

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

katedra matematiky

Kurz deskriptivní geometrie v Cabri II+

diplomová práce

Knihovna JU - PF



3 1 1 5 1 7 2 4 1 5

Autor: Tomáš Basík

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Pavel Pech, CSc.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně na základě vlastních zjištění a s použitím v závěru uvedené literatury.

V Českých Budějovicích, dne 20. 4. 2006

Bond

.....

Abstract

Práce je knižní forma bakalářské diplomové práce z oboru pedagogiky, konkrétně z oboru pedagogické psychologie. Vede k poznání vztahů mezi psychologickými a pedagogickými jevy. Cílem práce je analyzovat vztahy mezi psychologickými a pedagogickými jevy. Práce je rozdělena na tři části: teoretická, metodická a empirická. Teoretická část se zabývá problematikou vztahů mezi psychologickými a pedagogickými jevy. Metodická část se zabývá metodami výzkumu. Empirická část se zabývá výsledky výzkumu.

Děkuji vedoucímu mé diplomové práce doc. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za jeho odborné vedení, poskytnutí odborné literatury a cenných rad a připomínek.

Anotace

Práce je koncipována jako interaktivní učebnice deskriptivní geometrie, která je zaměřena na jednu ze základních zobrazovacích metod – Mongeovo promítání. Výklad a všechny příklady a ukázky zobrazení jsou vytvořeny pomocí dynamického geometrického softwaru Cabri geometrie II +. Práce s touto učebnicí by měla studentům pomoci při pochopení základních vztahů mezi útvary v prostoru, kterými se deskriptivní geometrie zabývá.

Obsah

Úvod	6
Struktura	7
3D modely	7
Příklady	8
Negativa.....	9
Mongeovo promítání	10
Bod v Mongeově promítání	10
Přímka	12
Rovina	14
Vzájemná poloha	18
Dva body	18
Bod a přímka	18
Dvě přímky	18
Dvě roviny.....	19
Přímka a rovina	21
Bod a rovina	21
Otáčení a osová afinita.....	22
Mnohostěny.....	23
Hranol a jehlan	23
Řez hranolu a jehlanu.....	27
Kružnice	29
Válec a kužel	31
Řez válce a kužele	34
Závěr	36
Dodatek.....	37
Literatura	41

Úvod

Deskriptivní geometrie klade na studenty nároky z hlediska prostorové představivosti. Tento problém většinou učitelé řeší buď vyrobenými geometrickými modely (tj. papírové nebo drátěné konstrukce) nebo se snaží geometrický model vytvořit „tím, co je zrovna po ruce“ (např. sešit – průmětny, tužka – přímka). Dalším nárokem je nutnost soustředění se během výkladu a správné pochopení látky. Tento problém, který se netýká jen deskriptivní geometrie, se stává závažným, např. při absenci studenta v kombinaci s nedostatkem učebních materiálů. Modelová situace – zjistit postup počítání rovnic z vypracovaných příkladů Vám nebude dělat takové těžkosti, jako zjistit postup rýsování z geometrických výkresů Vašich spolužáků, které obsahují asi „tisíc čar“. Třetím výrazným podnětem pro vznik této diplomové práce byl způsob přístupu některých studentů k deskriptivní geometrii. Ti jsou schopni, díky svým naučeným postupům, sestavit různé objekty i bez pochopení podstaty zobrazovacích metod. A právě tyto problémy se alespoň z části snažím řešit svou prací *Kurz deskriptivní geometrie v Cabri II+*.

Deskriptivní geometrie je velmi rozsáhlý obor, proto jsem se zaměřil na nejčastěji v něm užívané promítání a tím je Mongeovo promítání, neboli pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny. Jako nástroj jsem zvolil dynamický geometrický software *Cabri geometrie II+*, především pro jeho dostupnost, hardwarovou nenáročnost a snadnou ovladatelnost.

Tato práce je tedy jakousi interaktivní učebnicí deskriptivní geometrie, konkrétně Mongeova promítání, řešenou pomocí *Cabri II+*. Interaktivní proto, že příklady a ukázky zobrazení zde nejsou řešeny klasicky jako v jiných učebnicích, tj. pouze statickými obrázky, ale jsou vytvořeny v dynamickém programu *Cabri*, v němž lze pohybovat různými geometrickými objekty, různě je natáčet a obracet, případně dokreslovat další objekty, což vede k lepšímu pochopení podstaty problému u lidí s menší prostorovou představivostí.

Komu je tato učebnice (pomůcka) určena? Doufám, že využití najdou jak učitelé, tak studenti v základním kurzu deskriptivní geometrie na středních i vysokých školách.

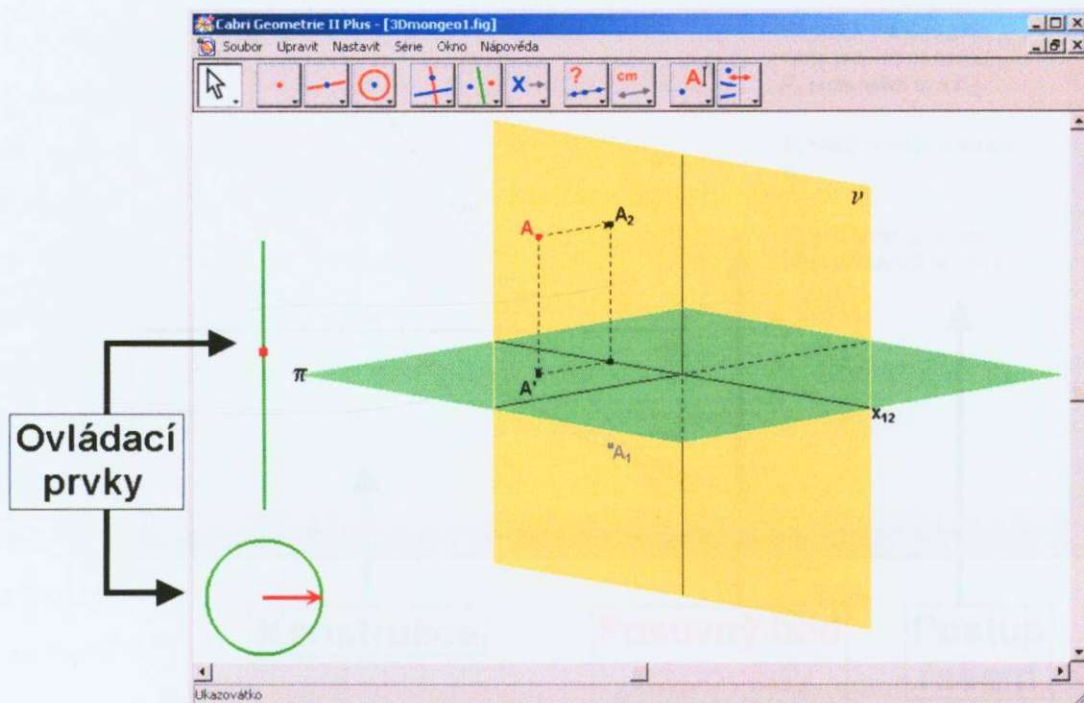
Struktura

Učebnice obsahuje psaný text podobný běžným učebnicím a obrázky, které jsou vždy řešeny pomocí Cabri. **Podržením klávesy CTRL a kliknutím myši do obrázku** se Vám tedy otevře program Cabri II+ (samozřejmě pokud jej máte v počítači správně nainstalován) s příslušným příkladem nebo 3D modelem. Tyto příklady a 3D modely jsou hlavní částí učebnice a všechny jsou uloženy ve složkách **3D modely** a **příklady** na přiloženém CD.

3D modely

Práce tedy obsahuje jakési 3D modely různých situací v Mongeově promítání (např. zobrazování bodu na průmětnu, průsečnice dvou rovin). Vše je samozřejmě vytvořené v Cabri, takže po otevření příslušného modelu v tomto programu (klávesa CTRL a kliknutí myši do obrázku) můžeme s daným modelem pohybovat pomocí ovládacích prvků, umístěných v levé části pracovní plochy tak, jak je uvedeno na *Obrázku 1*. Tj. tahem červeného bodu (popř. vektoru) po zelené úsečce (popř. kružnici).

Obrázek 1



Příklady

Příklady jsou klasickými úlohami z Mongeova promítání řešené pomocí postupné konstrukce. Obsahují:

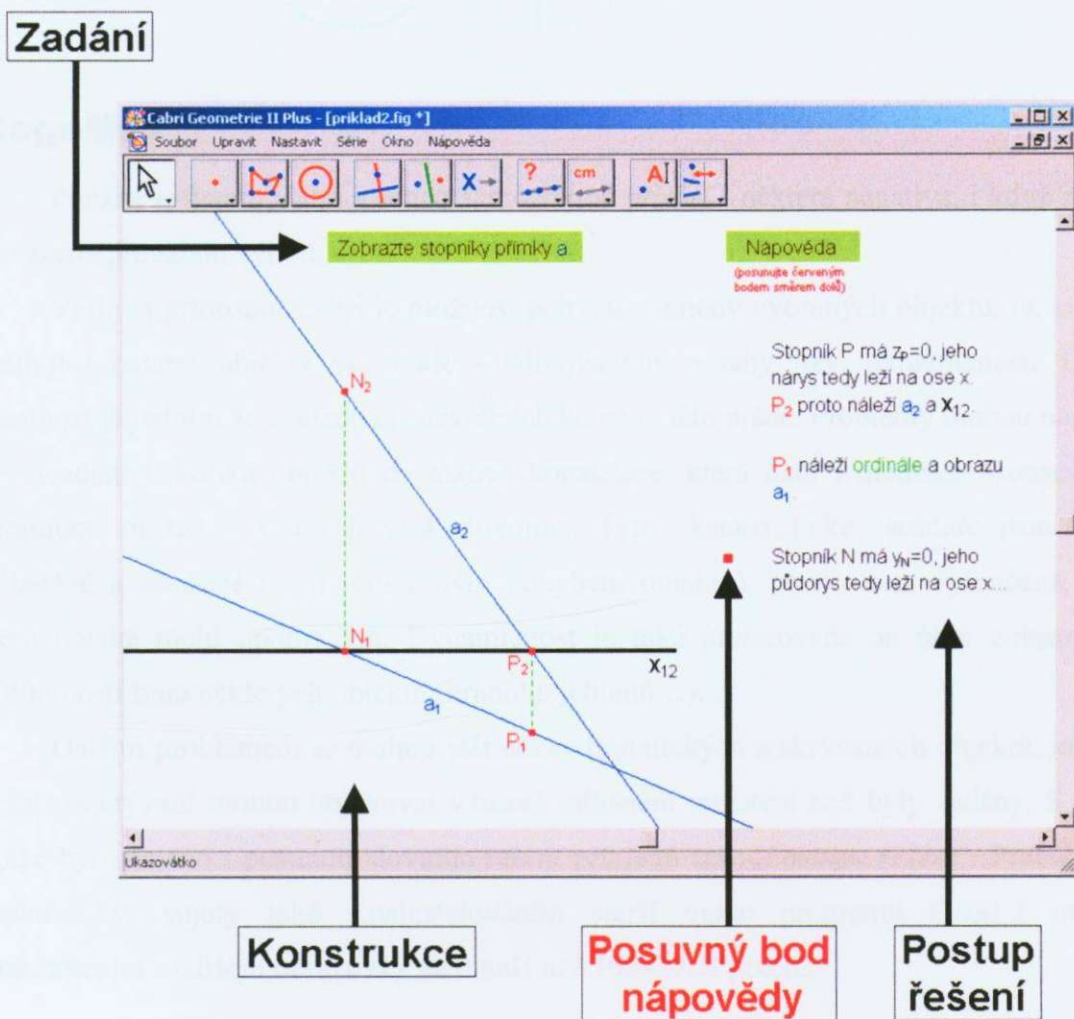
Zadání – konkrétní zadání úlohy.

Posuvný bod nápovědy – velký červený bod (základní prvek nápovědy), kterým lze posouvat nahoru a dolů – tedy postupně odkrývat a zakrývat konstrukci a postup řešení.

Konstrukce – vlastní konstruování příkladu. Na počátku je zobrazena základnice x_{12} a zadané objekty. Posunem nápovědného bodu dolů se postupně vykreslují další objekty.

Postup řešení – je slovním komentářem k zobrazované konstrukci.

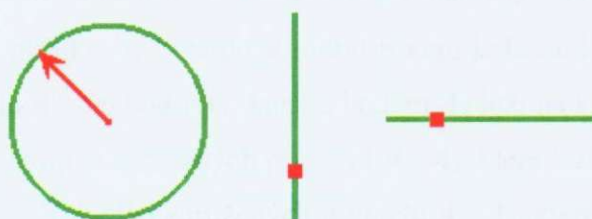
Obrázek 2



Všechny objekty konstrukce jsou řešeny barevně a ve stejných barvách jsou pro větší přehlednost a orientaci interpretovány i v postupu řešení. Některé objekty konstrukce (většinou známé ze zadání) lze také přesouvat do Vámi zvolené pozice, aniž by se porušila správnost konstrukce. Toto by také mělo být dalším výrazným přínosem této práce (díky užití Cabri geometrie) – pohybující se konstrukce neboli jediný příklad skrývajících různé varianty.

Některé příklady a 3D modely obsahují více ovládacích prvků. Všechny však mají podobu uvedenou na *Obrázku 3*.

Obrázek 3



Negativa

Použití softwaru Cabri s sebou samozřejmě přináší i některá negativa, i když jsou vyvážena převahou výhod.

Velkým přínosem Cabri je možnost pohybu a změny vybraných objektů, na které reagují i ostatní objekty ve shodě s definovanými vztahy, tzv. dynamičnost. Tato vlastnost je jedním ze základních stavebních kamenů této práce. Problémy mohou nastat při uvedení několika objektů do takové konstelace, která není z hlediska Mongeova promítání možná – Cabri ji však dovoluje. Tyto „katastrofické“ scénáře jsou zde odladěné a ošetřené (např. omezeným pohybem objektů), přesto není vyloučené, že jsem nějaké mohl opomenout. Dynamičnost je také preferována na úkor zobrazení viditelnosti hran některých objektů (hranolů, jehlanů...).

Dalším problémem se mohou stát názvy nestatických a skrývaných objektů, které se při odkrývání mohou objevovat v mírně odlišném umístění než byly zadány. S tím může být spojeno i posunutí slovního řešení příkladů tzv. „Postupu řešení“. Problémy mohou být spjaty také s nainstalováním starší verze programu Cabri 2 nebo s nastavením rozlišení obrazovky na menší než 1024x768 pixelů.

Mongeovo promítání

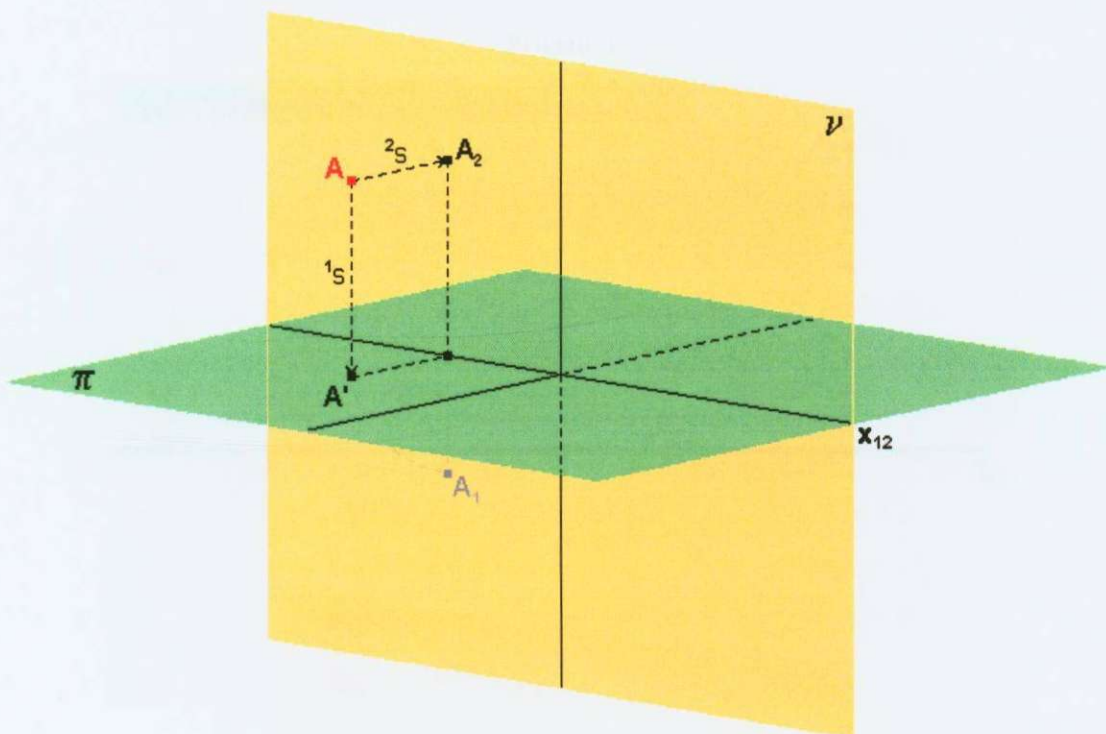
Bod v Mongeově promítání

Mongeovo promítání, též pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny (π, ν) . Bod A prostoru zobrazíme tak, že jej promítneme pravoúhle, jednak do první průmětny π (půdorysny) do bodu A' , jednak do druhé průmětny ν (nárysny) do bodu A_2 . Půdorysnu otočíme kolem osy $x \equiv \pi \cap \nu$ do nárysny, čímž nalezené průměty sdružíme. Promítací přímky $^1s, ^2s$ bodu A určují rovinu kolmou k ose x . Tato rovina je rovinou otáčení bodu A' do bodu A_1 , který s bodem A_2 leží na kolmici k ose x . Bod A se tedy zobrazuje do dvojice sdružených průměrů A_1, A_2 , které leží na kolmici k ose x .

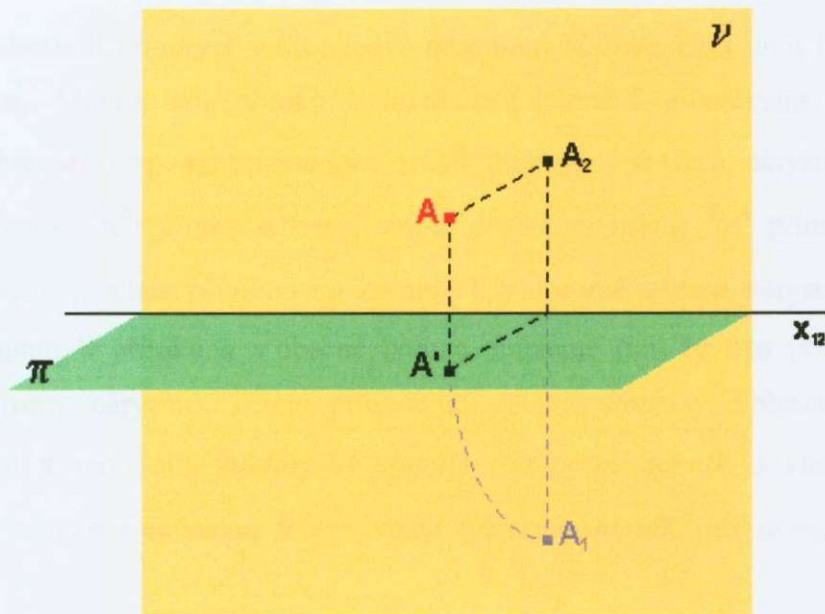
Naopak, zvolíme-li dvojici sdružených průmětů A_1, A_2 , které leží na kolmici k ose x , pak zpětně přes bod A' a promítací přímky $^1s, ^2s$ nalezneme bod A prostoru.

Průmět $x_1 \equiv x_2$ osy x nazýváme základnice (x_{12}). Kolmice k základnici nazýváme ordinálami (sdružené průměty A_1, A_2 bodu A tedy leží na ordinále).

3D model 1



3D model 2

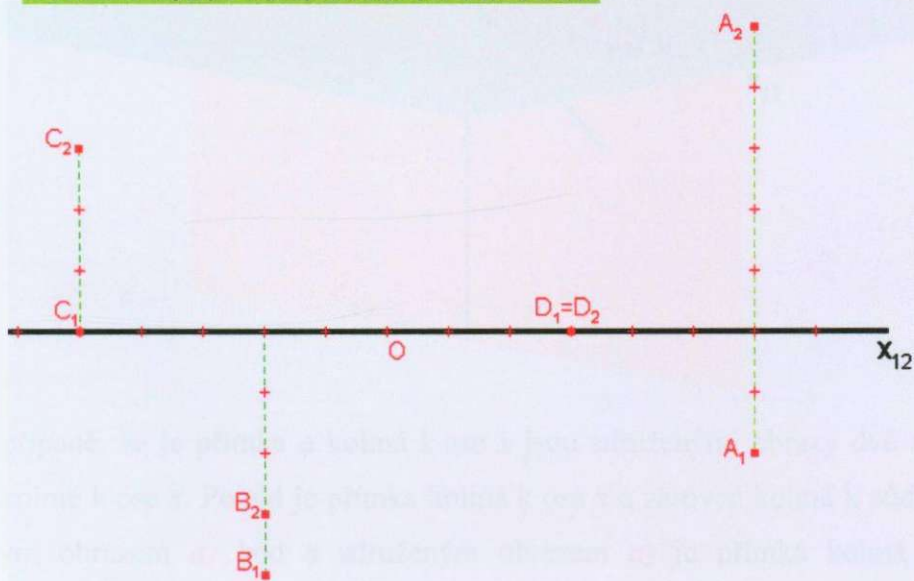


Mongeovo promítání je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů prostoru na uspořádané dvojice sdružených průmětů ležících na ordinálách průmětny.

Jak konkrétně se sestavují sdružené obrazy bodů v Mongeově promítání ukazuje *Příklad 1*.

Příklad 1

Zobrazte body $A(6,2,5)$, $B(-2,4,-3)$, $C(-5,0,3)$, $D(3,0,0)$.

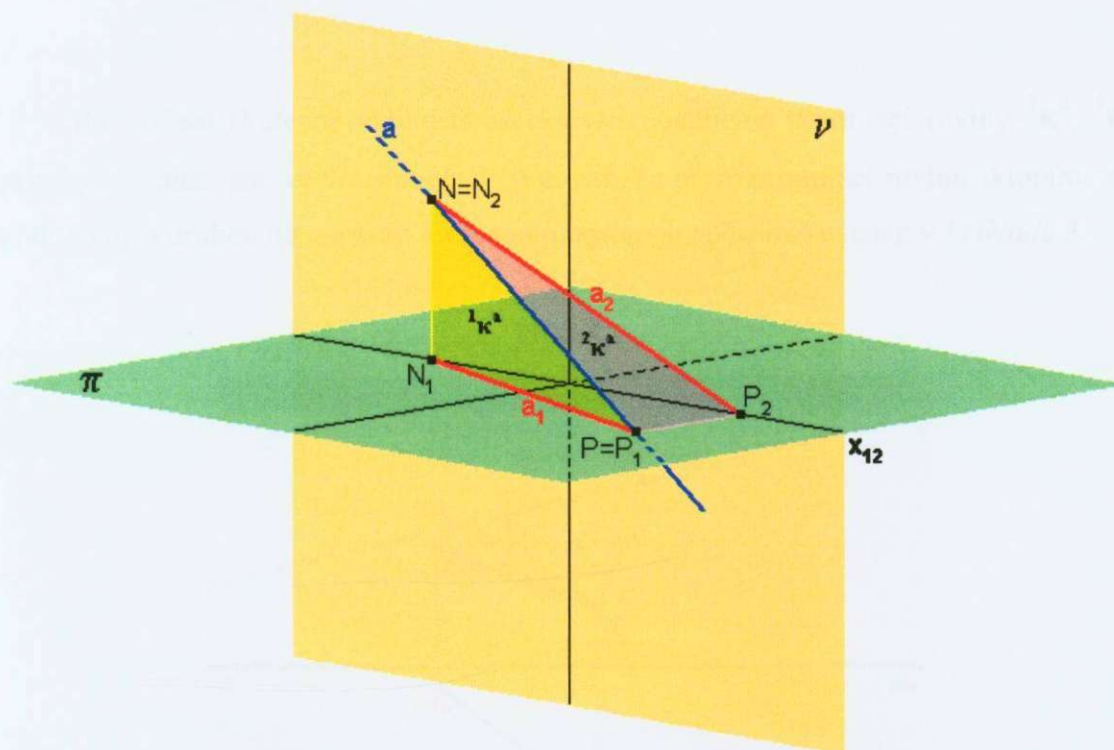


Přímka

Pro zobrazení přímky a v Mongeově promítání budeme chtít určit její sdružené obrazy a_1 , a_2 . Mějme tedy přímku a , která není kolmá k průmětnám ani k ose x . Sdružený obraz a_1 (resp. a_2) určíme jako průnik půdorysny π (resp. nárysny ν) a první promítací roviny $^1\kappa^a$ přímky a (resp. druhé promítací roviny $^2\kappa^a$ přímky a). Tato promítací rovina prochází přímkou a a je kolmá k půdorysně π (resp. nárysně ν).

Uvažujeme-li přímku a v obecné poloze, můžeme říci, že tato přímka protíná půdorysnu (resp. nárysnu). Těmito průsečíkům říkáme *stopníky*. Průsečík přímky a s půdorysnou π nazýváme *půdorysný stopník* (též *první stopník*) a značíme jej P . Průsečík přímky a s nárysnou ν nazýváme *nárysný stopník* (též *druhý stopník*) a značíme jej N .

3D model 3

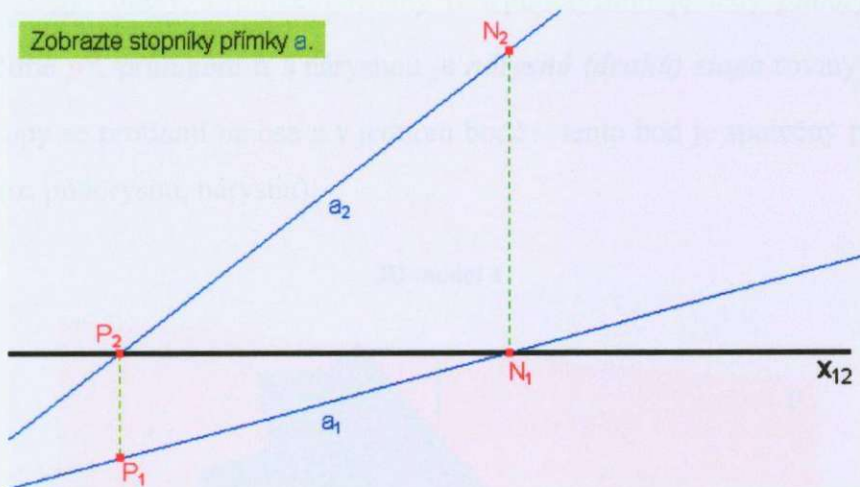


V případě, že je přímka a kolmá k ose x jsou sdruženými obrazy dvě splývající přímky kolmé k ose x . Pokud je přímka kolmá k ose x a zároveň kolmá k půdorysně je sdruženým obrazem a_1 bod a sdruženým obrazem a_2 je přímka kolmá k ose x . V opačném případě tj. a je kolmá k x a nárysně je obraz a_1 přímkou kolmou k ose x a a_2 bodem.

Jestliže máme přímku a zadanou dvěma body (např. $A(1;2;3)$, $B(3;1;1)$), není nijak těžké sestavit jejich sdružené obrazy podle *Příkladu 1*. Těmito obrazy potom vedeme přímky a_1 , a_2 , což jsou sdružené obrazy přímky a . Zobrazení stopníků této přímky řeší *Příklad 2*.

Příklad 2

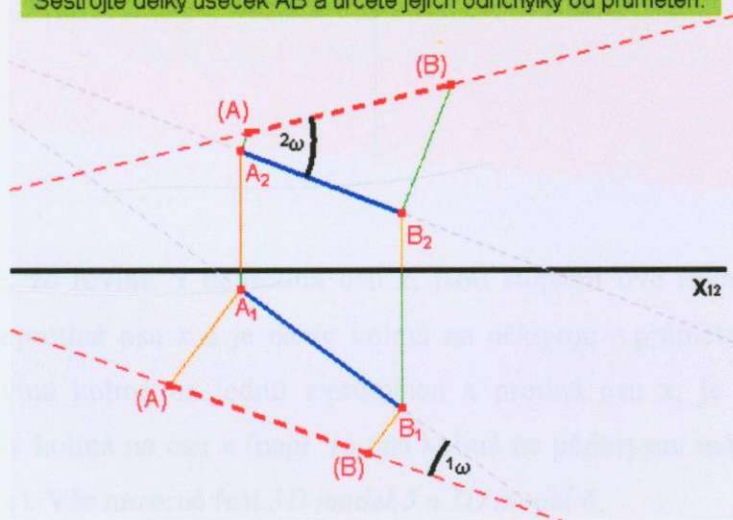
Zobrazte stopníky přímky a .



Pro určení skutečné velikosti úsečky AB použijeme promítací roviny $^1\kappa^a$, $^1\kappa^a$ přímky a zmiňované ve *3D modelu 3*. A to tak, že první promítací rovinu sklopíme do půdorysny a druhou do nárysny. Celý tento postup je podrobně uveden v *Příkladu 3*.

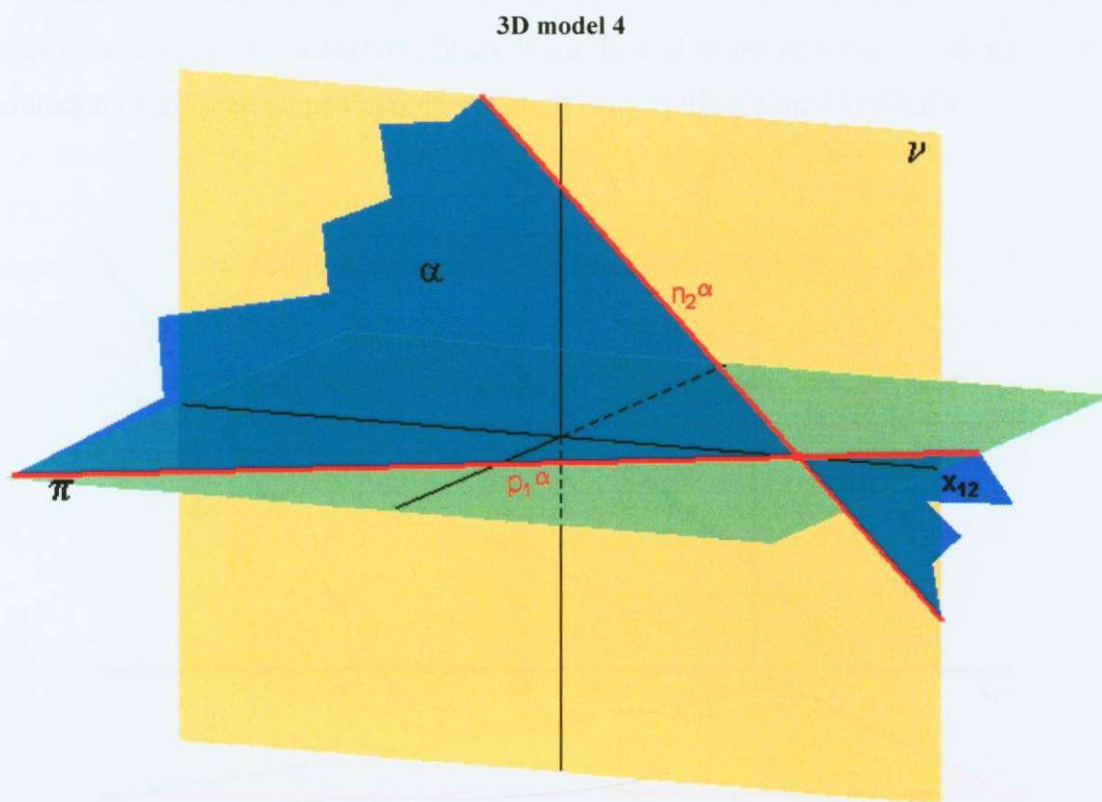
Příklad 3

Sestrojte délky úseček AB a určete jejich odchylky od průměten.



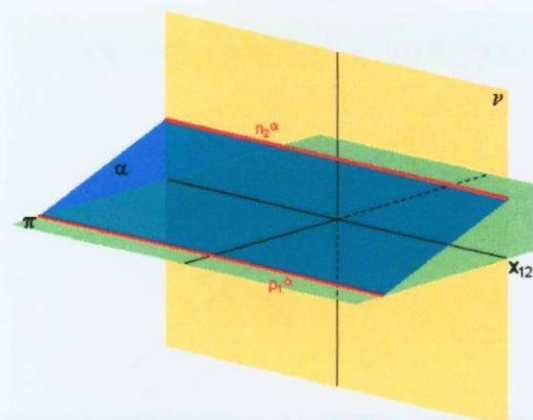
Rovina

Pro zobrazení roviny se nejdříve budeme zabývat případem, kdy rovina α protíná osu x (má s osou x jeden společný bod). V tomto případě můžeme říci, že průnikem roviny α s půdorysnou je přímka a průnikem α s nárysnou je také přímka. Tyto přímky nazýváme **stopy roviny**. Průnikem roviny α s půdorysnou je tedy **půdorysná (první) stopa** značíme p_1^α , průnikem α s nárysnou je **nárysná (druhá) stopa** roviny α značíme n_2^α . Obě stopy se protínají na ose x v jednom bodě – tento bod je společný pro všechny tři roviny (α , půdorysnu, nárysnu).

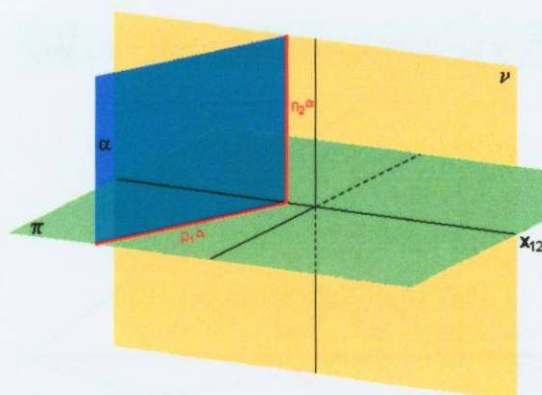


V případě, že rovina α neprotíná osu x , jsou stopami dvě rovnoběžné přímky. Když rovina neprotíná osu x a je navíc kolmá na některou z průměten má jen jednu stopu. Je-li rovina kolmá na jednu z průměten a protíná osu x , je stopa na druhé z průměten vždy kolmá na osu x (např. rovina kolmá na půdorysnu má nárysnou stopu kolmou na osu x). Vše názorně řeší 3D model 5 a 3D model 6.

3D model 5

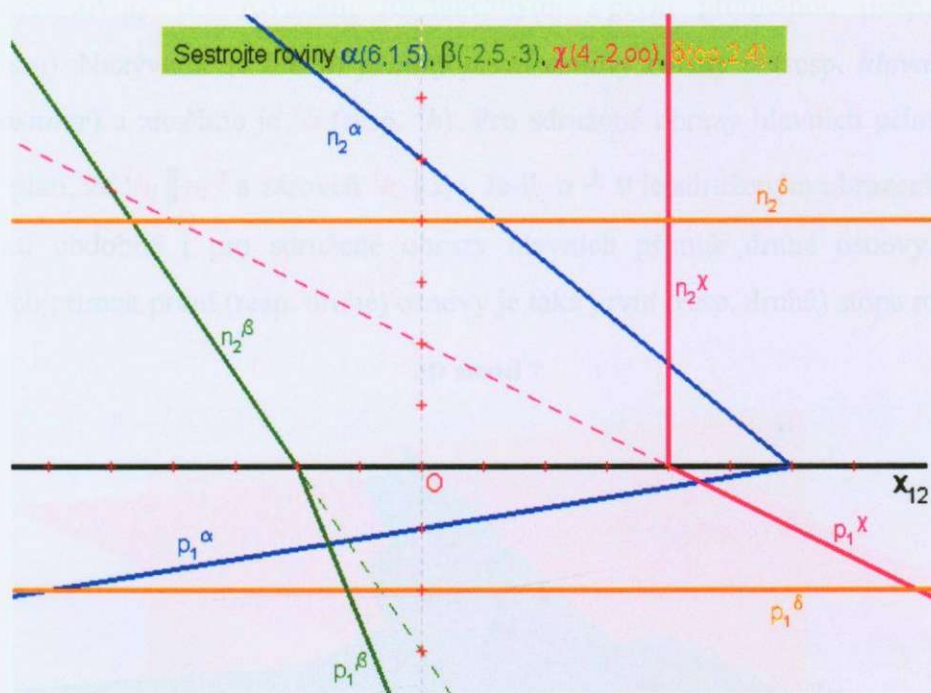


3D model 6



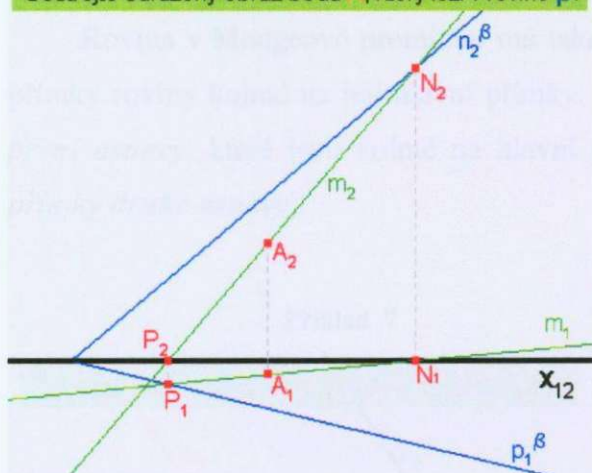
Máme-li rovinu zadanou pomocí souřadnic (např. $\alpha(6;1;5)$), zobrazíme ji podobně jako jsme zobrazovali sdružené obrazy bodů. Rozdíl je pouze v tom, že druhou a třetí souřadnici nanášíme od počátku. Pro názornější vysvětlení slouží *Příklad 4*.

Příklad 4

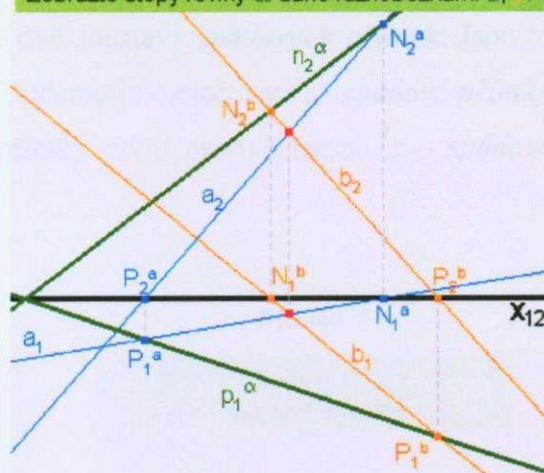


Máme-li zobrazit bod A ležící v rovině, využijeme stop roviny a libovolné přímky náležící rovině a procházející bodem A .

Příklad 5

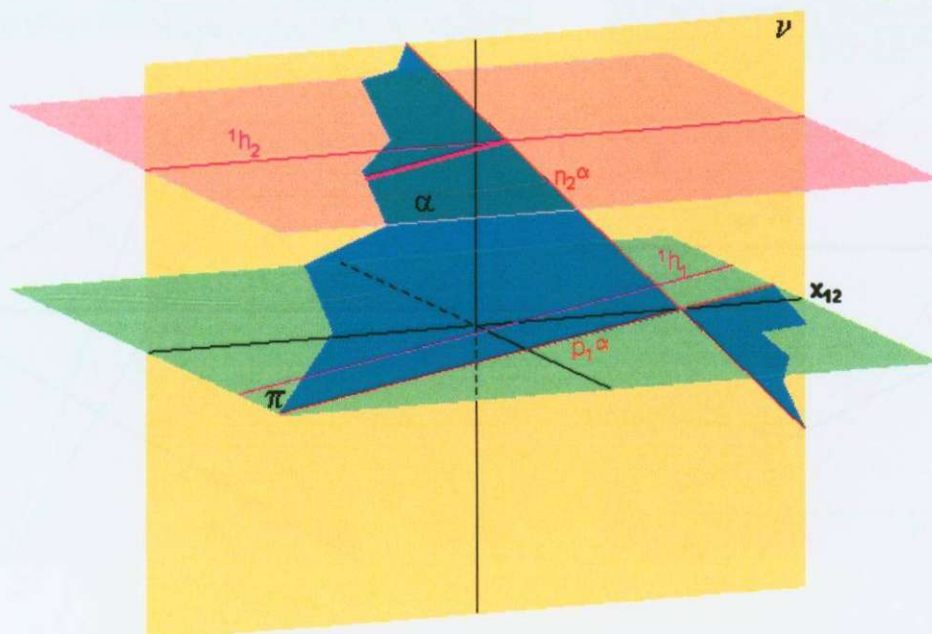
Sestrojte sdružený obraz bodu A , který leží v rovině β .

Příklad 6

Zobrazte stopy roviny α dané různoběžkami a, b .

Uvažujeme-li rovinu α , která není rovnoběžná ani s jednou průmětnou, pak tato rovina má v Mongeově promítání dvě soustavy **hlavních přímek**. Hlavní přímky jsou průsečnice roviny α s rovinami rovnoběžnými s první průmětnou (resp. druhou průmětnou). Nazýváme je **hlavní přímky první osnovy roviny α** (resp. **hlavní přímky druhé osnovy**) a značíme je 1h (resp. 2h). Pro sdružené obrazy hlavních přímek první osnovy platí, že $^1h_1 \parallel p_1^\alpha$ a zároveň $^1h_2 \parallel x_{12}$. Je-li $\alpha \perp v$ je sdruženým obrazem 1h_2 bod. Vše platí obdobně i pro sdružené obrazy hlavních přímek druhé osnovy. Jednou z hlavních přímek první (resp. druhé) osnovy je také první (resp. druhá) stopa roviny α .

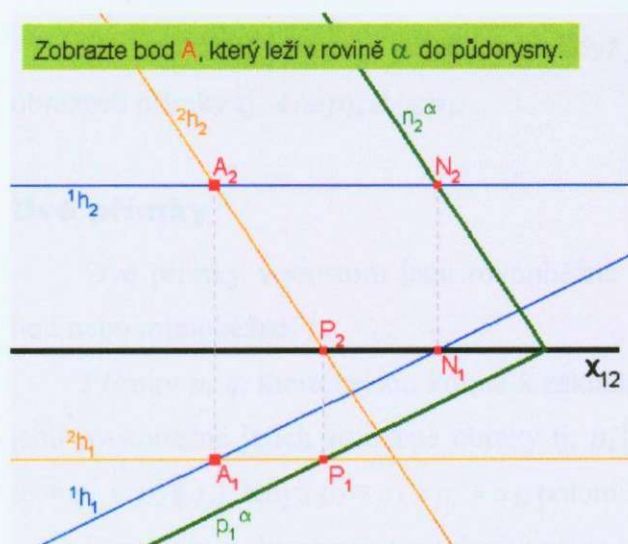
3D model 7



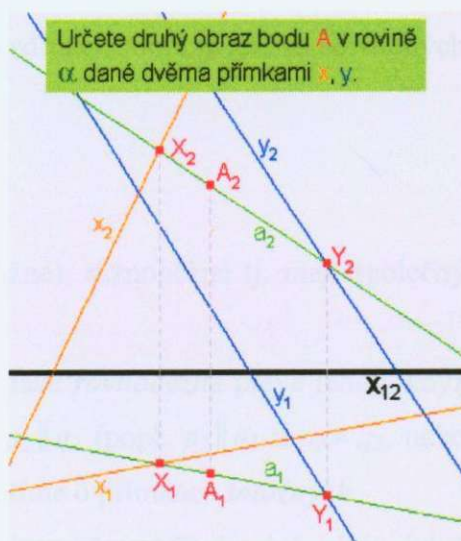
Jedno z možných použití hlavních přímek roviny v Mongeově promítání je znázorněno v *Příkladu 7*, který má stejné zadání jako *Příklad 5*.

Rovina v Mongeově promítání má také dvě soustavy **spádových přímek**. Jsou to přímky roviny kolmé na její hlavní přímky. Budeme je označovat 1s – **spádové přímky první osy**, které jsou kolmé na hlavní přímky první osy (resp. 2s – **spádové přímky druhé osy**).

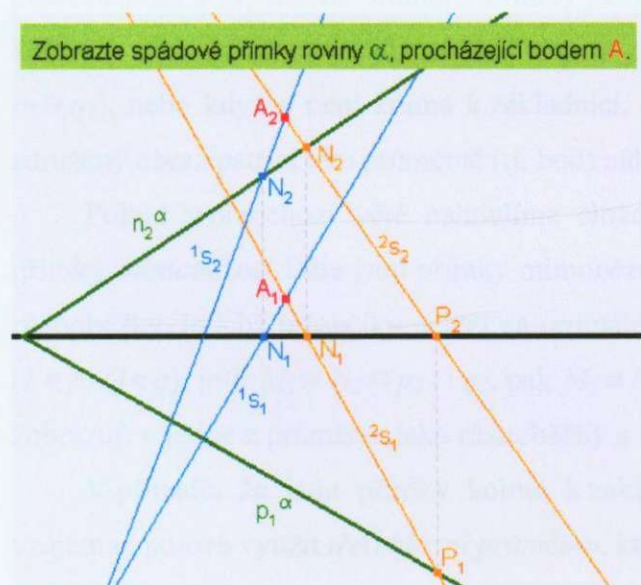
Příklad 7



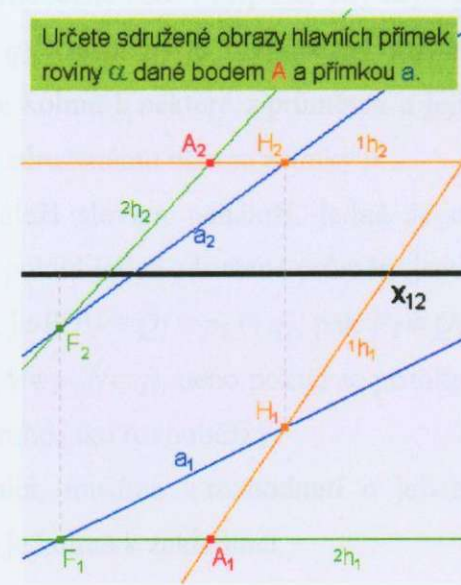
Příklad 9



Příklad 8



Příklad 10



Vzájemná poloha

Dva body

Dva body A, B jsou totožné právě tehdy, když jsou totožné jejich sdružené obrazy (průměty) tj. $A_1 \equiv B_1, A_2 \equiv B_2$.

Bod a přímka

Bod A leží na přímce p právě tehdy, když jeho sdružené obrazy leží na sdružených obrazech přímky tj. $A_1 \in p_1, A_2 \in p_2$.

Dvě přímky

Dvě přímky v prostoru jsou rovnoběžné (totožné), různoběžné tj. mají společný bod nebo mimoběžné.

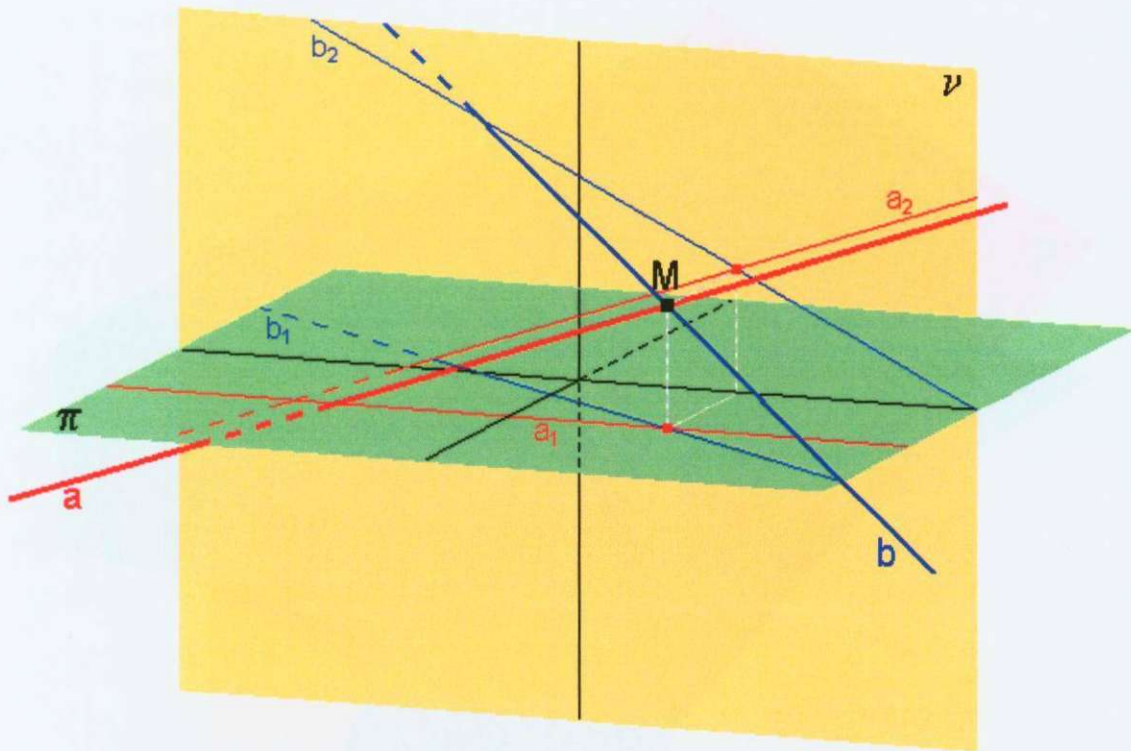
Přímky p, q , které nejsou kolmé k základnici, jsou **rovnoběžné** právě tehdy, když jsou rovnoběžné jejich sdružené obrazy tj. $p_1 \parallel q_1, p_2 \parallel q_2$ (popř. $p_1 \parallel q_1$ a $p_2 \equiv q_2$, nebo $p_1 \equiv q_1$ a $p_2 \parallel q_2$). Když $p_1 \equiv q_1$ a $p_2 \equiv q_2$, potom hovoříme o přímkách **totožných**.

Přímky p, q , které nejsou kolmé k základnici, jsou **různoběžné** právě tehdy, když jejich sdružené obrazy jsou různoběžné tj. p_1 různoběžný s q_1 a p_2 s q_2 a zároveň jejich průsečíky M_1 a M_2 leží na ordinále. Přímky jsou různoběžné také v případě, kdy nejsou kolmé k základnici, p_1 je různoběžný s q_1 a $p_2 \equiv q_2$, (resp. p_2 je různoběžný s q_2 a $p_1 \equiv q_1$), nebo když p není kolmá k základnici, q je kolmá k některé z průměten a její sdružený obraz patřící této průmětně (tj. bod) náleží sdruženému obrazu přímky p .

Pokud v předchozí větě nahradíme slovo náleží slovem nenáleží, jedná se o přímky **mimoběžné**. Dále jsou přímky mimoběžné, pokud jejich sdružené průměty jsou různoběžky, jejichž průsečíky neleží na ordinále tj. je-li $P_1 \equiv Q_1 \equiv p_1 \cap q_1$, pak $P_2 \neq Q_2$ ($P \in p, Q \in q$), je-li $M_2 \equiv N_2 \equiv p_2 \cap q_2$, pak $M_1 \neq N_1$ ($M \in p, N \in q$), nebo pokud se přímky zobrazují v jedné z průměten jako různoběžky a v druhé jako rovnoběžky.

V případě, že jsou přímky kolmé k základnici, musíme k rozhodnutí o jejich vzájemné poloze využít *třetí hlavní průmětnu*, která je kolmá k základnici.

3D model 8



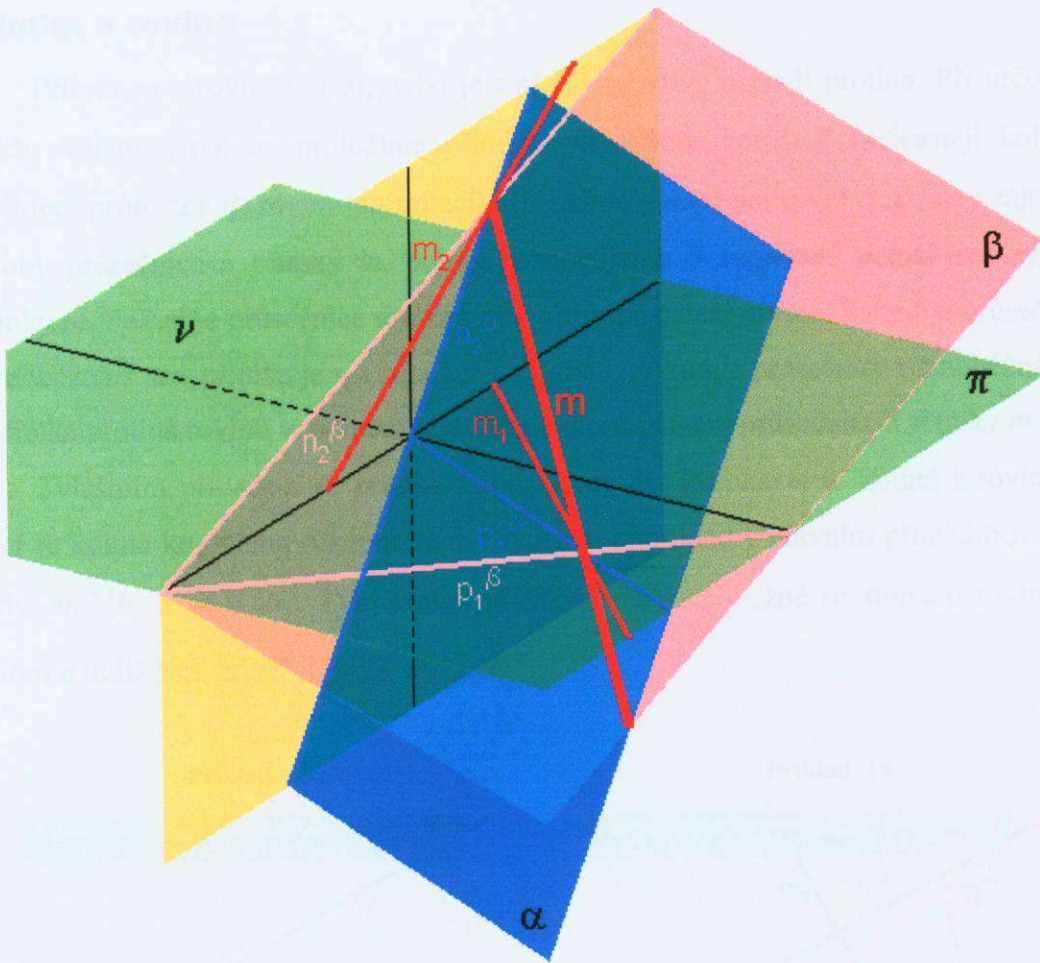
Dvě roviny

Dvě roviny jsou rovnoběžné (totožné) nebo různoběžné tj. mají společnou přímku – průsečnici.

Roviny α , β , které nejsou rovnoběžné se základnicí, jsou **rovnoběžné** právě tehdy, když jejich sdružené průměty souhlasných stop jsou rovnoběžné tj. $p_1^\alpha \parallel p_1^\beta$, $n_2^\alpha \parallel n_2^\beta$ a nejsou rovnoběžné se základnicí. Příklad, kdy roviny (tj. i jejich stopy) jsou rovnoběžné se základnicí, bychom museli opět řešit užitím *třetí hlavní průmětny*.

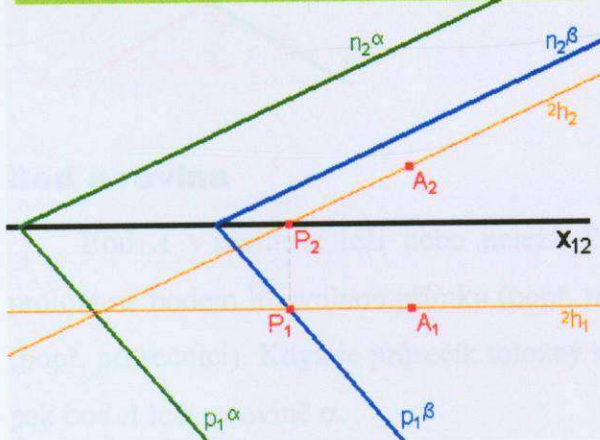
Pokud nejsou dvě různé roviny rovnoběžné, můžeme říci, že jsou **různoběžné**. Zaměříme se na hledání jejich průsečnice, tedy přímky náležící oběma rovinám. Případy různoběžných rovin jsou řešeny v *Příkladu 12*. V tomto příkladu však nenastavíte stopy rovin tak, aby byly rovnoběžné, ač by jste o tom byli přesvědčeni. Proto si některé speciální případy ještě popíšeme. Např. jsou-li druhé stopy rovnoběžné a první stopy jsou různoběžky, potom druhý sdružený obraz průsečnice bude rovnoběžný s druhými stopami a první obraz bude rovnoběžný se základnicí a bude procházet průsečíkem prvních stop. Jsou-li druhé stopy navíc kolmé k základnici, první obraz bude vyjádřen pouze bodem totožným s průsečíkem prvních stop.

3D model 9



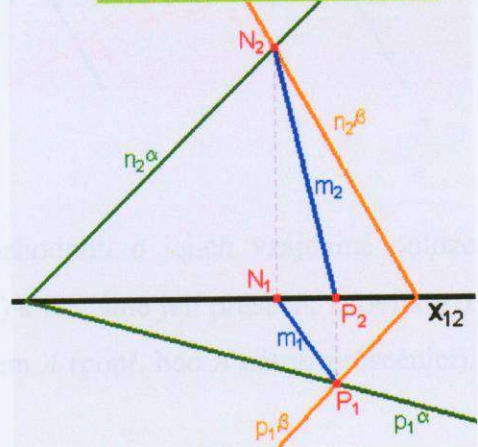
Příklad 11

Bodem A proložte rovinu β rovnoběžnou s rovinou α .



Příklad 12

Zobrazte průsečnici rovin α , β .

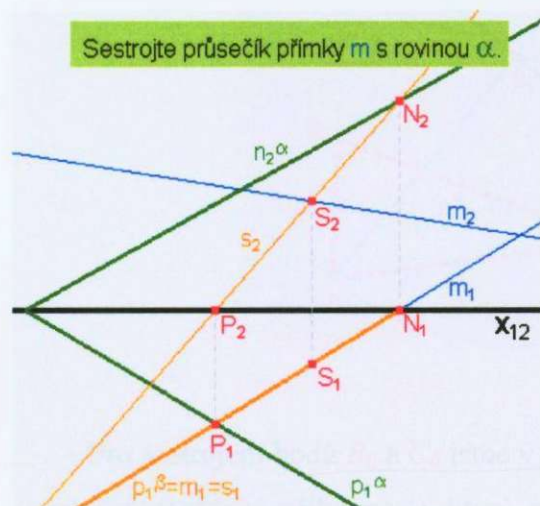


Přímka a rovina

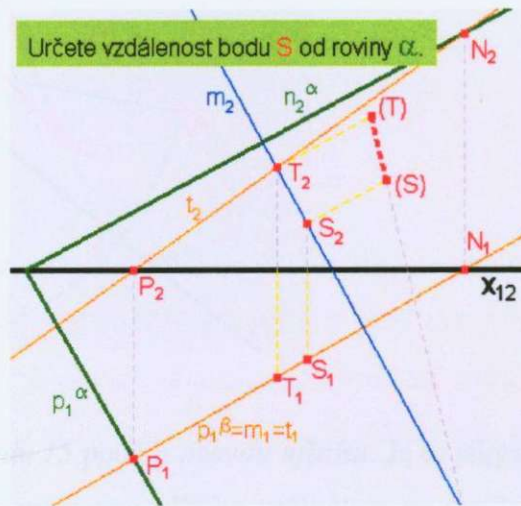
Přímka m v rovině α leží, nebo je s ní rovnoběžná, nebo ji protíná. Při určování jejich vzájemné polohy proložíme přímkou libovolnou rovinu β (nejčastěji kolmou k některé průmětně tj. rovinu promítací) a hledáme průsečnici rovin α, β . Ze vzájemné polohy průsečnice a přímky m , potom rozhodujeme o vzájemné poloze roviny α a přímky m . Pokud je průsečnice totožná s m – přímka náleží rovině. Pokud je průsečnice rovnoběžná s m – přímka je rovnoběžná s rovinou. Pokud je průsečnice různoběžná s m – přímka protíná rovinu v jediném bodě, daném průsečíkem průsečnice a přímky m .

Zvláštním případem je přímka kolmá k rovině. Přímka m je kolmá k rovině α , když je kolmá ke dvěma různoběžkám roviny tj. například k hlavním přímkám roviny. Tedy $m_1 \perp h_1$ a $m_2 \perp h_2$. Tyto hlavní přímky jsou rovnoběžné se stopami roviny α , můžeme tudíž říci, že $m_1 \perp p_1^\alpha$ a $m_2 \perp n_2^\alpha$.

Příklad 13



Příklad 14



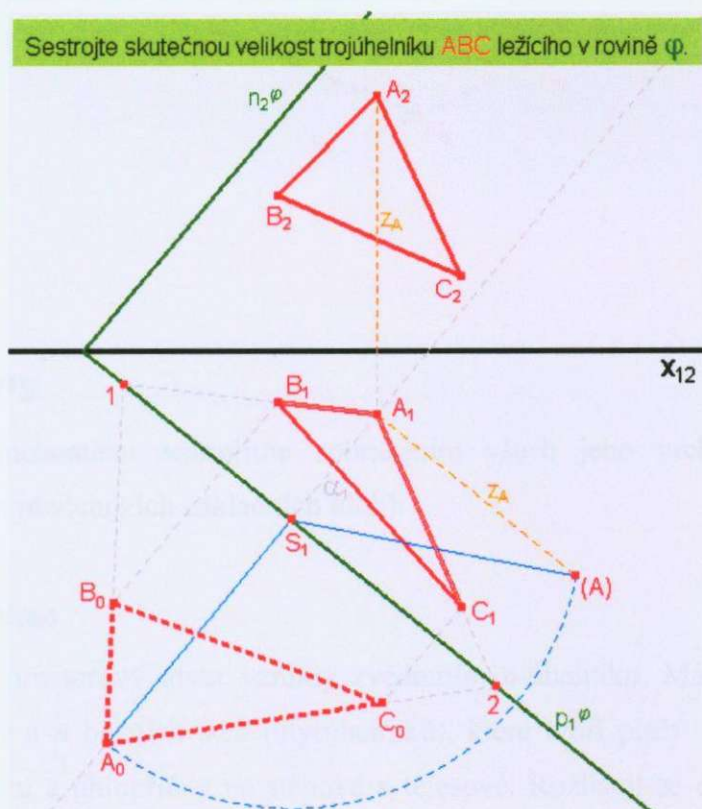
Bod a rovina

Bod A v rovině α leží nebo neleží. Pro rozhodnutí o jejich vzájemné poloze proložíme bodem libovolnou přímkou (popř. rovinu) a hledáme její průsečík s rovinou α (popř. průsečnici). Když je průsečík totožný s bodem A (popř. bod A náleží průsečnici), pak bod A leží v rovině α .

Otáčení a osová afinita

Obecnou rovinu otáčíme buď přímo do průmětny, nebo do roviny rovnoběžné s některou průmětnou. Otáčení se užívá například pro určení skutečné vzdálenosti obrazce ležícího v obecné rovině jak ukazuje *Příklad 15* nebo pro nalezení sdružených průmětů daného rovinného útvaru.

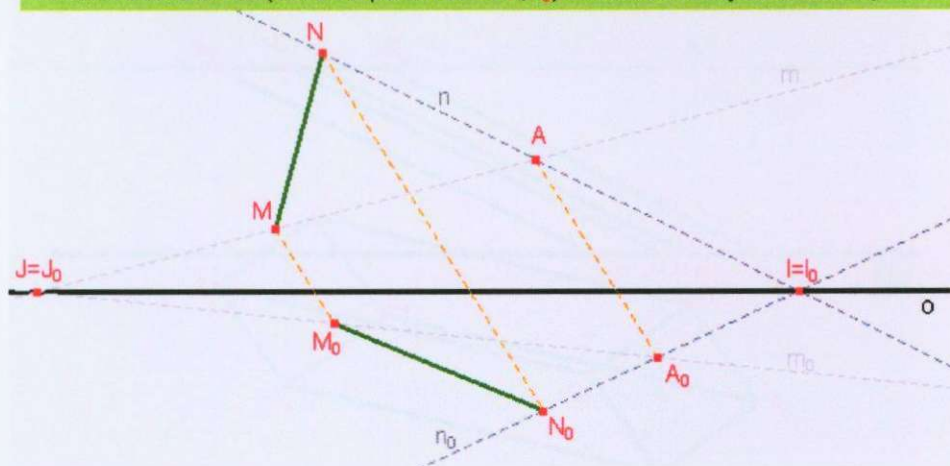
Příklad 15



Pro sestrojení bodů B_0 a C_0 jsme v *Příkladu 15* použili **osovou afinitu**. Je to jakýsi vztah (geometrická příbuznost), který existuje mezi pravoúhlým průmětem rovinného útvaru a útvarem otočeným. Osová afinita $A(o, A, A')$ je určena osou o a dvojicí odpovídajících si bodů A, A' . Mezi pravoúhlými průměty A_I, B_I, C_I bodů roviny φ do průmětny a jejich otočenými obrazy A_0, B_0, C_0 existuje osová afinita. Osou afinity je stopa p^φ roviny φ a směr afinity je kolmý k ose p^φ - pravoúhlá afinita. Bod I je stopníkem přímky AB . Je samodružným bodem při otáčení této přímky kolem osy afinity p^φ do půdorysný. Prochází jím tedy i přímka A_0B_0 . Více viz. *Příklad 16*.

Příklad 16

Je dána osová afinita (osou o a párem bodů A, A_0). Určete sdružený obraz úsečky MN .



Mnohostěny

Průmět mnohostěnu sestojíme zobrazením všech jeho vrcholů a hran (tj. kombinací všech předchozích základních úloh).

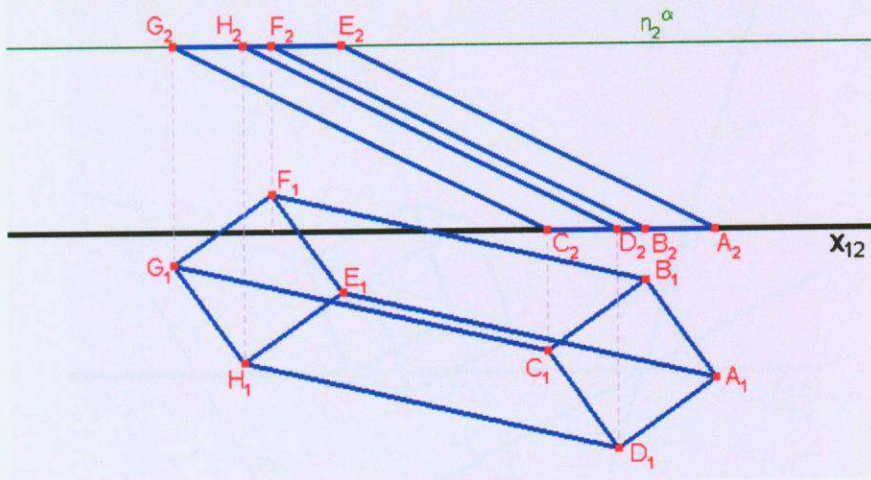
Hranol a jehlan

Hranol je prostorový útvar vzniklý zvednutím n -úhelníku. Má dvě rovnoběžné shodné podstavy a n bočních stěn (čtyřúhelníků), které tvoří plášť. Hrany se dělí na podstavné a boční a úhlopříčky na stěnové a tělesové. Rozlišují se dva typy hranolů: *kolmé* (stěna je vůči podstavě kolmá) a *kosé* (stěna není vůči podstavě kolmá). Hrany *pravidelného* hranolu jsou kolmé k podstavě pravidelného n -úhelníku. Výška hranolu je vzdálenost obou podstav.

Jehlan je prostorový útvar, který má jednu podstavu, jeden hlavní vrchol a n bočních stěn (trojúhelníků). Hrany se opět dělí na podstavné a boční. Výška jehlanu je vzdálenost podstavy od vrcholu. Rozlišujeme jehlany *kolmé* (výška je vůči podstavě kolmá) a *kosé*. O pravidelném jehlanu mluvíme v případě, kdy podstavou je pravidelný n -úhelník a boční stěny jsou rovnoramenné trojúhelníky, jejichž základnami jsou podstavné hrany jehlanu.

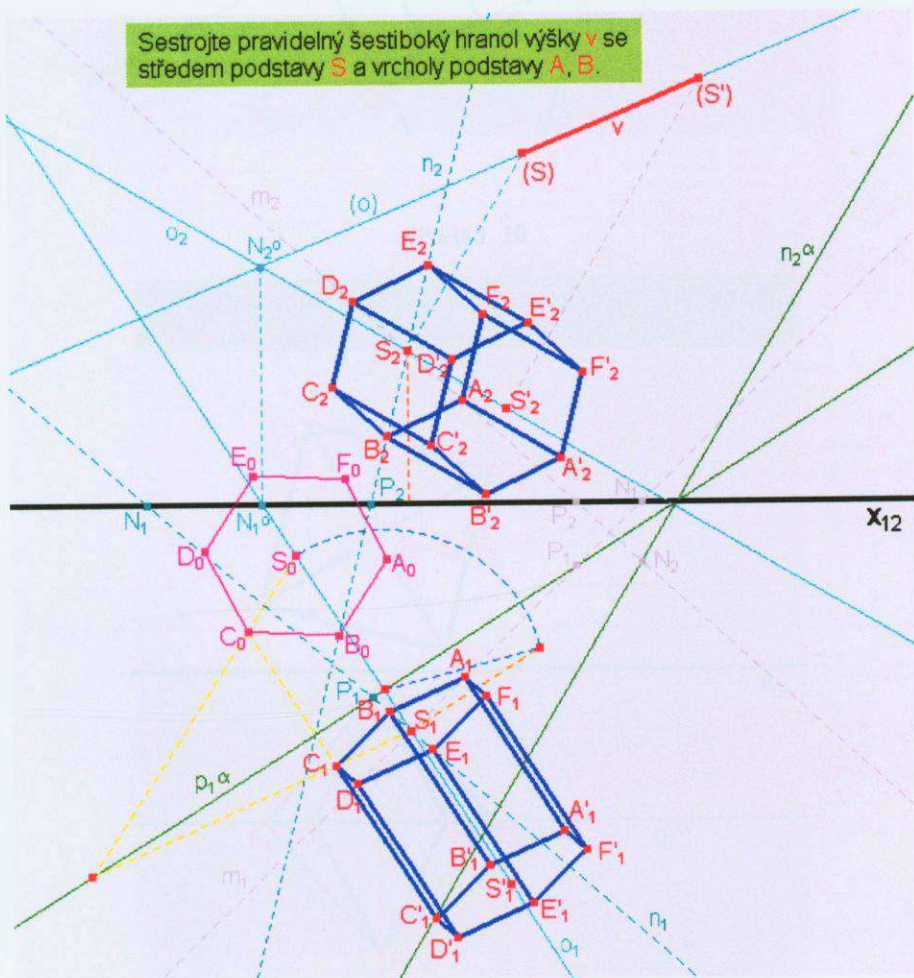
Příklad 17

Zobrazte kosý hranol $ABCDEFGH$ se čtvercovou podstavou $ABCD$ v půdorysně.



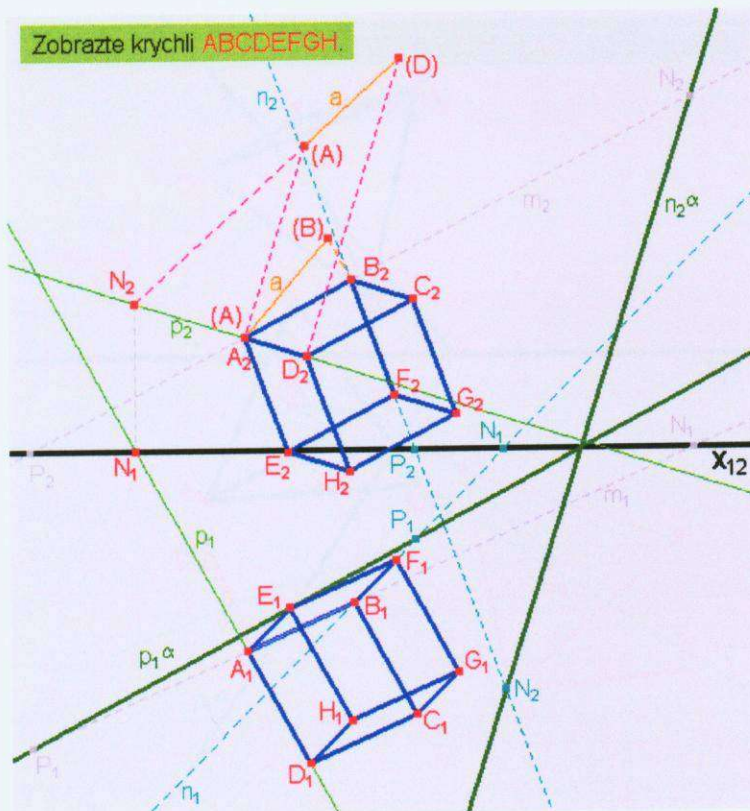
Příklad 18

Sestrojte pravidelný šestiboký hranol výšky v se středem podstavy S a vrcholy podstavy A, B .



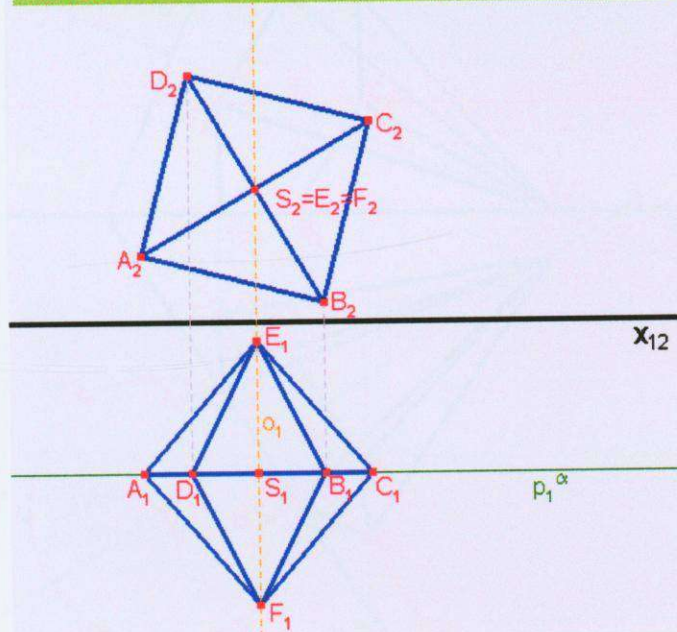
Příklad 19

Zobrazte krychli **ABCDEFGH**.



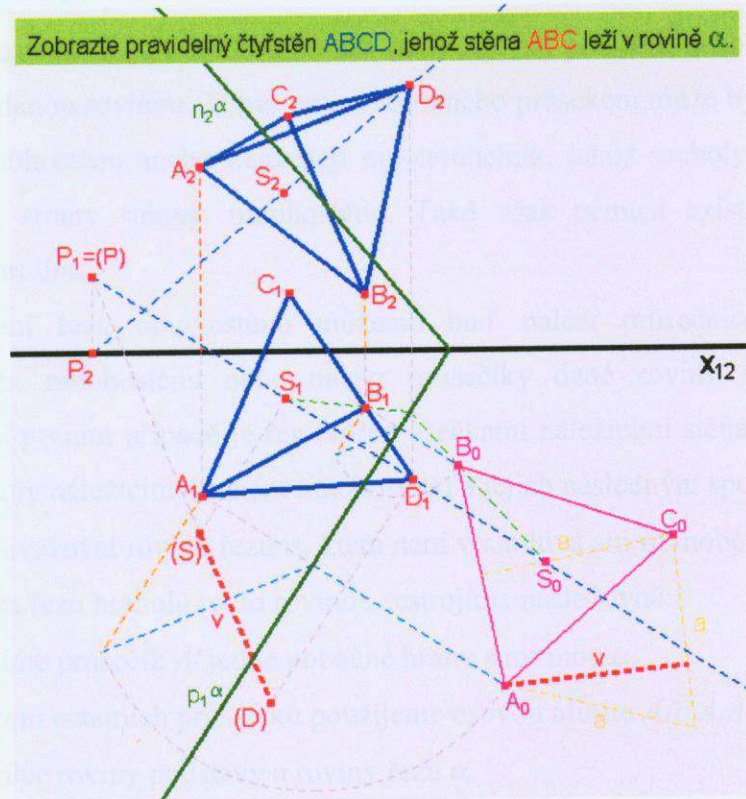
Příklad 20

Sestrojte pravidelný osmistěn **ABCDEFG**, jehož dvě úhlopříčky **AC**, **BD** leží v rovině α rovnoběžné s nárysou.



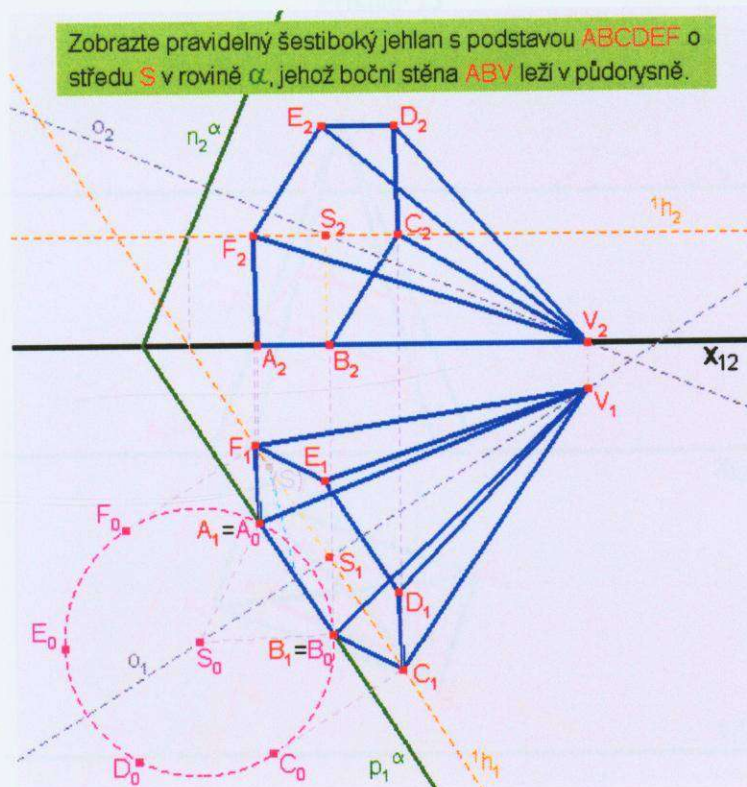
Příklad 21

Zobrazte pravidelný čtyřstěn $ABCD$, jehož stěna ABC leží v rovině α .



Příklad 22

Zobrazte pravidelný šestiboký jehlan s podstavou $ABCDEF$ o středu S v rovině α , jehož boční stěna ABV leží v půdorysně.



Řez hranolu a jehlanu

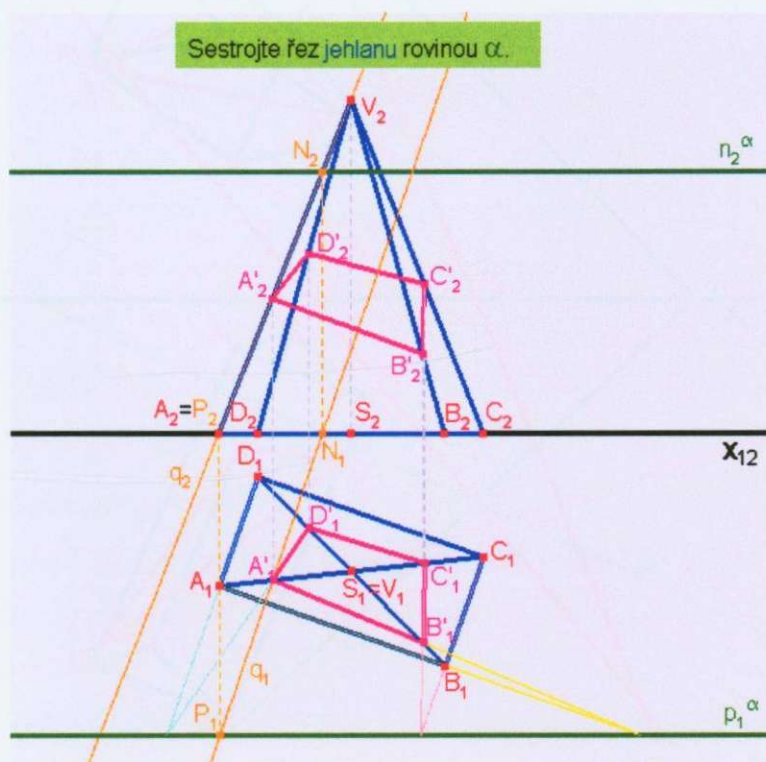
Při zobrazování řezu mnohostěnu nás bude zajímat průsečík nebo průsek daného mnohostěnu s danou rovinou. Tímto průsečíkem nebo průsekem může být vrchol, hrana nebo stěna mnohostěnu anebo nejčastěji mnohoúhelník, jehož vrcholy náležejí hranám mnohostěnu a strany stěnám mnohostěnu. Také však nemusí existovat tj. rovina mnohostěn neprotíná.

K vyšetření řezu mnohostěnu můžeme buď nalézt průsečnice dané roviny s rovinami stěn mnohostěnu nebo nalézt průsečíky dané roviny a přímek hran mnohostěnu. V prvním případě je řez tvořen úsečkami náležícími stěnám mnohostěnu, v druhém vrcholy náležícími hranám mnohostěnu a jejich následným spojením.

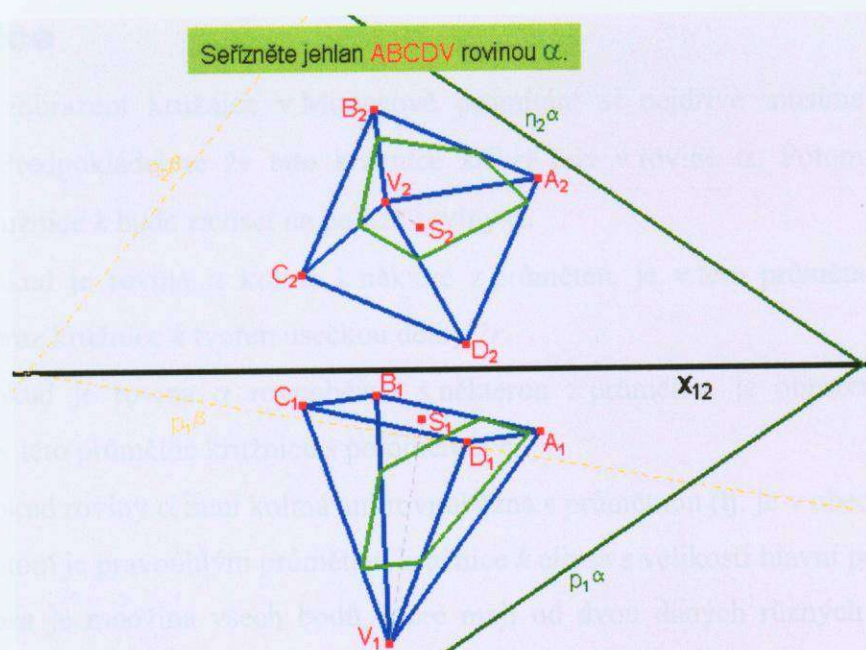
Budeme uvažovat rovinu řezu α , která není vrcholová ani rovnoběžná s podstavou hranolu. Průmět řezu hranolu touto rovinou sestrojíme následovně:

1. Sestrojíme průsečík A' jedné pobočné hrany s rovinou α .
2. Pro určení ostatních průsečíků použijeme osovou afinitu $A(o, A, A')$, kde osa o je průsečnice roviny podstavy a roviny řezu α .

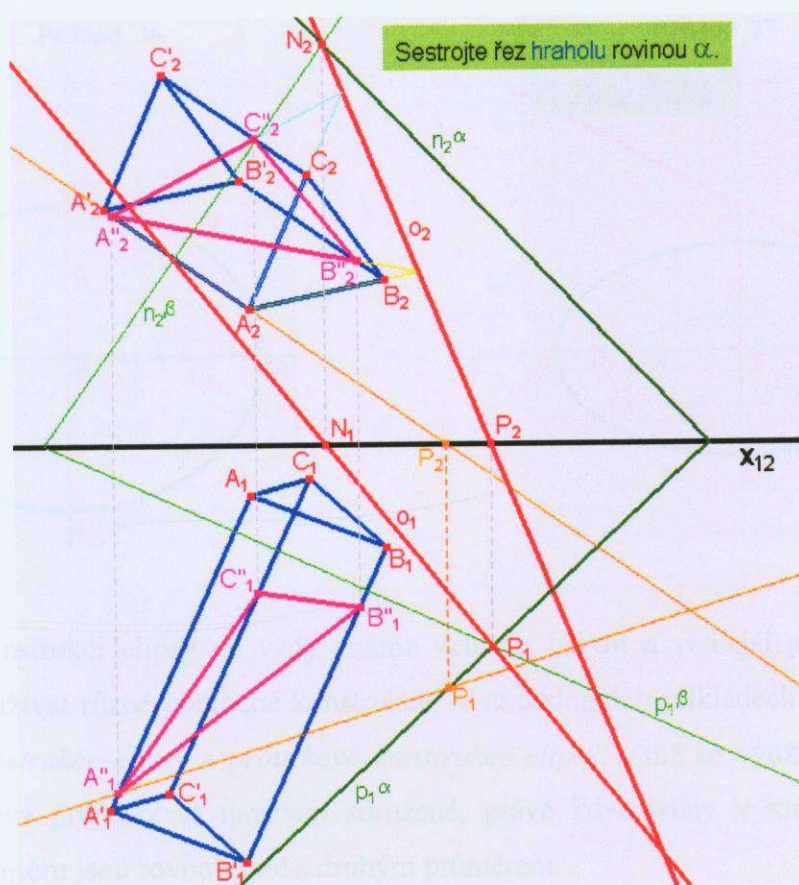
Příklad 23



Příklad 24



Příklad 25



Kružnice

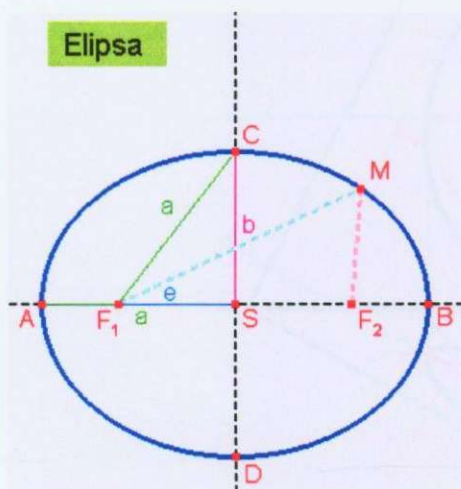
Při zobrazení kružnice v Mongeově promítání si nejdříve musíme odlišit tři případy. Předpokládejme že tato kružnice $k(S;r)$ leží v rovině α . Potom pravoúhlý průmět kružnice k bude záviset na poloze roviny α .

1. Pokud je rovina α kolmá k některé z průměten, je v této průmětně sdružený obraz kružnice k tvořen úsečkou délky $2r$.
2. Pokud je rovina α rovnoběžná s některou z průměten, je obrazem kružnice k v této průmětně kružnice s poloměrem r .
3. Pokud roviny α není kolmá ani rovnoběžná s průmětnou (tj. je v obecné poloze), potom je pravoúhlým průmětem kružnice k elipsa s velikostí hlavní poloosy r .

Elipsa je množina všech bodů, které mají od dvou daných různých bodů stálý součet vzdáleností větší než vzdálenost daných bodů.

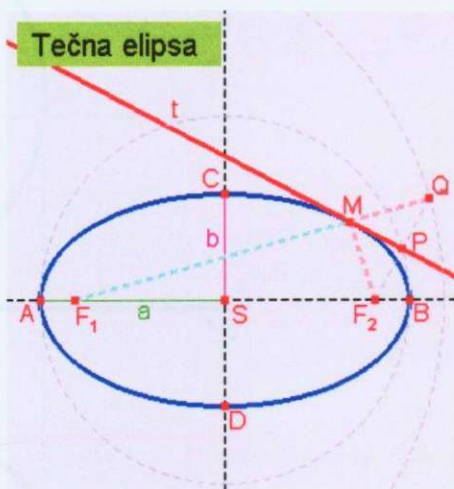
Příklad 26

Elipsa



Příklad 27

Tečna elipsa



Při konstrukci elipsy ne vždy známe velikost hlavní a vedlejší poloosy. Proto budeme využívat různé pomocné konstrukce. V následujících příkladech jsou uvedeny *Rytzova konstrukce elipsy* a *proužková konstrukce elipsy*, v níž se využívají *sdružené průměry*. Dva průměry se nazývají sdružené, právě když tečny v krajních bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem.

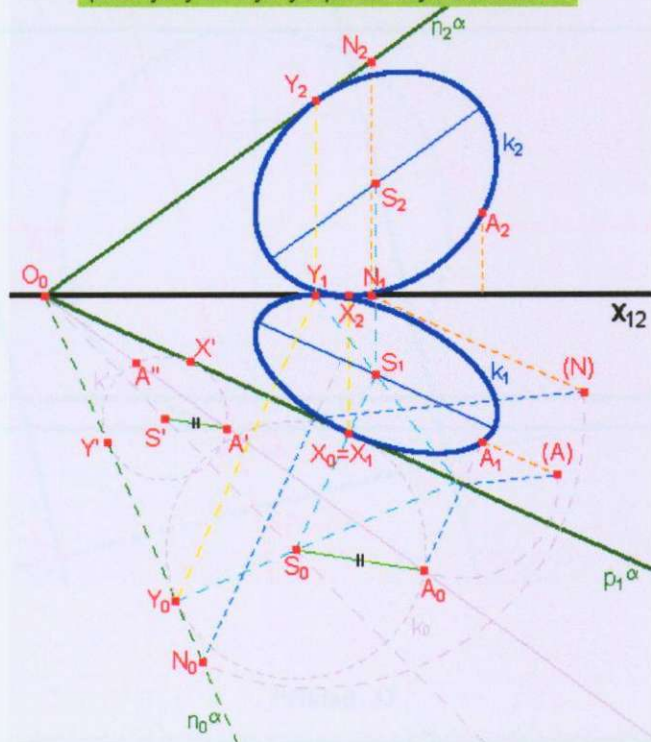


100



Příklad 31

Zobrazte kružnici ležící v rovině α , dotýkající se půdorysny a nárysny a procházející bodem A.



Válec a kužel

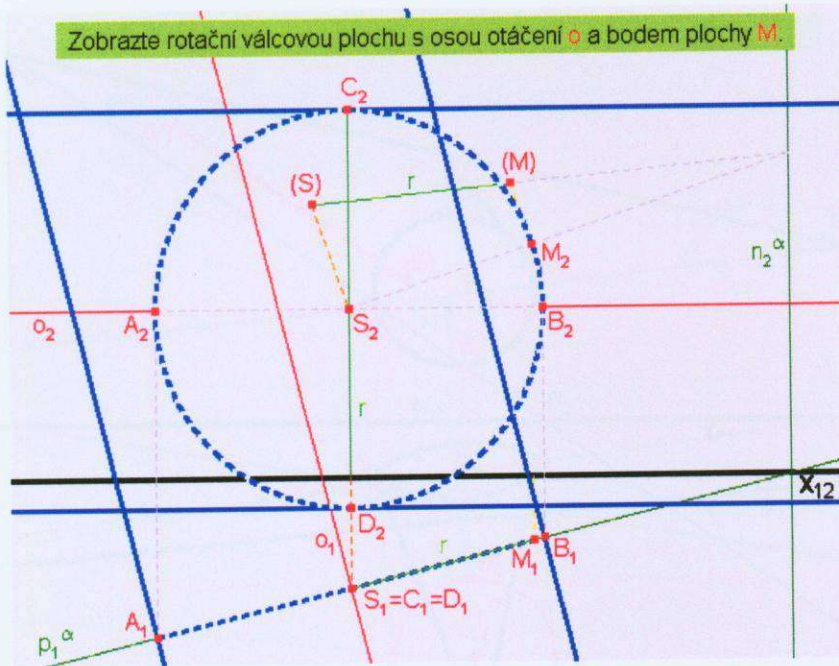
Rotační válec je těleso, které vznikne otáčením (rotací) obdélníku kolem přímky procházející jeho stranou nebo střední příčkou. Při zobrazování válce v Mongeově promítání budeme vycházet z již řešených konstrukcí. Podstava válce – kružnice je řešena v předchozí kapitole. Pro výšku válce použijte úlohu o přímce kolmé k dané rovině, v našem případě k rovině podstavy.

Rotační kuželová plocha vznikne rotací přímky kolem přímky s ní různoběžné (která s ní svírá ostrý úhel). *Rotační kužel* je část prostoru, která je ohraničena částí rotační kuželové plochy přilehlou ke kružnici plochy s rovinou této kružnice. Kužel se v Mongeově promítání řeší podobně jako válec. Rozdíl může nastat v případě, kdy máme zadán bod nebo přímku (stranu) pláště.

Dále se můžeme setkat s *kosým* válcem a kuželem (jejich výška není kolmá k podstavě) nebo *komolým* kuželem (je seříznutý rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy).

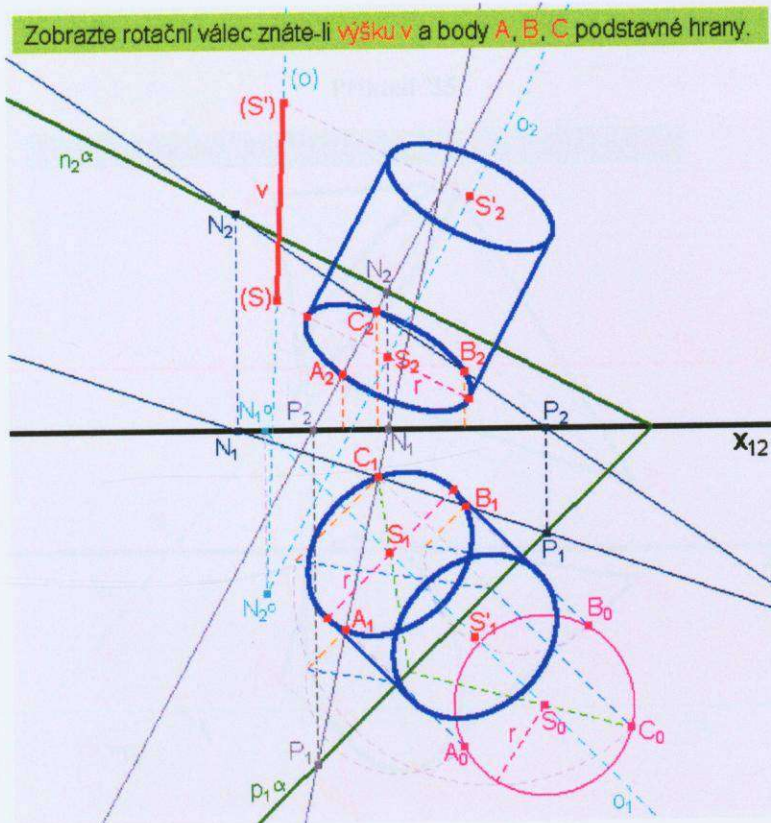
Příklad 32

Zobrazte rotační válcovou plochu s osou otáčení o a bodem plochy M .



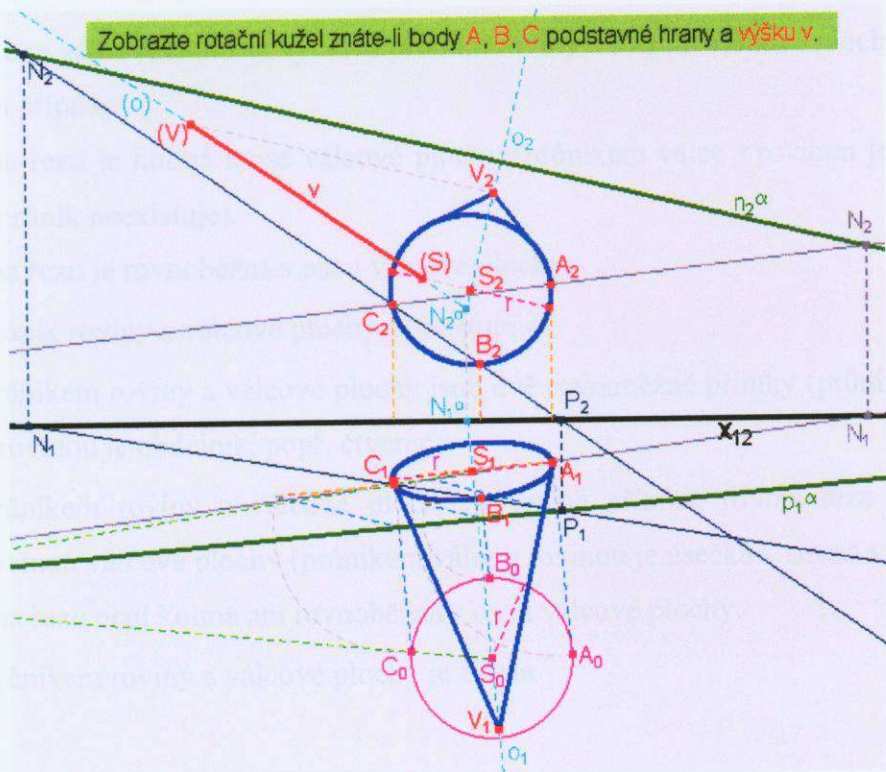
Příklad 33

Zobrazte rotační válec znáte-li výšku v a body A, B, C podstavné hrany.



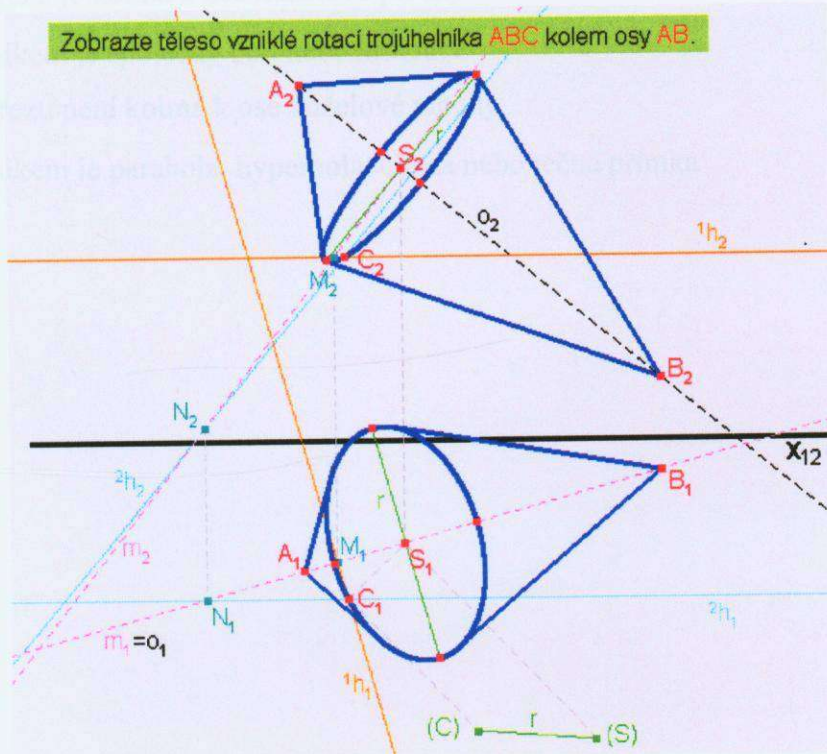
Příklad 34

Zobrazte rotační kužel znáte-li body A, B, C podstavné hrany a výšku v .



Příklad 35

Zobrazte těleso vzniklé rotací trojúhelníka ABC kolem osy AB .



Řez válce a kužele

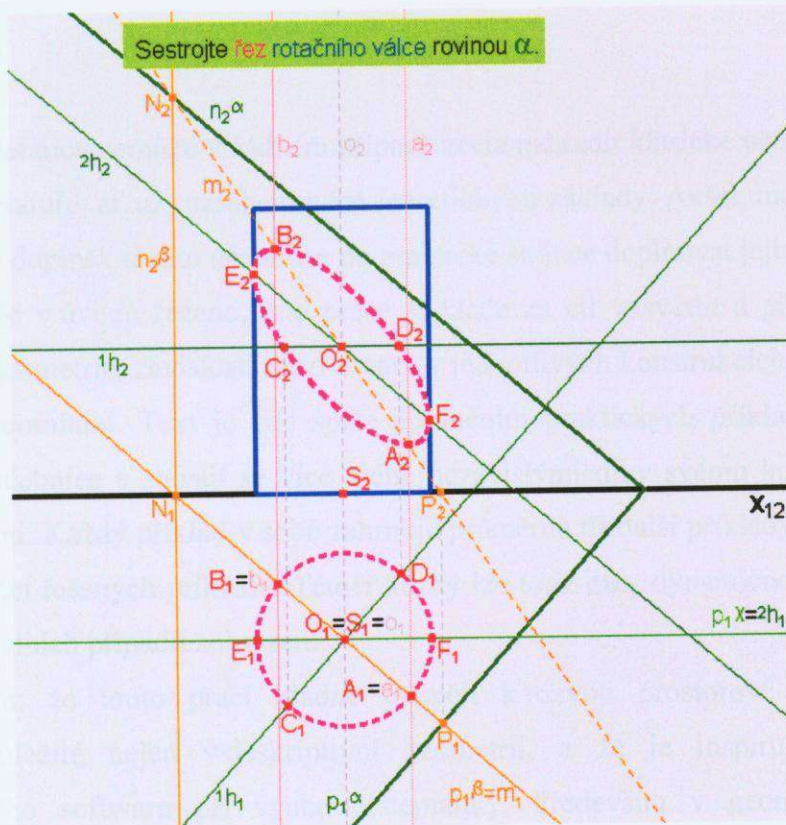
Při řezu válce rovinou se využívá průniku roviny a rotační válcové plochy. Mohou nastat tyto případy:

1. Rovina řezu je kolmá k ose válcové plochy (průnikem válce s rovinou je kružnice nebo průnik neexistuje).
2. Rovina řezu je rovnoběžná s osou válcové plochy.
 - průnik roviny a válcové plochy neexistuje
 - průnikem roviny a válcové plochy jsou dvě rovnoběžné přímky (průnikem válce s rovinou je obdélník, popř. čtverec)
 - průnikem roviny a válcové plochy je jediná přímka, rovina řezu je tečnou rovinou válcové plochy (průnikem válce s rovinou je úsečka – strana válce)
3. Rovina řezu není kolmá ani rovnoběžná s osou válcové plochy.
 - průnikem roviny a válcové plochy je elipsa

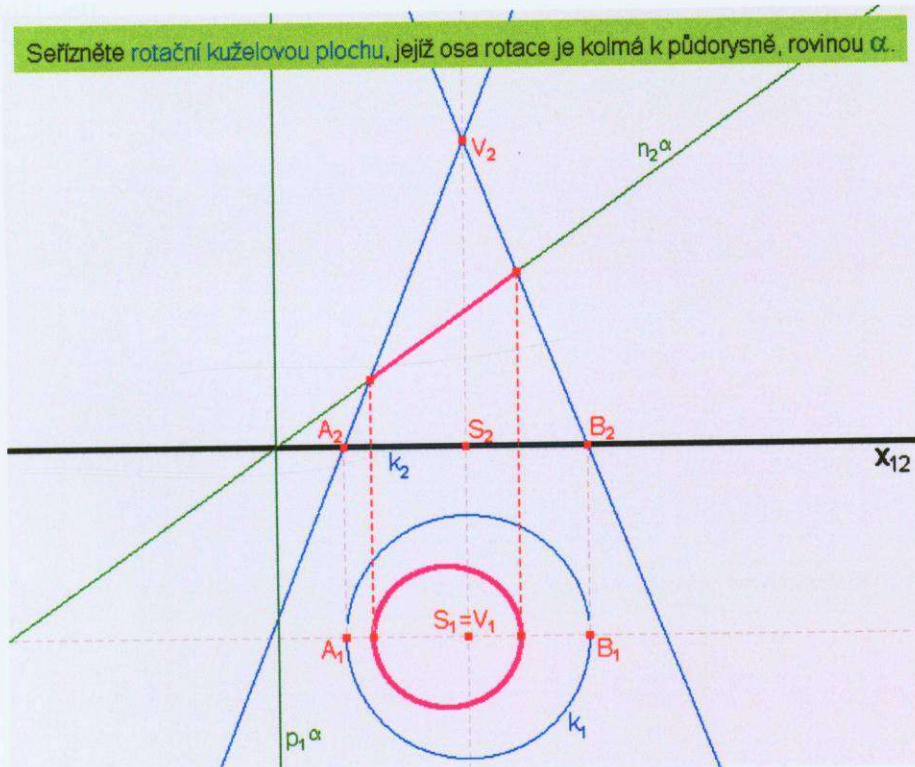
Při řezu kužele rovinou se využívá průniku roviny a rotační kuželové plochy. Mohou nastat tyto případy:

1. Rovina řezu je kolmá k ose kuželové plochy
 - průnikem je společný bod nebo kružnice
2. Rovina řezu není kolmá k ose kuželové plochy
 - průnikem je parabola, hyperbola, elipsa nebo tečná přímka

Příklad 36



Příklad 37



Závěr

Tato učebnice nemůže v žádném případě zcela nahradit klasické učebnice uvedené v použité literatuře, ať už rozsahem nebo teoretickými základy. Avšak mohla by sloužit jako výrazný doplněk těchto učebnic a po praktické stránce doplňovat jejich obsah.

Jak bylo v úvodu řečeno, tato práce si klade za cíl vysvětlit a přiblížit pomocí dynamické geometrie, závislosti mezi útvary v jednotlivých konstrukcích a zobrazeních Mongeova promítání. Text je zde spíše doplněním praktických příkladů, které jsou páteří celé učebnice a stávají se více méně nezávislými díky svému komentovanému postupu řešení. Každý příklad v sobě zahrnuje průměrně tři další příklady. Potom vyjde skutečný počet řešených příkladů. Téměř každý lze totiž díky dynamičnosti nastavit do mnoha speciálních případů zobrazení.

Doufám, že touto prací kladně přispějí k rozvoji prostorové představivosti studentů, důležité nejen v deskriptivní geometrii, a že je inspirují k používání matematického softwaru při výuce matematiky. Především v geometrii se díky programu *Cabri*, jeho jednoduchosti a již tolikrát zmiňované dynamičnosti otevírají veliké možnosti.



Dodatek

Pro učitele, zájemce o práci v Cabri nebo nadšence, kteří by chtěli rozšířit tuto práci např. o jiné promítání nebo vytvořit interaktivní učebnici z jiné oblasti geometrie, uvedu jakousi kuchařku toho, jak tato učebnice v Cabri vznikla.

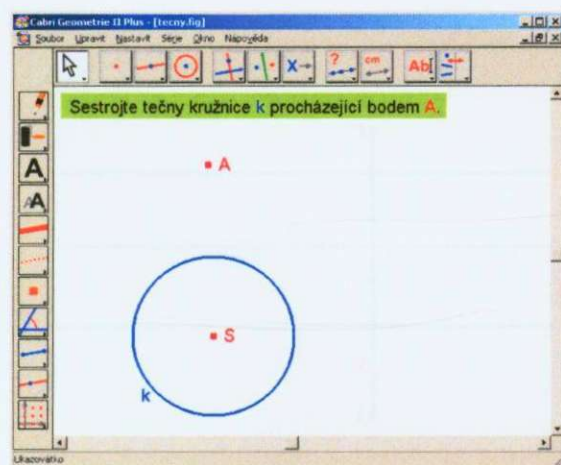
Budeme uvažovat ilustrativní příklad se zadáním: *Sestrojte tečny kružnice k procházející bodem A .* Chceme tedy vytvořit postupnou nápovědu se třemi kroky – sestrojení středu O úsečky AS , sestrojení *Thaletovy kružnice* se středem O a poloměru $|AO|$, sestrojení tečen procházejících bodem A a T_1, T_2 . Tento příklad – soubor *tecny.fig* je uložen na přiloženém CD ve složce *dodatek*. Proto si jej můžete otevřít v programu Cabri II+ a s použitím tlačítka *Zobrazit/Skrýt* analyzovat nebo můžete použít následující postup.

Vytvoření postupné konstrukce

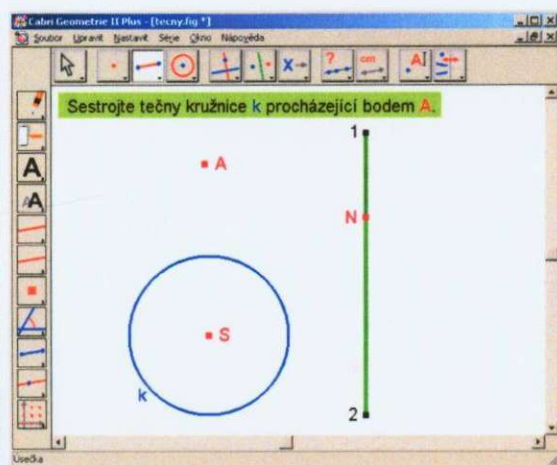
Postup 1: Vytvoříme bod A , kružnici k se středem S a případně text zadání.

Postup 2: Sestrojíme nápovědnou *vodící úsečku* s koncovými body I a 2 a *druhou nápovědnou úsečku* s koncovými body I a N , přičemž N bude náš nápovědný bod ležící na *vodící úsečce*.

Postup 1



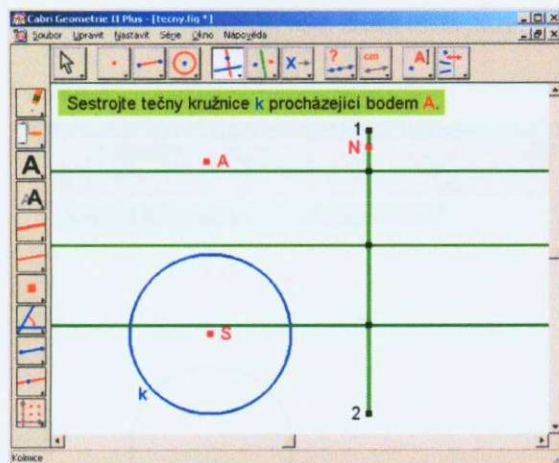
Postup 2



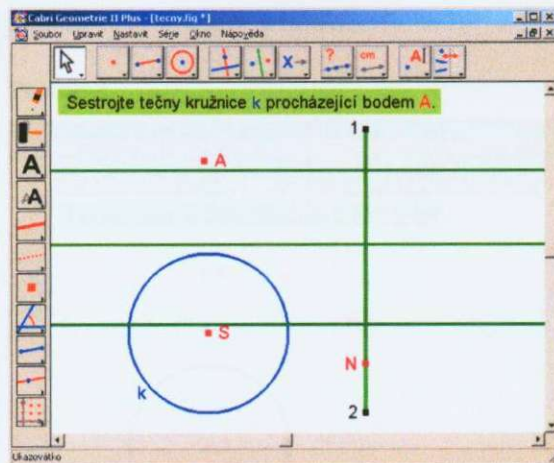
Postup 3: Sestrojíme tři body na *vodící úsečce* a proložíme jimi *kolmice* kolmé k *vodící úsečce*.

Postup 4: Tyto nové tři body skryjeme pomocí tlačítka *Zobrazit/Skrýt* a bod *N* posuneme po *vodící úsečce* dolů.

Postup 3



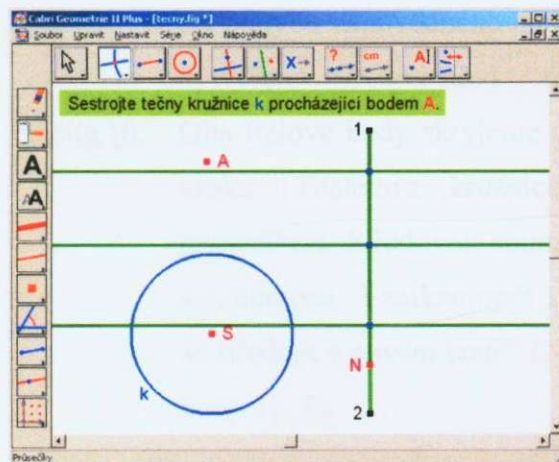
Postup 4



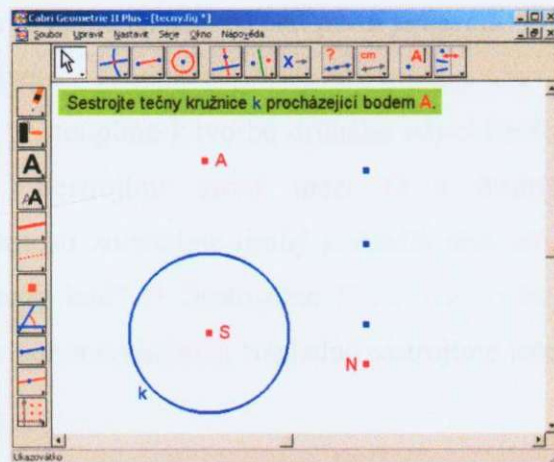
Postup 5: Sestrojíme *průsečíky* druhé nápočedné úsečky (tj. úsečky *IN*) s *kolmicemi*.

Postup 6: Vše nepotřebné nyní skryjeme tj. zůstane nám pouze zadání, nápočedný bod *N* a tři *průsečíky*. Pokud uchopíte bod *N* a budete s ním pohybovat nahoru a dolů, budou *průsečíky* mizet a zase se objevovat.

Postup 5



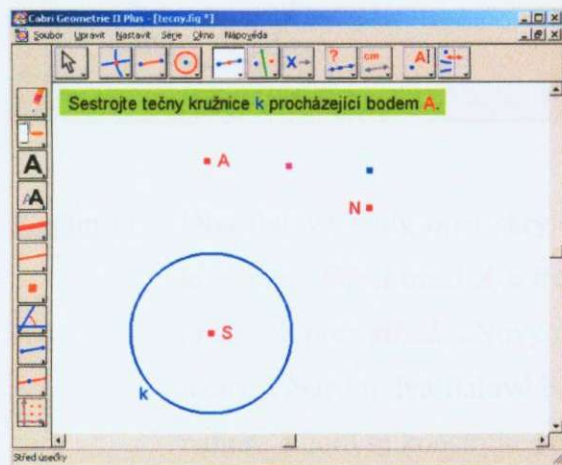
Postup 6



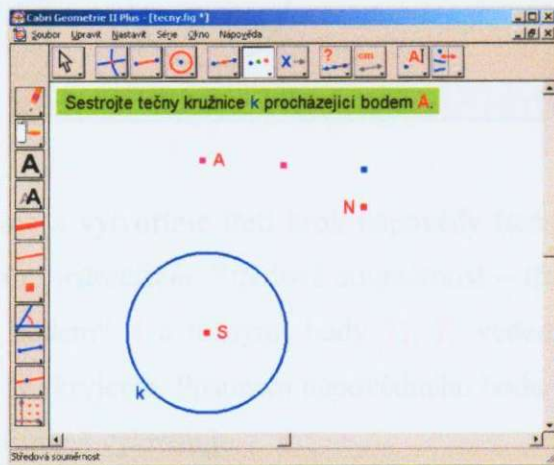
Postup 7: Soustředíme se teď na první *průsečík* a sestrojení středu *O* úsečky *AS*. Nejprve sestrojíme *střed* mezi bodem *A* a prvním *průsečíkem* (tlačítko *Střed úsečky*).

Postup 8: Použijeme středovou souměrnost – zobrazíme první *průsečík* přes střed souměrnosti, kterým bude námi vytvořený *střed* mezi bodem *A* a prvním *průsečíkem*. Sestrojili jsme tedy nový *bod* totožný s bodem *A*.

Postup 7



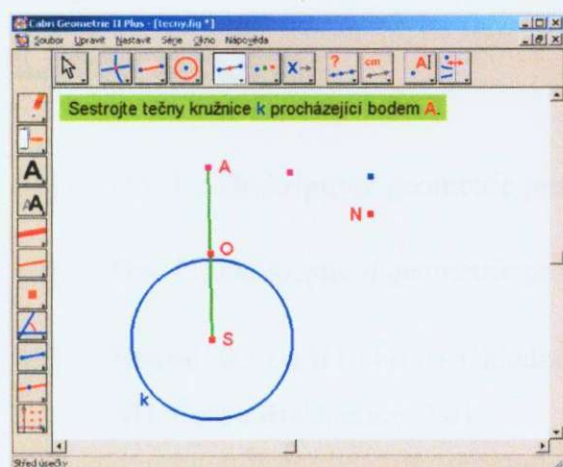
Postup 8



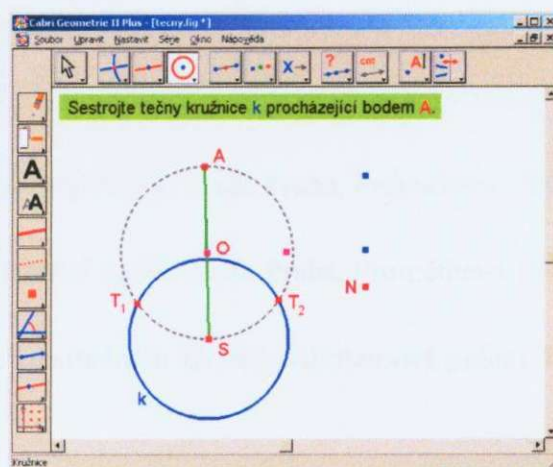
Postup 9: Sestrojíme *úsečku* mezi *S* a „novým bodem“ *A* a její střed *O*. Je velmi důležité abychom *úsečku* vedli novým *bodem A* sestrojeným pomocí středové souměrnosti v *Postupu 8*. Pokud jsme postupovali správně, potom při pohybu nápořdného bodu *N* úplně nahoru tj. nad první *průsečík* námi vytvořená *úsečka* i střed *O* zmizí.

Postup 10: Oba fialové body skryjeme a přistoupíme k tvorbě druhého nápořdného kroku (Thaletova kružnice). Sestrojíme *střed* mezi *O* a druhým *průsečíkem*. Středovou souměrností zobrazíme druhý *průsečík* přes *střed* souměrnosti. Vznikne opět „nový bod“ *O*. Sestrojíme *Thaletovu kružnici* se středem v novém bodě *O* a poloměrem $|AO|$. Následně sestrojíme tečné body T_1, T_2 .

Postup 9



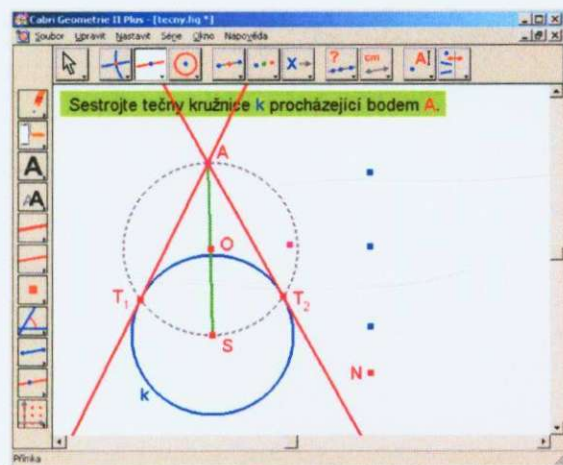
Postup 10



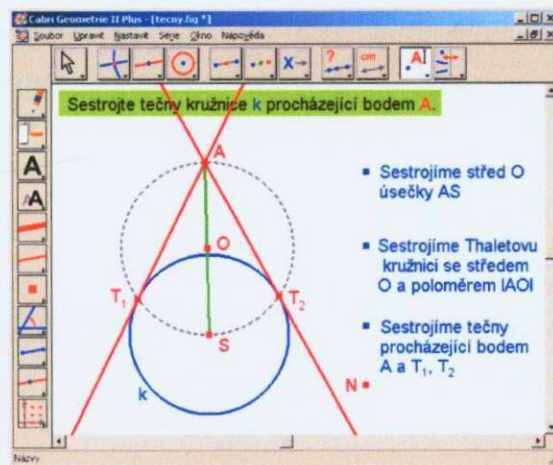
Postup 11: Oba fialové body opět skryjeme a vytvoříme třetí krok nápovědy (tečny kružnice). *Střed* mezi *A* a třetím *průsečíkem*. Středová souměrnost – třetí *průsečík* přes *střed*. „Novým bodem“ *A* a tečnými body T_1 , T_2 vedeme tečny. Poslední dva fialové body skryjeme. Posunem nápovědného bodu *N* nahoru a dolů se konstrukce postupně vykresluje.

Postup 12: Poslední věc, která zbývá je zobrazování postupné slovní nápovědy ke každému kroku nápovědy. Postačí použít tlačítko *Názvy* a námi vytvořené *průsečíky* pojmenovat (tj. pojmenování bude spočívat v celých větách, které vyjadřují slovní popis konstrukce).

Postup 11



Postup 12



Literatura:

- [1] Drs, L.: Deskriptivní geometrie pro střední školy, 1. díl. Praha, Prométheus 1995
- [2] Drs, L.: Deskriptivní geometrie pro střední školy, 2. díl. Praha, Prométheus 1996
- [3] Hanzal, R.: Užití Cabri na základních a středních školách. (diplomová práce), PF JU, České Budějovice 2001
- [4] Harant, M., Lanta, O.: Deskriptivní geometrie pro 2. a 3. ročník SVVŠ. Praha, SPN 1965
- [5] Kupčáková, M.: Základní úlohy deskriptivní geometrie v modelech. Praha, Prometheus 2002
- [6] Urban, A.: Deskriptivní geometrie, 1. díl. Praha, SNTL 1977
- [7] Urban, A.: Deskriptivní geometrie, 2. díl. Praha, SNTL 1979
- [8] <http://www.pf.jcu.cz/cabri>