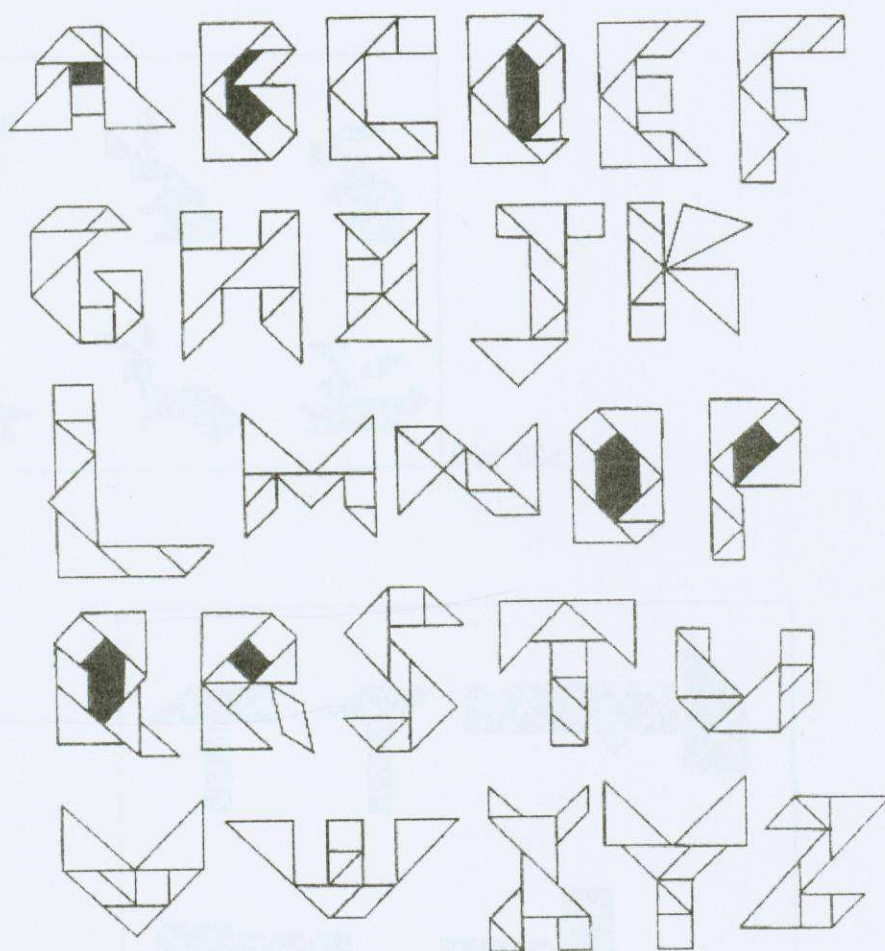
Obr. 60a

B,



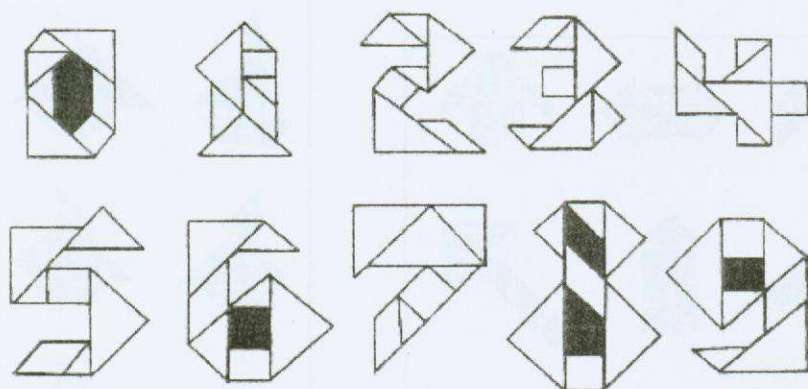
Obr. 60b

C,



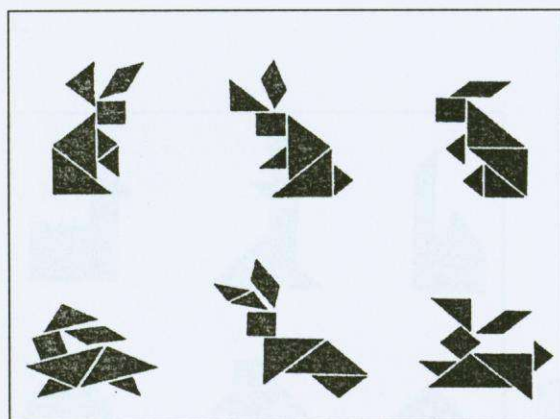
Obr. 60c

D,



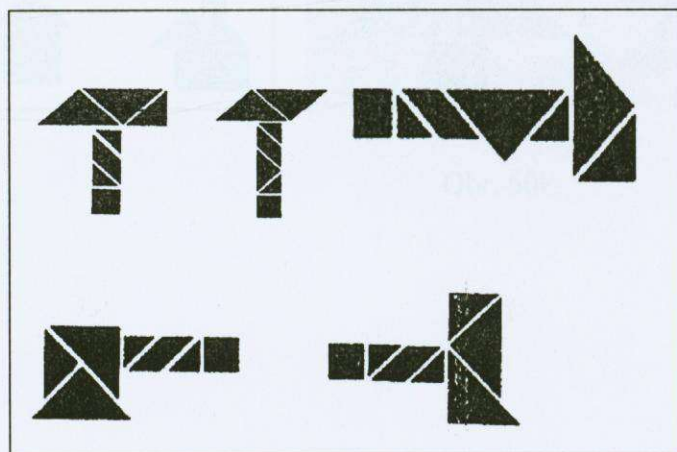
Obr. 60d

E,



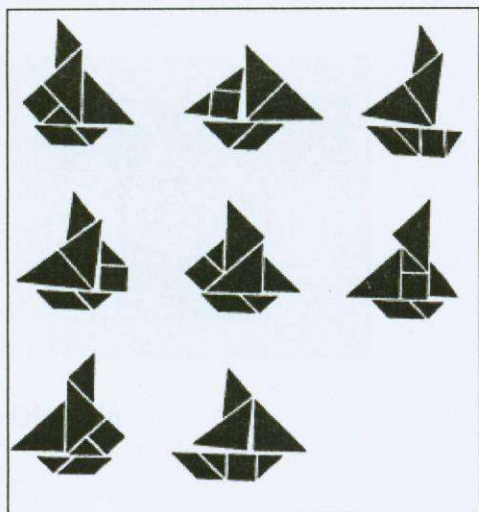
Obr. 60e

F,



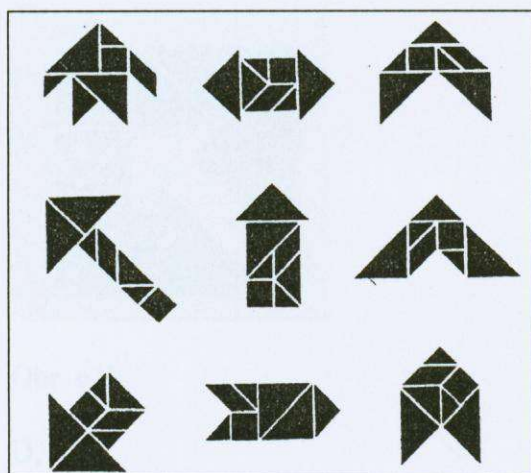
Obr. 60f

G,



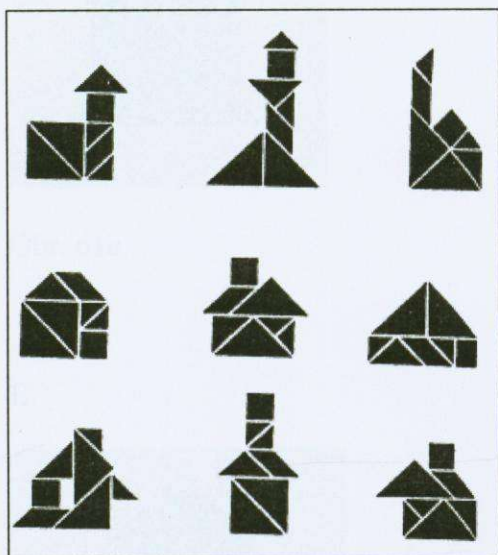
Obr. 60g

H,



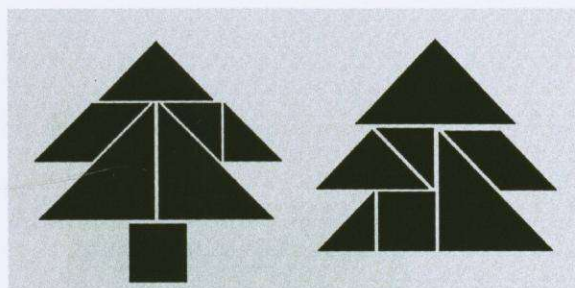
Obr. 60h

I,



Obr. 60j

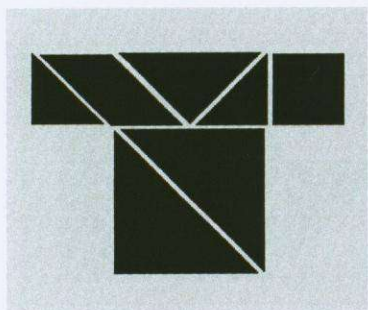
J,



Obr. 60k

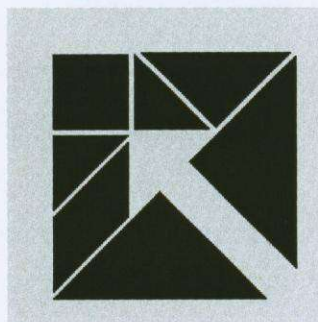
6. obrázky

A,



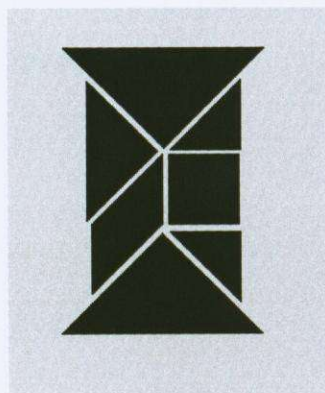
Obr. 61a

B,



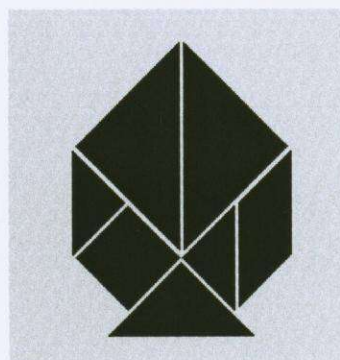
Obr. 61b

C,



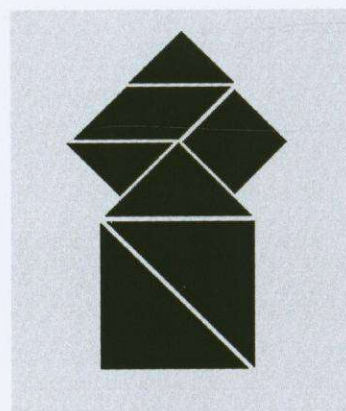
Obr. 61c

D,



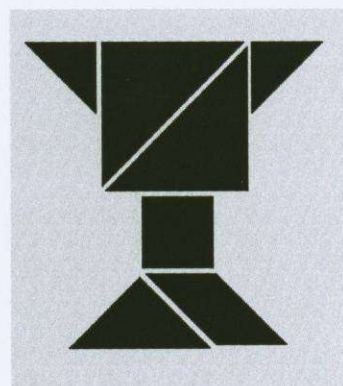
Obr. 61d

E,



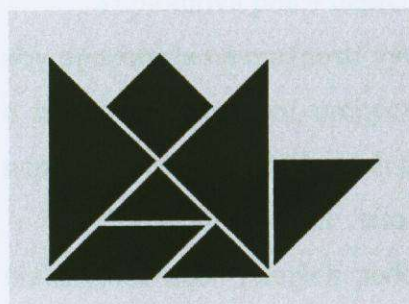
Obr. 61e

F,



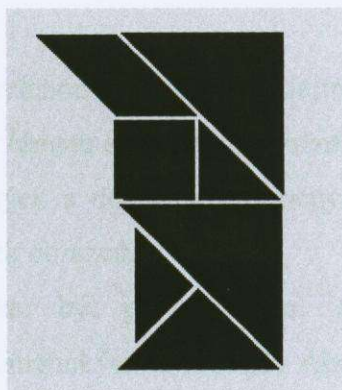
Obr. 61f

G, Závěr



Obr. 61g

H,



Obr. 61h

7. Závěr

Diplomová práce nepředstavuje uzavřenou problematiku. Jejím úkolem spíše je, aby upozornila na možnosti využití daného tématu a přispěla k možné inspiraci a zájmu o hlubší prozkoumání určitých neuzavřených a dosud nevyjasněných témat, jako je např. problematika mřížových tangramových obrazců.

Praktické využití této práce může být pro zpestření výuky, v zájmové matematice nebo různých podobných matematických kroužcích. Ale mohou v ní najít inspiraci i lidé, kteří se na tangram dívají pouze jako na skládačku. Mohou využít příklady z přiložené sbírky a vyzkoušet skládání mřížových tangramových obrazců nebo např. mohou zkoumat paradoxy, které se také u těchto obrazců vyskytují.

Přiložené úlohy pomáhají rozvoji geometrického myšlení a kombinačních schopností.

POUŽITÁ LITERATURA:

- [1] Dudeney, H. E.: *Matematické hlavolamy a hříčky*, Olympia 1955, Praha
- [2] Elffers, J.: *Tangram*, Verlag M. Dumont Schauberg, 1973, Koln
- [3] Fu Traing Wang, Chuan-Chih Hsiung: *A Theorem of the Tangram*, National University of Cheing, Kweichow, str. 596-599, 1942, China
- [4] Panov, A.: *Zagatka figury No. 51*, Kvant, 1982m č.12, str. 34-37, Nauka, Moskva 1982, ISSN 0130-2221
- [5] Slocum, J.: *The Tangram book*, Sterling Publishing Co., Inc., 2004, New York
- [6] *Tangrams*, <http://www.tangrams.ca/>

PŘÍLOHY

Priloha 1: Seznam literatury

Priloha 2: Seznam obrázků

Priloha 3: Seznam tabulek

Priloha 4: Seznam příloh



1.

Adresa: <http://www.fwend.com/tangram.htm>

(pro spuštění programu stiskněte START TANGRAM)

A, s obrysem hledaného tangramu:

Popis: *Levá část apletu:* je místem, kde se skládají jednotlivé figury do zadaného obrysu hledaného tangramu

Pravá část apletu: zde leží jednotlivé tany, kterými se vyplňuje daný obrys

Úkolem je umístit všech sedm tanů tak, aby žádný dílek nikde nepřesahoval obrys, aby se žádné dílky nepřekrývaly a naopak nikde nebyla žádná mezera mezi díly.

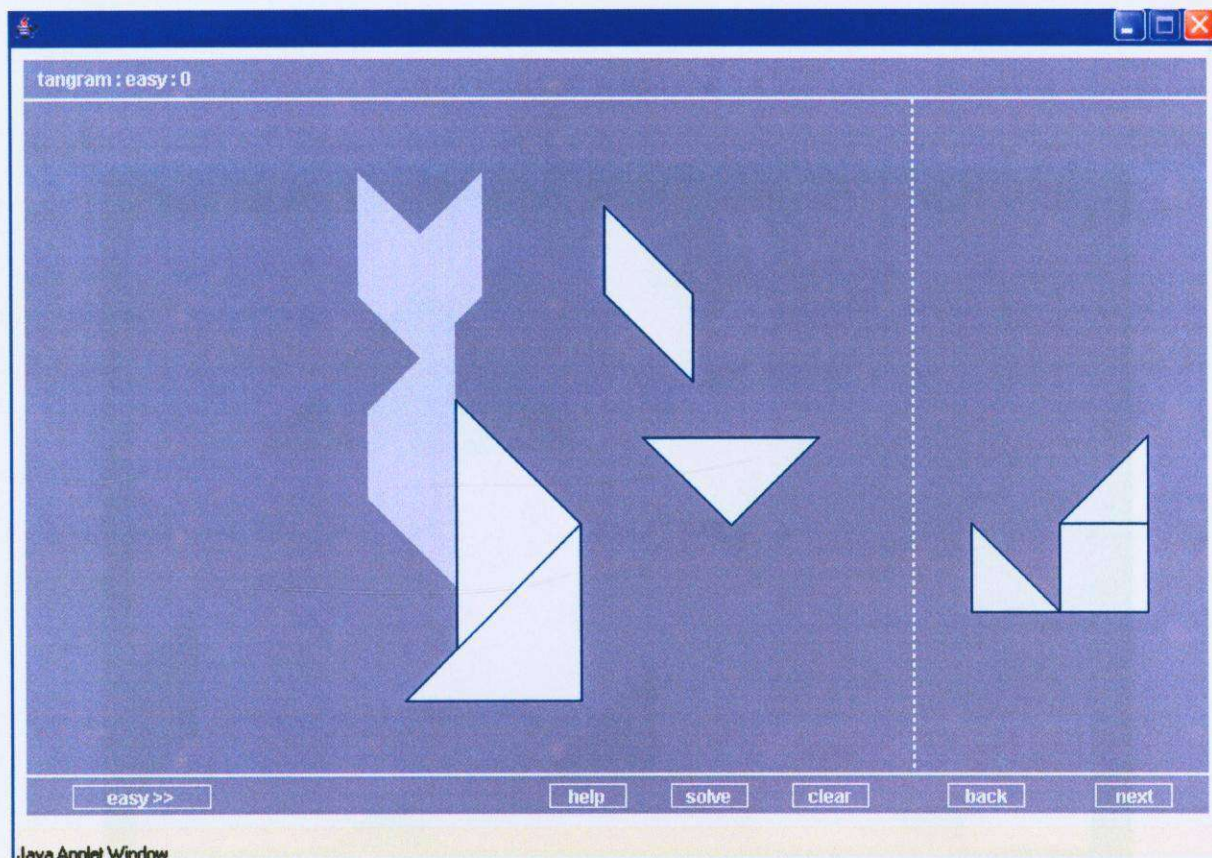
Tlačítka: "easy, medium, hard" (obtížnost)

"solve" (ukáže řešení)

"clear" (vrátí dílky z obrysu na své původní místo)

"back", "next" (posunují další obrysy)

"help" (ukáže nápovědu, týkající se ovládání a otáčení dílků)



2.

B, bez obrysu hledaného tangramu

Adresa:

<http://www.curiouser.co.uk/frames/creframe.html?http://www.curiouser.co.uk/tangram/>

Popis: *Levá část apletu:* je místem, kde se skládají jednotlivé figury, na začátku jsou jednotlivé tany rozloženy podél stran této části,

Pravá část apletu: zde leží vzor, pro skládání dané figury, pro ověření správnosti řešení nebo pro nápovědu stačí ukázat na daný vzor myší a levým tlačítkem na něj poklepat

Tlačítka: "new" (program vybere libovolnou jinou figuru i mimo pořadí)

"reset" (rozloží tany do původní polohy)

"<<", ">>" (slouží k posunování a vyhledávání dalších figur)

