

Posudek oponenta bakalářské práce

Vladan Čížek: Aplikace komplexní analýzy a numerické matematiky na problémy teorie potenciálního proudění

Obor: Aplikovaná matematika

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Vladan Čížek ve své práci stuuje problém obtékání kruhu konformně transformovaného Žhukovského transformací a to pro potenciální nestlačitelné nevířivé proudění. Používá k tomu nástrojů a prostředků komplexní analýzy. Konkrétně využívá toho, že reálná a imaginární složka komplexního potenciálu proudění jsou harmonické funkce a splňují tak Laplaceovu rovnici. Analytické výsledky u vybraných příkladů porovnává s numerickými výpočty získanými pomocí metody konečných prvků.

Práce je tak přirozeně rozdělena do dvou hlavních kapitol: v jedné zavádí potřebné pojmy z komplexní analýzy, definuje komplexní funkce, ukazuje některé vlastnosti komplexních čísel i komplexních funkcí, zavádí pojem komplexní křivky, konformního zobrazení a holomorfní a harmonické funkce. Je zde zavedena i následně využívaná Žhukovského transformace.

V další kapitole zavádí pojmy z teorie vektorových funkcí a teorie proudění. Zavádí pojem potenciálu proudění a proudové funkce. V kapitole 3.2 vysvětluje metodu konečných prvků na Poissonově rovnici s Dirichletovou okrajovou podmínkou. Triangulizuje oblast a integrální slabou formu Poissonovy rovnice převádí na systém lineárních rovnic pro přibližné řešení úlohy. Metodou konečných prvků následně řeší problém obtékání kruhu ve čtvercové oblasti se smíšenými Dirichletovými a Neumannovými okrajovými podmínkami modelujícími stejnoměrné proudění v oblasti bez vyřízlého kruhu. Tento referenční problém obtékání kruhu poté transformuje Žhukovského transformací a dostává tak řešení problému obtékání složitějších tzv. Žhukovského profilů. V kapitole 3.5 nachází proudnice pro vybrané typy proudění (vodorovné a protékající pod daným úhlem) a to jak v úloze bez překážky, tak i pro problém obtékání kruhu.

Pan Čížek vhodně využil komplexní analýzy a vlastností komplexně diferencovatelných funkcí (Riemannových podmínek) na potenciální funkci nestlačitelného nevířivého proudění a spolu se Žhukovského transformací ukázal, jak je možné řešit jednoduchý model problému obtékání tělesa.

V práci jsem nenašel žádné věcné chyby, jen několik překlepů (A, B otevřené v Definici 19, $|z| \leq 1$ nebo $|z| < 1$ pro Ω uzavřenou resp. otevřenou oblast na konci Věty 24, y místo x ve jmenovateli druhého zlomku na konci Věty 27, v parciální derivaci funkce η na konci Důkazu 10, v parciální derivaci funkce ψ na konci Poznámky 38, s Dirichletovou okajovou podmínkou ve 3. odstavci na str. 24, homogenní *Dirichletovy* okajové podmínky jsou automaticky splněny v posledním odstavci na str. 25, výsledky *získané* za pomoci metody konečných prvků na konci 1. odstavce v Závěru) a od Věty 9 jsou posunuté reference na všechny Věty následující, tj. od

Poznámky 24 na str. 11 (problém neprovedeního několikanásobného překladu L^AT_EXem?).

Student se v Kapitole 2 snažil definovat všechny důležité pojmy, utekla mu definice *analytické funkce* (Věta 23) a *jednoduše souvislé množiny* (Věta 24). Na několika místech jsou drobné nepřesnosti (dodat *kterých druhých* —asi všech parciálních— derivací se vyžaduje spojitost, $x, y \in \mathbb{R}$ do Poznámky 19, $z_1 \neq z_2$ do Definice 48, že f je dvakrát spojitě diferencovatelná na G (proč by jinak bylo možné derivovat parciální derivace a poté je i zaměnit v následném důkaze), že U je harmonická funkce *na celém* $\mathbb{R}^2$ ve Větě 31, co je prostor $H_0^1(\Omega)$ a co za integrály a z jakých integrandů jsou užity ve slabé formulaci Poissonovy úlohy na str. 24, poměr $a > 0$ a transformace T nejprve *natáhne* a -krát a následně posune o z_0 v odstavci pod Obrázkem 3.8) a někde mohly být informace více/podrobněji rozvedeny. Například, v Důkazu 7 šlo využít už dokázaných vlastností identity i funkce $1/z$ z Příkladů 13 a 15, v Důkazu 5 není zcela zřejmá prostota funkce $f(z(t))$ (funkce f samotná prostá není), v Důkazu 10 místo “s využitím všech vztahů dostáváme” mohly být všechny příslušné úpravy ukázány, v Definici 57 a Poznámce 34 šlo použít zavedených pojmů rotace a divergence, dodat *pro jeho potenciál* ϕ na konec Definice 61, ...nestlačitelného proudění v ... v Definici 62, *tečný vektor* místo *tečna* v Definici 63, Poznámka 37 mohla být Věta i s důkazem/odkazem, navíc, tvrzení v ní platí pro *nestlačitelné proudění* (znamená to, že gradient proudové funkce je v každém bodě kolmý na rychlost, tedy na gradient potenciálu?), co jsou ϕ a ψ v Definici 64, jak moc vhodnou funkci je třeba *jednoduše* přičíst a tím převést problém s nehomogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami na problém s podmínkami homogenními na konci str. 25? Chybí mi uvozující text v Sekci 3.4, *Poznamenejme*,... až pod obrázkem je zbytečně stručné. Mohlo zde být podrobnější vysvětlení vzniku obtékaných profilů i toho, že jde vlastně o transformaci referenčního problému zobrazeného na Obrázku 3.2. Co je *kruh, který obsahuje body A, B bod C leží na hranici (poblíž hranice)* pod Obrázkem 3.5? Mohly být přesně popsány ony transformace buď v textu samotném nebo alespoň v popiscích u obrázků. Stejně tak místo nadpisů obrázků mohl být počet trojúhelníků v jednotlivých popiscích. V Sekci 3.5 se jedná o proudění v nekonečné oblasti a obrázky jsou pouze soustředěny na vybraný výsek nebo jsou uvažovány nějaké okrajové podmínky? Nad Obrázkem 3.6 mohlo být místo vykreslení *ukázáno*, co jsou proudnice. V popiscích Obrázků 3.8 a 3.9 mohlo být vysvětleno, co *skutečně* jsou vykreslené křivky nebo alespoň zdůrazněno, že pouze ty vně kruhu jsou fyzikálně relevantní.

Přes výše uvedené nedostatky, které vesměs pouze zhoršují čitelnost textu, práci hodnotím kladně a doporučuji ji k obhajobě.

V Českých Budějovicích, 13.5.2023, Jan Eisner

Otázky pro studenta:

Jak se získá harmoničita funkce u v Důkazu 10 na straně 21, resp. jak se dokáže řetěz rovností na konci důkazu?

Co je *mírně vychýlený kruh od středu* (v prvním odstavci v Závěru)?