



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v ČB

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Nerovnosti v trojúhelníku a čtyřúhelníku
Inequalities in a triangle and quadrilateral

Bakalářská práce

Vypracoval: Štěpán Buzek

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2020

Tímto bych chtěl poděkovat prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za skvělé vedení při tvorbě bakalářské práce a za spoustu skvělých připomínek, které během psaní sdělil.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou/diplomovou práci na téma Nerovnosti v trojúhelníku a čtyřúhelníku jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 30. dubna 2020.

.....
Štěpán Buzek

Anotace

Bakalářská práce je zaměřena na problematiku nerovností a jejich dokazování a reprezentaci problémů v programu GeoGebra Classic 5. První část bakalářské práce se zabývá některými druhy matematických průměrů (aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický). Druhá část bakalářské práce se soustřeďuje na vybrané nerovnosti pro trojúhelníky a jejich generalizace pro čtyřúhelníky (Izoperimetrický problém, Weitzenböckova nerovnost a Eulerův vztah pro střed kružnice opsané a střed kružnice vepsané).

Abstract

The bachelor's thesis is focused on the issues of inequalities and it's proving and it's representation in program GeoGebra Classic 5. The first part of the bachelor's thesis is focused on some types of mathematical means (arithmetic, geometric, harmonic and quadratic). The second part of the bachelor's thesis is focused on chosen inequalities for triangles and quadrilaterals (Isoperimetric problem, Weitzenbeck's inequality and Euler problem for centre of circumcircle and centre of incircle).

Obsah

1	Úvod	7
2	Průměry	8
2.1	Aritmetický průměr	8
2.1.1	Geometrická interpretace aritmetického průměru	8
2.2	Geometrický průměr	9
2.2.1	Geometrická interpretace geometrického průměru	9
2.3	Harmonický průměr	10
2.3.1	Geometrická interpretace harmonického průměru	10
2.4	Kvadratický průměr	11
2.4.1	Geometrická reprezentace kvadratického průměru	11
2.5	Vztah mezi průměry	13
2.5.1	Algebraický důkaz	13
2.5.2	Geometrický důkaz	15
2.5.3	GeoGebra ověření	17
2.5.4	Geometrický důkaz 2	18
2.5.5	GeoGebra ověření	25
3	Vybrané nerovnosti	26
3.1	Izoperimetrická nerovnost	26
3.1.1	Klasický důkaz	27
3.1.2	GeoGebra ověření	31
3.2	Weitzenböckova nerovnost	32
3.2.1	Klasický důkaz	33
3.2.2	GeoGebra ověření	37
3.3	Eulerova nerovnost	38
3.3.1	Klasický důkaz	39
3.3.2	GeoGebra ověření	46
3.3.3	Jiný důkaz	49
3.3.4	Eulerův vztah pro čtyřúhelník (Fuss Theorem)	52

3.3.5 Klasický důkaz	53
4 Závěr	57
Seznam použité literatury a zdrojů	59

1 Úvod

Cílem této bakalářské práce je představit několik základních nerovností a jejich důkazů. Zároveň je mým cílem pro každou nerovnost vytvořit applet v programu GeoGebra, který by sloužil pro lepší představení a následné pochopení dané nerovnosti. Za tímto účelem využiji programu GeoGebra Classic 5. K umožnění přístupu k těmto appletům jsem využil GeoGebra online. Vytvořil jsem vlastní GeoGebra knihu, ve které jsou všechny applety volně k dispozici (<https://www.geogebra.org/m/ukucrnty>).

V první kapitole této bakalářské práce se budu zabývat průměry. Konkrétně aritmetickým, geometrickým, harmonickým a kvadratickým. Uvedu jejich definice a jejich geometrické reprezentace. Uvedu také nerovnost, která mezi jednotlivými, výše zmíněnými, průměry platí, a zároveň uvedu algebraický důkaz této nerovnosti pro dva prvky. Kromě algebraického důkazu pro dva prvky uvedu také dva geometrické důkazy.

V další kapitole uvedu jednotlivé vybrané nerovnosti. Jmenovitě to jsou Izoperimetrická nerovnost, která vyjadřuje vztah mezi obvodem a obsahem trojúhelníka nebo čtyřúhelníka. Dále to bude Weitzenböckova nerovnost, která se zabývá vztahem mezi součtem čtverců stran trojúhelníka/čtyřúhelníka a jeho obsahem. A v poslední části to bude Eulerův vztah mezi vzdáleností mezi středem kružnice opsané trojúhelníku a středem kružnice vepsané trojúhelníku a její generalizaci pro čtyřúhelník.

Toto téma jsem si vybral z prostého důvodu. Jednotlivé nerovnosti se mi zdály poměrně zajímavé, a chtěl jsem o nich zjistit něco víc. Zároveň jsem byl přesvědčen, že postupy důkazů jednotlivých nerovností by se mohly nějakým způsobem využít ve výuce na základní nebo střední škole.

Applety jsou vytvořeny v programu GeoGebra Classic 5 a bakalářská práce je zpracovaná v popisovacím jazyce L^AT_EX v programu Texmaker 4.4.1.

2 Průměry

V této kapitole si představíme aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický průměr. Důvodem pro představení těchto průměrů je, že mezi nimi platí zajímavé nerovnosti. V této kapitole byla použita převážně literatura [1], [2].

2.1 Aritmetický průměr

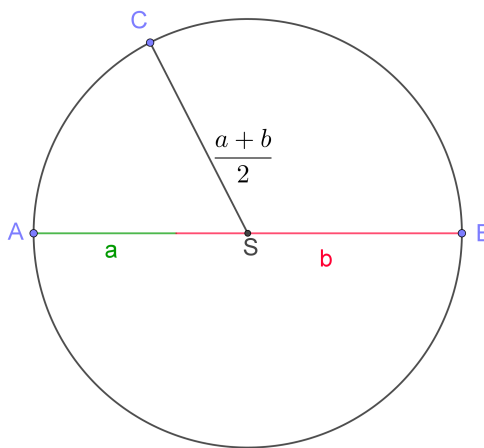
Jako aritmetický průměr čísel $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{R}$ a $i \in \{1, 2, 3 \dots n\}$ definujeme:

$$A(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad (1)$$

Lze říci, že aritmetický průměr představuje součet všech zadaných čísel vydělený počtem zadaných čísel.

2.1.1 Geometrická interpretace aritmetického průměru

Jako geometrickou interpretaci aritmetického průměru pro čísla $a, b > 0$ si můžeme představit poloměr Thaletovy¹ kružnice sestrojené nad úsečkou AB délky $a + b$.



Obrázek 1: Geometrická interpretace aritmetického průměru

¹Thaletova věta - Sestrojíme - li nad úsečkou AB kružnici tak, že střed kružnice leží ve středu úsečky AB a úsečka AB tvoří její průměr, tak každý bod C na kružnici bude tvořit pravoúhlý trojúhelník.

2.2 Geometrický průměr

Jako geometrický průměr čísel $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$, $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i \geq 0$ a $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, 3 \dots n\}$ definujeme:

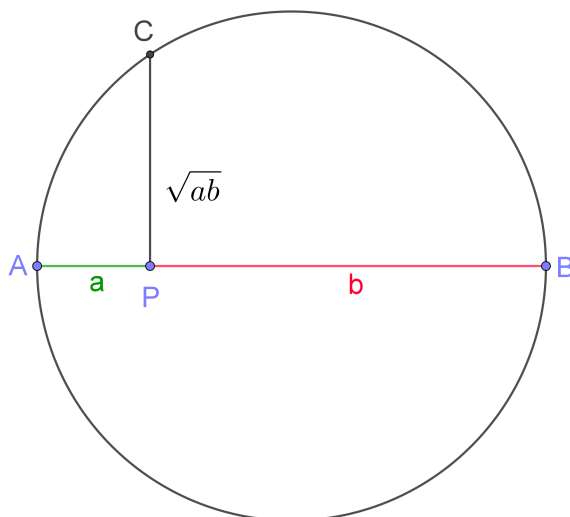
$$G(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (2)$$

Geometrický průměr je definován jako součin všech zadaných čísel odmocněný odmocninou stupně počtu zadaných čísel.

2.2.1 Geometrická interpretace geometrického průměru

Jako geometrickou interpretaci geometrického průměru pro čísla $a, b > 0$ si můžeme představit následující konstrukci.

Sestrojíme si úsečku AB o délce $a + b$. Na této úsečce si vyznačíme bod P . Bod P bude ležet na úsečce AB tak, aby jeho vzdálenost od bodu A byla rovna a . Poté sestrojíme Thaletovu kružnici nad úsečkou AB . Následně vztyčíme kolmici v bodě P . Tato kolmice protne Thaletovu kružnici v bodě C . Z Eukleidovy věty o výšce víme, že $|PC|^2 = a \cdot b$, z tohoto vztahu vyvodíme $|PC| = \sqrt{a \cdot b}$.



Obrázek 2: Geometrická interpretace geometrického průměru

2.3 Harmonický průměr

Jako harmonický průměr čísel $x_1, x_2, x_3 \dots x_n, x_i \in \mathbb{R}, x_i \neq 0, n \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, 3 \dots n\}$ definujeme:

$$H(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad (3)$$

Harmonický průměr je definován jako převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot.

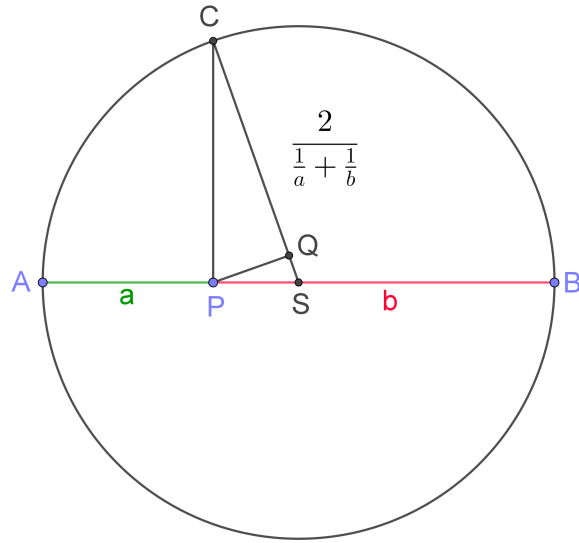
2.3.1 Geometrická interpretace harmonického průměru

Jako geometrickou interpretaci harmonického průměru pro čísla $a, b > 0$ si můžeme představit následující konstrukci.

K této konstrukci využijeme předchozí dva průměry, tedy aritmetický a geometrický. Sestrojíme si úsečku AB o délce $a + b$. Nad ní sestrojíme Thaletovu kružnici a aritmetický a geometrický průměr. Dostaneme $\triangle PSC$, kde $|PC| = \sqrt{ab}$ a $|SC| = \frac{a+b}{2}$. Na úsečku SC si sestrojíme kolmici tak, aby procházela bodem P . Průsečík kolmice s úsečkou SC si označíme jako Q a úsečku CQ si označíme jako h . Z Pythagorovy věty vidíme, že v $\triangle PCQ$ platí, že $|PQ|^2 = (\sqrt{ab})^2 - h^2$. A z $\triangle PSC$ vidíme podle Eukleidovy věty, že platí $|PQ|^2 = h \cdot (\frac{a+b}{2} - h)$. Nyní můžeme oba dva výrazy porovnat:

$$\begin{aligned} (\sqrt{ab})^2 - h^2 &= h \cdot \left(\frac{a+b}{2} - h \right) \\ ab - h^2 &= h \cdot \frac{a+b}{2} - h^2 \\ ab &= h \cdot \frac{a+b}{2} \\ \frac{2ab}{a+b} &= h \\ h &= \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \end{aligned}$$

Jak vidíme, $|CQ|$ nám představuje hledaný harmonický průměr.



Obrázek 3: Geometrická interpretace harmonického průměru

2.4 Kvadratický průměr

Jako kvadratický průměr čísel $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$, $x_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, 3 \dots n\}$ definujeme:

$$Q(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n}} \quad (4)$$

Kvadratický průměr je tedy definován jako odmocnina ze zlomku součtu druhých mocnin hodnot a celkového počtu hodnot.

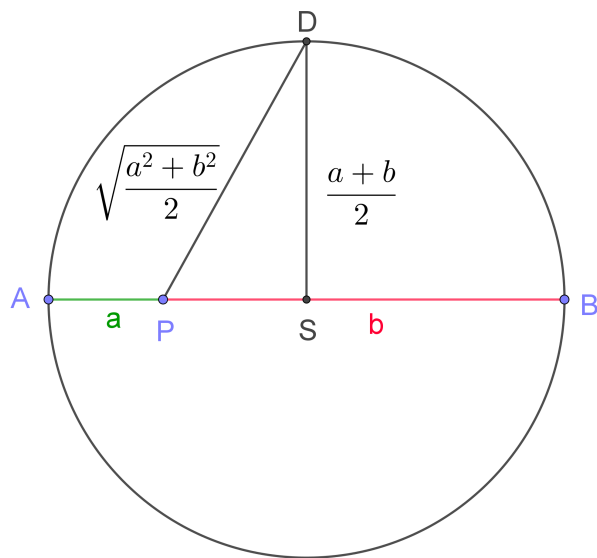
2.4.1 Geometrická reprezentace kvadratického průměru

Jako geometrickou interpretaci kvadratického průměru pro čísla $a, b > 0$ si můžeme představit následující konstrukci.

Sestrojíme si úsečku AB o délce $a + b$. Nad ní sestrojíme Thaletovu kružnici a aritmetický průměr tak, aby byl kolmý na úsečku AB . V místě, kde tato kolmice protne Thaletovu kružnici, vznikne bod D . Tento bod spojíme s bodem P , který se nachází na úsečce AB ve vzdálenosti a od bodu A . Dostaneme tedy úsečku DP , která je kvadratickým průměrem. Nyní si ukážeme, že to platí. Označíme si: $PS = \frac{a+b}{2} - a$ a $DS = \frac{a+b}{2}$.

$$\begin{aligned}
DP^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2 \\
DP^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \\
DP^2 &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} + \frac{b^2 - 2ab + a^2}{4} \\
DP^2 &= \frac{2a^2 + 2b^2}{4} \\
DP^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} \\
DP &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}
\end{aligned}$$

Tedy $|DC|$ nám představuje kvadratický průměr hodnot a, b .



Obrázek 4: Geometrická interpretace kvadratického průměru

2.5 Vztah mezi průměry

V předchozích kapitolách jsme si uvedli čtyři základní matematické průměry. Mezi těmito průměry platí důležitý vztah. Důkazy uvedu pouze pro dvě hodnoty $a, b > 0$, ne obecně pro n hodnot. Z těchto důkazů bude plynout následující vztah:

Nechť $x > 0$, tak platí

$$Q \geq A \geq G \geq H \quad (5)$$

Rovnost průměrů nastává pouze tehdy, pokud jsou zadané hodnoty stejné.

Pokud jsou dvě čísla různá, nerovnost bude vždy ostrá.

2.5.1 Algebraický důkaz

Předvedeme si jednoduchý důkaz výše uvedené nerovnosti. Tento důkaz by bylo vhodné uvést ve třídě na druhém stupni.

Nejprve dokážeme nerovnost $Q \geq A$, důkaz provedeme pro čísla $a, b \in \mathbb{R}$ a $a, b > 0$. Do dokazované nerovnosti si následně dosadíme čísla a, b .

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a - b)^2 \\ 0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \quad | \cdot (-1) \\ 0 &\geq 2ab - a^2 - b^2 \quad | + 2a^2 + 2b^2 \\ 2a^2 + 2b^2 &\geq a^2 + 2ab + b^2 \quad | \cdot \frac{1}{4} \\ \frac{a^2 + b^2}{2} &\geq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\ \frac{a^2 + b^2}{2} &\geq \frac{(a + b)^2}{4} \quad | \sqrt{} \\ \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} &\geq \frac{a + b}{2}. \end{aligned}$$

Rovnost nastává, když $a = b$.

Výraz na pravé straně nerovnosti bude vždy kladný, tudíž nerovnost, ke které jsme postupnými úpravami došli, musí také platit. Tedy platí, že $Q \geq A$.

Stejným způsobem dokážeme i nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem $A \geq G$. Opět to bude důkaz pro čísla $a, b \in \mathbb{R}$ a $a, b > 0$. Po dosazení dostaneme následující nerovnost.

$$\begin{aligned}
 (a - b)^2 &\geq 0 \\
 a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \quad | + 4ab \\
 a^2 + 2ab + b^2 &\geq 4ab \quad | \cdot \frac{1}{4} \\
 \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} &\geq ab \\
 \frac{(a + b)^2}{4} &\geq ab \quad | \sqrt{} \\
 \frac{a + b}{2} &\geq \sqrt{ab}.
 \end{aligned}$$

Rovnost nastává, když $a = b$.

Původní nerovnost bude platit pro jakékoliv a, b . Postupnými úpravami jsme tedy opět došli k nerovnosti, která bude vždy pravdivá. Můžeme tedy nerovnost $A \geq G$ prohlásit za pravdivou.

Nyní zbývá už jen dokázat nerovnost mezi geometrickým a harmonickým průměrem $G \geq H$. K tomu využijeme předchozí dokázanou nerovnost $A \geq G$. Důkaz opět provedeme pro čísla $a, b \in \mathbb{R}$ $a, b > 0$. Dosadíme je do vztahu $A \geq G$.

$$\begin{aligned}
 \frac{a + b}{2} &\geq \sqrt{ab} \quad | \cdot \sqrt{ab} \\
 \frac{a + b}{2} \cdot \sqrt{ab} &\geq ab \quad | \cdot \frac{2}{a + b} \\
 \sqrt{ab} &\geq \frac{2ab}{a + b} \\
 \sqrt{ab} &\geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.
 \end{aligned}$$

Rovnost nastává, když $a = b$.

Z platné nerovnosti jsme opět pomocí úprav došli k požadovanému tvaru nerovnosti. Dokázali jsme tedy, že nerovnost $G \geq H$ platí, využitím předem dokázané

nerovnosti $A \geq G$.

Dokázali jsme postupně tedy, že platí tyto tři nerovnosti $Q \geq A$, $A \geq G$ a $G \geq H$. Když tyto tři nerovnosti složíme dohromady, dostaneme náš požadovaný tvar: $Q \geq A \geq G \geq H$.

2.5.2 Geometrický důkaz

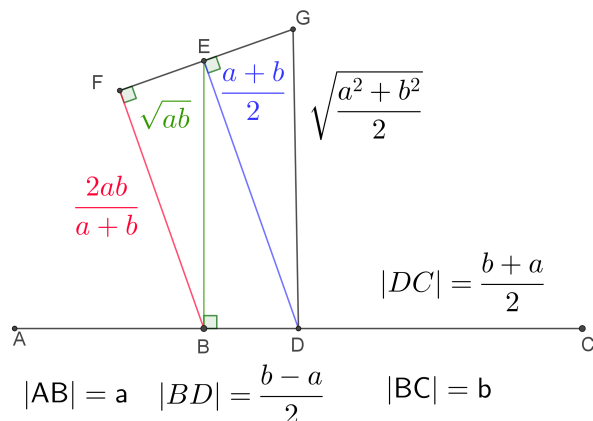
Nerovnost mezi jednotlivými druhy průměru se dá reprezentovat i geometricky. Pro studenty by mohlo být vhodné si jeden geometrický důkaz vyzkoušet. Tento důkaz je z knihy [3].

Do jednoho útvaru můžeme všechny výše uvedené průměry čísel $a, b > 0$ zkonstruovat následujícím způsobem. Nejprve si narýsujeme úsečku AB o délce a , poté narýsujeme úsečku BC o velikosti b tak, aby nám vznikla úsečka AC o velikosti $a+b$. Poté si zkonstruujeme bod D , který je středem úsečky AC . Tento bod využijeme ke konstrukci Thaletovy kružnice nad úsečkou AC . Poté můžeme vztyčit v bodě B kolmici na úsečku AC . V místě, kde tato kolmice protne Thaletovu kružnici, vznikne bod E a bude platit $|BE| = \sqrt{ab}$. V následujícím kroku spojíme bod E s bodem D . Platí, že $|ED| = \frac{a+b}{2}$.

Protože z předchozí kapitoly víme, že harmonický průměr leží na pravoúhlém trojúhelníku tak, že geometrický průměr tvoří jeho přeponu a kvadratický průměr leží na pravoúhlém trojúhelníku tak, že kvadratický průměr tvoří přeponu. Této znalosti využijeme a zkonstruujeme kolmici f na úsečku ED v bodě D . Dále povedeme rovnoběžku s úsečkou DE do bodu B . V místě, kde tato rovnoběžka protne kolmici f , vznikne bod F . Platí, že $|BF| = \frac{2ab}{a+b}$. Kvadratický průměr zkonstruujeme tak, že si dopočítáme délku odvěsny, která leží na kolmici f . Tuto délku si označíme jako x . Podobným způsobem bychom si mohli dopočítat i odvěsnu FE . použijeme Pythagorovu větu.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right)^2 &= x^2 + \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 \\ \frac{a^2 + b^2}{2} &= x^2 + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \quad | \cdot 4 \\ 2a^2 + 2b^2 &= a^2 + 2ab + b^2 + 4x^2 \quad | - a^2 - 2ab - b^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= 4x^2 \\ (a - b)^2 &= 4x^2 \quad | \cdot \frac{1}{4} \\ \frac{(a - b)^2}{4} &= x^2 \quad | \sqrt{} \\ x &= \frac{|a - b|}{2}. \end{aligned}$$

Když teď známe velikost x , stačí v bodě E sestrojit kružnici o poloměru x . V místě, kde tato kružnice protne kolmici f , vznikne bod G . Spojením bodu G a D vznikne úsečka GD o velikosti $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.



Obrázek 5: Geometrický důkaz nerovnosti mezi průměry

Tímto máme sestrojen geometrický důkaz nerovnosti mezi průměry. Na první pohled je zřejmé, že platí:

$$Q \geq A \geq G \geq H.$$

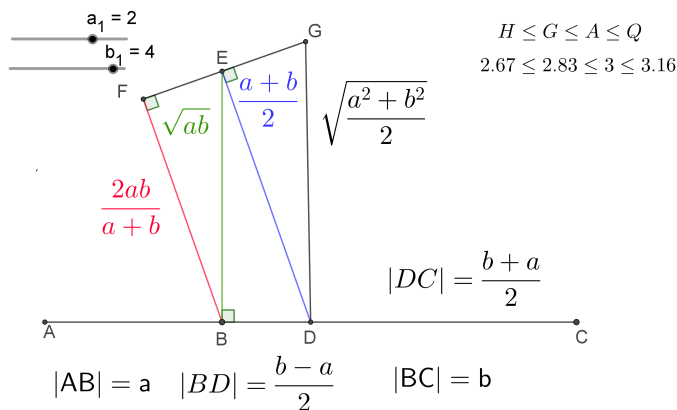
2.5.3 GeoGebra ověření

Tento důkaz bychom si mohli jednoduše verifikovat i v programu GeoGebra. Stačilo by využít výše zmíněnou konstrukci a za pomoci posuvníků a objektů vytvořit applet na numerické ověření.

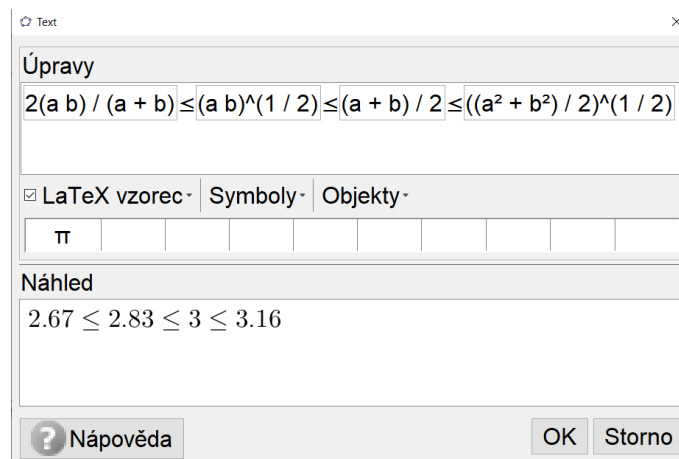
Pomocí posuvníků si můžeme z čísel a, b udělat proměnné s určeným názvem. V našem případě to bude `a`, `b`. GeoGebra nám poté umožní se na tyto hodnoty odkazovat za pomoci funkce `Text`. V této funkci můžeme vytvářet objekty, které poté dynamicky reagují na změnu velikostí čísel a, b .

Na obrázku 7 můžeme vidět příklad, jak to může vypadat. Můžeme vidět, že program GeoGebra využívá popisovacího jazyku L^AT_EX. S jeho pomocí můžeme tedy vytvořit applet, který bude reagovat na změny posuvníků, tedy změn hodnot proměnných a, b .

Uživatel si může tedy lépe představit, jak se rozdíl mezi velikostmi jednotlivých průměrů může měnit v závislosti na hodnotách a, b .



Obrázek 6: Numerický applet



Obrázek 7: Textové pole zařizující výpočet průměrů

2.5.4 Geometrický důkaz 2

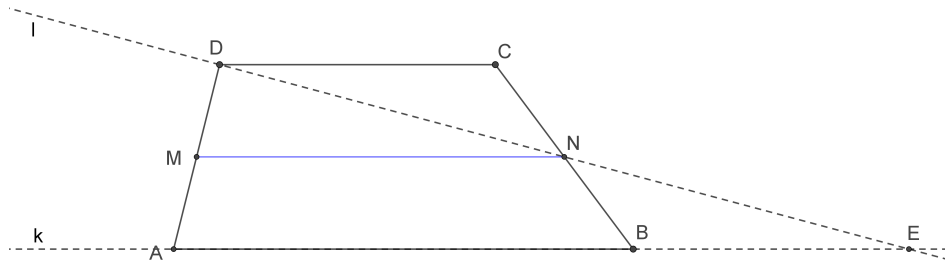
Nerovnost mezi jednotlivými průměry lze snadno a přehledně zkonstruovat i v rámci jednoho lichoběžníku, kde jeho rovnoběžné strany mají velikosti a, b , jak je uvedeno v [4].

Nejprve si zkonstruujeme aritmetický průměr. Nejprve si zkonstruujeme lichoběžník s vrcholy A, B, C, D . Poté si uděláme středy stran, které nejsou rovnoběžné, tedy středy stran BC a DA , tyto středy pojmenujeme M a N . Těmito středy povedeme rovnoběžku se stranou AB . Úsek mezi body M a N je roven aritmetickému průměru.

Dalšími konstrukcemi toto tvrzení dokážeme. Body AB povedeme přímkou k a body BN přímkou l . Na průsečíku přímky k a přímky l si označíme bod E . Tímto způsobem nám vznikly dva trojúhelníky $\triangle DCN$ a $\triangle BEN$. Víme, že úsek $|CN| = |BN|$, a že $|DM| = |MA|$, protože body M a N jsou středy stran. Také víme, že $\angle DNC \simeq \angle BNE$, když to zkombinujeme se znalostí, že $DC \parallel AB$, a že $\angle BEN \simeq \angle NDC$, dostáváme podobnost mezi trojúhelníky $\triangle BEN \simeq \triangle DCN$. Z této podobnosti dostaneme, že $|DC| = |BE|$ a že $|DN| = |NE|$.

Vzhledem k této znalosti můžeme říct, že úsečka MN je střední příčkou $\triangle AED$. Pro tuto střední příčku platí následující vztah. $|MN| = \frac{|AE|}{2}$. A o velikosti úsečky $|AE| = |AB| + |BE|$. To můžeme dosadit a dostaneme $|MN| = \frac{|AB| + |DC|}{2}$. Tedy $|MN| = \frac{a+b}{2}$, což je hledaný aritmetický průměr.

Harmonický průměr si v lichoběžníku zkonstruujeme a dokážeme následujícím



Obrázek 8: Geometrická reprezentace aritmetického průměru v lichoběžníku

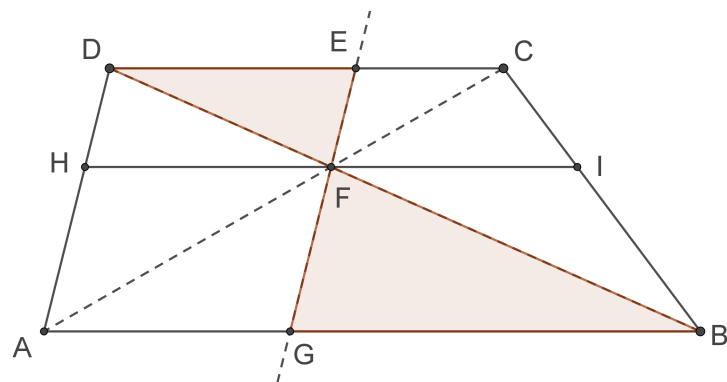
způsobem. Mějme lichoběžník s vrcholy A, B, C, D . Sestrojme si jeho úhlopříčky AC a BD a místo, kde se tyto úhlopříčky protnou, si označíme jako bod F . Tímto bodem poté povedeme rovnoběžku k se stranou AD a rovnoběžku l se stranou AB . Rovnoběžka k protne základny lichoběžníku v bodech H, G . Spolu s rovnoběžkou k a úhlopříčkami lichoběžníku nám vznikly čtyři trojúhelníky $\triangle DFG, \triangle GFC, \triangle AHF, \triangle BFH$. Podle věty *uu* můžeme říct, že $\triangle DFG \simeq \triangle BFH$ a $\triangle GFC \simeq \triangle AHF$.

Z této podobnosti můžeme vyvodit následující vztah. $\frac{|FG|}{|FH|} = \frac{x}{a-x} = \frac{b-x}{x}$. Z této rovnosti vyvodíme následující vztah.

$$\begin{aligned} \frac{x}{a-x} &= \frac{b-x}{x} \quad | \cdot x(a-x) \\ x^2 &= (b-x)(a-x) \\ x^2 &= ab - bx - ax + x^2 \quad | - x^2 + ax + bx \\ ax + bx &= ab \\ x(a+b) &= ab \quad | \cdot \frac{1}{a+b} \\ x &= \frac{ab}{a+b}. \end{aligned}$$

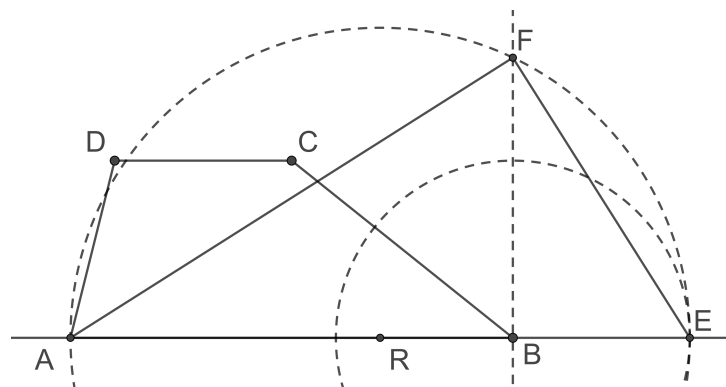
Dostáváme tedy jednu polovinu harmonického průměru. Kdybychom chtěli dostat i tu druhou polovinu, tak bychom museli rovnoběžku k vést bodem F rovnoběžnou se stranou BC .

Tímto způsobem bychom zjistili, že i druhá část se rovná tomu samému, a dostali bychom vztah $2x = \frac{2ab}{a+b}$, což by byl náš hledaný harmonický průměr.



Obrázek 9: Geometrická reprezentace harmonického průměru v lichoběžníku

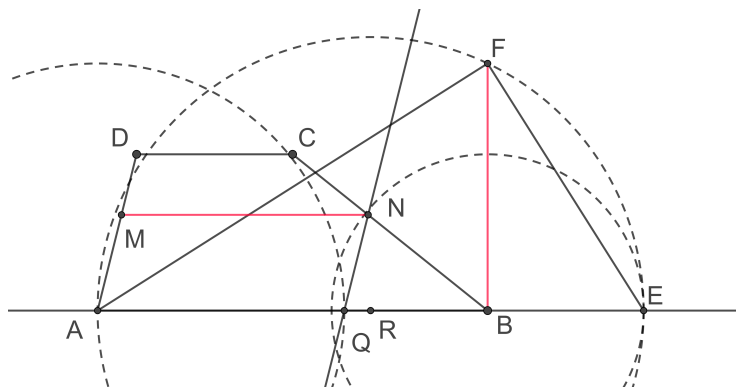
Jako další průměr si zkonstruujeme geometrický průměr. Máme lichoběžník s vrcholy A, B, C, D . Spodní základnu prodloužíme tak, aby její délka byla rovna $a + b$. Poté si najdeme střed této nově vzniklé strany BE . Ze středu R strany BE si zkonstruujeme Thaletovu kružnici a z bodu B povedeme kolmici na stranu BE . V místě, kde tato kolmice protne Thaletovu kružnici, si vyznačíme bod F . Z předchozí kapitoly víme, že úsečka BF je rovna velikosti geometrického průměru. Teď už tedy jen stačí dostat tuto úsečku do našeho lichoběžníku.



Obrázek 10: Geometrická reprezentace geometrického průměru v lichoběžníku

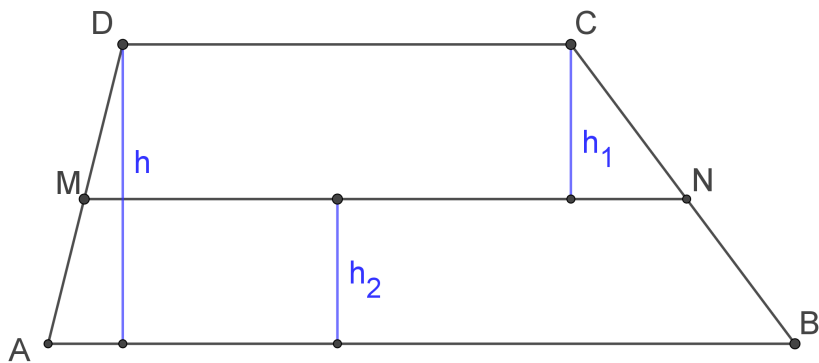
Přenesení úsečky provedeme následujícím způsobem. Sestrojíme si kružnici se středem v bodě A a s poloměrem rovným velikosti úsečky BF . Místo, kde tato kružnice protne úsečku AE , si označíme bod Q . Bodem Q povedeme rovnoběžku se stranou AD . Místo, kde tato rovnoběžka protne stranu BC , si označíme bod N . Tímto bodem poté vedeme rovnoběžku se stranou AB . V místě, kde tato rovnoběžka protne úsečku AD si označíme bod M . Úsečka MN je naším hledaným geometrickým

průměrem.



Obrázek 11: Geometrická reprezentace geometrického průměru v lichoběžníku

Jako poslední nám zbývá kvadratický průměr. Mějme lichoběžník $ABCD$ a úsečku MN , u které budeme předpokládat, že dělí lichoběžník na dva další lichoběžníky, které mají stejné obsahy. Vznikly nám tak tři různé lichoběžníky. Jsou to lichoběžníky $ABCD$, $MNCD$, $ABNM$. Ve stejném pořadí jsou i jejich výšky, h, h_1, h_2 . Dále označíme $AB = a, CD = b$ a $MN = c$.



Obrázek 12: Lichoběžník rozdělen na tři lichoběžníky

Obsahy jednotlivých lichoběžníků si můžeme zapsat následovně $S = \frac{(a+b)h}{2}$, $S_1 = \frac{(a+c)h_2}{2}$ a $S_2 = \frac{(b+c)h_1}{2}$.

Také víme, že $S = S_2 + S_3$ a $h = h_1 + h_2$. A z našeho předpokladu o stejných obsahích můžeme napsat, že $S = 2S_1$ a $S = 2S_2$. Dostáváme tedy dvě rovnice.

Z první rovnice odvodíme:

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)h}{2} &= (a+c)h_2 \quad | \cdot \frac{1}{(a+c)h} \\ \frac{(a+b)}{2(a+c)} &= \frac{h_2}{h}.\end{aligned}$$

Z druhé rovnice odvodíme:

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)h}{2} &= (b+c)h_1 \quad | \cdot \frac{1}{(b+c)h} \\ \frac{(a+b)}{2(b+c)} &= \frac{h_1}{h}.\end{aligned}$$

Dále pak:

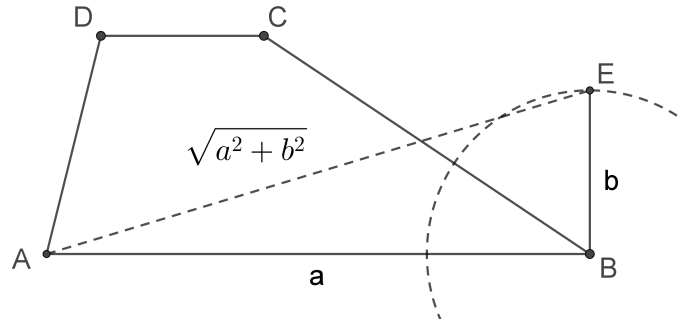
$$\frac{h_1}{h} + \frac{h_2}{h} = \frac{h_1 + h_2}{H} = 1.$$

Z výše uvedených vztahů dostaneme:

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)}{2(b+c)} + \frac{(a+b)}{2(a+c)} &= 1 \quad | \cdot 2(b+c)(a+c) \\ (a+b)(a+c) + (a+b)(b+c) &= 2(b+c)(a+c) \\ a^2 + ac + ab + bc + ab + ac + b^2 + bc &= 2(ab + bc + ac + c^2) \\ a^2 + ac + ab + bc + ab + ac + b^2 + bc &= 2ab + 2bc + 2ac + 2c^2 \\ a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc &= 2ab + 2bc + 2ac + 2c^2 \quad | - 2ab - 2ac - 2bc \\ a^2 + b^2 &= 2c^2 \quad | \cdot \frac{1}{2} \\ c^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} \quad | \cdot \sqrt{} \\ c &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.\end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy, že úsek MN je hledaný kvadratický průměr. Teď je ještě potřeba ukázat, jak tento úsek v lichoběžníku zkonstruujeme.

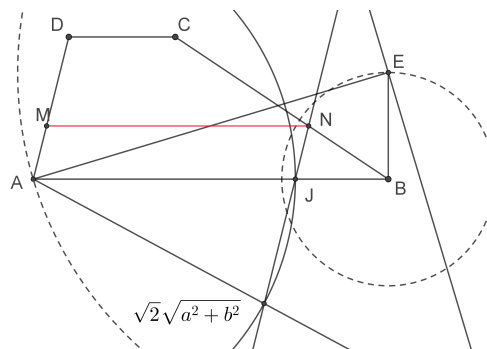
Ke konstrukci nám pomůže poznámka, že vzorec pro kvadratický průměr můžeme zapsat také jako $c = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Výraz $\sqrt{a^2+b^2}$ je přepona pravoúhlého trojúhelníku s rameny o délce a, b .



Obrázek 13: Pravoúhlý trojúhelník s přeponou $\sqrt{a^2 + b^2}$

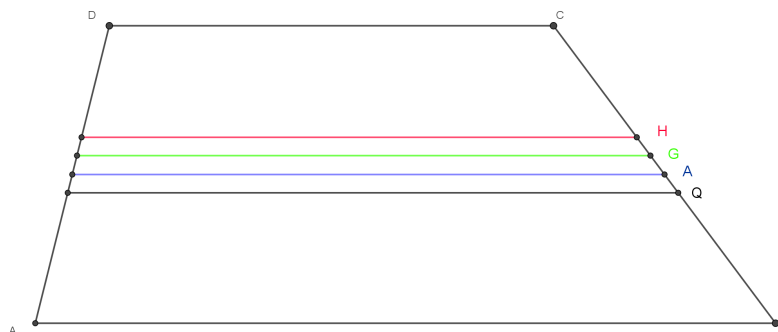
Díky úsečce $|AE|$ o délce $\sqrt{a^2 + b^2}$ můžeme zkonstruovat pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s rameny o délce $\sqrt{a^2 + b^2}$. Tudíž jeho přepona bude dlouhá $\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Když tuto přeponu přepolíme, dostaneme kvadratický průměr. Ten už pak bude stačit jen přesunout do lichoběžníku.

To uděláme následovně. Vytvoříme kružnici se středem v bodě A a s poloměrem rovným $\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. V místě, kde nám tato kružnice protne stranu AB si označíme bod J . Bodem J si následovně vedeme rovnoběžku se stranou AD . Místo, kde tato rovnoběžka protne stranu BC , si označíme jako bod N . Poté už jen stačí, když bodem N povedeme rovnoběžku se stranou AB , a místo, kde tato rovnoběžka protne stranu AD , si označíme jako bod M . Úsečka MN nám představuje kvadratický průměr.



Obrázek 14: Geometrická reprezentace kvadratického průměru v lichoběžníku

Ukázali jsme si tedy, že všechny výše uvedené průměry se dají zakreslit do lichoběžníku. Teď si můžeme ukázat, jak by to vypadalo, kdybychom všechny konstrukce udělali do jednoho lichoběžníku.



Obrázek 15: Všechny průměry v lichoběžníku

Na první pohled je zřejmé, že nerovnost platí tímto způsobem:

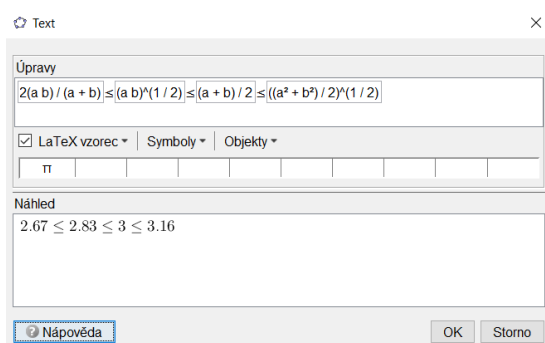
$$Q \geq A \geq G \geq H.$$

Rovnost nastává pouze tehdy, platí-li, že $|AB| = |CD|$. Tedy jedná-li se o rovnoběžník.

2.5.5 GeoGebra ověření

Pro tento důkaz si můžeme také jednoduše vytvořit algebraický applet v programu GeoGebra.

Vytvoříme si dva posuvníky s názvy a a b , které budou reprezentovat velikost čísel a, b . Pomocí funkce Text si vytvoříme dvě textová pole. V prvním textovém poli bude napsaná pouze textově nerovnost mezi jednotlivými průměry. V druhém poli už bude pomocí objektů a LaTeXového zápisu zařízen výpočet tak, aby se jednotlivé hodnoty průměrů měnily v závislosti na změnách hodnot čísel a a b . Tento zápis můžeme vidět na obrázku 16.



Obrázek 16: Numerický applet

3 Vybrané nerovnosti

V této kapitole představím vybrané nerovnosti. Ke každé z nich uvedu klasický důkaz, který je vhodný k prezentaci na druhém stupni základní školy. Ke každé nerovnosti navíc uvedu dynamické ověření v programu GeoGebra.

Budeme se zabývat hlavně těmito nerovnostmi. Izoperimetrická nerovnost, která vyjadřuje vztah mezi obvodem a obsahem trojúhelníka, resp. čtyřúhelníka. Další nerovností, kterou se budeme zabývat, je Weitzenböckova nerovnost, která popisuje vztah mezi součtem čtverců nad stranami trojúhelníka, resp. čtyřúhelníka, a jeho obsahem. Poslední nerovnost, kterou se budeme zabývat, vychází z Eulerova vztahu mezi poloměrem kružnice trojúhelníku opsané a poloměrem kružnice trojúhelníku vepsané.

3.1 Izoperimetrická nerovnost

V této podkapitole se budeme zabývat nejprve izoperimetrickou nerovností pro trojúhelníky a poté pro čtyřúhelníky.

Tento problém není žádnou novinkou. Ve skutečnosti se jím matematici zabývají již několik století na základě legendy o Didó, kterou napsal římský básník Virgil.

Didó byla princezna z Fénického města Tyre (na území dnešního Libanonu). Z tohoto města byla nucena uniknout poté, co její bratr zavraždil jejího manžela. Unikla do Afriky poblíž Tuniského zálivu. Zde se Didó rozhodla koupit zem pro svůj lid od místního vůdce, krále Jarbase Numídijského. Koupila si tolik půdy, kolik jí mohla vyznačit kůží z vola. Aby Didó získala co nejvíce půdy, rozstříhala kůží na tenké pásy a ty svázala do jednoho dlouhého provazu. Na tomto území poté vzniklo Kartágo.

To nás přivádí k izoperimetrickému problému: Jak měla Didó položit kůží, aby získala co nejvíce území? Za předpokladu, že země je rovná a u moře, zvolila tvar půlkruhu, což bylo správně [5].

V další části textu se budeme zabývat tímto problémem pro trojúhelník a čtyřúhelník [6], [7].

Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníka a S je jeho obsah, pak platí:

$$(a + b + c)^2 \geq 12\sqrt{3} \cdot S \quad (6)$$

Rovnost nastává pouze tehdy, je-li trojúhelník rovnostranný.

3.1.1 Klasický důkaz

V tomto důkazu, který je převzat z [8], využijeme dokázanou A-G nerovnost z předchozí kapitoly a Heronův vzorec pro obsah S trojúhelníka. Označme si délky stran trojúhelníka jako a, b, c . Pro obsah tohoto trojúhelníka platí $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$. Využijeme znalost A-G nerovnosti a upravíme ji pro čísla $s-a, s-b, s-c$. Dostaneme tedy takovouto nerovnost:

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{3}$$

Tuto nerovnost budeme postupně upravovat, dokud se nedostaneme k požadovanému tvaru. Úpravu provedeme následujícím postupem.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} &\leq \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{3} \quad |^3 \\
(s-a)(s-b)(s-c) &\leq \left(\frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} \right)^3 \quad | \cdot s \\
s(s-a)(s-b)(s-c) &\leq s \left(\frac{3s-a-b-c}{3} \right)^3 \\
S^2 &\leq s \left(s - \frac{a+b+c}{3} \right)^3 \\
S^2 &\leq s \left(\frac{a+b+c}{2} - \frac{a+b+c}{3} \right)^3 \\
S^2 &\leq s \left(\frac{3a+3b+3c-2a-2b-2c}{6} \right)^3 \\
S^2 &\leq s \left(\frac{a+b+c}{2 \cdot 3} \right)^3 \\
S^2 &\leq \frac{a+b+c}{2} \cdot \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^3 \\
S^2 &\leq \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{(a+b+c)^3}{216} \\
S^2 &\leq \frac{(a+b+c)^4}{432} \quad | \sqrt{} \\
S &\leq \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} \quad | \cdot 12\sqrt{3} \\
12\sqrt{3}S &\leq (a+b+c)^2
\end{aligned}$$

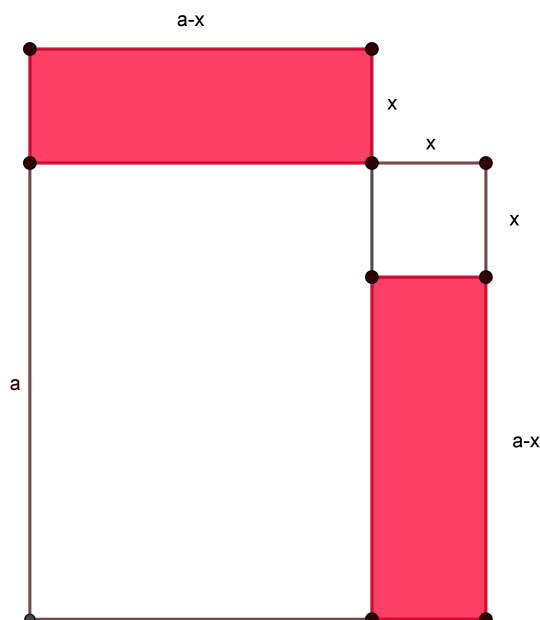
Těmito úpravami jsme dostali naši první izoperimetrickou nerovnost, která nám říká, že největší obsah, s obvodem $a+b+c$, bude mít právě rovnostranný trojúhelník.

Podobným způsobem jsme schopni převést izoperimetrickou úlohu na čtyřúhelník [8]. Představme si čtverec o velikosti strany a . Ve čtverci platí $l = 4a$, tedy $l^2 = 16a^2 = 16S$. Z tohoto čtverce uděláme obdélník, tak že jednu jeho stranu zkrátíme o x a další stranu o stejnou délku zvětšíme. Jeho obsah bude $(a-x)(a+x) = a^2 - x^2$. Bude tedy menší, než byl obsah původního čtverce.

Jsou-li a, b, c, d délky stran čtyřúhelníka, S je jeho obsah a l je jeho obvod, pak platí

$$16S \leq l^2 \quad (7)$$

Rovnost nastane pouze tehdy jedná-li, se o čtverec. Tedy $a = b = c = d$.



Obrázek 17: Izoperimetrická úloha pro čtyřúhelník

Tento vzorec můžeme opět dokázat pomocí A-G nerovnosti. Brahmaguptův² vzorec nám udává následující vztah pro obsah tětiového čtyřúhelníku [8].

²Indický matematik a astronom (598 - 668). Byl první člověk, který zavedl nulu jako číslici. Také zavedl obecné řešení kvadratických rovnic. Mezi jeho další práce patří také zavedení pravidel pro práci se zlomky. Také byl první, kdo dokázal, že Měsíc je Zemi blíže než Slunce.

Nechť a, b, c, d jsou délky stran tětívového čtyřúhelníku $ABCD$, pak pro obsah S tětívového čtyřúhelníku platí

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad (8)$$

kde s je polovina obvodu.

Dále známe Bretschneiderův vzorec [8].

Nechť a, b, c, d jsou délky stran libovolného konvexního čtyřúhelníku. Pak pro obsah S tohoto čtyřúhelníku platí

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)}, \quad (9)$$

kde α a γ jsou protilehlé úhly a s je rovno polovině obvodu.

Je zřejmé, že platí

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \leq (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

Dále využijeme A-G nerovnost dokázanou v předchozí kapitole pro čísla $s-a, s-b, s-c, s-d$. Dostaneme tedy následující nerovnost.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} &\leq \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c) + (s-d)}{4} \quad |^4 \\ S^2 &\leq \left(\frac{4s-a-b-c-d}{4}\right)^4 \\ S^2 &\leq \left(s - \frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \\ S^2 &\leq \left(\frac{a+b+c+d}{2} - \frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \\ S^2 &\leq \left(\frac{4a+4b+4c+4d-2a-2b-2c-2d}{8}\right)^4 \\ S^2 &\leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \\ S^2 &\leq \frac{(a+b+c+d)^4}{256} \quad |\sqrt{} \\ S &\leq \frac{(a+b+c+d)^2}{16} \\ 16S &\leq l^2 \end{aligned}$$

Dokázali jsme izoperimetrickou rovnici i pro čtyřúhelníky, rovnost nastává pouze v případě, že se jedná o čtverec.

3.1.2 GeoGebra ověření

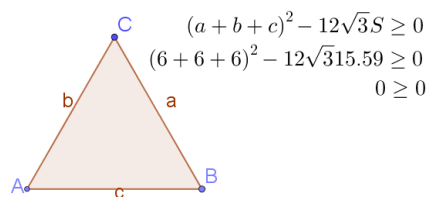
Izoperimetrické problémy pro trojúhelník a čtyřúhelník můžeme snadno reprezentovat i v programu GeoGebra.

V první řadě si vytvoříme body A, B a C . Tyto body poté spojíme funkcí Mnohoúhelník, abychom se později mohli jednoduše odkazovat na obsah trojúhelníku ABC . Kdybychom body A, B a C spojili pouze funkcí Úsečka, nemohli bychom odkazovat na obsah trojúhelníku ABC .

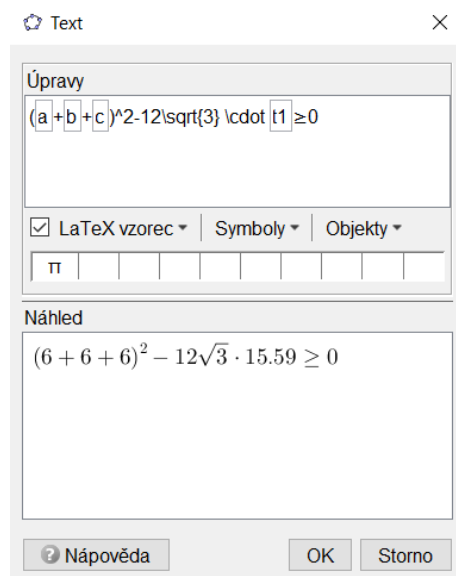
Následovně si vytvoříme pomocí funkce Text tři textová pole. V prvním je napsaná pouze Izoperimetrická nerovnost pro trojúhelník. Ve druhém textovém poli už jsou pomocí objektů zapsané velikosti stran trojúhelníka ABC tak, že jsou jednotlivé velikosti stran napsané v součtu, ale ještě nejsou sečteny. Samozřejmě je celý tento součet umocněn na druhou. Od tohoto umocněného součtu odečítám obsah trojúhelníka ABC vynásobený $12\sqrt{3}$. Ve druhém textovém poli se výpočet ještě neprovádí. Význam druhého textového pole je v tom, aby uživatel, v kombinaci s prvním textovým polem, viděl, jak se hodnoty velikostí stran a, b a c a velikost obsahu trojúhelníka ABC mění v závislosti na změně pozic bodů A, B a C . Respektive velikostí stran a, b a c . Ve třetím textovém poli již probíhá samotný výpočet pomocí objektů a LaTeXového zápisu. Tento zápis můžeme vidět na obrázku 19.

Díky tomuto appletu se může uživatel snadněji přesvědčit, že Izoperimetrická nerovnost platí a že rovnost nastává pouze v případě, že trojúhelník ABC je rovnostranný. Zároveň může uživatel získat jasnější představu o tom, jak Izoperimetrická nerovnost funguje.

Podobný applet lze vytvořit i pro čtyřúhelník. Postupovalo by se naprosto stejně. Jenom bychom museli přidat jeden bod a požit vzorec na Izoperimetrickou nerovnost pro čtyřúhelník. Tento applet je k dispozici v mé GeoGebra knize.



Obrázek 18: Applet pro trojúhelník



Obrázek 19: Třetí textové pole

3.2 Weitzenböckova nerovnost

V této podkapitole se budeme zabývat Weitzenböckovou nerovností, která je pojmenována po svém objeviteli, rakouském matematikovi, Rolandu Weitzenböckovi. V roce 1961 se tato nerovnost objevila na třetí mezinárodní matematické olympiádě, kde se požadovalo vyřešit následující problém [5], [6].

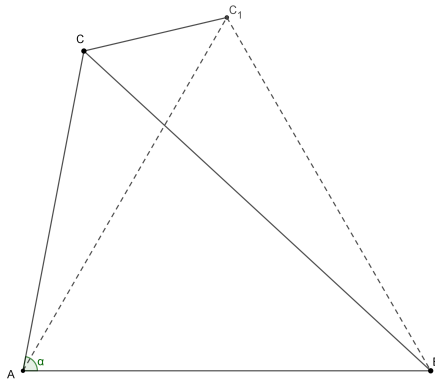
Nechť a, b, c jsou délky stran trojúhelníka a S je jeho obsah. Dokažte:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Tato nerovnost se nazývá Weitzenböckova nerovnost.

3.2.1 Klasický důkaz

K dokázání tohoto problému použijeme kosinovou větu následujícím způsobem. Mějme trojúhelník ABC . Nad stranou AB sestrojíme rovnostranný trojúhelník ABC_1 . Důkaz převzatý z [9].



Obrázek 20: Trojúhelník ABC_1

Ještě než se pustíme do použití kosinové věty, je třeba si povšimnout, že $|\angle CAC_1| = |\alpha - \frac{\pi}{3}|$. A zároveň z vlastností funkce kosinus můžeme říct, že $\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)$. Pomocí kosinové věty můžeme tedy vyjádřit velikost úsečky CC_1 následovně:

$$|CC_1|^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right).$$

Ze znalosti vzorce $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ si můžeme vyjádření velikosti úsečky CC_1 upravit na tento tvar:

$$\begin{aligned} |CC_1|^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \left(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ |CC_1|^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right). \end{aligned}$$

Z kosinové věty pro trojúhelník ABC si vyjádříme $\cos \alpha$, který pak budeme moci dosadit do právě upravené rovnice.

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad | - b^2 - c^2 \\
a^2 - b^2 - c^2 &= -2bc \cos \alpha \quad | \cdot (-1) \\
-a^2 + b^2 + c^2 &= 2bc \cos \alpha \quad | \cdot \frac{1}{2bc} \\
\cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.
\end{aligned}$$

Nyní máme vyjádřen $\cos \alpha$ a můžeme ho dosadit do vyjádření velikosti úsečky $|CC_1|$. Při tomto dosazení využijeme následující vzorec pro vyjádření obsahu trojúhelníka $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$.

$$\begin{aligned}
|CC_1|^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) \\
|CC_1|^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) \\
|CC_1|^2 &= b^2 + c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \sqrt{3}bc \sin \alpha \right) \\
|CC_1|^2 &= b^2 + c^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} - \sqrt{3}bc \sin \alpha \\
|CC_1|^2 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \sqrt{3}bc \sin \alpha \\
|CC_1|^2 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2\sqrt{3}S \quad | \cdot 2 \\
2|CC_1|^2 &= a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S.
\end{aligned}$$

O velikosti úsečky platí, že $2|CC_1|^2 \geq 0$, tedy $|CC_1| \geq 0$. Rovnost nastává pouze v případě, že $C = C_1$, tedy že trojúhelník je rovnostranný. Dostáváme tedy vztah:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Obdobný vztah můžeme dokázat i pro čtyřúhelník [6].

Mějme a, b, c, d strany čtyřúhelníka a S jeho obsah, poté platí

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4S \quad (10)$$

Rovnost nastává, pouze pokud jde o čtverec, tedy $a = b = c = d$.

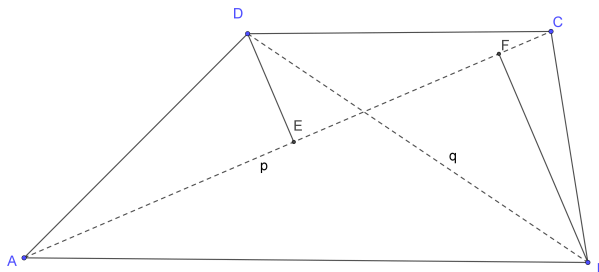
Tuto nerovnost dokážeme čistě geometricky. Avšak nejprve si upravíme původní nerovnost [5].

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4S \quad | \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} \geq S$$

Následující konstrukcí vytvoříme geometrický důkaz této nerovnosti [5].

Mějme čtyřúhelník $ABCD$ s úhlopříčkami p, q . Na úhlopříčku p povedeme kolmice, které budou procházet body B a D . V místech, kde tyto kolmice protnou úhlopříčku p , si vyznačíme body E a F .



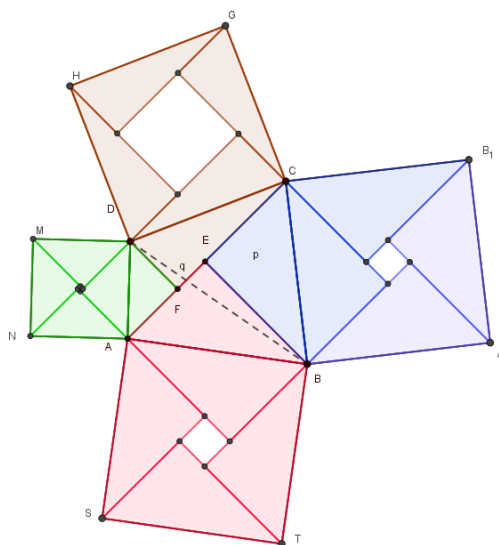
Obrázek 21: Čtyřúhelník $ABCD$ s úhlopříčkami p, q a s kolmicemi

Vidíme, že pomocí úhlopříček p, q a kolmic na úhlopříčku p nám vznikly čtyři trojúhelníky, a to následující: $\triangle AFB, \triangle BFC, \triangle CED$ a $\triangle DEA$.

Postupně si nad každou stranou sestrojíme čtverec o délce dané strany. Nyní vidíme, že trojúhelník vzniklý uvnitř původního čtyřúhelníku můžeme doplnit na obdélník s úhlopříčkou, kterou tvoří daná strana čtyřúhelníka. Můžeme tedy ve čtverci nad danou stranou sestrojit úplně stejný trojúhelník. Vzhledem k tomu, že se jedná o čtverec, tak takovýto trojúhelník můžeme sestrojit nad všemi stranami daného

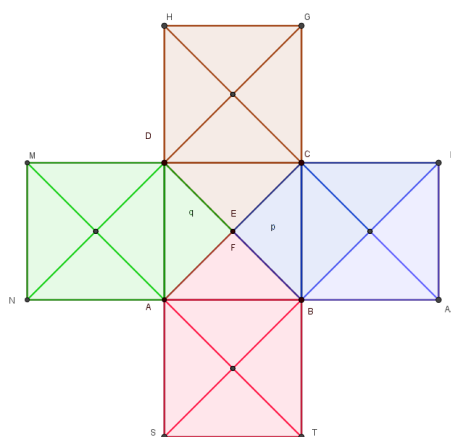
čtverce. To znamená, že jsme ukázali, že se výšeč obsahu původního čtyřúhelníka vejde do čtverce nad jeho stranou čtyřikrát. A pokud původní čtyřúhelník není čtverec, tak ve čtverci vztyčeném nad jeho stranou zbyde ještě nějaké místo. Což jednoznačně ukazuje, že nerovnost $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} \geq S$ bude platit.

Můžeme to vidět na následujícím obrázku. Každý původní trojúhelník $\triangle AFB$, $\triangle BFC$, $\triangle CED$ a $\triangle DEA$ je vyznačený jinou barvou. Ve čtverci připojeném na daný trojúhelník jsou tyto trojúhelníky vyznačeny stejnou barvou.



Obrázek 22: Čtyřúhelník $ABCD$ se vztyčenými čtverci a doplněnými trojúhelníky

Na následujícím obrázku můžete vidět, že rovnost nastává právě tehdy je-li, původní čtyřúhelník čtverec.



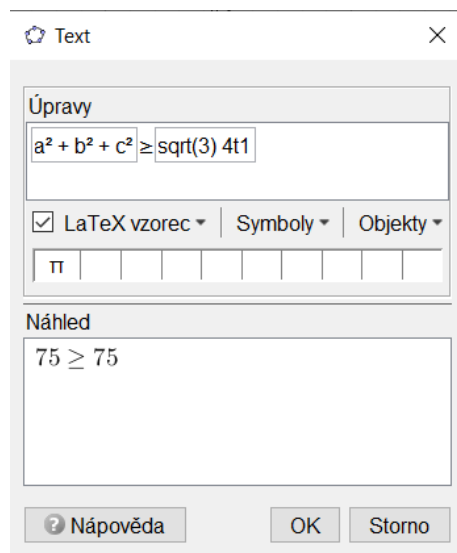
Obrázek 23: Čtverec $ABCD$

3.2.2 GeoGebra ověření

Weitzenböckovu nerovnost a její zobecnění pro čtyřúhelník si můžeme snadno ověřit v programu GeoGebra.

V programu GeoGebra si vytvoříme body A, B a C . Ty spojíme pomocí funkce Mnohoúhelník, tím nám vznikne trojúhelník ABC . Využíváme metodu mnohoúhelník proto, že nám snadno umožní pracovat s obsahem vzniklého trojúhelníku. Kdybychom body A, B a C spojili pouze úsečkami, nemohli bychom se později odkazovat na jeho obsah.

Poté pomocí funkce Text vytvoříme tři textová pole. V prvním z nich je jenom napsaná Weitzenböckova nerovnost. V druhém už jsou doplněné hodnoty daných proměnných, tedy velikosti stran a, b a c na druhou na jedné straně a $4\sqrt{3}$ krát obsah trojúhelníku ABC na straně druhé. Tyto hodnoty se mění v závislosti na změně velikostí stran a, b a c . Respektive se změnou polohy jednoho či více bodů A, B nebo C . V druhém textovém poli se nic nepočítá. Pouze se zobrazují hodnoty daných proměnných. Ve třetím textovém poli již probíhá samotný výpočet. Ten se v textovém poli realizuje pomocí objektů, a LaTeXového zápisu. Tento zápis můžeme vidět na obrázku 24.

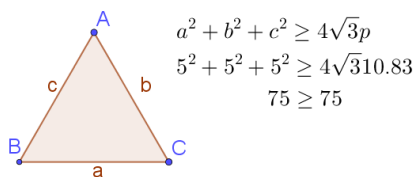


Obrázek 24: Pohled do třetího textového pole

Obdobný applet lze vytvořit i pro čtyřúhelník. Stačilo by přidat bod a textová pole upravit do podoby pro nerovnost pro čtyřúhelník. Tento applet je k dispozici

v mé GeoGebra knize.

Díky těmto appletům může uživatel lépe získat představu o fungování Weizenböckovi nerovnosti a její generalizaci pro čtyřúhelník. Za pomoci posouvání jednotlivých bodů trojúhelníka nebo čtyřúhelníka může lépe pochopit, jak tyto nerovnosti fungují. Na obrázku 25 můžeme vidět screenshot z appletu, když je zrovna nastaven rovnostranný trojúhelník. Můžeme vypočítat, že nerovnost platí.



Obrázek 25: Geogebra applet nastaven na ověření platnosti v případě rovnostranného trojúhelníka

3.3 Eulerova nerovnost

V této podkapitole si uvedeme Eulerův vztah pro vzdálenost mezi středem kružnice trojúhelníku opsané a středem kružnice trojúhelníku vepsané.

Nechť x je vzdálenost mezi středy kružnic trojúhelníku opsané a trojúhelníku vepsané. A R je poloměr kružnice trojúhelníku opsané a r je poloměr kružnice trojúhelníku vepsané, pak platí [5], [6], [7].

$$x^2 = R(R - 2r) \quad (11)$$

Tento vztah zveřejnil v roce 1765 Leonhard Euler. Po tomto švýcarském matematikovi je také pojmenována. Nicméně ke stejnému výsledku se dopracoval i anglický matematik William Chapple už v roce 1746.

Protože x^2 je nezáporné číslo, můžeme z výše uvedeného vztahu vyvodit následující nerovnost.

$$R(R - 2r) \geq 0$$

$$R^2 - 2Rr \geq 0 \quad | + 2Rr$$

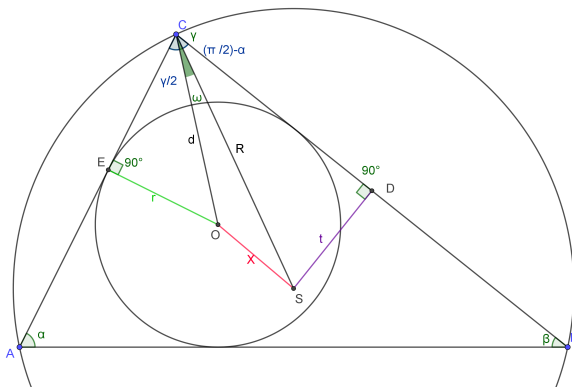
$$R^2 \geq 2Rr \quad | \cdot \frac{1}{R}$$

$$R \geq 2r.$$

Tento vztah se nazývá Eulerova nerovnost. V této nerovnosti nastává rovnost pouze v případě, že trojúhelník je rovnostranný. Protože v takovém případě střed kružnice opsané trojúhelníku a střed kružnice vepsané trojúhelníku splnou v jeden. Tudíž nastává situace, že $x = 0$.

3.3.1 Klasický důkaz

V této podkapitole si dokážeme platnost Eulerova vztahu pro vzdálenost středu kružnice trojúhelníku opsané a středu kružnice trojúhelníku vepsané. Důkaz z [9].



Obrázek 26: Trojúhelník ABC

Nejprve předpokládejme, že se jedná o ostroúhlý trojúhelník a že platí $\alpha \geq \beta$. Tedy máme ostroúhlý trojúhelník ABC , ve kterém bod O představuje střed kružnice trojúhelníku vepsané a bod S označuje střed kružnice trojúhelníku opsané. A x je vzdálenost mezi těmito dvěma středy.

V první řadě si musíme zjistit velikost úhlu OCS . Vzhledem k tomu, že víme, že střed kružnice trojúhelníku opsané leží na osách úhlů, víme, že úhel ACO je rovný $\frac{\gamma}{2}$, kde γ je úhel ACB . Dále si potřebujeme zjistit velikost úhlu SCD . Z vlastností kružnice trojúhelníku opsané víme, že úsečka t leží na ose strany a , tudíž dělí stranu a na dvě poloviny a zároveň je na ni kolmá. Tudíž nám vzniká pravoúhlý trojúhelník SDC . Nyní si dopočítáme velikost úhlu CSD . O tomto úhlu můžeme říct, že je to polovina středového úhlu nad stranou BC , tedy nad stranou a . Z věty o středovém a obvodovém úhlu³ vidíme, že úhel CSB je dvojnásobek úhlu CAB , tedy dvojnásobek úhlu α . Je zřejmé, že úsečka t tento úhel půlí, a víme tedy, že úhel CSD je roven úhlu α . Dostáváme tedy, že úhel SCD je roven $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ($90^\circ = \frac{\pi}{2}$).

Dostáváme se tedy k velikosti úhlu $|\angle OCS| = \omega$. Dále můžeme říci, že o úhlu β , můžeme prohlásit, že platí vztah $\beta = \pi - \alpha - \gamma$, tedy že $-\beta = \alpha + \gamma - \pi$.

$$\begin{aligned}\omega &= \gamma - \frac{\gamma}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \omega &= \gamma - \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{2} + \alpha \\ \omega &= \frac{2\gamma - \gamma - \pi + 2\alpha}{2} \\ \omega &= \frac{\gamma - \pi + 2\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Rozepsáním čitatele v posledním kroku na $\gamma - \pi + \alpha + \alpha$, si nám pomůže uvědomit, že první tři členy tohoto součtu jsou rovny $-\beta$. Jak jsme si uvedli ještě před vyjádřením úhlu ω . Pro úhel ω tedy dostáváme.

³Věta o středovém a obvodovém úhlu říká, že máme-li na kružnici se středem S oblouk AB , pak platí, že úhel, jehož vrchol leží na kružnici, a není to bod A , ani bod B , a jehož ramena procházejí body A a B , nazýváme obvodový úhel oblouku AB . Pro středový úhel ASB platí, že je dvakrát větší než obloukový úhel.

$$\omega = \frac{\gamma - \pi + \alpha + \alpha}{2}$$

$$\omega = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Abychom v dalším kroku důkazu mohli použít kosinovou větu, potřebujeme zjistit velikosti stran OC a SC . Označme si $|OC| = d$ a $|SC| = R$. Na stranu AC si z bodu O můžeme spustit kolmici o délce r , což je poloměr kružnice vepsané. Vznikne nám tedy pravoúhlý trojúhelník EOC . Z tohoto pravoúhlého trojúhelníku si můžeme odvodit velikost d . Můžeme to udělat pomocí definice funkce sinus pro pravoúhlý trojúhelník⁴. Pro d tedy dostáváme následující vztah.

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{d} \quad | \cdot d$$

$$d \sin \frac{\gamma}{2} = r \quad | \cdot \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

$$d = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

Nyní máme vyjádřené všechny potřebné strany a úhel, které potřebujeme na použití kosinové věty pro vzdálenost středu kružnice trojúhelníku opsané a středu kružnice trojúhelníku vepsané x . Máme tedy $d = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$, $|SC| = R$, $\omega = \frac{\alpha - \beta}{2}$. Dostáváme tedy následující rovnici.

$$x^2 = R^2 + d^2 - 2Rd \cos \omega$$

$$x^2 = R^2 + d^2 - 2Rr \cdot \frac{\cos \omega}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

⁴Sinus úhlu α v pravoúhlém trojúhelníku je roven poměru délky protilehlé odvěsny a přepony. Délku protilehlé odvěsny si označme jako p a délku přepony si označme jako q . Platí tedy, že $\sin \alpha = \frac{p}{q}$

Poměr $\frac{\cos \omega}{\sin \frac{\gamma}{2}}$ můžeme následujícím způsobem vyjádřit pomocí velikostí stran trojúhelníku ABC . Nejprve si ale tento poměr musíme upravit, abychom s ním mohli dále pracovat. Využijeme dříve získaný fakt, že $\omega = \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Dosadíme-li do poměru tento úhel, můžeme postupovat následovně.

$$\frac{\cos \omega}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Jmenovatel zlomku na pravé straně můžeme upravit podle rozdílového vzorce pro funkci kosinus, který představuje následující vztah $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. Po této úpravě bude tedy naše rovnice vypadat následovně.

$$\frac{\cos \omega}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Abychom mohli v důkazu pokračovat musíme, představit následující dva vzorce pro funkce sinus a kosinus [9]. Pro funkci sinus to bude vzorec $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ a další dva vzorce cyklickou záměnou. Tedy $\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$ a $\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$, kde s je rovno polovině obvodu trojúhelníka, tedy $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Pro funkci kosinus platí obdobný vztah. Pro funkci kosinus platí $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{bc}}$ a další dva cyklickou záměnou. Tedy $\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ac}}$ a $\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$, kde s je rovno polovině obvodu trojúhelníka, tedy $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Se znalostí těchto vzorců můžeme pokračovat v důkazu. Stačí nám pouze dosadit. Dostaneme tedy následující vztah.

$$\frac{\cos \omega}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} + \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}}{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}$$

Pro zjednodušení úpravy si můžeme vzorec na pravé straně rozdělit na dvě části a ty upravovat postupně zvlášť. První část bude $\frac{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}}{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}$ a druhá část bude $\frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}}{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}$. Nejprve se pustíme do úpravy první části.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}}{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}} &= \frac{\sqrt{\frac{s(s-a)s(s-b)}{abc^2}}}{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}} = \Rightarrow \\ \Rightarrow &= \sqrt{\frac{\frac{s^2(s-a)(s-b)}{abc^2}}{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}} = \sqrt{\frac{s^2(s-a)(s-b)}{abc^2} \cdot \frac{ab}{(s-a)(s-b)}} = \sqrt{\frac{s^2}{c^2}} = \frac{s}{c}. \end{aligned}$$

Po úpravě první části, se můžeme pustit do úpravy druhé části.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}}{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}} &= \frac{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-c)}{abc^2}}}{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}} = \Rightarrow \\ \Rightarrow &= \sqrt{\frac{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-c)}{abc^2}}{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-c)}{abc^2} \cdot \frac{ab}{(s-a)(s-b)}} = \Rightarrow \\ \Rightarrow &= \sqrt{\frac{(s-c)^2}{c^2}} = \frac{(s-c)}{c}. \end{aligned}$$

Po těchto úpravách si můžeme dosadit do vzorce pro $\frac{\cos \omega}{\sin \frac{\gamma}{2}}$. Sečteme tedy první a druhou část.

$$\begin{aligned}\frac{\cos \omega}{\sin \frac{\gamma}{2}} &= \frac{s}{c} + \frac{(s-c)}{c} \\ \frac{\cos \omega}{\sin \frac{\gamma}{2}} &= \frac{2s-c}{c} \\ \frac{\cos \omega}{\sin \frac{\gamma}{2}} &= \frac{a+b+c-c}{c} \\ \frac{\cos \omega}{\sin \frac{\gamma}{2}} &= \frac{a+b}{c}.\end{aligned}$$

Vidíme, že si nyní můžeme dosadit do našeho původního vzorce $x^2 = R^2 + d^2 - 2Rr \cdot \frac{\cos \omega}{\sin \frac{\gamma}{2}}$, který jsme získali použitím kosinové věty. Dostáváme tedy následující vztah.

$$x^2 = R^2 + d^2 - \frac{2Rr(a+b)}{c}$$

Nyní si ještě musíme upravit d^2 . Víme, že pro d^2 platí tento vztah, který je odvozen z definice funkce sinus, $d^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}$.

Z předchozích úprav víme, že pro $\sin \frac{\gamma}{2}$ platí tento vztah $\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$. Po umocnění tedy dostaneme $\sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{ab}$. Tento zlomek dosadíme do vztahu pro d^2 . Dostaneme následující vztah.

$$\begin{aligned}d^2 &= \frac{r^2}{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \\ d^2 &= \frac{r^2}{a} b(s-a)(s-b).\end{aligned}$$

Abychom mohli pokračovat v důkazu dále, je třeba zmínit platnost následujících vzorců [9]. První z nich je $abc = 4RS$, kde S je obsah trojúhelníka. Druhý je $r = \frac{S}{s}$. Abychom tyto vzorce mohli použít, vynásobíme si pravou stranu $\frac{c}{c}$. Což je vlastně jednička, takže jsme nic nezměnili. Máme tedy.

$$\begin{aligned}
d^2 &= \frac{r^2 abc}{c(s-a)(s-b)} \\
d^2 &= \frac{r4RSr}{c(s-a)(s-b)} \\
d^2 &= \frac{r4RS\frac{S}{s}}{c(s-a)(s-b)} \\
d^2 &= \frac{\frac{r4RS^2}{s}}{c(s-a)(s-b)} \\
d^2 &= \frac{r4RS^2}{s} \frac{1}{c(s-a)(s-b)} \\
d^2 &= \frac{r4Rs(s-a)(s-b)(s-c)}{sc(s-a)(s-b)} \\
d^2 &= \frac{4Rr(s-c)}{c} \\
d^2 &= \frac{4Rr\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)}{c} \\
d^2 &= \frac{4Rr\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}{c} \\
d^2 &= \frac{\frac{4Rr(a+b-c)}{2}}{c} \\
d^2 &= \frac{2Rr(a+b-c)}{c}.
\end{aligned}$$

Takto upravený vztah pro d^2 si nyní může dosadit do naší původní kosinové věty. Dostáváme tedy.

$$\begin{aligned}
 x^2 &= R^2 + \frac{2Rr(a+b-c)}{c} - \frac{2Rr(a+b)}{c} \\
 x^2 &= R^2 + \frac{2Rra + 2Rrb - 2Rrc}{c} - \frac{2Rra + 2Rrb}{c} \\
 x^2 &= R^2 + \frac{-2Rrc}{c} \\
 x^2 &= R^2 - 2Rr \\
 x^2 &= R(R - 2r).
 \end{aligned}$$

Dostáváme se tedy k Eulerovu vzorci. Eulerova nerovnost platí nejenom pro ostroúhlý trojúhelník. Samozřejmě platí i pro všechny ostatní trojúhelníky. Dokázat by to šlo stejným způsobem. Jen by se mírně měnilo vyjádření úhlu ω .

Z Eulerovy nerovnosti $R \geq 2r$ zároveň vidíme, že rovnost nastane pouze tehdy, když $O = S$. A to nastane pouze v případě, že trojúhelník bude rovnostranný.

3.3.2 GeoGebra ověření

Eulerovu nerovnost si můžeme velice snadno ověřit i v programu GeoGebra.

V prvé řadě si vytvoříme body A , B a C a vzhledem k tomu, že v tomto vztahu nijak nefiguruje obsah trojúhelníka, nemusíme používat funkci Mnohoúhelník. Postačí nám pouze tři úsečky. Pokud použijeme funkci Mnohoúhelník, tak se nic nestane.

Máme tedy trojúhelník ABC . Nyní je třeba sestrojit středy kružnice trojúhelníku opsané a vepsané. Střed kružnice trojúhelníku vepsané najdeme snadno. Víme, že střed kružnice trojúhelníku vepsané leží na průsečíku os úhlů trojúhelníka. V GeoGebře na to existuje speciální funkce Osa úhlu. Vybereme tedy tuto funkci a sestrojíme osy úhlů. Na sestrojení průsečíku nám stačí pouze dvě osy. Máme-li sestrojené obě osy, můžeme pomocí funkce Průsečík sestrojit střed kružnice trojúhelníku vepsané. Zvolíme tedy funkci Průsečík a označíme dvě osy úhlů. Tím nám vznikl střed kružnice trojúhelníku vepsané.

O středu kružnice trojúhelníku opsané víme, že leží na průsečíku os stran trojúhelníka. Podobně jako na osu úhlu existuje v GeoGebře funkce, tak existuje na osy stran. Použijeme tedy funkci Osa strany na dvě strany trojúhelníka. Máme tedy dvě osy. Pomocí dvou os jsme schopni funkcí Průsečík sestavit střed kružnice trojúhelníku opsané.

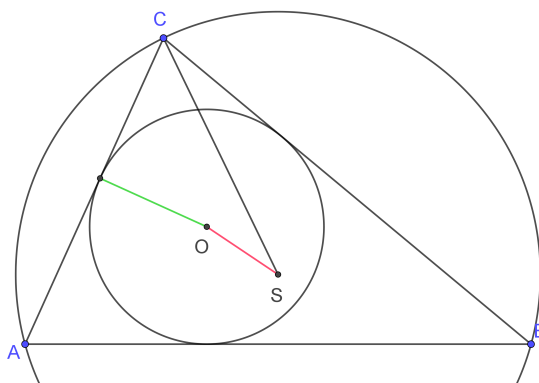
O kružnici trojúhelníku vepsané víme, že se dotýká každé strany trojúhelníka právě v jednom místě. Abychom tedy sestavili její poloměr, tak nám stačí vést kolmici z jejího středu na jednu stranu trojúhelníka. Tato úsečka nám představuje poloměr kružnice vepsané. Poté již můžeme sestavit samotnou kružnici pomocí funkce Kružnice daná středem a bodem, kde střed bude střed kružnice a bod bude průsečík kolmice na stranu trojúhelníka ze středu a dané strany.

Kružnici trojúhelníku opsanou sestavíme jednodušeji. O kružnici trojúhelníku opsané víme, že prochází každým vrcholem trojúhelníka. Máme-li tedy střed, sestavíme kružnici pomocí funkce Kružnice daná středem a bodem, kde střed bude střed kružnice opsané a bod bude jeden z vrcholů trojúhelníka.

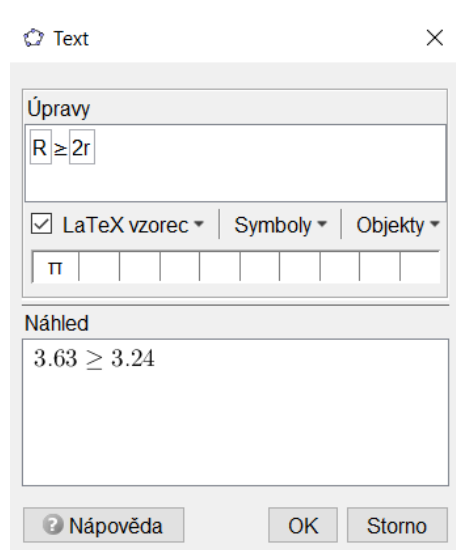
Teď, když máme oba středy, můžeme je spojit úsečkou, jejíž velikost bude reprezentovat vzdálenost mezi středem kružnice trojúhelníku opsané a středem kružnice trojúhelníku vepsané.

Samozeřejmě si ještě musíme zkonstruovat úsečky, které nám budou reprezentovat délky poloměrů kružnic. To si uděláme opět pomocí funkce Úsečka. Vytvoříme úsečky ze středů kružnic k samotné kružnici. Tím máme vše potřebné. Náš applet by teď měl vypadat jako na obrázku 27. S tím, že poloměr kružnice trojúhelníku vepsané je přebarven na zeleno a vzdálenost mezi středy obou kružnic je přebarvena na červeno. Poloměr kružnice je nabarven černě.

Následně si pomocí funkce Text vytvoříme tři textová pole. V prvním textovém poli bude jen napsaná Eulerova nerovnost. Druhé textové pole bude již referovat na velikosti poloměrů kružnic. Nebude však ještě nic počítat. Druhé pole slouží hlavně pro zobrazení aktuálních velikostí poloměrů kružnic. Ve třetím textovém poli již bude probíhat samotný výpočet. V tomto případě to bude velice jednoduchý výpočet. Na pravé straně stačí jen poloměr kružnice trojúhelníku vepsané násobit dvěma. Vnitřek tohoto textového pole můžeme vidět na obrázku 28.



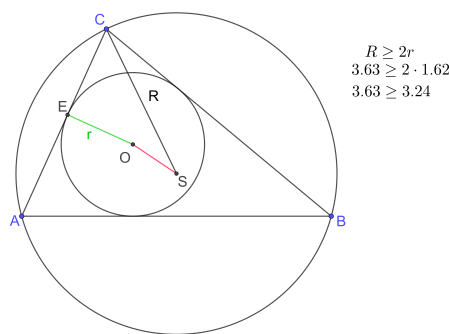
Obrázek 27: GeoGebra applet



Obrázek 28: Pohled do třetího textového pole

Výpočet je zařízen pomocí objektů, které jsou v textovém poli schopny referovat velikost všech objektů, u kterých to má smysl. V tomto případě to jsou velikosti úseček reprezentující poloměry kružnic.

Díky tomuto appletu si uživatel dokáže lépe představit závislost velikostí poloměrů jednotlivých kružnic na tvaru trojúhelníka za využití možnosti posouvání jednotlivých vrcholů trojúhelníka. Může si tak lépe představit platnost tohoto vztahu v různých druzích trojúhelníků, např. v tupoúhlém, pravoúhlém a rovnoramenném. Na obrázku 29 můžeme vidět screenshot ze zmiňovaného appletu, který je k dispozici v příložené GeoGebra knize.



Obrázek 29: Applet pro Eulerovu nerovnost v nastavení pro obecný trojúhelník

3.3.3 Jiný důkaz

Důkaz Eulerovy nerovnosti pro trojúhelník si můžeme dokázat i pomocí geometrické konstrukce [6].

Sestrojme si trojúhelník ABC . Poté sestrojme středy jeho stran A_1, B_1 a C_1 . Následně si musíme sestrojit úsečky A_1B_1, B_1C_1 a A_1C_1 . Tyto strany tvoří střední příčky trojúhelníka ABC . O středních příčkách víme, že spojují středy dvou stran a jsou rovnoběžné se stranou, jejíž střed nespojují. Zároveň víme, že velikost střední příčky je poloviční v porovnání se stranou, se kterou je rovnoběžná.

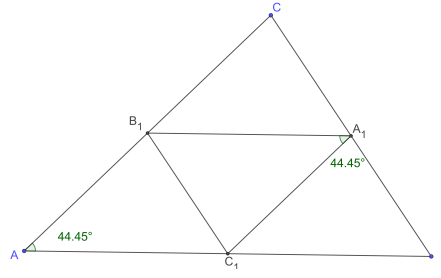
Tyto střední příčky dělí trojúhelník ABC na čtyři podobné trojúhelníky. Trojúhelník, který spojuje středy stran, se nazývá příčkový trojúhelník. Je podobný s trojúhelníkem ABC podle věty *sss*. Tomuto příčkovému trojúhelníku sestrojíme kružnici opsanou.

O této kružnici můžeme říct, že její poloměr je roven polovině poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC . Můžeme to říct, protože víme, že pro kružnici opsanou trojúhelníku platí následující vztah [13].

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

Označme si poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC jako r_1 a poloměr kružnice opsané příčkovému trojúhelníku $A_1B_1C_1$ jako r_2 .

Z podobnosti trojúhelníků ABC a $A_1B_1C_1$ víme, že strany trojúhelníka $A_1B_1C_1$ jsou poloviční, ale úhly zůstávají stejné. Jak můžeme vidět na obrázku 30.



Obrázek 30: Velikosti úhlů se zachovávají

Pro r_1 tedy platí, že $r_1 = \frac{a}{2 \sin \alpha}$. A pro r_2 platí tento vztah $r_2 = \frac{\frac{a}{2}}{2 \sin \alpha}$. Tento vztah si trochu upravíme.

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{\frac{a}{2}}{2 \sin \alpha} \\ r_2 &= \frac{a}{4 \sin \alpha} \quad | \cdot 4 \sin \alpha \\ a &= 4 \sin \alpha r_2. \end{aligned}$$

Vztah pro a si můžeme dosadit do vztahu pro r_1 . Dostaneme následující rovnici.

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{4 \sin \alpha r_2}{2 \sin \alpha} \\ r_1 &= 2r_2 \quad | \cdot \frac{1}{2} \\ r_2 &= \frac{r_1}{2}. \end{aligned}$$

Tím jsme si dokázali, že poloměr kružnice opsané příčkovému trojúhelníku $A_1B_1C_1$ je poloviční, než poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC . V našem značení Eulerova vztahu ($R \geq 2r$) nám to představuje $\frac{R}{2}$.

Dále si sestrojíme trojúhelník A', B' a C' tak, aby strany a', b' a c' byly postupně rovnoběžné se stranami a, b a c . Zároveň budeme na tento trojúhelník požadovat, aby kružnice opsaná příčkovému trojúhelníku byla kružnice tomuto trojúhelníku vepsanou. Strany trojúhelníku $A'B'C'$ budou tedy tečny kružnice opsané příčkovému trojúhelníku $A_1B_1C_1$.

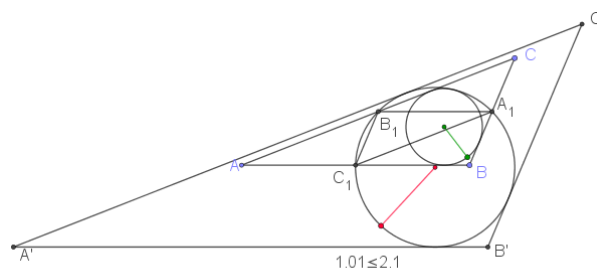
Dále si sestrojíme kružnici vepsanou trojúhelníku ABC . Poloměr této kružnice nám bude v našem značení Eulerovy nerovnosti ($R \geq 2r$) představovat r .

Protože zjevně platí, že $\triangle ABC \subseteq \triangle A'B'C'$, musí platit, že poloměr kružnice vepsané trojúhelníku $A'B'C'$ musí být větší, než poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC . Platí tedy, že $\frac{R}{2} \geq r$, což nám po upravení dává Eulerovu nerovnost $R \geq 2r$.

Tím je tento poměrně jednoduchý, ale účinný, důkaz dokončen. Vzhledem k tomu, že je to důkaz skoro čistě geometrický, lze velice snadno provést ověření v programu GeoGebra.

Stačí si v programu GeoGebra vytvořit výše zmíněnou konstrukci a pomocí textových polí a objektů v nich porovnat poloměr kružnice vepsané trojúhelníku $A'B'C'$ a dvojnásobek poloměru kružnice vepsané trojúhelníku ABC .

Příklad, jak by takovýto GeoGebra applet mohl vypadat, můžeme vidět na obrázku 31. Uživatel tohoto GeoGebra appletu může pohybovat body původního trojúhelníku ABC , tak může pozorovat změny v poměru velikostí obou poloměrů. Dále si uživatel může vyzkoušet, že Eulerova nerovnost platí pro všechny možné trojúhelníky, např. rovnostranný, rovnoramenný, pravoúhlý atd. K tomu slouží textové pole umístěné pod trojúhelníky. V tomto textovém poli probíhá samotný výpočet a porovnání poloměrů. Poloměr kružnice vepsané trojúhelníku $A'B'C'$ je na obrázku 31 značen červenou barvou a poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC je na obrázku 31 značen zelenou barvou.



Obrázek 31: GeoGebra applet na geometrický důkaz Eulerovy nerovnosti

Tento GeoGebra applet umožní uživateli získat lepší představu o principu tohoto geometrického důkazu. A zároveň umožní i získat lepší představu o fungování Eu-

lerovy nerovnosti samotné. Tento applet je samozřejmě k dispozici v mé GeoGebra knize.

3.3.4 Eulerův vztah pro čtyřúhelník (Fuss Theorem)

Podobný vztah existuje i pro čtyřúhelník. Tento čtyřúhelník musí být konvexní a musí mu jít sestrojít kružnice opsaná i vepsaná. Tedy čtyřúhelník, který je konvexní a zároveň tětiový a tečnový. Takový čtyřúhelník se nazývá dvojstředový⁵.

Tento vztah mezi středy kružnice čtyřúhelníku opsané a vepsané vymyslel Nicolas Fuss. Byl to švýcarský matematik, který byl asistentem Leonharda Eulera [10].

Nechť x značí vzdálenost mezi středy kružnice čtyřúhelníku opsané a středu kružnice čtyřúhelníku vepsané a R poloměr kružnice opsané a r střed kružnice vepsané.

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 - r^2}} \quad |^2 \\x^2 &= R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 - r^2}\end{aligned}$$

O x^2 můžeme prohlásit, že je nezáporné. Tedy bude platit $x^2 \geq 0$. Z toho můžeme vyvodit následující nerovnost.

$$\begin{aligned}R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 - r^2} &\geq 0 \quad | - R^2 - r^2 \\-r\sqrt{4R^2 - r^2} &\geq -R^2 - r^2 \quad | \cdot (-1) \\r\sqrt{4R^2 - r^2} &\leq R^2 + r^2 \quad |^2 \\r^2(4R^2 - r^2) &\leq (R^2 + r^2)^2 \\4R^2r^2 - r^4 &\leq R^4 + 2R^2r^2 + r^4 \quad | - r^4 - 2R^2r^2 \\2R^2r^2 &\leq R^4 \quad | \cdot \frac{1}{R^2} \\2r^2 &\leq R^2 \quad | \sqrt{} \\\sqrt{2}r &\leq R.\end{aligned}$$

⁵Pro dvojstředový čtyřúhelník $ABCD$ tedy platí, že $a + c = b + d$ a $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$.

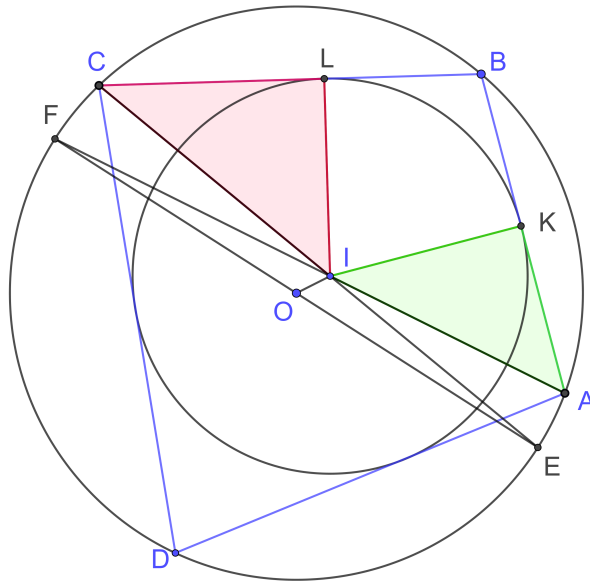
Dostali jsme tedy nerovnost $R \geq \sqrt{2}r$. Za povšimnutí stojí velká podobnost mezi tímto vztahem a Eulerovým vztahem ($R \geq 2r$).

3.3.5 Klasický důkaz

Důkaz převzatý z [10]. Abychom tento vztah dokázali, uděláme si pomocnou konstrukci, viz. obrázek 32. Zkonstruujeme si dvojstředový čtyřúhelník $ABCD$. V tom nám pomůže GeoGebra. Nejprve si uděláme libovolnou kružnici. Na této kružnici si zvolíme body A, B a C . Abychom našli bod D , který nám tyto tři body doplní na dvojstředový čtyřúhelník, využijeme konstrukci hyperboly. Bod D leží na hyperbole s ohnisky v bodech A a C a procházející bodem B . V místě, ve kterém protne tato hyperbola původní kružnici, dostaneme hledaný bod D .

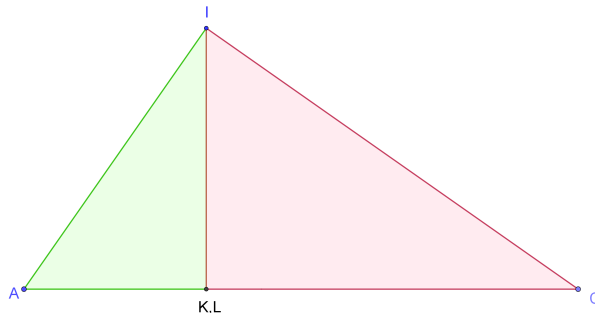
Nyní si můžeme sestrojit dvojstředný čtyřúhelník $ABCD$. Původní kružnice bude tomuto čtyřúhelníku opsaná. Vepsanou kružnici sestrojíme stejným způsobem jako v trojúhelníku.

V místech, kde kružnice čtyřúhelníku vepsaná protne stranu AB a BC , si vyznačíme body K a L . Vzniknou nám tedy dva pravoúhlé trojúhelníky $\triangle CIL$ a $\triangle AIK$. Úsečky CI a AI si prodloužíme tak, aby protnuly kružnici čtyřúhelníku opsanou. V bodech protnutí si vyznačíme body F a E . Poté si tyto dva body spojíme.



Obrázek 32: Dvojstředový čtyřúhelník $ABCD$ s kružnicí opsanou i vepsanou

Víme, že úhly při vrcholech A a C tvoří dohromady 180° . Tak můžeme říct, že platí $\angle BAI + \angle ICB = 90^\circ$. To nám umožní sestrojit pravoúhlý trojúhelník IAC . Můžeme ho vidět na obrázku 33.



Obrázek 33: Trojúhelník IAC

Protože je trojúhelník IAC pravoúhlý, můžeme si jeho obsah vyjádřit dvěma způsoby.

$$\frac{r(AK + CL)}{2} = \frac{AI \cdot CI}{2} \quad | \cdot 2$$

$$r(AK + CL) = AI \cdot CI$$

Na pravoúhlý trojúhelník můžeme aplikovat i Pythagorovu větu.

$$(AK + CL)^2 = AI^2 + CI^2 \quad | \sqrt{}$$

$$(AK + CL) = \sqrt{AI^2 + CI^2}$$

Tento vztah dosadíme do vztahu $r(AK + CL) = AI \cdot CI$. Dostaneme tedy následující rovnici, kterou si upravíme.

$$\begin{aligned}
r\sqrt{AI^2 + CI^2} &= AI \cdot CI \quad |^2 \\
r^2(AI^2 + CI^2) &= AI^2 \cdot CI^2 \quad | \cdot \frac{1}{r^4 \cdot AI^4 \cdot CI^4} \\
\frac{r^2(AI^2 + CI^2)}{r^4 \cdot AI^4 \cdot CI^4} &= \frac{AI^2 \cdot CI^2}{r^4 \cdot AI^4 \cdot CI^4} \\
\frac{AI^2 + CI^2}{r^2 \cdot AI^4 \cdot CI^4} &= \frac{1}{r^4 \cdot AI^2 \cdot CI^2} \quad | \cdot r^2 \\
\frac{r^2(AI^2 + CI^2)}{r^2 \cdot AI^4 \cdot CI^4} &= \frac{r^2}{r^4 \cdot AI^2 \cdot CI^2} \\
\frac{AI^2 + CI^2}{AI^4 \cdot CI^4} &= \frac{1}{r^2 \cdot AI^2 \cdot CI^2} \\
\frac{AI^2}{AI^4 \cdot CI^4} + \frac{CI^2}{AI^4 \cdot CI^4} &= \frac{1}{r^2 \cdot AI^2 \cdot CI^2} \\
\frac{1}{AI^2 \cdot CI^4} + \frac{1}{AI^4 \cdot CI^2} &= \frac{1}{r^2 \cdot AI^2 \cdot CI^2} \quad | \cdot (AI^2 \cdot CI^2) \\
\frac{AI^2 \cdot CI^2}{AI^2 \cdot CI^4} + \frac{AI^2 \cdot CI^2}{AI^4 \cdot CI^2} &= \frac{AI^2 \cdot CI^2}{r^2 \cdot AI^2 \cdot CI^2} \\
\frac{1}{r^2} &= \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{CI^2}.
\end{aligned}$$

Dále vidíme, že úsečka IO je těžnicí trojúhelníku FIE . O těžnici platí následující vztah [9], který si upravíme. Je třeba si uvědomit, že $OI = x$ a $EF = 2R$.

$$\begin{aligned}
OI^2 &= \frac{FI^2 + EI^2}{2} - \frac{EF^2}{4} \quad | \cdot 2 \\
2OI^2 &= FI^2 + EI^2 - \frac{EF^2}{2} \quad | - FI^2 - EI^2 - 2OI^2 \\
-EI^2 - FI^2 &= -2OI^2 - \frac{EF^2}{2} \quad | \cdot (-1) \\
EI^2 + FI^2 &= 2OI^2 + \frac{EF^2}{2} \\
EI^2 + FI^2 &= 2x^2 + \frac{4R^2}{2} \\
EI^2 + FI^2 &= 2x^2 + 2R^2 \\
EI^2 + FI^2 &= 2(x^2 + R^2).
\end{aligned}$$

Dále vidíme, že bodem I probíhají dvě tětivy kružnice čtyřúhelníku opsané. Můžeme tedy použít větu o průsečíku tětiv [12], která nám dá tento vztah $AI \cdot FI = CI \cdot EI = R^2 - x^2$. Z tohoto vztahu si můžeme odvodit následující dvě rovnice.

$$EI = \frac{R^2 - x^2}{CI}$$

$$FI = \frac{R^2 - x^2}{AI}$$

Dosadíme-li si tyto dvě rovnice do vztahu $EI^2 + FI^2 = 2(x^2 + R^2)$, dostaneme následující rovnici.

$$\frac{(R^2 - x^2)^2}{CI^2} + \frac{(R^2 - x^2)^2}{AI^2} = 2(R^2 + x^2) \quad | \cdot \frac{1}{(R^2 - x^2)^2}$$

$$\frac{1}{CI^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{2(R^2 + x^2)}{(R^2 - x^2)^2}.$$

Z předchozích úprav víme, že platí $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{CI^2}$. Dosadíme-li si, dostaneme tento vztah.

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2(R^2 + x^2)}{(R^2 - d^2)^2}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{(R + x)^2 + (R - x)^2}{(R^2 - x^2)^2}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{(R + x)^2}{(R^2 - x^2)} + \frac{(R - x)^2}{(R^2 - x^2)}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{(R + x)^2}{(R + x)^2(R - x)^2} + \frac{(R - x)^2}{(R + x)^2(R - x)^2}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R - x)^2} + \frac{1}{(R + x)^2}.$$

Poslední řádek není nic jiného, než alternativní zápis Fussovy věty. Dokázali jsme tedy, že tento vztah platí pro libovolný dvojstředný čtyřúhelník.

Ověření v programu GeoGebra appletu by se udělalo v podstatě stejně jako pro trojúhelník. Jen bych místo trojúhelníku udělal čtyřúhelník a pozměnil bych vzorec v textovém poli.

Tento applet bude k dispozici k vyzkoušení v mé GeoGebra knize.

4 Závěr

V první kapitole této bakalářské práce jsem se zaměřil na aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický průměr. U každého jsem uvedl jeho definici a geometrickou reprezentaci. Poté jsem uvedl vztah, který platí mezi danými průměry, a uvedl důkaz pro dva prvky. Následně jsem uvedl i dva geometrické důkazy. Dále jsem uvedl i stručný popis appletu v programu GeoGebra.

V další kapitole jsem se zabýval už nerovnostmi pro trojúhelníky a čtyřúhelníky. První takováto nerovnost byla Izoperimetrická nerovnost. Uvedl jsem její znění a její důkaz pro trojúhelník i čtyřúhelník. Nechybí ani stručný popis GeoGebra appletu.

Další uvedenou nerovností byla Weitzenböckova nerovnost. Opět jsem uvedl důkaz této věty pro trojúhelníky i její generalizaci pro čtyřúhelník. Popis GeoGebra appletu nechybí ani zde.

Poslední uvedenou nerovností byla Eulerova nerovnost a její generalizace pro dvojstředný čtyřúhelník. Uvedl jsem důkaz jak pro trojúhelník, tak pro čtyřúhelník. Stručný popis appletu je i v této podkapitole.

Jedním z mých cílů bylo poučit se o důkazech matematických vět, k čemuž myslím, že došlo.

Zároveň jsem chtěl některé důkazy, uvedené v odborných publikacích, zkusit rozepsat, aby i čtenář, který nemá s matematikou moc zkušeností, byl schopný matematický důkaz pochopit.

Dalším cílem bylo vytvořit interaktivní applety, které se týkají dané problematiky. Ty jsou k dispozici v mé GeoGebra knize.

Čas strávený psaním bakalářské práce mě utvrdil v tom, že matematické důkazy nejsou úplně jednoduché, ale že by určitě stály za zmínku na základní nebo střední škole v rámci nějakého matematického kroužku nebo dobrovolných seminářů.

Seznam použité literatury a zdrojů

- [1] KUFNER, Alois. Nerovnosti a odhady. Praha: Mladá fronta, 1976. Škola mladých matematiků
- [2] VAŠKO, Jiří. Vybrané kvaziaritmetické průměry a jejich využití na 2. stupni základní školy. Univerzita Palackého, 2017. Diplomová práce. Univerzita Palackého, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky.
- [3] NELSEN, Roger B. Proofs without words: exercises in visual thinking. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1993.
- [4] WISDOM, Nathan. An Exploration of The Pythagorean Means. The University of Georgia, Mathematics Education, Jim Wilson. Dostupné z: <http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Fa08/Wisdom/EMAT6690/Investigate>
- [5] ALSINA, Claudi a Roger B. NELSEN. When less is more: visualizing basic inequalities. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 2009.
- [6] PECH, Pavel. Selected topics in geometry with classical vs. computer proving. Hackensack, NJ: World Scientific, 2007.
- [7] BOTTEMA, O. et al. Geometric Inequalities. Groningen: Wolters-Noordhoff publishing, 1969.
- [8] BÁRTLOVÁ, Tereza. Izoperimetrické nerovnosti. Karlova Univerzita, 2012. Diplomová práce. Karlova univerzita, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky.
- [9] HORÁK, Stanislav. Škola mladých matematiků: Nerovnosti v trojúhelníku. Praha: Mladá Fronta, 1986.
- [10] BOGOMOLNY, Alexander. Fuss' Theorem. Cut the knot [online]. Dostupné z: <https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Fuss.shtml>
- [11] BOGOMOLNY, Alexander. Length of a Median. Cut the knot [online]. Dostupné z: <https://www.cut-the-knot.org/triangle/LengthOfMedian.shtml>

- [12] BOGOMOLNY, Alexander. Intersecting Chords Theorem. Cut the knot [online]. Dostupné z: <https://www.cut-the-knot.org/proofs/IntersectingChordsTheorem.shtml>
- [13] MIKULČÁK, Jiří. Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy. Praha: Prometheus, 2003.