



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Konstrukční úlohy v prostoru

Vypracoval: Malířská Eva
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Konstrukční úlohy v prostoru jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 4.1.2016

.....

Malířská Eva

Poděkování

Chtěla bych tímto poděkovat prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., který byl vedoucím mé bakalářské práce. Děkuji mu velice za jeho spolupráci, cenné rady, vstřícnost při konzultacích a při psaní mé bakalářské práce.

Anotace:

Cílem mé bakalářské práce Konstrukční úlohy v prostoru je shrnutí poznatků k tématu stereometrie, které by se daly využít žáky na základních a studenty na středních školách. Tato tematika je obecně velmi zanedbávaná, což má za následek velmi nízkou úroveň prostorové představivosti. Konstrukční úlohy v prostoru jsem tvořila ve volném rovnoběžném promítání s užitím interaktivního geometrického softwaru GeoGebra. Práce obsahuje řešené příklady doplněné podrobným komentářem řešení, ale i neřešené příklady k procvičení.

Annotation:

My bachelor thesis focuses on Construction tasks in space. Its aim is a full explanation and a summary of knowledge of stereometry. This knowledge could be used by pupils at primary schools and students at secondary schools in the topic construction tasks. The theme is very neglected in general which leads to very low level of spatial imagination. I have created construction tasks in space in a free parallel projection with using interactive geometric software GeoGebra. The bachelor thesis contains solved examples with a detailed commentary of solution but it also includes unsolved examples for practising.

Obsah

1. Úvod.....	5
2. Úvod do stereometrie	7
2.1 Volné rovnoběžné promítání	8
2.2 Prostorová tělesa.....	10
2.2.1 Mnohostěny	10
2.2.2 Rotační tělesa.....	15
3. Polohové vlastnosti	16
3.1 Vzájemná poloha dvou přímek.....	18
3.2 Vzájemná poloha přímky a roviny	20
3.3 Vzájemná poloha dvou rovin.....	22
4. Řezy tělesa rovinou	25
4.1 Příklady na řezy krychle	27
4.2 Osová afinita.....	36
4.3 Příklady na řezy jehlanu	38
4.4 Středová kolineace.....	47
4.5 Příklady na procvičování	50
5. Průsečnice a průsečíky	51
5.1 Průsečnice rovin	51
5.2 Průsečík přímky s rovinou.....	53
5.3 Průnik přímky s povrchem tělesa	58
5.4 Příklady na procvičování	62
6. Odchylky	63
6.1 Odchylka přímek	63
6.2 Odchylka přímky od roviny.....	64
6.3 Odchylka dvou rovin	67
6.4 Příklady na procvičování	69
7. Závěr	70

1. Úvod

Se základy stereometrie se žáci setkávají již na základní škole. Spousta dětí má problémy se zrakovým vnímáním a prostorovou představivostí, a proto tato oblast matematiky je pro spoustu dětí velmi obtížná. Cílem mé práce je napomoci žákům na základní škole a studentům na střední škole se lépe orientovat v tématech stereometrie, se kterými úzce souvisí řešení konstrukčních úloh. Vybraná témata a řešení konstrukčních úloh by mělo pomoci vyřešit neřešené příklady k procvičení.

V druhé kapitole se seznámíme s tím, co to stereometrie je, jaká platí základní pravidla. V první podkapitole se dozvíme, co je to volné rovnoběžné promítání. V druhé podkapitole se seznámíme s tělesy, která jsou prostorová a ve stereometrii se dají využít.

Následující kapitola obsahuje vysvětlení základních polohových vlastností a teprve tři podkapitoly se zabývají konkrétně vzájemnou polohou dvou přímek, vzájemnou polohou přímky s rovinou a vzájemnou polohou dvou rovin. Všechny polohové vlastnosti jsou ilustrovány obrázky.

Čtvrtá, nejrozsáhlejší kapitola, je zaměřena na řezy těles, kde máme základní axiomy. Tato kapitola je dále rozdělena do čtyř podkapitol. V první se naučíme sestavit řez krychle. Řešené konstrukční úlohy jsou řazené od nejjednodušších po nejobtížnější. V druhé podkapitole se obeznámíme s pojmem osová afinita, a jak souvisí s řezy krychle. Ve třetí podkapitole se naučíme sestavovat řezy jehlanu a ve čtvrté zjistíme, co je to středová kolíneace a kde se využívá. Na konci kapitoly jsou uvedeny příklady k procvičení.

V páté kapitole se dozvíme o průsečnici rovin, průsečíku přímky s rovinou a průniku přímky s povrchem tělesa. Ve všech těchto podkapitolách je podrobně vyřešeno několik vzorových příkladů s podrobnými komentáři a příklady k procvičení.

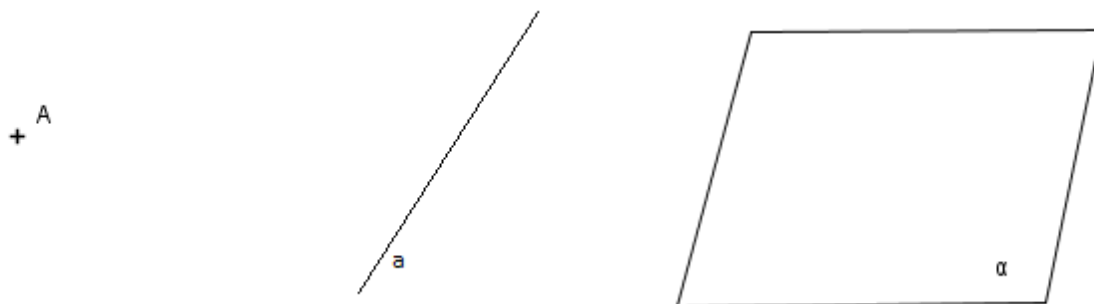
Závěrečná šestá kapitola se zabývá hledáním odchylek. Tato kapitola vysvětluje odchylky dvou přímek, odchylky přímek a rovin a také odchylky dvou rovin. Opět jsou zde velice podrobně řešeny příklady, které jsou doplněny podrobným komentářem, který zahrnuje nejen nalezení hledané odchylky, ale i výpočet její velikosti. V závěru kapitoly najdeme neřešené příklady k procvičení.

Obrázky, které tato práce obsahuje, jsou vytvořeny v DGS GeoGebra.

2. Úvod do stereometrie

Název stereometrie pochází z řeckého původu. Slovo stereometrie volným překladem znamená „měření těles“. Tento překlad nevystihuje obsah a podstatu stereometrie, ale pouze nám říká, že geometrické poznatky vznikaly již v dávných dobách, protože je lidé potřebovali k praktickému životu. Člověk by se neobešel bez nástrojů, jejichž základem byly geometrické tvary. Geometrické poznatky se rozvíjely se zemědělstvím, hrnčířstvím, stavební technikou a uměním. Například při zemědělství bylo nutné vyměřovat plochy a objemy [4].

Stereometrie se zabývá zobrazováním těles do prostoru. Tělesa, jako je například krychle, kvádr či jehlan do roviny zobrazit nejdou. Stručně řečeno je stereometrie geometrie prostorových útvarů. Do roviny zobrazujeme pouze útvary nazývané jako rovinné útvary, kterými jsou například čtverec, obdélník a trojúhelník. Rovinnými útvary se nezabývá stereometrie, ale planimetrie. Ve stereometrii k zobrazení těles používáme volné rovnoběžné promítání. Základními geometrickými prvky jsou bod, přímka a rovina. Je to odlišné od planimetrie, kde jsou základními geometrickými prvky pouze bod a přímka. Ve stereometrii body označujeme velkými tiskacími písmeny abecedy. Přímky jsou označovány malými písmeny abecedy. Roviny jsou označovány malými písmeny řecké abecedy, například $\alpha, \beta, \pi, \mu, \sigma, \tau$ [4].



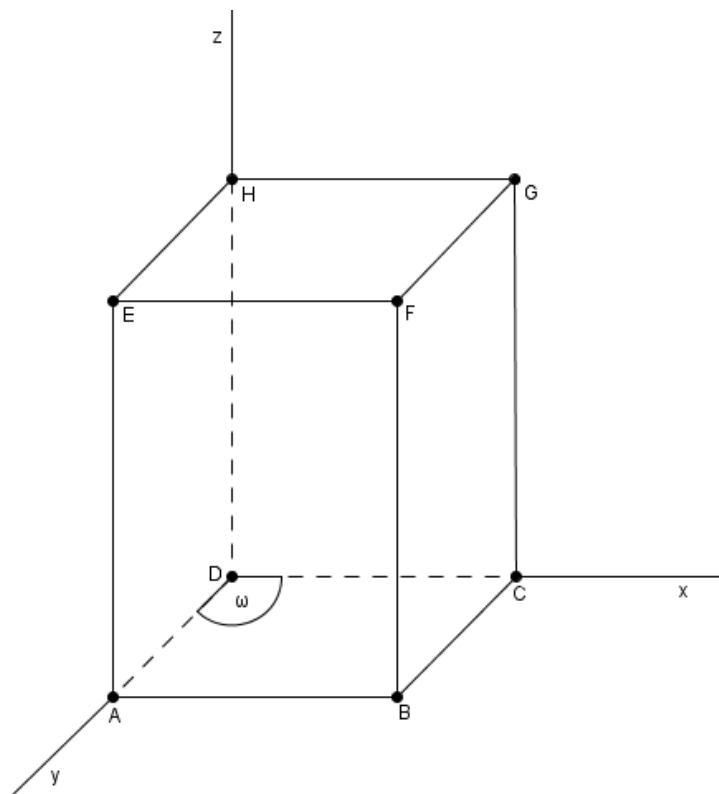
Při zobrazování přímky si musíme uvědomit, že je neomezená a my jsme schopni zobrazit jen část přímky. Stejně je to i u roviny, taktéž můžeme zobrazit jen část. Rovina i přímka jsou neomezené útvary, které obsahují nekonečně mnoho bodů. V planimetrii jsme pracovali pouze v jedné rovině, ale ve stereometrii je v prostoru rovin nekonečně mnoho. Jedna rovina nám dělí prostor na dva opačné poloprostory a tato rovina tvoří jejich společnou hraniční rovinu, která náleží oběma poloprostorům. Každá rovina je konvexní. To znamená, že úsečka, která spojuje dva různé body roviny, je součástí této roviny.

Ve stereometrii platí tato čtyři pravidla. Dvěma různými body prochází právě jedna přímka. Třemi různými body, které neleží v přímce, prochází právě jedna rovina. Přímkou a bodem, který na přímce neleží, prochází právě jedna rovina. Dvěma různoběžnými přímkami prochází právě jedna rovina. Dvěma různými rovnoběžnými přímkami prochází právě jedna rovina [4].

2.1 Volné rovnoběžné promítání

Tělesa, což jsou prostorové útvary, můžeme zobrazit v rovině, a jak už jsem se zmínila, pomáhá nám k tomu volné rovnoběžné promítání. Touto problematikou se zabývá deskriptivní geometrie. Volné rovnoběžné promítání je jedním z případů kosoúhlého promítání. Kosoúhlým promítáním rozumíme rovnoběžné promítání na průmětnu. Tato průmětna je ztotožněna s jednou ze souřadnicových rovin, buď nárysnou, půdorysnou nebo bokorysnou. Směr promítání ovšem není rovnoběžný se směrem souřadnicových os. Obecně kosoúhlé promítání zadáváme úhlem zkosení ω a poměrem zkreslení q , kde q je koeficient změny. Podle velikosti úhlu ω rozlišujeme různé druhy kosoúhlých obrazů jako například nadhled zprava, nadhled zleva či podhled zprava, podhled zleva. Volné rovnoběžné promítání je speciálním případem kosoúhlého promítání, kde úhel zkosení je $\omega = 135^\circ$ a koeficient změny $1/2$. Volné rovnoběžné promítání je případem dimetrie, což znamená, že úhel ω je větší než 120° a velikosti se nanášejí v měřítku $1: \frac{1}{2}: 1$. Jeden z rozměrů je zkrácen na polovinu.

Pro lepší představení volného rovnoběžného promítání si zde zobrazíme kvádr $ABCDEFGH$ o velikosti stran $5, 6, 7\text{ cm}$.



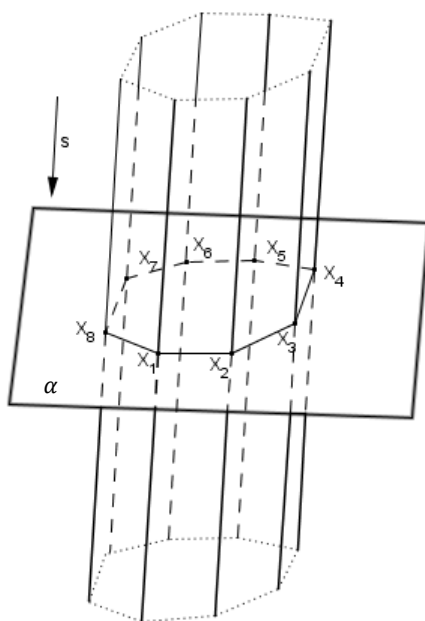
Na obrázku je úhel ω mezi osami x a y 135° . 5 cm je naneseno na souřadnicovou osu x , 6 cm je zkráceno na polovinu a naneseno na osu y a na osu z je naneseno 7 cm . Poté doplníme na kvádr, kde využíváme rovnoběžnosti s osami a vznikne nám kvádr $ABCDEFGH$. V tomto případě je kvádr zobrazen v náhledu zprava, kde můžeme vidět přední, pravou a horní stěnu kvádru.

2.2 Prostorová tělesa

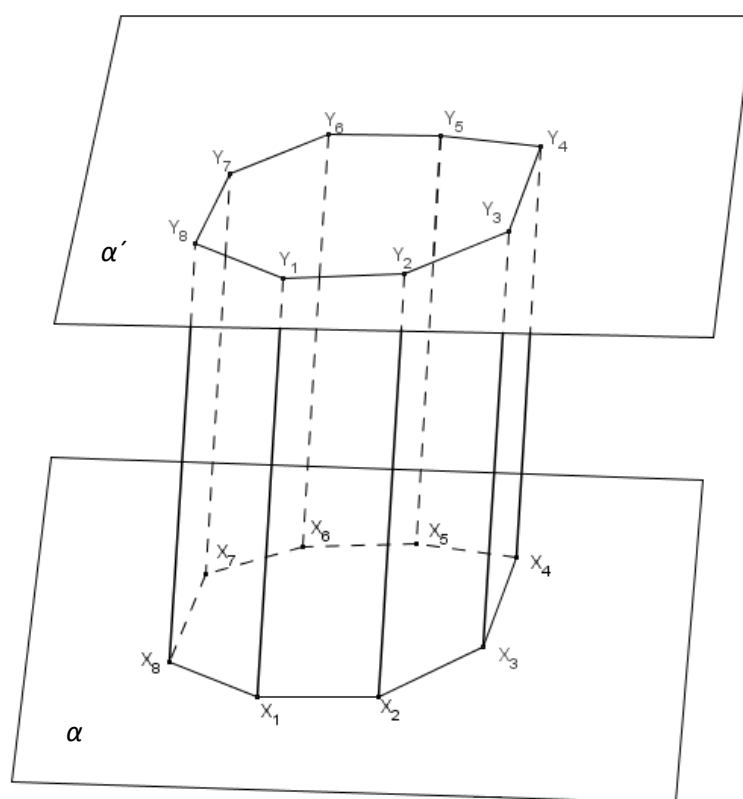
Geometrické těleso je prostorový omezený souvislý geometrický útvar. Jeho hranici nazýváme povrch a je to uzavřená plocha. Těchto těles existuje spousta [4].

2.2.1 Mnohostěny

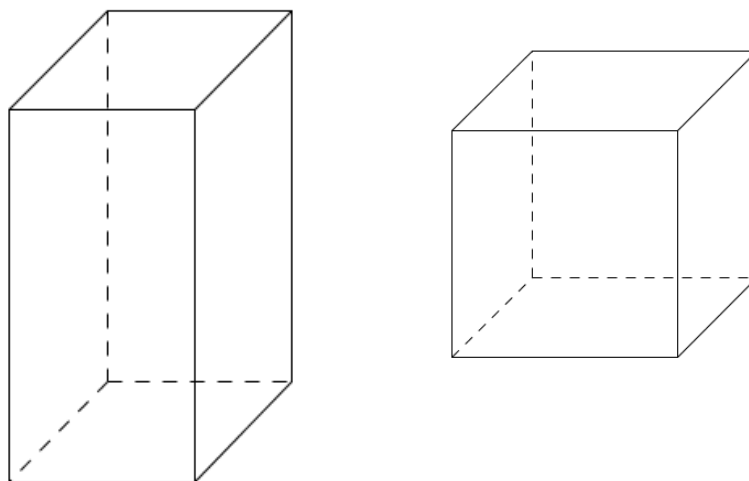
První si uvedeme tělesa hranolového typu. Máme n -úhelník $X_1, X_2, \dots, X_n$. Budeme ho nazývat řídicí mnohoúhelník, který leží v rovině α . Máme přímku s , která není rovnoběžná s rovinou α . Sjednocením přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou s , a protínají hranici mnohoúhelníku $X_1, X_2, \dots, X_n$ nám vznikne n -boká hranolová plocha. Pokud sjednotíme přímky rovnoběžné s přímkou s , které zároveň budou protínat mnohoúhelník $X_1, X_2, \dots, X_n$ nám vznikne n -boký hranolový prostor. Hranolová plocha je hranice hranolového prostoru. Pokud je přímka rovnoběžná s přímkou s , budeme ji nazývat směrová přímka hranolového prostoru. Toto platí také pro rovinu, pokud je rovina rovnoběžná s přímkou s , budeme ji nazývat směrová rovina hranolového prostoru. V následujícím obrázku si ukážeme zde zmiňovanou teorii a pro tento obrázek si zvolíme řídicí osmiúhelník [4].



N - bokým hranolem rozumíme průnik n - bokého hranolového prostoru a vrstvy, jejíž hraniční roviny nejsou směrové. Výškou hranolu se rozumí tloušťka vrstvy. Podstavou hranolu rozumíme průnik hraničních rovin vrstvy s hranolovým prostorem, což jsou mnohoúhelníky. Stěny, které nejsou podstavami hranolu, se nazývají boční stěny hranolu. Pokud sjednotíme všechny stěny hranolu, dostaneme plášť hranolu. Vrcholy stěn hranolu budeme nazývat vrcholy hranolu. Podstavnými hranami budeme nazývat strany podstav hranolu, zbylé strany jsou boční hrany hranolu. Stěnovou výškou rozumíme vzdálenost podstavných hran v téže boční stěně. Tělesové úhlopříčky jsou úsečky, které mají krajní body ve vrcholech hranolu a neleží ve stejné stěně. Osmiboký hranol si ukážeme na následujícím obrázku [1, 4].

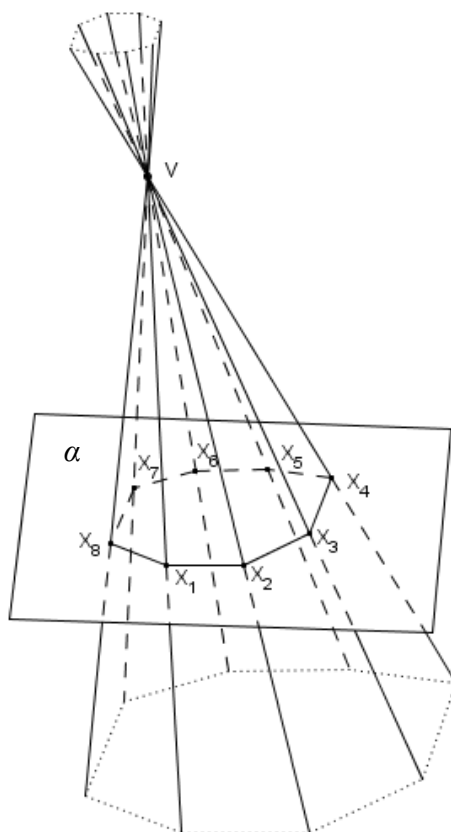


Jedním z hranolů je kolmý hranol, kde jsou boční hrany kolmé k rovinám podstav. Dále máme kosý hranol, který není kolmý, ale je kosý. Pokud jsou podstavami pravidelné n - úhelníky, dostaneme pravidelný n - boký hranol. Dalším zvláštním případem je rovnoběžnostěn, což je čtyřboký hranol. U rovnoběžnostěnu jsou rovnoběžné nejen roviny podstav, ale také roviny vždy dvou protilehlých stěn. Jeho ohraničení se tedy skládá z tří dvojic navzájem rovnoběžných a shodných rovnoběžníků. Podstavami tedy může být jakákoliv dvojice rovnoběžných stěn. Zvláštními případy rovnoběžnostěnu je krychle a kvádr. U krychle jsou všechny stěny shodné čtverce a délka, šířka a výška jsou tedy také stejné. Kvádr je příkladem kolmého hranolu a za podstavu má obdélník. Délkou a šířkou kváдру jsou délky podstavných hran a výškou je délka třetí hrany. Vlevo na obrázku je kvádr a vpravo krychle [1, 4].

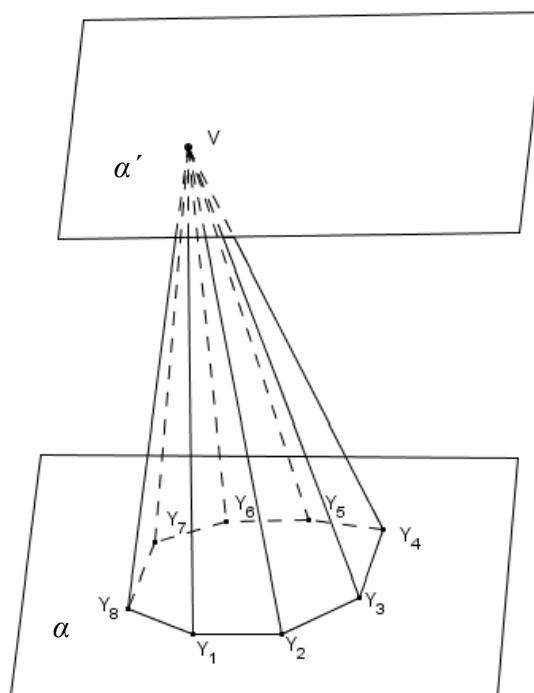


Nyní si uvedeme tělesa jehlanovitého typu. Máme n - úhelník $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, který leží v rovině α a vrcholový bod V , který v rovině α neleží. Pokud sjednotíme všechny přímky, které procházejí bodem V a protínají hranici mnohoúhelníku $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ nám vznikne n - boká jehlanová plocha. Pokud sjednotíme všechny přímky procházející bodem V , a které zároveň protínají mnohoúhelník $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ dostaneme n - boký jehlanový prostor. Hranicí jehlanového prostoru je jehlanová plocha. Vrchol jehlanové plochy i jehlanového prostoru je bod V . Pokud nám přímka prochází vrcholovým bodem V , budeme ji nazývat vrcholovou přímkou. Toto platí také pro rovinu, pokud nám rovina prochází vrcholovým bodem V , budeme ji nazývat vrcholovou rovinou [1, 4].

V následujícím obrázku si ukážeme zde zmiňovanou teorii a pro tento obrázek si zvolíme řídicí osmiúhelník.



N - bokým jehlanem rozumíme průnik n - bokého jehlanového prostoru a vrstvy, jejíž jedna hraniční rovina má s tímto prostorem jediný společný bod a tím je vrchol jehlanového prostoru, tedy bod V . V našem případě vrcholový bod V budeme nazývat hlavní vrchol jehlanu. Výškou jehlanu je tloušťka vrstvy. Podstavou jehlanu je mnohoúhelník, který je průnikem hraniční roviny vrstvy, neprocházející vrcholem s jehlanovým prostorem. Vrcholy tohoto mnohoúhelníku jsou vrcholy podstavy jehlanu. Boční stěny jehlanu jsou stěny, kterým náleží hlavní vrchol. Boční stěna jehlanu vždy tvoří trojúhelník. Plášť jehlanu dostaneme, pokud sjednotíme všechny tyto boční stěny. Podstavnými hranami jsou strany podstavy jehlanu. Boční hrany jehlanu jsou všechny ostatní hrany, které nejsou podstavné. Vzdálenost od podstavné hrany v boční stěně od hlavního vrcholu V , budeme nazývat stěnovou výškou [1, 4].



Jedním z jehlanů je kolmý jehlan, který poznáme tak, že podstava jehlanu má střed souměrnosti a pokud povedeme přímku tímto středem souměrnosti a vrcholem V , která bude kolmá k rovině podstavy, jedná se o tento typ. Dalším jehlanem je kosý jehlan, který není kolmý, ale je kosý. N - boký pravidelný jehlan poznáme podle toho, že jeho podstavu tvoří pravidelný n - úhelník. Pokud je těleso ohraničené čtyřmi trojúhelníkovými stěnami, jde o čtyřstěn. Pokud tyto trojúhelníkové stěny, které ohraničují čtyřstěn, budou shodné rovnostranné trojúhelníky, jde o pravidelný čtyřstěn. Pokud jednu z trojúhelníkových stěn si zvolíme jako podstavu, dostaneme trojboký jehlan. Speciálním případem jehlanu je komolý jehlan, který vznikne tím, že protneme jehlan rovinou, která bude rovnoběžná s rovinou podstavy. Tento komolý jehlan bude mít tedy dvě podstavy, kterými budou dva podobné mnohoúhelníky [1, 4].

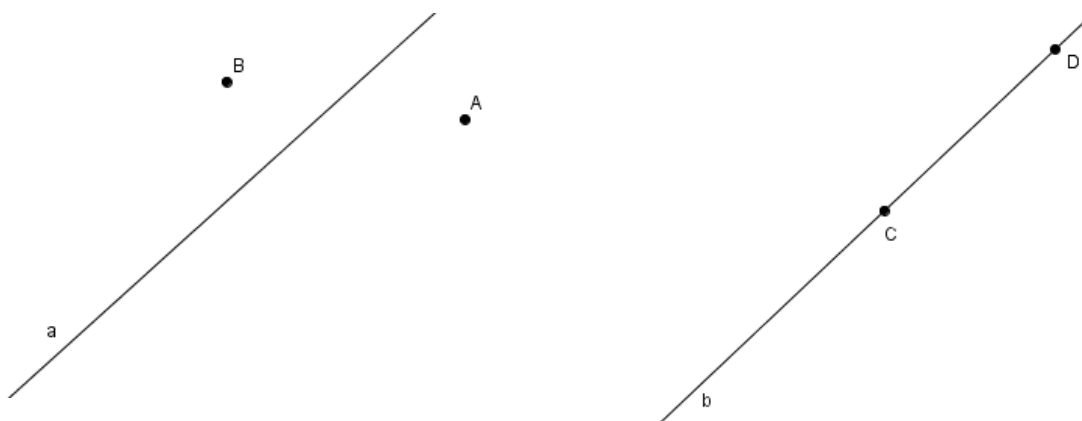
Hranol, jehlan i komolý jehlan patří mezi mnohostěny, protože jsou ohraničeny jen mnohoúhelníky. Mnohostěn (n - stěn) je každé těleso, jehož hranice je sjednocením n - mnohoúhelníků (stěn) takových, že strana každého z nich je zároveň stranou sousedního mnohoúhelníku a žádné dva sousední mnohoúhelníky neleží v téže rovině [4].

2.2.2 Rotační tělesa

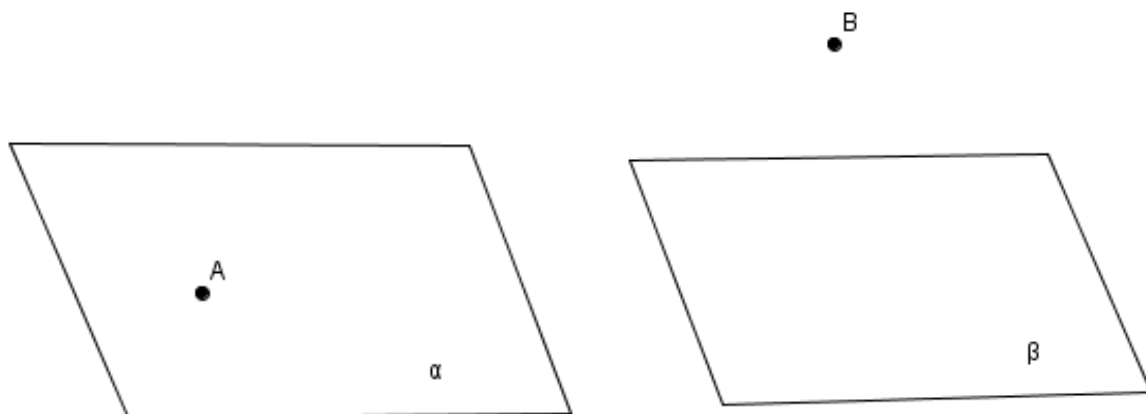
Rotační těleso vzniká pomocí rotace. Rotující rovinný obrazec kolem dané přímky vytvoří rotační těleso. Přímka, okolo které rovinný obrazec rotuje, se nazývá osa rotačního tělesa. Mezi rotační tělesa patří rotační válec, který vznikne rotací čtverce nebo obdélníku kolem přímky, která je osou rotace a zároveň obsahuje jeho jednu stranu. Dalším rotačním tělesem je rotační kužel, který vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku, okolo přímky, která je jeho odvěsnou. Pokud budeme mít pravoúhlý lichoběžník, který bude rotovat okolo přímky, která obsahuje jeho kratší rameno, dostaneme komolý rotační kužel. Mezi rotační tělesa se také řadí koule, která vznikne rotací půlkruhu kolem přímky, která obsahuje jeho průměr. Speciálním případem je anuloid, který vznikne rotováním kruhu okolo přímky, která leží v rovině kruhu, ale neprotíná ho [4].

3. Polohové vlastnosti

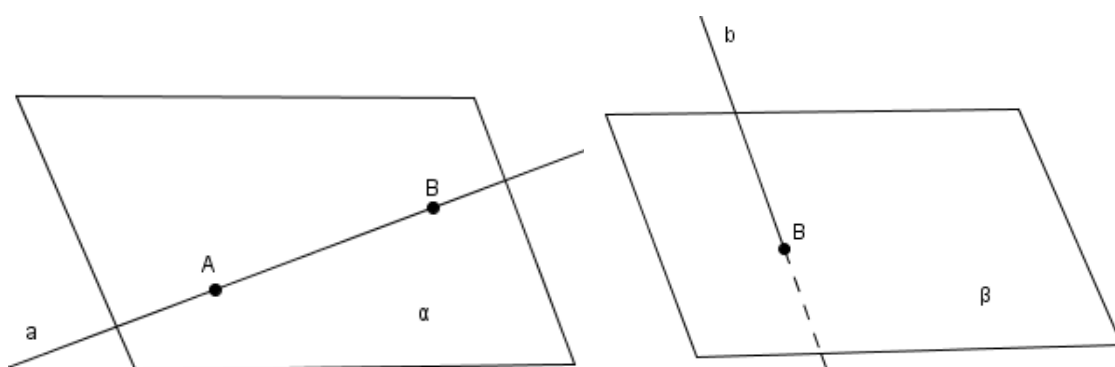
Zajímáme se, jaké jsou vztahy mezi body, přímkami a rovinami. Obecně můžeme říct, že se prostor skládá z bodů. Přímký a roviny jsou podmnožiny prostoru. Pokud zvolíme bod a přímku, můžou nastat dvě situace a to buď, že bod leží na přímce nebo neleží. Můžeme také říct, že přímka prochází či neprochází bodem. Pokud si za dvojici zvolíme bod a rovinu, opět máme dvě možnosti, bod leží nebo neleží v rovině. To znamená, že rovina buď prochází nebo neprochází bodem. Za další dvojici zvolíme přímku a rovinu a tam také nastává situace, kdy přímka buď leží nebo neleží v rovině. Neboli také říkáme, že přímka prochází či neprochází rovinou. Pro tyto vztahy se používá společný termín incidence. Incidencí rozumíme nálezení bodu přímce, nálezení bodu rovině a nálezení přímky rovině. Pokud bod nenáleží přímce, bod nenáleží rovině a přímka nenáleží rovině, říkáme, že tento vztah není incidentní. Tento zápis matematicky provedeme pomocí symbolů $\in$, $\notin$ [4].



Na prvním obrázku vlevo je přímka a , oba dva body A, B na přímce a neleží. Na druhém obrázku vpravo jsou body C, D , které na přímce leží.



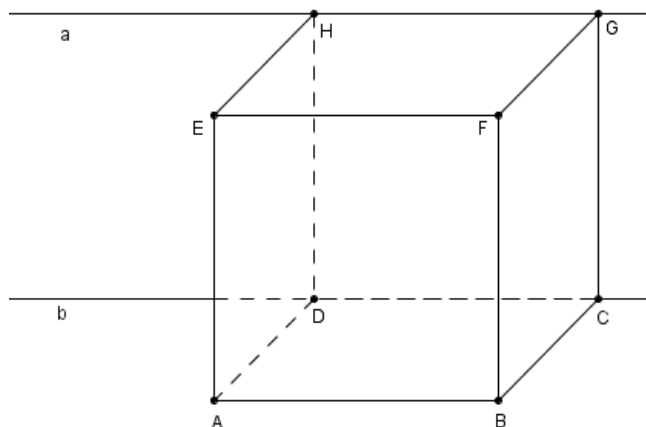
Na prvním obrázku vlevo je rovina α ve které leží bod A . Na druhém obrázku vpravo je rovina β a bod B , který v rovině neleží.



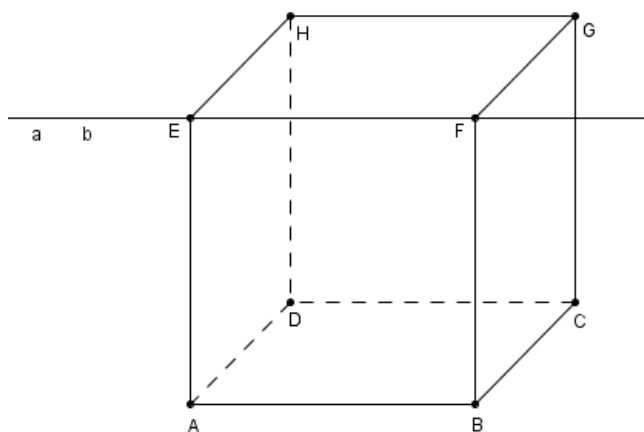
Na prvním obrázku vlevo vidíme přímku a , která leží v rovině α a prochází body A a B . Na druhém obrázku vpravo vidíme přímku b , která neleží v rovině β , jen jí protíná v bodě B .

3.1 Vzájemná poloha dvou přímek

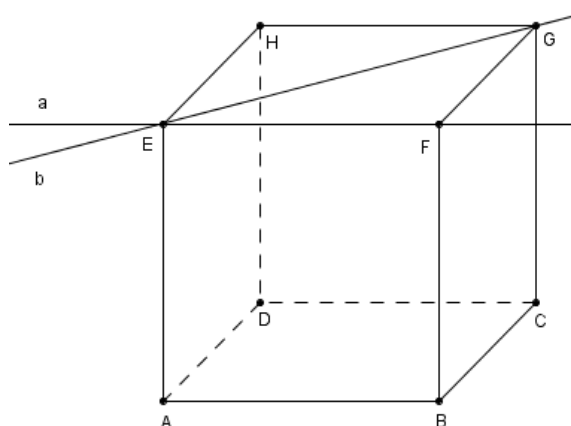
Pokud budeme uvažovat o vzájemné poloze přímek a, b v prostoru, máme následující čtyři polohy, které jsou rovnoběžné různé, mimoběžné, totožné a různoběžné. Pokud přímky a, b leží v jedné společné rovině a nemají společný žádný bod, jsou v poloze rovnoběžné různé. Pokud jsou přímky rovnoběžné, zapisujeme je $a \parallel b$. Pokud přímka a se bude rovnat přímce b a budou mít spolu společné všechny body, nazýváme je přímky totožné a zapisujeme tento vztah $a = b$. Pokud nastane případ, že přímka a leží ve stejné rovině jako přímka b a mají spolu jeden společný bod, který je jejich průsečíkem, jsou to přímky různoběžné. Průsečík různoběžných přímek zapíšeme $\{P\} = a \cap b$ a různoběžné přímky zapisujeme $a \times b$. V případě, že přímky a, b nemají žádný společný bod a ani neleží v jedné rovině, mluvíme o přímkách mimoběžných. Pro lepší představivost si uvedeme vzájemné polohy přímek na obrázcích [4].



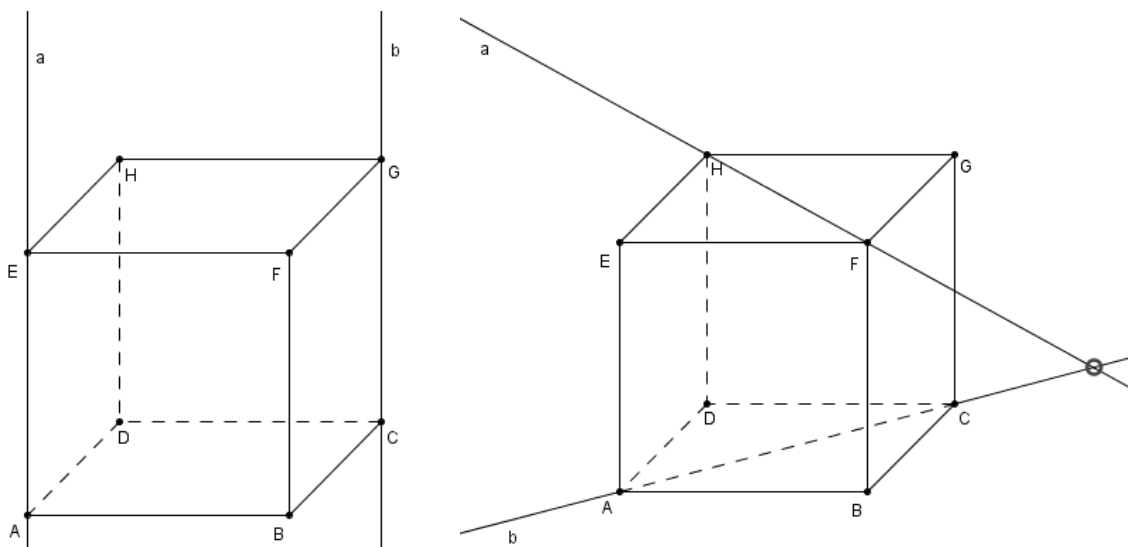
Na tomto obrázku je vzájemná poloha přímek a, b rovnoběžná různá.



Na tomto obrázku vidíme dvě přímky totožné $a = b$, které mají společné všechny body.



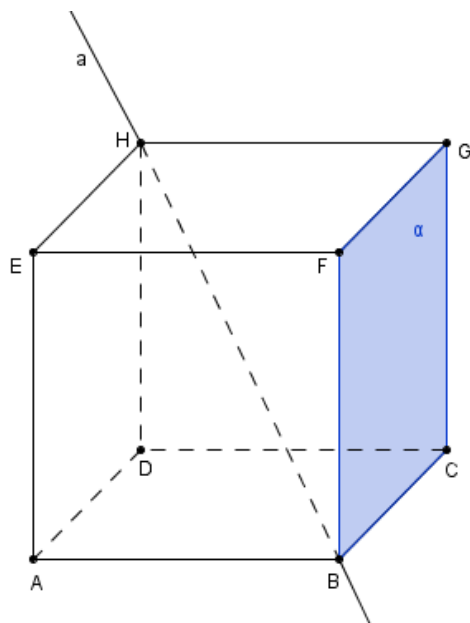
Zde máme přímky a, b různoběžné, jejich průsečíkem je zde bod E .



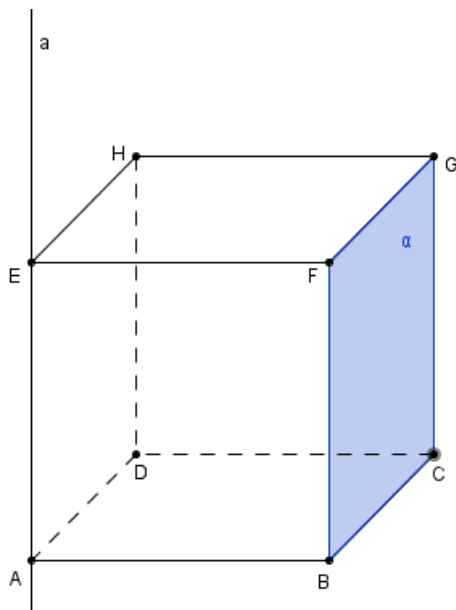
Na obrázku vlevo jsou přímky a, b jednoznačně mimoběžné. Na obrázku vpravo jsou přímky a, b také mimoběžné, ale musíme si uvědomit, že vyznačený bod není průsečík. V tomto místě přímky nad sebou jen proházejí. To znamená, že přímka a prochází nad přímkou b , ale neprotínají se, nemají spolu společný žádný bod ani rovinu.

3.2 Vzájemná poloha přímky a roviny

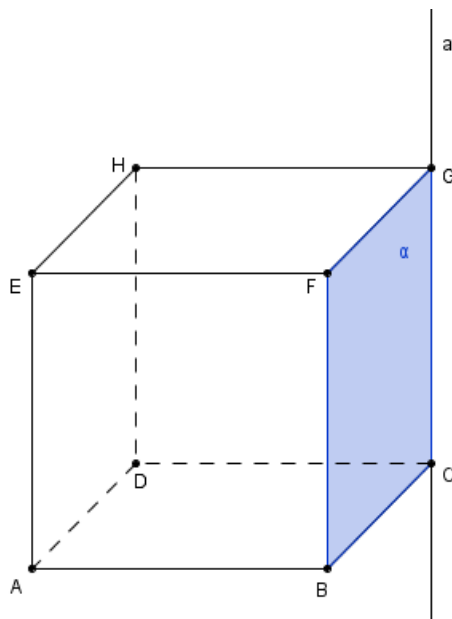
Pokud zkoumáme vzájemné polohy přímky a roviny máme tři případy, které mohou nastat. Přímka je buď různoběžná s rovinou, rovnoběžná s rovinou nebo přímka náleží rovině. Pokud je přímka a různoběžná s rovinou α , pak s ní má jeden společný bod, což je průsečík přímky s rovinou. Průsečík značíme $\{P\} = a \cap \alpha$. Pokud je přímka a rovnoběžná s rovinou α , nemá s rovinou žádný společný bod. Poslední případ je, že přímka a leží v rovině α a v tomto případě má s rovinou společné všechny body. O tomto případě ale také říkáme, že přímka a je rovnoběžná s rovinou α . Oba případy zapisujeme buď $a \parallel \alpha$ nebo $\alpha \parallel a$. Opět si pro lepší představivost ukážeme vzájemné polohy přímky a roviny na obrázcích [4].



Na tomto obrázku je přímka a různoběžná s rovinou $BCGF$, kterou nazýváme α . Bod B je průsečík přímky a s rovinou α . Zapišeme $\{B\} = a \cap \alpha$.



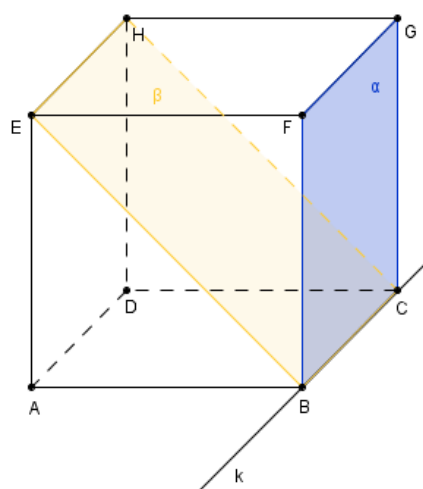
Zde na obrázku je přímka a rovnoběžná s rovinou $BCGF$, kterou nazýváme α . Vidíme, že přímka a nemá s rovinou α žádný společný bod. Tuto situaci zapišeme $a \parallel \alpha$.



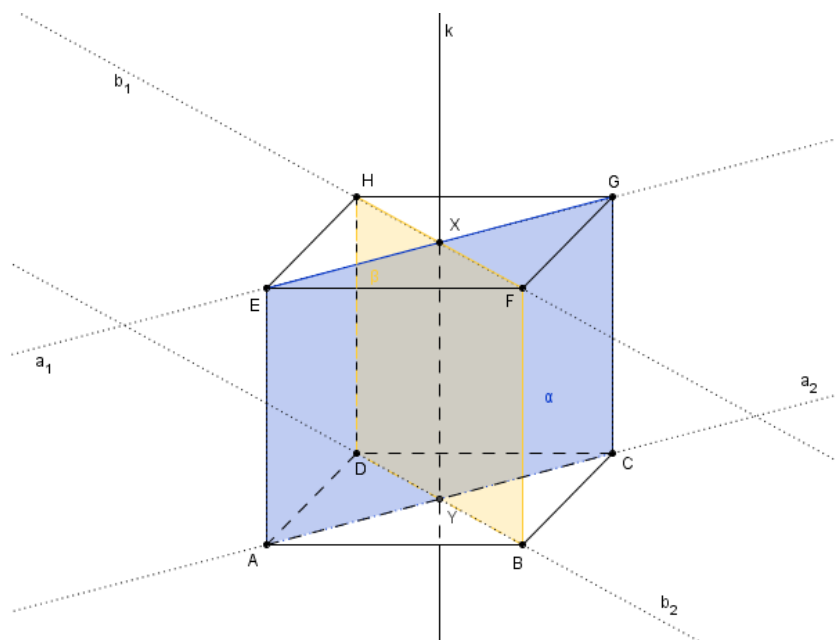
Na tomto obrázku je přímka a také rovnoběžná s rovinou $BCGF$, kterou nazýváme α . Vidíme, že s rovinou α má společné více než dva body. Zapišeme $a \parallel \alpha$.

3.3 Vzájemná poloha dvou rovin

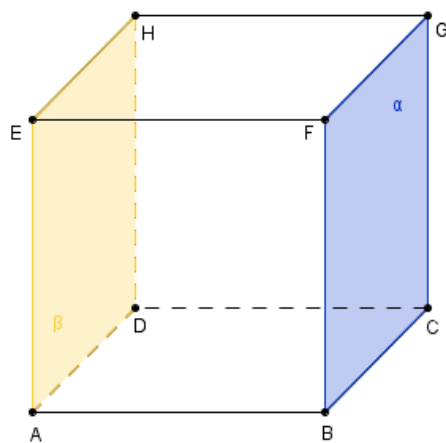
Pokud máme dvě roviny, můžou nastat tři různé polohy a to takové, že roviny budou různoběžné, rovnoběžné nebo rovnoběžné splývající. Pokud rovina α a rovina β jsou různoběžné, znamená to, že mají přímku k , která je pro ně společná. Tuto přímku v tomto případě budeme nazývat průsečnicí. Tu zapišeme $k = \alpha \cap \beta$. Pokud nastane případ, že rovina α a rovina β jsou čistě rovnoběžné, znamená to, že nemají žádný společný bod. Tento případ zapišeme $\alpha \parallel \beta$. Třetím způsobem jsou roviny rovnoběžné splývající neboli totožné. V tomto případě má rovina α s rovinou β společné všechny body. Tento vztah zapišeme $\alpha = \beta$. Uvedeme si zde několik obrázků pro lepší představivost [4].



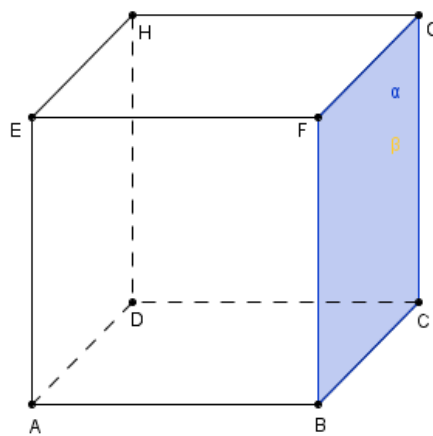
Na tomto obrázku je rovina α různoběžná s rovinou β . Průsečnicí je zde přímka k , která je pro obě roviny společná.



Zde na obrázku je průsečnicí přímka k , která je taky pro obě roviny α, β společná. Zde se nám naskytne otázka, jak najít dva body, kterými povedeme průsečnici k , která má být společná oběma rovinám. Je zde ilustrováno, jak získat průsečnici k . Na obrázku je vidět, že si zvolíme přímku a_1 v rovině α a přímku b_1 v rovině β . Přímky a_1 a b_1 musí být různoběžné. Jejich průsečíkem je bod X a to je první bod, kterým povede průsečnici k . Nyní je potřeba získat bod Y . Opět je potřeba zvolit dvojici přímek, které budou různoběžné, jako v předchozím případě. Když dostaneme i bod Y , poté ho spojíme s bodem X a vznikne nám průsečnice k .



Na tomto obrázku jsou roviny α a β rovnoběžné. Vidíme, že nemají společný žádný bod.



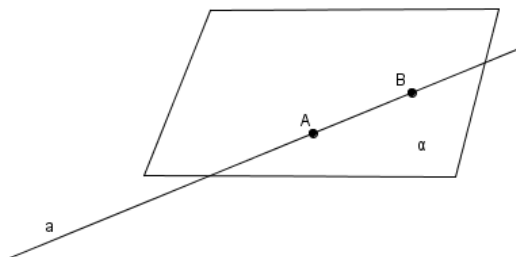
Na tomto obrázku vidíme, že rovina α splývá s rovinou β . Všechny body spolu mají roviny společné.

4. Řezy tělesa rovinou

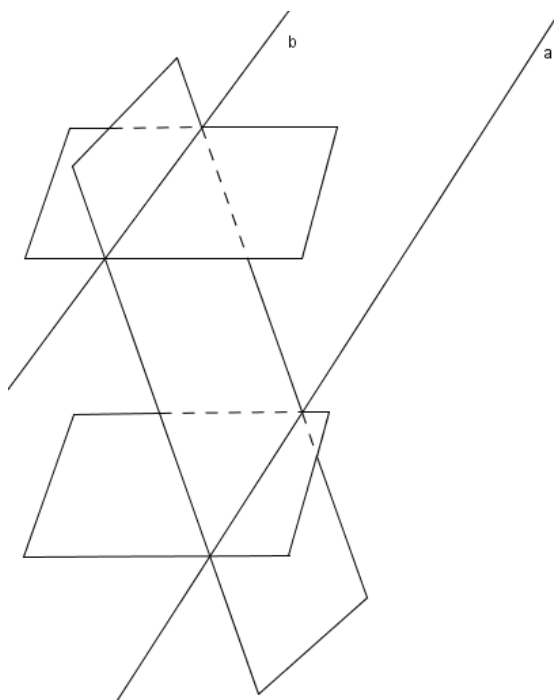
Řez tělesa rovinou je průnik tělesa a roviny řezu. Řez je rovinný útvar, jehož hranice leží na povrchu tělesa. Při konstrukci řezu mnohostěnu rovinou se hledají průsečnice roviny řezu s rovinami stěn tělesa. K řešení patří jen ty části nalezených průsečnic, které leží na povrchu tělesa [5].

Důležité věty:

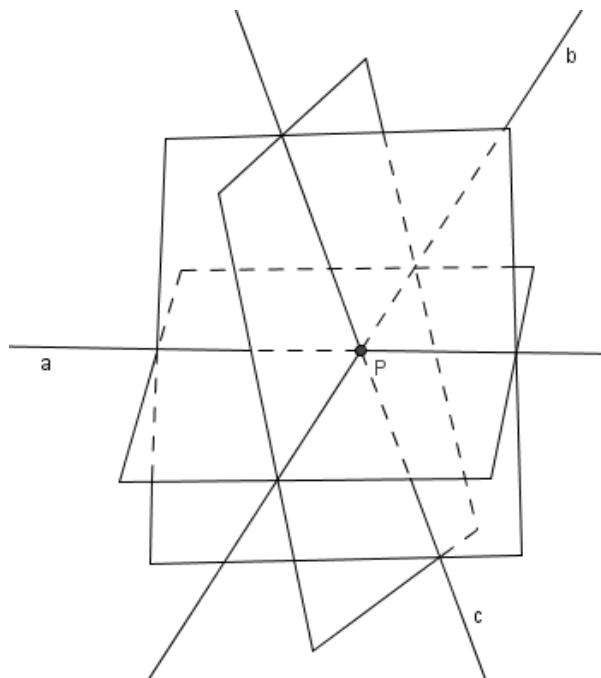
VĚTA 1: Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině [4].



VĚTA 2: Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách [4].



VĚTA 3: Jsou- li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto společným bodem všechny tři průsečnice [4].



Důsledky těchto vět:

DŮSLEDEK 1: Leží - li dva různé body roviny řezu v rovině některé stěny, leží v rovině této stěny i jejich spojnice. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.

DŮSLEDEK 2: Jsou – li roviny dvou stěn rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné.

DŮSLEDEK 3: Průsečnice rovin dvou sousedních stěn (tj. stěn se společnou hranou) s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana, se protínají v jednom bodě [4].

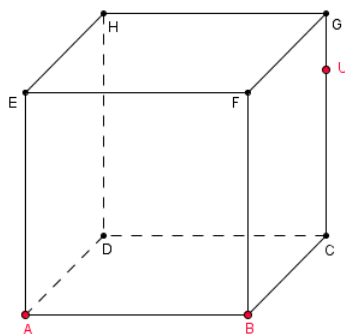
4.1 Příklady na řezy krychle

1) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou ABU .

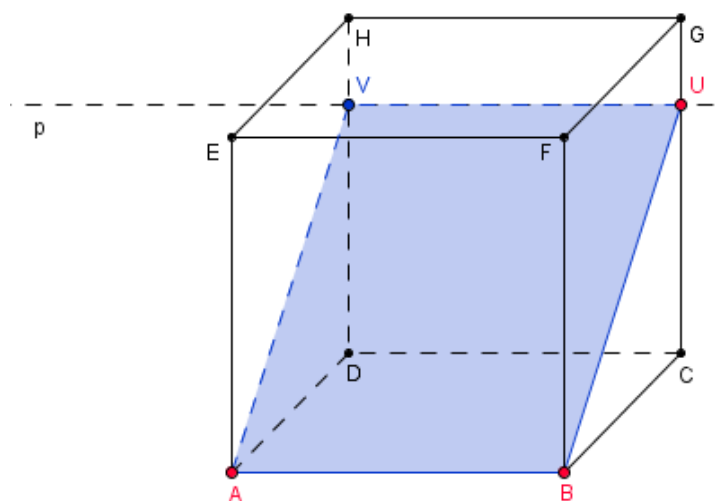
Zadání bodů ABU : $A = A$

$B = B$

$U \in CG \wedge |CU| = 3|GU|$



- Postup konstrukce:
1. AB (vyznač úsečku AB)
 2. BU (vyznač úsečku BU)
 3. $\leftrightarrow p; \leftrightarrow p \parallel AB \wedge \leftrightarrow p \in U$
 4. $V; V \in \leftrightarrow p \cap DH$
 5. UV (vyznač úsečku UV)
 6. AV (vyznač úsečku AV)



Řešení: Řezem krychle $ABCDEFGH$ je čtyřúhelník $ABUV$.

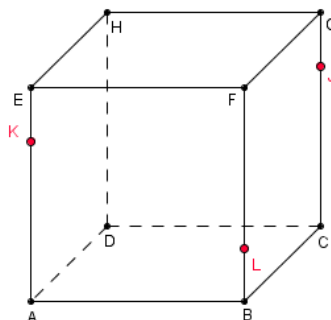
Komentář: Nejprve si vyznačíme zadané body na krychli, tím dostaneme bod A , B a U . V dalším kroku spojíme úsečku AB . Dále můžeme spojit i bod B s bodem U , protože leží oba dva v pravé boční stěně krychle. Jako další povedeme rovnoběžku s úsečkou BU bodem A , protože protější stěny jsou rovnoběžné. Tam, kde nám rovnoběžka protne levou boční stěnu krychle s úsečkou DH , dostaneme bod V . Poté spojíme bod U s vzniklým bodem V . V posledním kroku vyznačíme řez krychle $ABCDEFGH$, kterým je v tomto případě čtyřúhelník $ABUV$.

2) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLJ .

Zadání bodů KLJ : $K \in AE \wedge |AK| = 3|EK|$

$L \in BF \wedge |FL| = 3|BL|$

$J \in CG \wedge |CJ| = 3|GJ|$



Postup konstrukce: 1. KL (vyznač úsečku KL)

2. LJ (vyznač úsečku LJ)

3. $\leftrightarrow p$; $\leftrightarrow p \parallel LJ \wedge \leftrightarrow p \in K$

4. N ; $N \in EH \cap \leftrightarrow p$

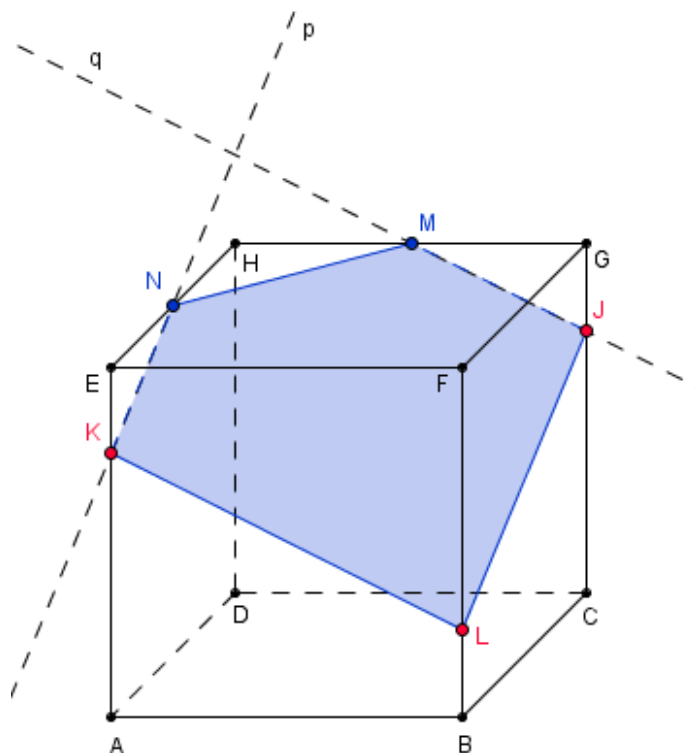
5. KN (vyznač úsečku KN)

6. $\leftrightarrow q$; $\leftrightarrow q \parallel KL \wedge \leftrightarrow q \in J$

7. M ; $M \in GH \cap \leftrightarrow q$

8. MJ (vyznač úsečku MJ)

9. MN (vyznač úsečku MN)



Řešení: Řezem krychle $ABCDEFGH$ je pětiúhelník $KLJMN$.

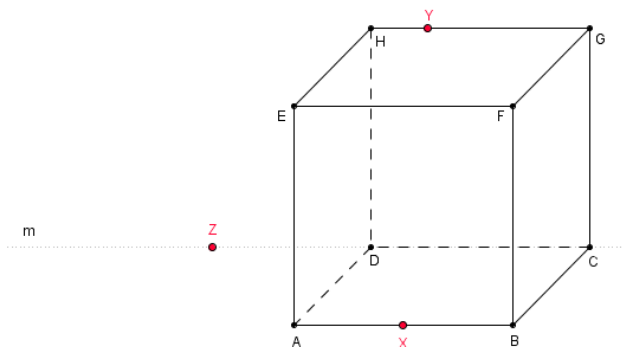
Komentář: Nejprve si vyznačíme zadané body KLJ na krychli $ABCDEFGH$. Protože bod K i bod L jsou v přední stěně krychle, můžeme je spojit úsečkou. Dostaneme úsečku KL . Současně bod L i bod J leží v pravé boční stěně krychle a také je můžeme spojit úsečkou. Dostaneme úsečku LJ . V dalším kroku povedeme přímkou p , která bude rovnoběžná s úsečkou LJ a povedeme jí bodem K . Tento krok můžeme provést, protože protější stěny krychle jsou rovnoběžné. Dostaneme řez levé boční stěny krychle a bod N . Bod N je průsečíkem přímky p a úsečky EH . Tím pádem vyznačíme úsečku KN . Další rovnoběžka q , kterou sestojíme, bude rovnoběžná s KL a povedeme jí bodem J . Stěny jsou opět rovnoběžné, proto provedeme tento krok a dostaneme řez zadní stěny krychle a bod M . Bod M bude průsečíkem přímky q a úsečky HG . Poté už jen vyznačíme úsečky MJ a MN . V poslední řadě musíme vyznačit řez krychle, kterým je v tomto případě pětiúhelník $KLJMN$.

3) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou XYZ .

Zadání bodů XYZ : $X \in S_{AB}$

$Y \in GH \wedge |GY| = 3|HY|$

$Z \in m \wedge \text{nenáleží krychli } ABCDEFGH; |DZ| = 4\text{ cm}$



Postup konstrukce: 1. $\leftrightarrow n; \leftrightarrow n \in XZ$

2. $L; L \in AD \cap \leftrightarrow n$

3. LX (vyznač úsečku LX)

4. $\leftrightarrow o; \leftrightarrow o \in YZ$

5. $N; N \in DH \cap \leftrightarrow o$

6. NY (vyznač úsečku NY)

7. LN (vyznač úsečku LN)

8. $\leftrightarrow r; \leftrightarrow r \in EF$

9. $\leftrightarrow s; \leftrightarrow s \parallel \leftrightarrow n \wedge \leftrightarrow s \in Y$

10. $\leftrightarrow q; \leftrightarrow q \parallel \leftrightarrow o \wedge \leftrightarrow q \in X$

11. $W; W \in \leftrightarrow r \cap \leftrightarrow s \cap \leftrightarrow q$

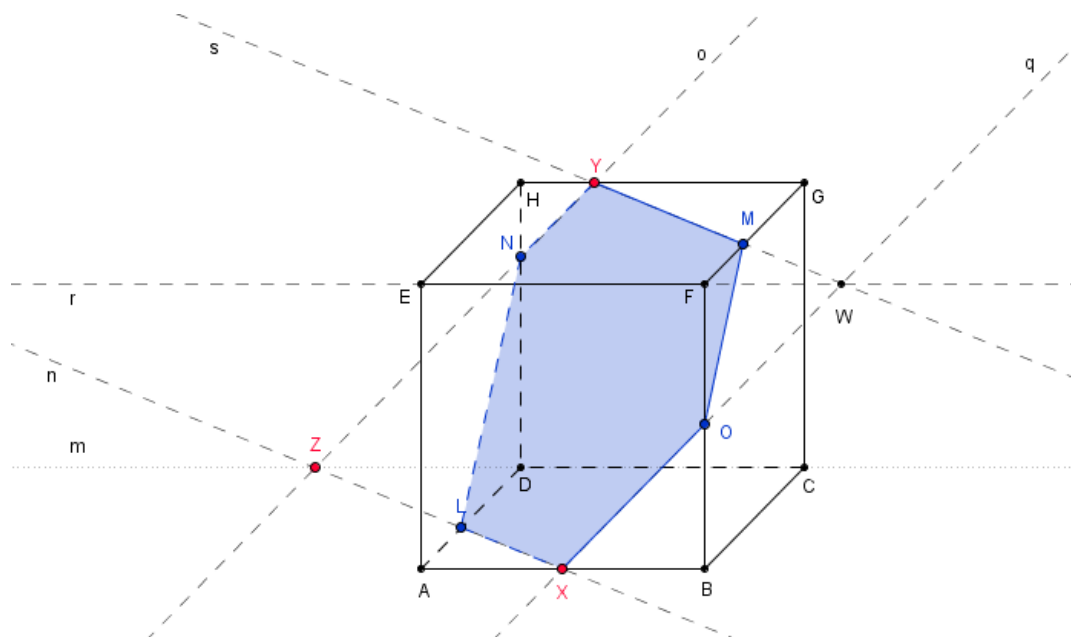
12. $M; M \in \leftrightarrow s \wedge M \in FG$

13. $O; O \in \leftrightarrow q \wedge O \in BF$

14. YM (vyznač úsečku YM)

15. MO (vyznač úsečku MO)

16. OX (vyznač úsečku OX)



Řešení: Řezem krychle $ABCDEFGH$ je šestiúhelník $XOMYNL$.

Komentář: Nejprve si vyznačíme zadané body X, Y, Z na krychli $ABCDEFGH$. Pouze bod Z neleží na krychli, ale sestrojíme ho tak, že povedeme přímku m body DC a od bodu D vyznačíme čtyři centimetry na této přímce m . V prvním kroku zvolíme přímku n , která nám spojí body XZ . Oba dva body jsou společné spodní stěně krychle, protože bod Z sice neleží na krychli, ale má se spodní stěnou krychle společnou přímku m . Tímto krokem dostaneme řez spodní stěny krychle a bod L . Bod L je průsečíkem přímky n a úsečky AD . Nyní vyznačíme úsečku LX . Dále povedeme přímku o , která bude spojovat bod Y a bod Z . Tyto body mají opět společnou zadní stěnu krychle, které bod Z náleží díky přímce m . Tímto dostaneme bod N na levé boční stěně krychle, který je průsečíkem přímky o a úsečky DH . Nyní vyznačíme úsečky NY a LN . Dále je potřeba vést přímku r a přímku s . Přímku r povedeme body EF , protože jsou součástí horní stěny krychle. A přímka s bude rovnoběžná s přímkou n , protože se zachovává rovnoběžnost protějších stěn krychle. Průsečíkem přímky r a s je bod W . Bod W spojíme s bodem Y a dostaneme řez horní stěny krychle a bod M . Bod M je průsečíkem přímky s a úsečky FG . Dále spojíme úsečku YM . Poté povedeme rovnoběžku q , která bude rovnoběžná s přímkou o a povedeme ji body X a W . Zde jsou boční stěny opět rovnoběžné, proto můžeme provést tento krok. Tímto dostaneme bod O , který je průsečíkem přímky q a úsečky BF . Nesmíme zapomenout na vyznačení úseček MO a

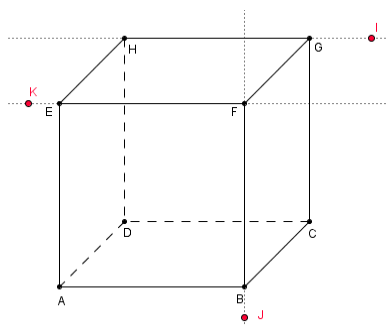
OX . V poslední řadě vyznačíme řez krychle $ABCDEFGH$, kterým je v tomto případě šestiúhelník $XOMYNL$.

4) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou IJK .

Zadání bodů IJK : $I \in \leftrightarrow GH \wedge \text{nenáleží krychli } ABCDEFGH$; $|GI| = 2\text{ cm}$

$J \in \leftrightarrow BF \wedge \text{nenáleží krychli } ABCDEFGH$; $|BJ| = 1\text{ cm}$

$K \in \leftrightarrow EF \wedge \text{nenáleží krychli } ABCDEFGH$; $|KE| = 1\text{ cm}$



Postup konstrukce: 1. $\leftrightarrow i$; $\leftrightarrow i \in IJ$

2. L ; $L \in BC \cap \leftrightarrow i$

3. M ; $M \in CG \cap \leftrightarrow i$

4. LM ; (vyznač úsečku LM)

5. $\leftrightarrow j$; $\leftrightarrow j \in KJ$

6. N ; $N \in AE \cap \leftrightarrow j$

7. O ; $O \in AB \cap \leftrightarrow j$

8. NO ; (vyznač úsečku NO)

9. OL ; (vyznač úsečku OL)

10. $\leftrightarrow k$; $\leftrightarrow k \parallel \leftrightarrow j \wedge \leftrightarrow k \in M$

11. P ; $P \in HG \cap \leftrightarrow k$

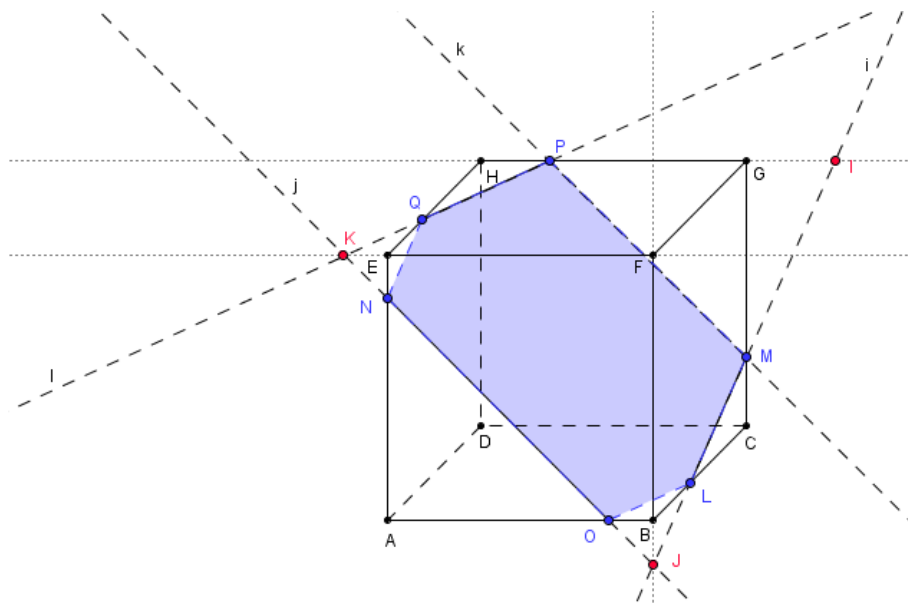
12. $\leftrightarrow l$; $\leftrightarrow l \parallel OL \wedge \leftrightarrow l \in P$

13. Q ; $Q \in \leftrightarrow l \wedge Q \in EH$

14. PM ; (vyznač úsečku PM)

15. PQ ; (vyznač úsečku PQ)

16. QN ; (vyznač úsečku QN)



Řešení: Řezem krychle $ABCDEFGH$ je šestiúhelník $OLMPQN$.

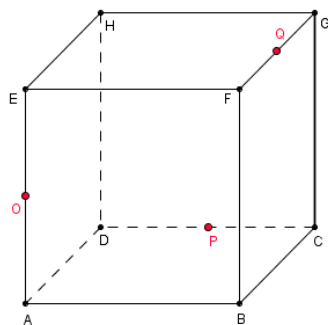
Komentář: Nejprve si vyznačíme body, které všechny budou ležet mimo krychli $ABCDEFGH$. Bod I získáme tak, že na přímce, kterou vedeme body GH , nanese od bodu G dva centimetry. Obdobně získáme i body J, K . Nyní můžeme spojit body I, J přímkou i , i když jsou body mimo krychli. Při spojení dostaneme řez pravé boční stěny krychle. Dostaneme bod L a M . Bod L bude ležet na přímce i a úsečce BC a bod M také na přímce i a úsečce CG . Body LM spojíme úsečkou. Nyní povedeme přímku j vnějšími body K, J . Po spojení dostaneme řez přední strany krychle a body O a N . Bod O vznikne na přímce j v průniku s úsečkou AB a bod N je průsečík přímky j s úsečkou AE . Dále spojíme úsečku NO a OL . Poté povedeme přímku k , která bude rovnoběžná s přímkou j , bodem M . Tento krok můžeme provést, protože protější strany jsou rovnoběžné. Tímto získáme řez na zadní straně krychle a bod P , který je průsečíkem přímky k a úsečky HG . Další rovnoběžku l , můžeme vést s úsečkou OL , bodem P . Opět jsou strany rovnoběžné, tak můžeme provést tento krok. Dostaneme bod Q , který je průsečíkem přímky l a úsečky EH . Poté už spojíme jen úsečky PM, PQ, QN . Nakonec vyznačíme řez krychle $ABCDEFGH$, kterým je v tomto případě šestiúhelník $OLMPQN$.

5) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou O, P, Q [3].

Zadání bodů OPQ : $O = S_{AE}$

$P = S_{CD}$

$Q = S_{FG}$



Postup konstrukce: 1. *kolmý průmět do horní stěny krychle $\in P \wedge O$*

2. $\leftrightarrow a$; $\leftrightarrow a \in P \wedge O$

3. X ; $X \in \leftrightarrow a \cap \text{roviny}$

4. $\leftrightarrow b$; $\leftrightarrow b \in Q \wedge X$

5. R ; $R \in EF \cap \leftrightarrow b$

6. OR ; (vyznač úsečku OR)

7. RQ ; (vyznač úsečku RQ)

8. $\leftrightarrow c$; $\leftrightarrow c \parallel RQ \wedge \leftrightarrow c \in P$

9. S ; $S \in AD \cap \leftrightarrow c$

10. OS ; (vyznač úsečku OS)

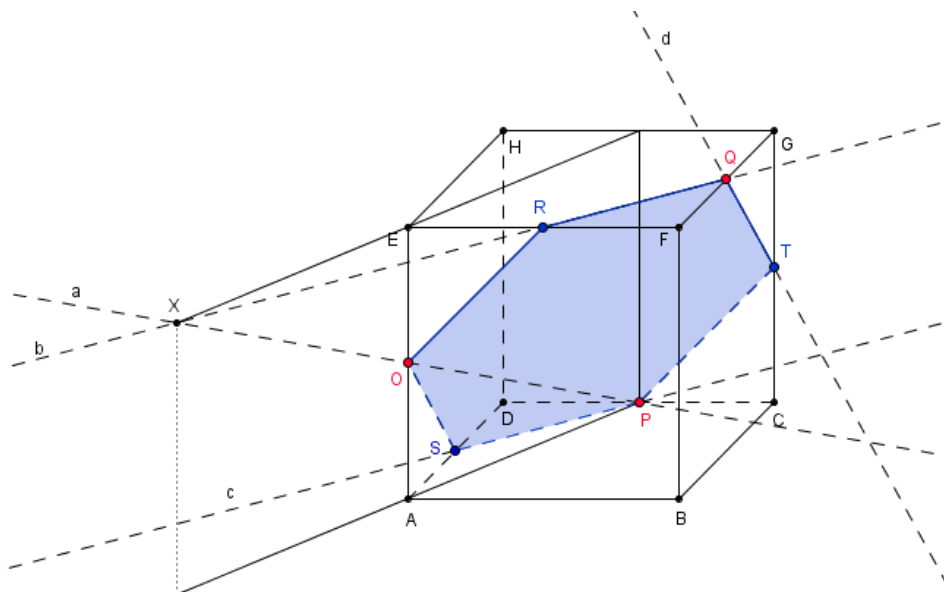
11. SP ; (vyznač úsečku SP)

12. $\leftrightarrow d$; $\leftrightarrow d \parallel OS \wedge \leftrightarrow d \in Q$

13. T ; $T \in \leftrightarrow d \wedge T \in CG$

14. PT ; (vyznač úsečku PT)

15. TQ ; (vyznač úsečku TQ)

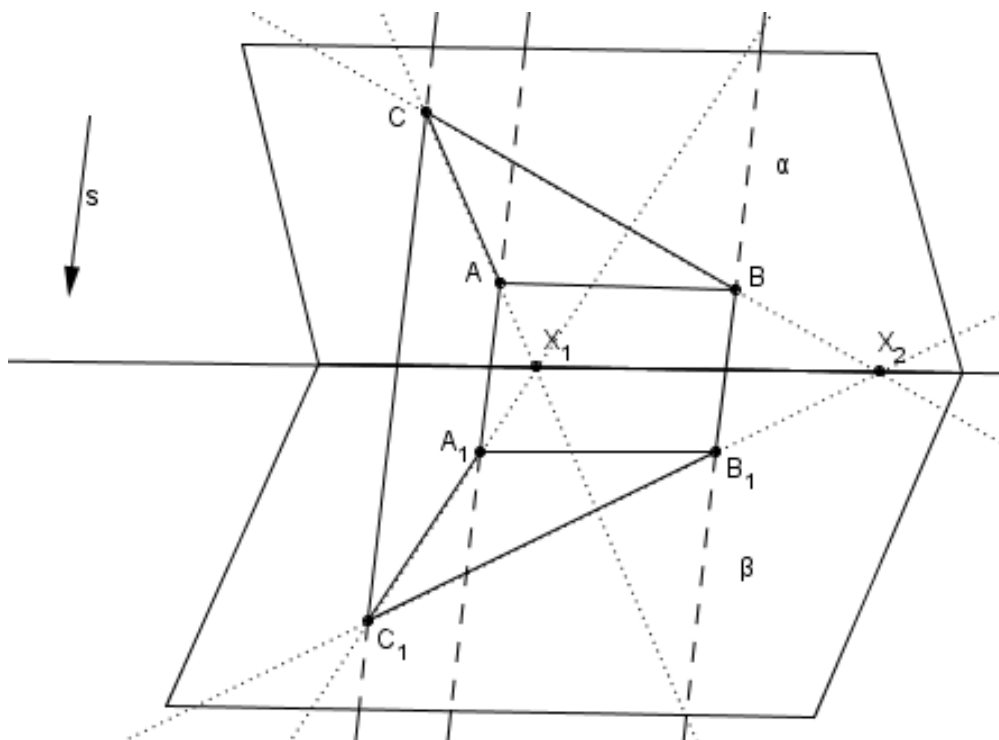


Řešení: Řezem krychle $ABCDEFGH$ je šestiúhelník $OSPTQR$.

Komentář: Nejprve si vyznačíme zadané body krychle O, P, Q . Zde v tomto příkladu zjistíme, že žádné dva body neleží ve stejné stěně krychle. V tomto případě nemůžeme využít žádného ze tří důsledků uvedených na začátku kapitoly 4. Nyní tedy jako první sestrojíme rovinu kolmou na horní stěnu krychle, která prochází body P a O . Nyní povedeme přímku a bodem P a O . Tam, kde nám přímka a protne námi sestrojenou rovinu, dostáváme bod X . Bod X je bod, kterým prochází rovina řezu. Dále sestrojíme přímku b , která bude procházet bodem Q a bodem X . Díky této přímce b nám vznikne bod R , který náleží přímce b a úsečce EF . Nyní, jak již umíme, můžeme vyznačit úsečku OR a dále úsečku RQ . Další přímkou bude přímka c , která bude rovnoběžná s vyznačenou úsečkou RQ v horní stěně krychle a bude procházet bodem P , který leží ve spodní stěně krychle, která je s horní stěnou krychle rovnoběžná. Vznikne nám bod S , bod S náleží přímce c a úsečce AD . Nyní můžeme vyznačit úsečky OS a SP . Poslední přímkou bude přímka d , která je rovnoběžná s vyznačenou úsečkou OS v levé boční stěně krychle a bude procházet bodem Q , který leží v pravé boční stěně krychle, která je s levou boční stěnou krychle rovnoběžná. Dostáváme bod T . Bod T náleží přímce d a úsečce CG . Jako poslední vyznačíme úsečky PT a TQ . Nakonec vyznačíme řez krychle $ABCDEFGH$, kterým je v tomto případě šestiúhelník $OSPTQR$.

4.2 Osová afinita

Osová afinita je zadána směrem afinity, osou afinity a dvojicí sobě odpovídajících bodů. Vlastnosti osově afinity jsou tři. První vlastnost je, že sobě odpovídající body leží na přímkách rovnoběžných se směrem afinity. Druhou vlastností osově afinity je, že sobě odpovídající přímky se protínají na ose afinity nebo také mohou být rovnoběžné s osou afinity. Třetí vlastností je, že body na ose afinity jsou samodružné, což znamená, že vzor i obraz je totožný. Osová afinita se využívá při řezech těles, např. krychle.



Na obrázku vidíme směrovou přímku afinity s , která určuje směr afinity a dvě různoběžné roviny α a β . Směrová přímka není součástí ani jedné z rovin α a β . Trojúhelník ABC , který náleží rovině α promítneme ve směru afinity do roviny β a získáme trojúhelník A_1, B_1, C_1 . Tyto dva trojúhelníky jsou ve vztahu osově afinity. Na obrázku také vidíme osu afinity, kterou je přímka o , což je průsečnice dvou rovin α a β a zároveň se na ní protínají přímky, které si v afinitě odpovídají. Místo, kde se na ose afinity sobě odpovídající přímky protínají, jsou body X_1, X_2 . Pokud budeme spojovat sobě odpovídající body trojúhelníku, budou mít směr afinity.

$$\text{bod } T \in CG \wedge |CT| = 3|GT|.$$

37

V posledním kroku vyznačíme řez krychle. Řezem krychle je pětiúhelník $RSTUV$. Osou afinity v tomto případě je přímka o , která je průsečnicí rovin a leží na ní body sobě odpovídajících přímek, což v našem případě jsou body X_1, X_2, X_3 a X_4 . Směrem afinity v tomto případě můžeme brát úsečku AE . V tomto případě můžeme tedy využít osové afinity při konstrukci řezu krychle $ABCDEFGH$.

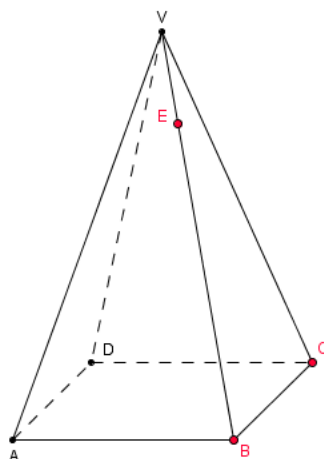
4.3 Příklady na řezy jehlanu

- 1) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$.
Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$ rovinou BCE

Zadání bodů BCE : $B = B$

$$C = C$$

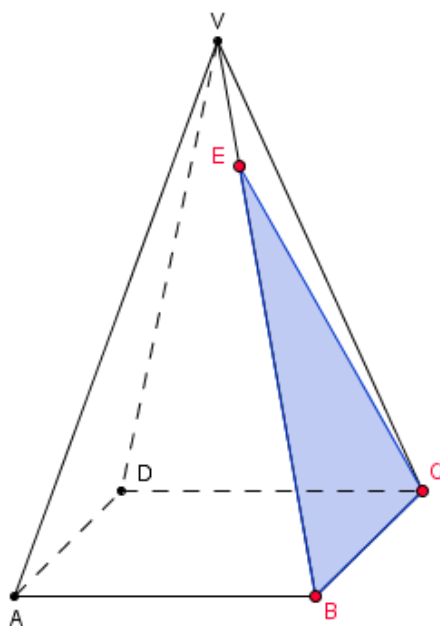
$$E \in BV \wedge |BE| = 3|VE|$$



Postup konstrukce: 1. BC (vyznač úsečku BC)

2. BE (vyznač úsečku BE)

3. CE (vyznač úsečku CE)



Řešení: Řezem jehlanu $ABCDV$ je trojúhelník BCE .

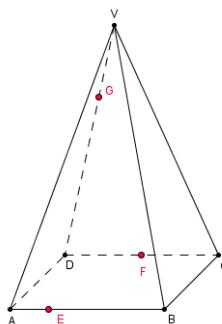
Komentář: Nejprve si vyznačíme v jehlanu zadané body. Tímto nám vznikne bod B, C a E. Jelikož všechny zadané body jsou součástí pravé boční stěny jehlanu, můžeme spojit všechny body. Zprvce vytvořím úsečku BC , BE a nakonec CE . Poté vyznačíme řez jehlanu $ABCDV$, kterým je v tomto případě trojúhelník BCE .

- 2) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$.
Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$ rovinou EFG .

Zadání bodů EFG : $E \in AB \wedge |BE| = 3|AE|$

$F = S_{CD}$

$G \in DV \wedge |DG| = 3|VG|$



Postup konstrukce: 1. EF (vyznač úsečku EF)

2. FG (vyznač úsečku FG)

3. $\leftrightarrow k; \leftrightarrow k \in EF$

4. $\leftrightarrow l; \leftrightarrow l \in AD$

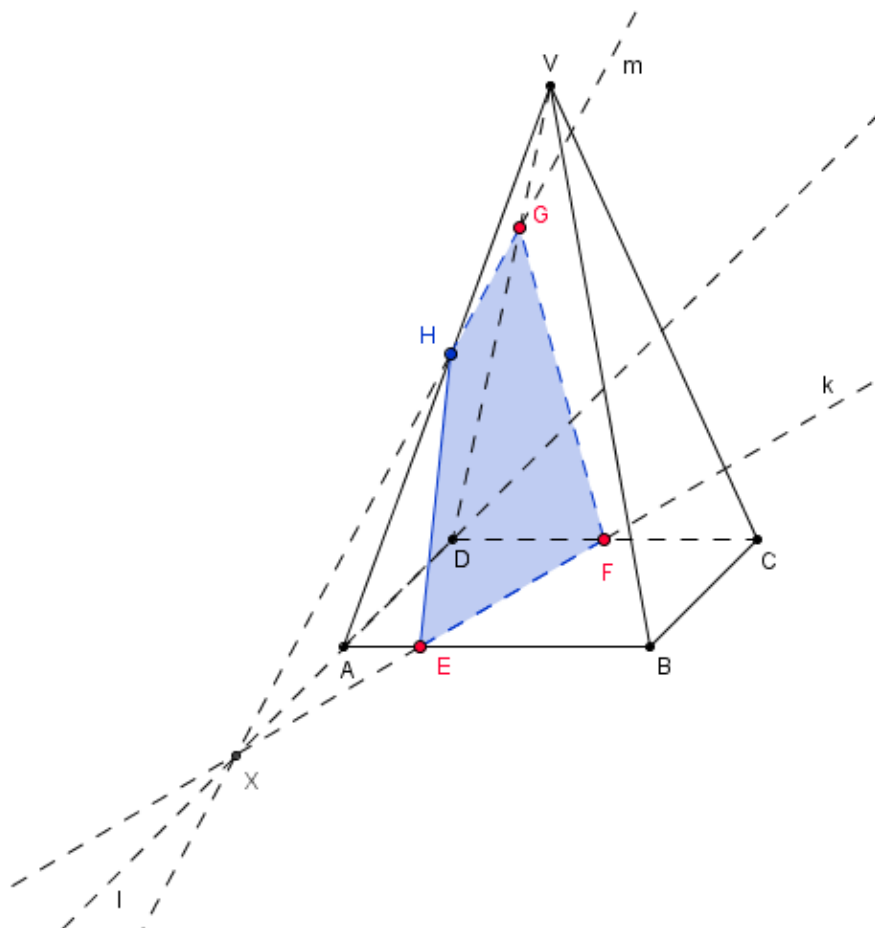
5. $X; X \in \leftrightarrow k \cap \leftrightarrow l$

6. $\leftrightarrow m; \leftrightarrow m \in GX$

7. $H; H \in \leftrightarrow m \cap AV$

8. GH (vyznač úsečku GH)

9. EH (vyznač úsečku EH)



Řešení: Řezem jehlanu $ABCDV$ je čtyřúhelník $EFGH$.

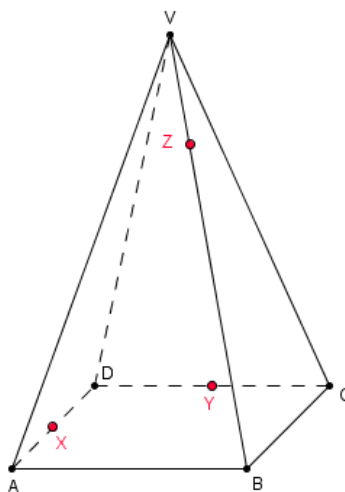
Komentář: Nejprve si vyznačíme zadané body na jehlanu. Tím dostaneme body E, F a G . Poté vyznačíme úsečku EF , protože oba body leží ve spodní stěně jehlanu. Další úsečku, kterou můžeme ihned vyznačit je úsečka FG , protože oba body leží v zadní stěně jehlanu. Nyní je potřeba sestrojít přímku k , která bude procházet úsečkou EF a bude náležet spodní stěně jehlanu. Další přímkou bude přímka l , která bude procházet úsečkou AD a bude součástí spodní a levé boční stěny jehlanu. Tam, kde se nám přímka k a přímka l protnou, vznikne bod X . Bodem X a bodem G povedeme poslední přímku m . Přímka m protne úsečku AV a v místě průsečíku nám vznikne bod H . Bod H spojíme nejdříve s bodem G a vznikne nám úsečka GH . Body můžeme spojit, protože oba dva leží v levé boční stěně jehlanu. Dále bod H spojíme s bodem E , dostaneme úsečku EH a je to možné díky tomu, že oba dva body jsou součástí přední stěny jehlanu. Nakonec vyznačíme řez jehlanu $ABCDV$, kterým je v tomto případě čtyřúhelník $EFGH$.

3) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$ rovinou XYZ .

Zadání bodů XYZ : $X \in S_{AD}$

$Y \in S_{CD}$

$Z \in BV \wedge |BZ| = 3|VZ|$



Postup konstrukce: 1. XY (vyznač úsečku XY)

2. $\leftrightarrow k; \leftrightarrow k \in XY$

3. $\leftrightarrow l; \leftrightarrow l \in AB$

4. $P; P \in \leftrightarrow k \cap \leftrightarrow l$

5. $\leftrightarrow m; \leftrightarrow m \in PZ$

6. $U; U \in AV \cap \leftrightarrow m$

7. ZU (vyznač úsečku ZU)

8. XU (vyznač úsečku XU)

9. $\leftrightarrow n; \leftrightarrow n \in BC$

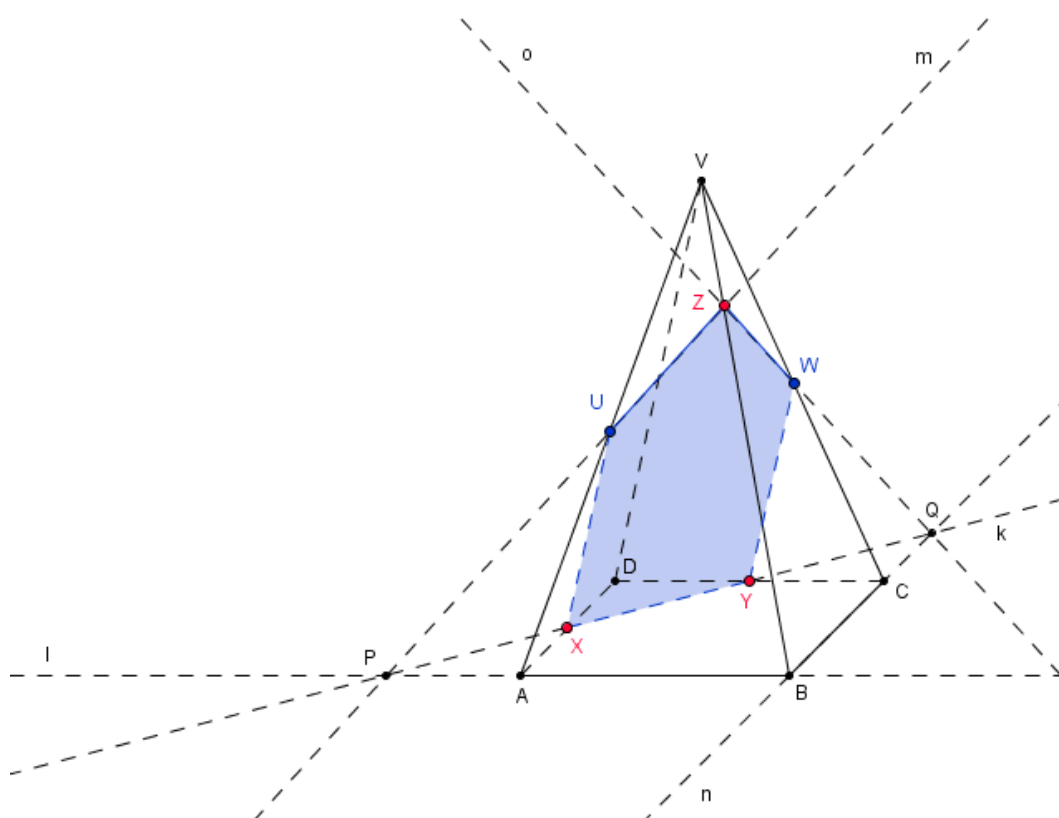
10. $Q; Q \in \leftrightarrow k \cap \leftrightarrow n$

11. $\leftrightarrow o; \leftrightarrow o \in QZ$

12. $W; W \in CV \cap \leftrightarrow o$

13. YW (vyznač úsečku YW)

14. ZW (vyznač úsečku ZW)



Řešení: Řezem jehlanu $ABCDV$ je pětiúhelník $XYWZU$.

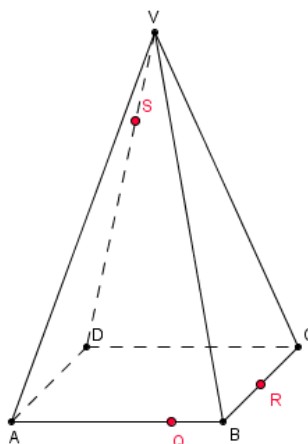
Komentář: Nejprve si vyznačíme zadané body na jehlanu. Tím dostaneme bod X, Y a Z . Poté spojíme zadané body X a Y , protože leží ve spodní stěně jehlanu. První přímku, kterou sestrojíme, bude přímka k , kterou povedeme úsečkou XY , která leží ve spodní stěně jehlanu. Další přímkou bude přímka l vedená úsečkou AB , která je součástí spodní stěny jehlanu, ale také součástí přední stěny jehlanu, jako náš zadaný bod Z . Průsečíkem přímky k a přímky l vznikne bod P . Bodem P a Z povedeme přímku m . Tam, kde se nám přímka m a úsečka AV protnou, vznikne bod U . Bod U spojíme s bodem Z , protože oba leží v přední stěně jehlanu a vznikne nám úsečka ZU . Dále bod U spojíme s bodem X , protože oba dva body leží v levé boční stěně jehlanu a tím vznikne úsečka XU . Jako další sestrojíme přímku n , která prochází úsečkou BC a náleží současně pravé boční stěně a spodní stěně jehlanu. Tam, kde se nám protnou přímky k a n , vznikne bod Q . Bodem Q a bodem Z vedeme přímku o . Tam, kde nám přímka o protne úsečku CV , dostáváme bod W . Bod W spojíme s bodem Z , protože oba leží v pravé boční stěně jehlanu a vznikne úsečka ZW . Také spojíme bod W s bodem Y , protože oba dva leží v zadní stěně jehlanu a vznikne úsečka YW . Nakonec vyznačíme řez jehlanu $ABCDV$, kterým je v tomto případě pětiúhelník $XYWZU$.

4) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$ rovinou QRS .

Zadání bodů QRS : $Q \in AB \wedge |AQ| = 3|BQ|$

$R \in BC$

$S \in DV \wedge |DS| = 3|VS|$



Postup konstrukce: 1. QR (vyznač úsečku QR)

2. $\leftrightarrow s; \leftrightarrow s \in QR$

3. $\leftrightarrow t$; $\leftrightarrow t \in AD$

4. $X; X \in \leftrightarrow s \cap \leftrightarrow t$

5. $T; T \in AV \cap XS$

6. ST (vyznač úsečku ST)

7. TQ (vyznač úsečku TQ)

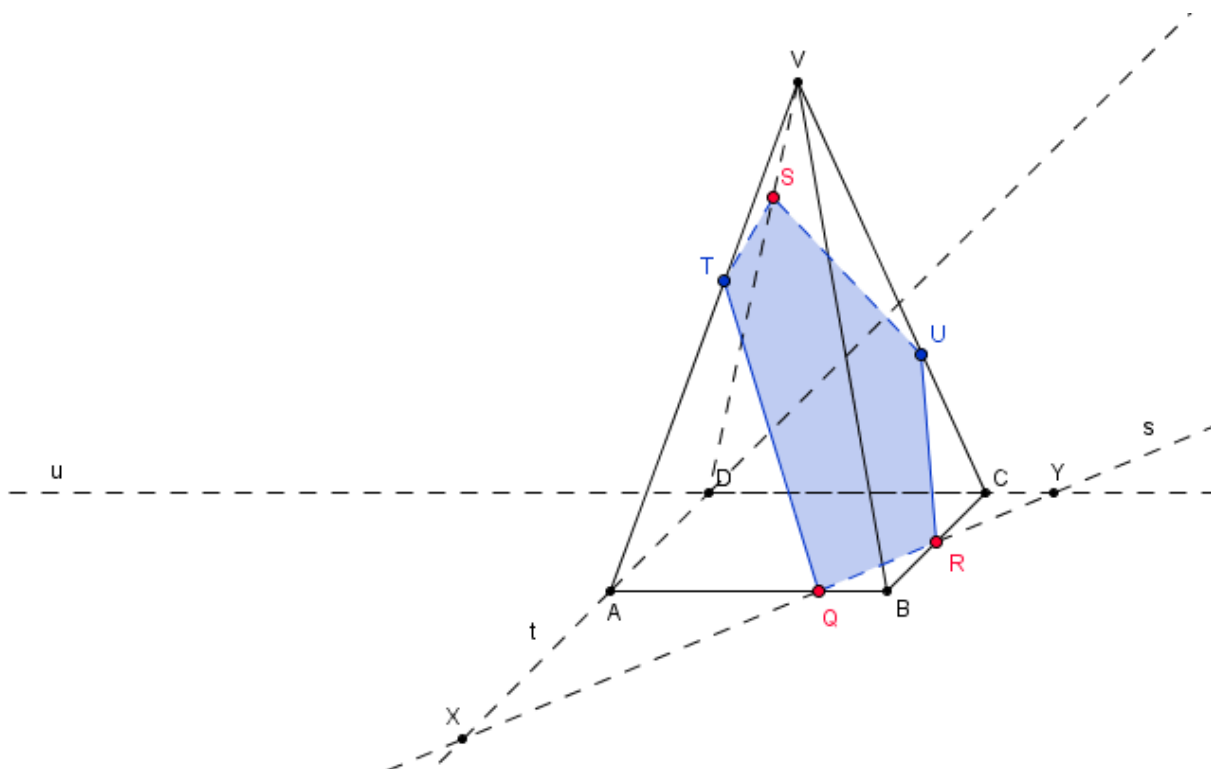
8. $\leftrightarrow u; \leftrightarrow u \in DC$

9. $Y; Y \in \Leftrightarrow u \cap \Leftrightarrow s$

10. $U; U \in CV \cap YS$

11. SU (vyznač úsečku SU)

12. *RU (vyznač úsečku RU)*



Řešení: Řezem jehlanu $ABCDV$ je pětiúhelník $QRUST$.

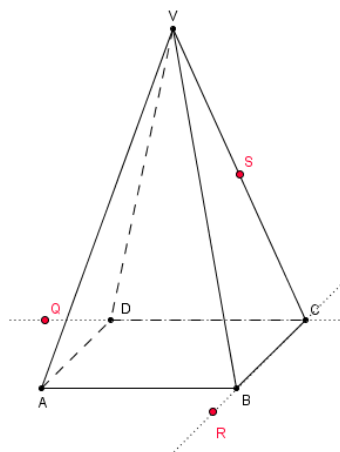
Komentář: Nejprve si vyznačíme zadané body na jehlanu. Tím dostaneme body Q, R a S . V dalším kroku sestrojíme úsečku QR , protože oba body náležejí spodní stěně jehlanu. Poté povedeme přímku s úsečkou QR , která je součástí spodní stěny jehlanu a současně také povedeme přímku t úsečkou AD , která je součástí levé boční stěny jehlanu, kde je náš zadaný bod S . Tam, kde se tyto přímky s a t protnou, dostáváme bod X . Po tomto kroku spojíme bod X s bodem S a tam, kde budeme mít průsečík s úsečkou AV , vznikne bod T . Bod T spojíme s bodem S , protože oba body leží v levé stěně jehlanu a vznikne nám úsečka ST . Ihned můžeme také spojit bod T s bodem Q , protože oba body leží v přední stěně jehlanu a dostaneme úsečku TQ . Poslední přímku, kterou sestrojíme, je přímka u , kterou povedeme body D a C . Průsečíkem přímky u s již sestrojenou přímku s dostaneme bod Y . Poté spojíme bod Y s bodem S a tam, kde budeme mít průsečík s úsečkou CV , vznikne bod U . Bod U spojíme s bodem S , protože oba body náležejí zadní stěně jehlanu a dostaneme úsečku SU . Poté spojíme bod U s bodem R , protože oba dva body náležejí pravé boční stěně jehlanu a dostaneme úsečku RU . Nakonec vyznačíme řez jehlanu $ABCDV$, kterým je v tomto případě pětiúhelník $QRUST$.

5) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$ rovinou QRS

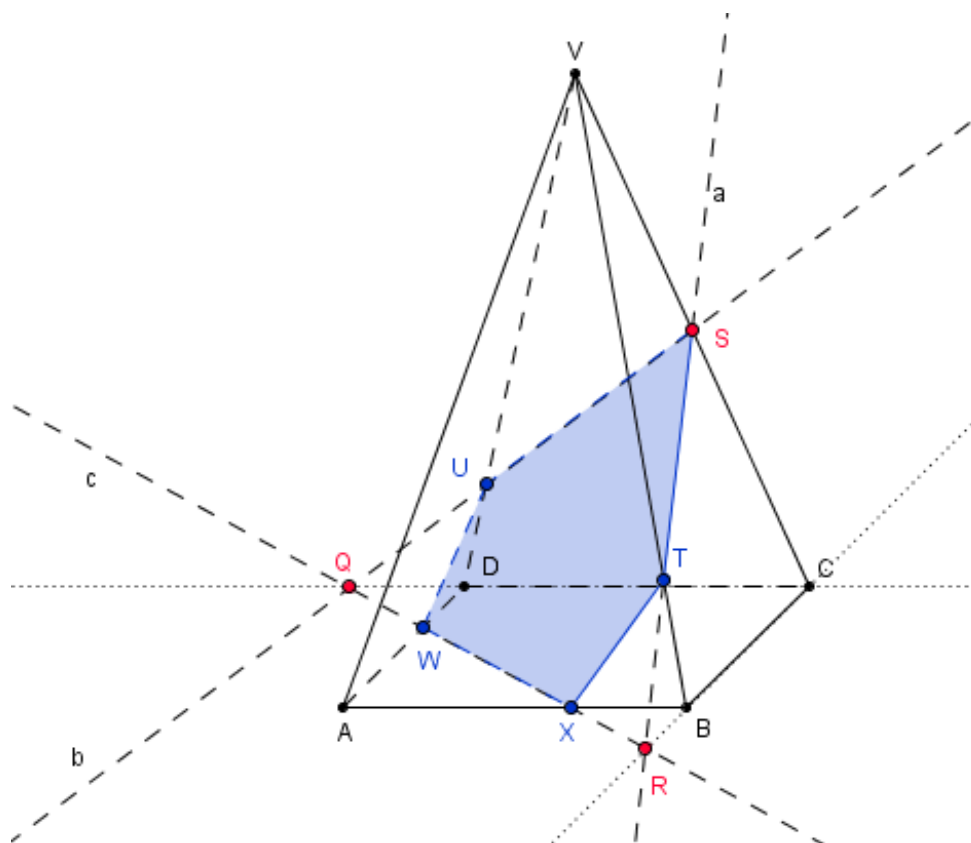
Zadání bodů QRS : $Q \in \leftrightarrow CD \wedge \text{nenáleží jehlanu } ABCDV$; $|DQ| = 2\text{ cm}$

$R \in \leftrightarrow BC \wedge \text{nenáleží jehlanu } ABCDV$; $|BR| = 1\text{ cm}$

$S = S_{CV}$



- Postup konstrukce:
1. $\leftrightarrow a; \leftrightarrow a \in RS$
 2. $\leftrightarrow b; \leftrightarrow b \in QS$
 3. $T; T \in \leftrightarrow a \cap BV$
 4. $U; U \in \leftrightarrow b \cap DV$
 5. SU (vyznač úsečku SU)
 6. ST (vyznač úsečku ST)
 7. $\leftrightarrow c; \leftrightarrow c \in QR$
 8. $W; W \in \leftrightarrow c \cap AD$
 9. $X; X \in \leftrightarrow c \cap AB$
 10. WX (vyznač úsečku WX)
 11. TX (vyznač úsečku TX)
 12. UW (vyznač úsečku UW)

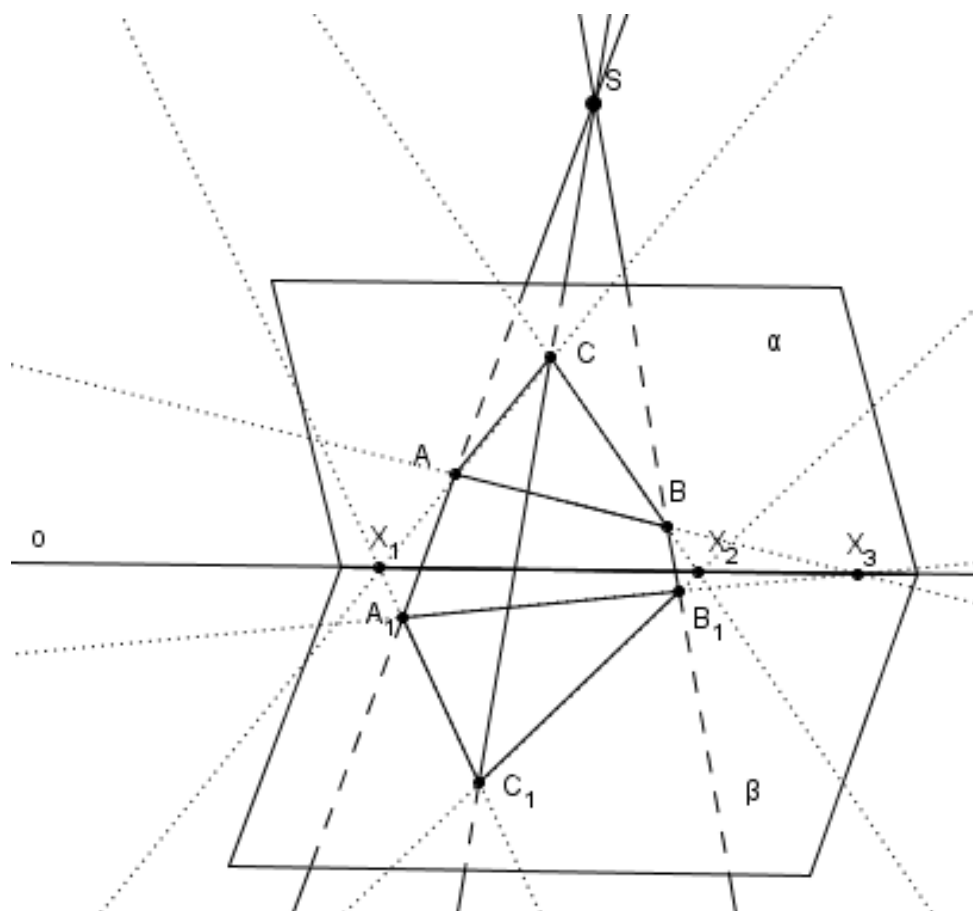


Řešení: Řezem jehlanu $ABCDV$ je pětiúhelník $XTSUW$.

Komentář: Nejprve si vyznačíme zadané body na jehlanu a mimo něj. Tím dostaneme bod Q, R a S . Bod Q a bod R nebude ležet na jehlanu, ale mimo něj. V dalším kroku sestrojíme přímku a , která prochází bodem R a S a je součástí pravé boční stěny jehlanu. Další přímkou bude přímka b , která bude procházet bodem Q a bodem S . Přímka b bude náležet zadní stěně jehlanu. Vyznačíme bod T , který je průsečíkem přímky a a úsečky BV . Dále vyznačíme bod U , který je průsečíkem přímky b a úsečky DV . Nyní vyznačíme úsečku SU . Můžeme tak učinit, protože oba body se nacházejí v zadní stěně jehlanu. Další úsečkou bude úsečka ST , kterou můžeme spojit, protože oba body se nacházejí v pravé boční stěně jehlanu. Další přímkou, kterou nyní potřebujeme, je přímka c a ta prochází bodem Q a bodem R a je součástí spodní stěny jehlanu. Dostáváme bod W a bod X . Bod W je průsečíkem přímky c a úsečky AD a bod X je průsečíkem přímky c a úsečky AB . Nyní vytvoříme tři úsečky. První úsečkou je úsečka WX , protože oba dva body leží ve spodní stěně jehlanu. Druhou úsečkou bude úsečka TX , oba dva body úsečky leží v přední stěně jehlanu. Třetí úsečka UW náleží levé boční stěně jehlanu, stejně jako její body U a W . Nakonec už jen vyznačíme řez jehlanu $ABCDV$, kterým je v tomto případě pětiúhelník $XTSUW$.

4.4 Středová kolineace

Středová kolineace je zadána středem kolineace, osou kolineace a dvojicí sobě odpovídajících bodů. Vlastnosti středové kolineace jsou tři. První vlastnost je, že sobě odpovídající body leží na přímkách, které procházejí středem kolineace. Druhou vlastností středové kolineace je, že sobě odpovídající přímky se protínají na ose kolineace nebo také mohou být rovnoběžné s osou kolineace. Třetí vlastností je, že body na ose kolineace jsou samodružné, což znamená, že vzor i obraz je totožný. Středová kolineace se využívá při řezech těles, např. jehlanu.



Na obrázku vidíme bod S a dvě různoběžné roviny α a β . Bod S není součástí ani jedné z rovin a říkáme mu střed kolineace. Trojúhelník ABC , který náleží rovině α promítneme ze středu kolineace do roviny β a získáme trojúhelník A_1, B_1, C_1 . Tyto dva trojúhelníky jsou ve vztahu středové kolineace. Na obrázku také vidíme osu kolineace, kterou je přímka o , což je průsečnice dvou rovin α a β a zároveň se na ní protínají přímky, které si v kolineaci odpovídají. Místo, kde se na ose kolineace sobě odpovídající přímky protínají, jsou body X_1, X_2 a X_3 .

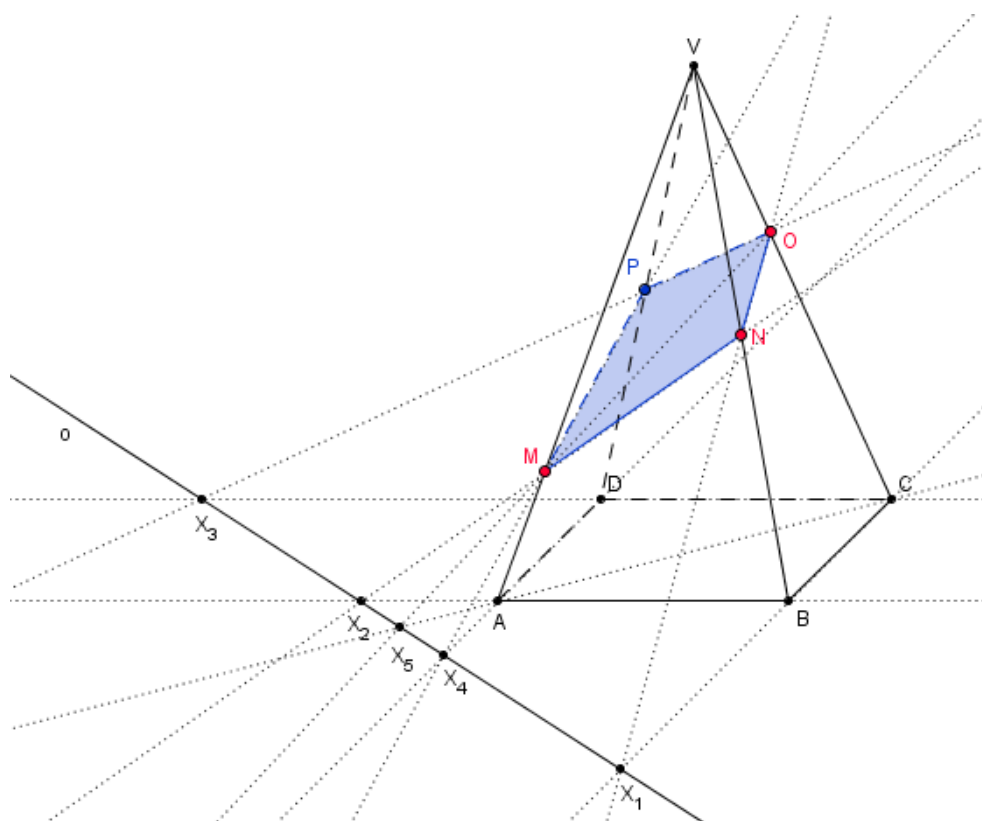
Abychom lépe pochopili souvislost mezi středovou kolineací a řezem jehlanu si ukážeme následující příklad. Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$.

Body M, N a O jsou zadány následovně: bod $M \in AV$ a $|VM| = 3|AM|$,

bod $N = S_{BV}$,

bod $O \in CV$ a $|CO| = 2|VO|$.

Sestrojte řez pomocí středové kolineace.



Komentář: Zde jsme si nejprve sestrojili zadané body M, N a O . Nejprve sestrojíme průsečík X_1 , tak, že sestrojíme pomocné přímky procházející body B a C , potom procházející body N a O a tam, kde se protnou tyto přímky, dostaneme průsečík X_1 . Dále si sestrojíme průsečík X_2 pomocí přímek procházejících body A a B a poté M a N , protože obě dvě jsou součástí přední stěny krychle. Tam, kde se nám protnou, dostaneme bod X_2 . Nyní dostáváme osu středové kolineace o , která prochází body X_1 a X_2 . Nyní potřebujeme sestrojit přímku procházející body D a C a tam, kde se nám protne s osou kolineace, dostáváme bod X_3 . Bod X_3 nyní spojíme s bodem O a dostaneme další

bod řezu, bod P . Nyní vyznačíme řez jehlanu, kterým je čtyřúhelník $MNOP$. Pro kontrolu, zda všechny sobě odpovídající přímky leží na ose kolineace o , povedeme ještě pomocné přímky body A a D , a další body M, P . Tam, kde se přímky protnou na ose kolineace dostáváme bod X_4 . Bod X_5 je průsečík přímky procházející body A, C a přímky procházející body M, O . Osou středové kolineace v tomto případě je přímka o , která je průsečnicí rovin a leží na ní body sobě odpovídajících přímek, což v našem případě jsou body X_1, X_2, X_3, X_4 a X_5 . Vrcholem středové kolineace je zde bod V . V tomto případě můžeme tedy využít středové kolineace při konstrukci řezu jehlanu $ABCDV$. Ve vztahu středové kolineace v tomto případě je podstava jehlanu a řez jehlanu.

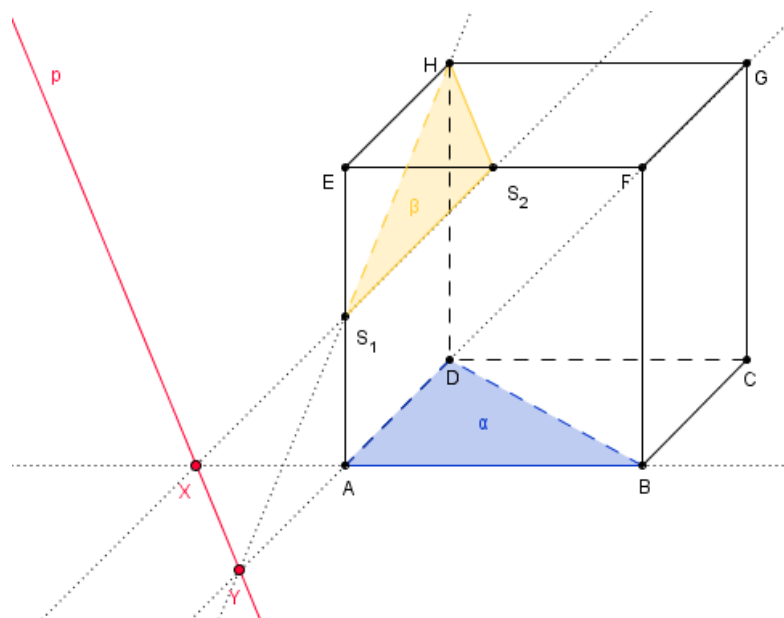
4.5 Příklady na procvičování

- 1) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6 \text{ cm}$. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou RST . Bod $R = S_{AB}$, $S = S_{AD}$, $T = S_{EG}$
- 2) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6 \text{ cm}$. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou OPQ .
 Bod $O \in EA \wedge O \text{ nenáleží krychli } ABCDEFGH$; $|AO| = 2 \text{ cm}$,
 bod $P \in EH \wedge P \text{ nenáleží krychli } ABCDEFGH$; $|HP| = 2 \text{ cm}$,
 bod $Q \in CG \wedge Q \text{ nenáleží krychli } ABCDEFGH$; $|GQ| = 3 \text{ cm}$.
- 3) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6 \text{ cm}$ a výškou $v = 10 \text{ cm}$. Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$ rovinou XYZ . Bod $X = S_{AB}$, bod $Y \in CD \wedge |CY| = 3|DY|$ a bod $Z \in CV \wedge |VZ| = 3|CZ|$.
- 4) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6 \text{ cm}$ a výškou $v = 10 \text{ cm}$. Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$ rovinou MNP .
 Bod $M = S_{AV}$,
 bod $N = S_{DV}$,
 bod $P \in BV \wedge |VP| = 3|BP|$ [2].

5. Průsečnice a průsečíky

5.1 Průsečnice rovin

Př. 1) Je zadána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Úkolem je sestrojit průsečnici dvou rovin α a β . Rovina α je zadána body A, B, D . Rovina β je zadána trojicí bodů $S_1 = S_{AE}, S_2 = S_{EF}, H$.

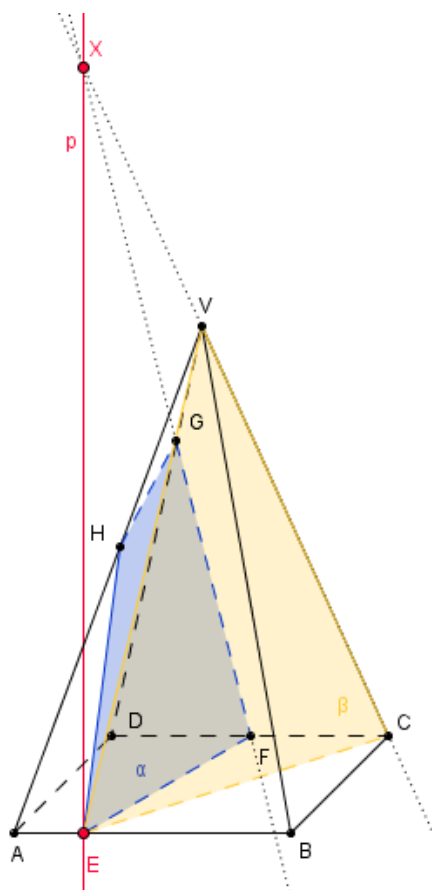


Komentář: Nejprve si sestrojíme rovinu α a poté rovinu β podle zadání, jak již umíme. Jelikož vidíme, že na první pohled se nám roviny neprotínají, příklad bude obtížnější. Sestrojíme si pomocné přímky. První přímku povedeme body A a B , tato přímka náleží jak přední stěně krychle, kde leží i rovina β , tak i spodní stěně krychle, kde leží rovina α . Druhou přímku povedeme body S_1 a S_2 , protože také náleží přední stěně krychle a dostaneme průsečík X . Obdobně to uděláme i s bodem Y . Poté body X a Y povedeme námi hledanou průsečnicí p .

Př. 2) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Úkolem je sestrojit průsečnici dvou rovin α a β :

Rovina α je zadána body E, F, G . Bod $E \in AB \wedge |BE| = 3|AE|$. Bod $F \in S_{CD}$ a bod $G \in DV \wedge |DG| = 3|VG|$.

Rovina β je zadána trojicí bodů E, C, V . Bod E je stejný jako pro rovinu α , tedy $E \in AB \wedge |BE| = 3|AE|$.



Komentář: Nejprve si sestojíme rovinu α a poté rovinu β podle zadání, jak již umíme. Rovina β je stejná jako ve druhém příkladu v kapitole 4.3 Příklady na řezy jehlanu. Jedním z bodů, kde se nám tyto dvě roviny protnou je zadaný bod E . Další průsečík rovin, není tak jednoznačný. Zjistíme ho podle pomocných přímek. První přímku povedeme body C a V a druhou přímku body F a G . Volíme tyto přímky, protože obě leží v zadní stěně jehlanu. Tam, kde se tyto dvě přímky protnou, dostáváme bod X , což je další průsečík rovin α a β . Nyní bodem E a X povedeme námi hledanou průsečnici p .

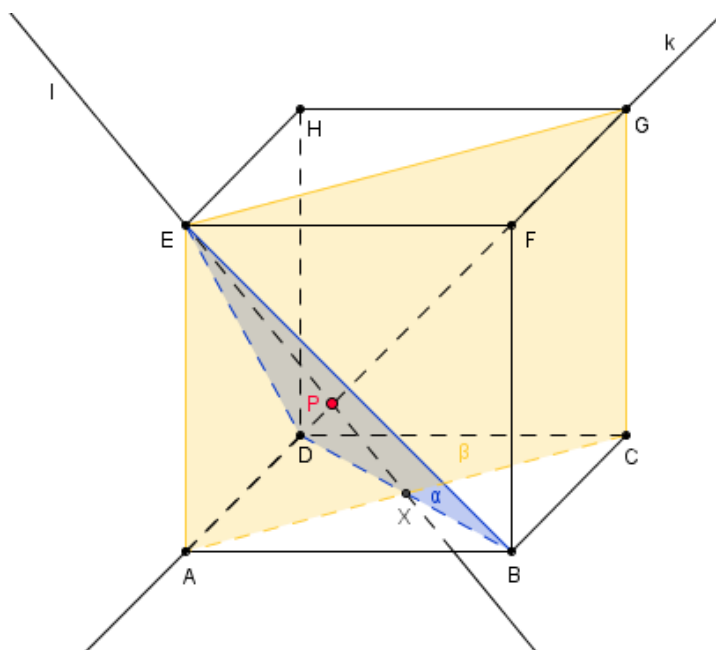
5.2 Průsečík přímky s rovinou

Hledání průsečíku přímky s rovinou je jedna z polohových konstrukčních úloh. Pokud řešíme polohové konstrukční úlohy, není třeba znát jednotlivé rozměry, ale stačí nám pouze znát tvar tělesa. Pokud bude zadaná přímka k , různoběžná se zadanou rovinou α , jejich průsečík dostaneme tímto způsobem.

1. Zadanou přímku k proložíme vhodnou rovinou β , která je s rovinou α různoběžná.
2. Určíme průsečnici l rovin α a β .
3. Průsečík P přímek k a l je hledaný průsečík přímky k a roviny α [4].

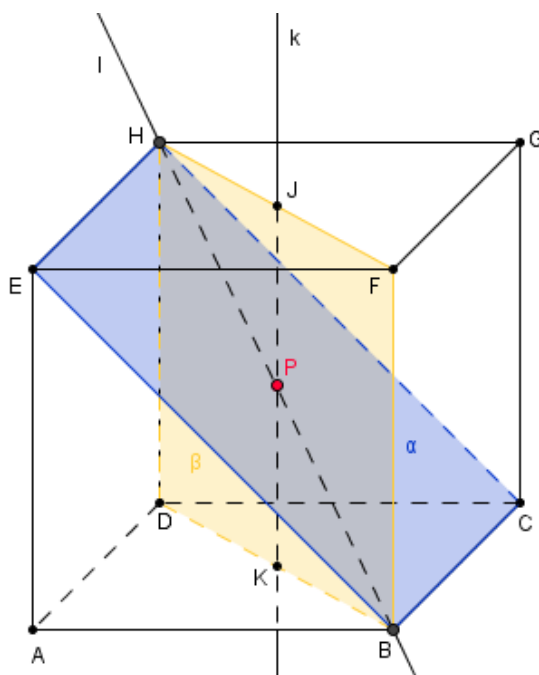
Přímka k může být také rovnoběžná se zadanou rovinou α . Tehdy přímka nemá s rovinou žádný průsečík. Poslední možnost je, že přímka k bude ležet v zadané rovině α a všechny body této přímky budou ležet také v rovině α .

Př. 1) Je zadána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Úkolem je sestavit průsečík přímky k , kterou povedeme body A a G s rovinou α , která je tvořena trojicí bodů B, D, E .



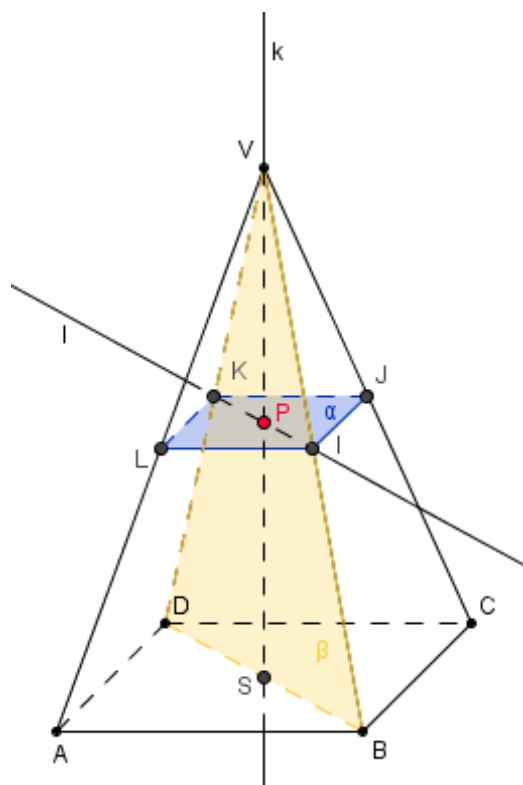
Komentář: Nejprve si sestrojíme přímku k , která prochází body A a G . Poté sestrojíme zadanou rovinu α , která je zadána trojúhelníkem BDE . Nyní musíme zvolit rovinu β , která bude různoběžná s rovinou α . Tu volíme tak, aby jí přímka k náležela. V tomto případě je vhodnou rovinou β rovina $ACEG$. Nyní si určíme průsečnici l roviny α a roviny β . Posledním krokem k určení průsečíku přímky a roviny je vyznačení průsečíku P přímky k a l . Průsečík P přímek k a l je náš hledaný průsečík přímky s rovinou.

Př. 2) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Úkolem je sestrojit průsečík přímky k , kterou povedeme bodem $J = S_{FH}$ a bodem $K = S_{BD}$ s rovinou α , která je tvořena trojicí bodů B, C, H .



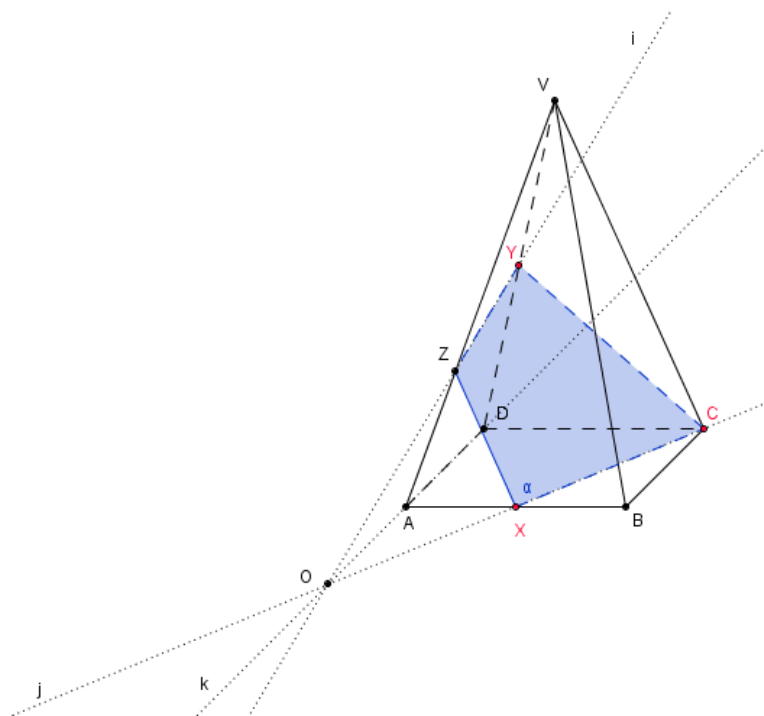
Komentář: Nejprve si sestrojíme přímku k , která povede středy stran FH a BD . Poté sestrojíme zadanou rovinu α , která je zadána body BCH . Nyní musíme zvolit rovinu β , která bude různoběžná s rovinou α . Tu volíme tak, aby jí přímka k náležela. V tomto případě je vhodnou rovinou β rovina $BDFH$. Nyní si určíme průsečnici l roviny α a roviny β . Posledním krokem k určení průsečíku přímky a roviny je vyznačení průsečíku P přímky k a l . Průsečík P přímek k a l je náš hledaný průsečík přímky s rovinou.

Př. 3) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Úkolem je sestrojit průsečík přímky k , kterou povedeme bodem $S = S_{BD}$ a bodem V s rovinou α , která je zadána trojicí bodů $I = S_{BV}$, $J = S_{CV}$, $K = S_{DV}$.

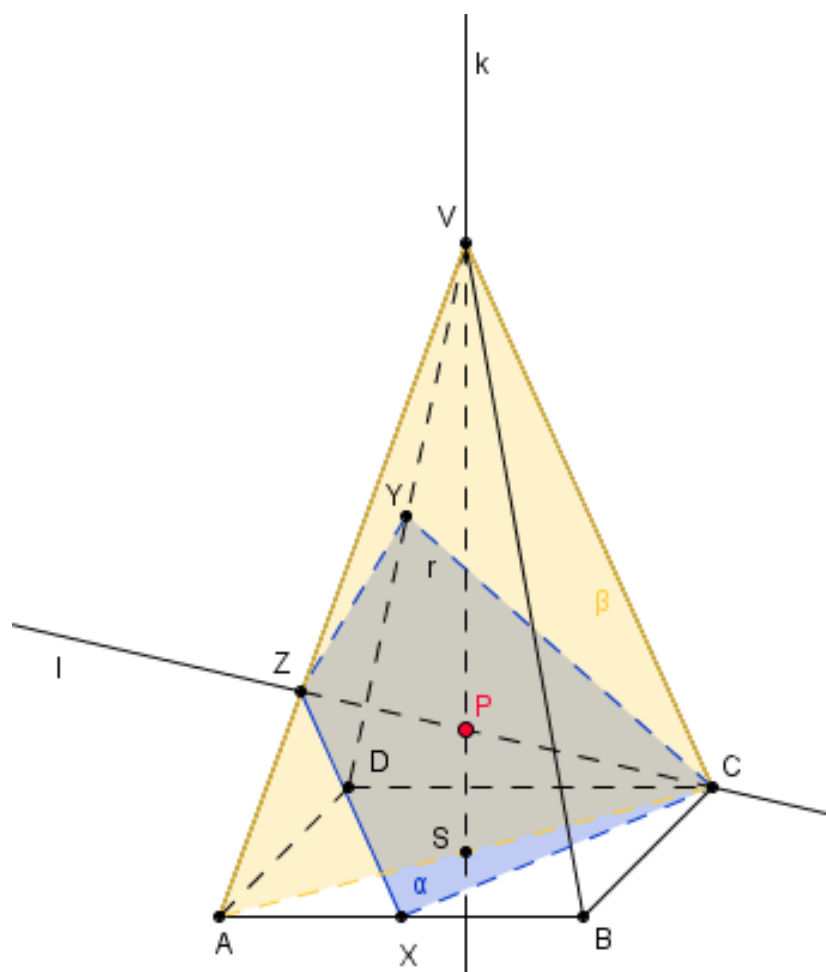


Komentář: Nejprve si sestrojíme přímku k , která povede středem strany AC a bodem V . Poté sestrojíme zadanou rovinu α , kterou je čtyřúhelník $IJKL$. Nyní musíme zvolit rovinu β , která bude různoběžná s rovinou α . Tu volíme tak, aby jí přímka k náležela. V tomto případě je vhodnou rovinou β rovina BDV . Nyní si určíme průsečnici l roviny α a roviny β . Posledním krokem k určení průsečíku přímky a roviny je vyznačení průsečíku P přímky k a l . Průsečík P přímek k a l je náš hledaný průsečík přímky s rovinou.

Př. 4) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Úkolem je sestrojit průsečík přímky k , kterou povedeme bodem $S = S_{BD}$ a bodem V s rovinou α , která je zadaná trojicí bodů $X = S_{AB}$, C a $Y = S_{DV}$.



Komentář: Zde je nejprve zobrazena rovina α . Protože jsme potřebovali najít bod roviny na levé boční stěně hranolu, museli jsme si sestrojit pomocné přímky j a k . Přímka j prochází body X, C ze spodní stěny hranolu a přímka k prochází body A a D , které spojují spodní stěnu hranolu s levou boční stěnou hranolu, kde potřebujeme získat bod roviny. Průsečík přímky j a k je bod O a ten spojíme se zadaným bodem Y přímkou i na levé boční stěně hranolu. Dostaneme bod Z , který je průsečíkem přímky i a úsečky AV . Vyznačíme rovinu α , kterou je čtyřúhelník $XCYZ$.



Komentář: Nejprve si sestrojíme přímku k , která povede středem úsečky BD a bodem V . Poté sestrojíme zadanou rovinu α , kterou je čtyřúhelník $XYZC$ (konstrukce roviny výše). Nyní musíme zvolit rovinu β , která bude různoběžná s rovinou α . Tu volíme tak, aby jí přímka k náležela. V tomto případě je vhodnou rovinou β rovina ACV . Nyní si určíme průsečnici l roviny α a roviny β . Posledním krokem k určení průsečíku přímky a roviny je vyznačení průsečíku P přímky k a l . Průsečík P přímek k a l je náš hledaný průsečík přímky s rovinou.

5.3 Průnik přímky s povrchem tělesa

Pokud budeme chtít sestrojít průnik přímky s povrchem tělesa, musíme sestrojít rovinu tak, aby jí zadaná přímka náležela. Tam, kde nám přímka protne řez tělesa, dostáváme námi hledaný průnik přímky s povrchem tělesa.

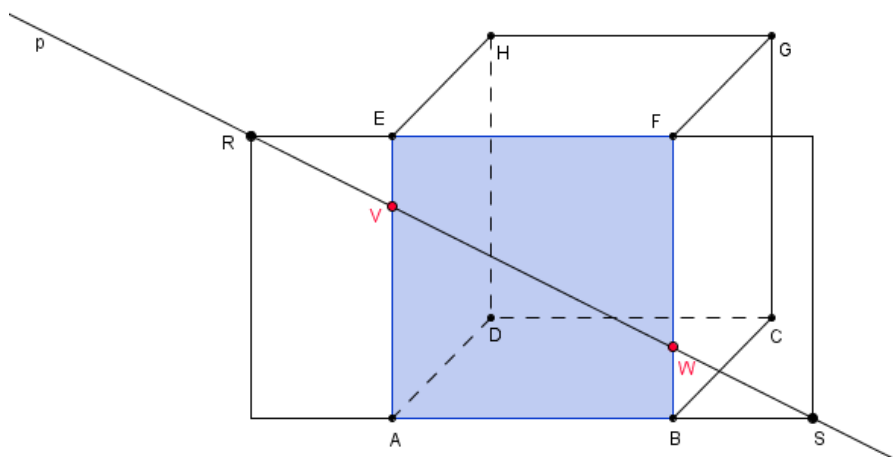
Př. 1) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$.

Určete průnik přímky p s povrchem krychle.

Přímka p je zadána dvěma body R a S :

Bod $R \in EF \wedge$ nenáleží krychli $ABCDEFGH$; $|RE| = 3\text{ cm}$.

Bod $S \in AB \wedge$ nenáleží krychli $ABCDEFGH$; $|BS| = 3\text{ cm}$.



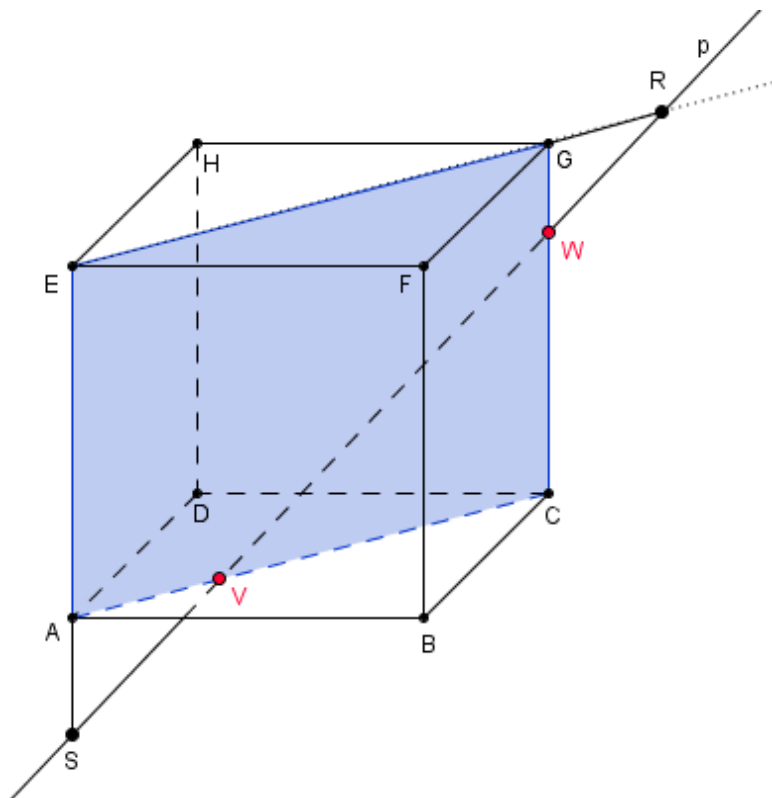
Komentář: Nejprve si sestrojíme zadané body R a S . Body R a S spojíme a dostaneme přímku p . Nyní je nutné sestrojít libovolnou rovinu, které bude náležet zadaná přímka p . Zvolíme rovinu $ABFE$, protože náleží přední stěně krychle, stejně jako zadaná přímka p . Tam, kde nám zadaná přímka protнула sestrojenou rovinu, tedy řez krychle, dostáváme body V a W . Tyto dva body V a W jsou průnikem přímky p s krychlí.

Př. 2) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$.

Určete průnik přímky p s povrchem krychle. Přímka p je zadána dvěma body R a S :

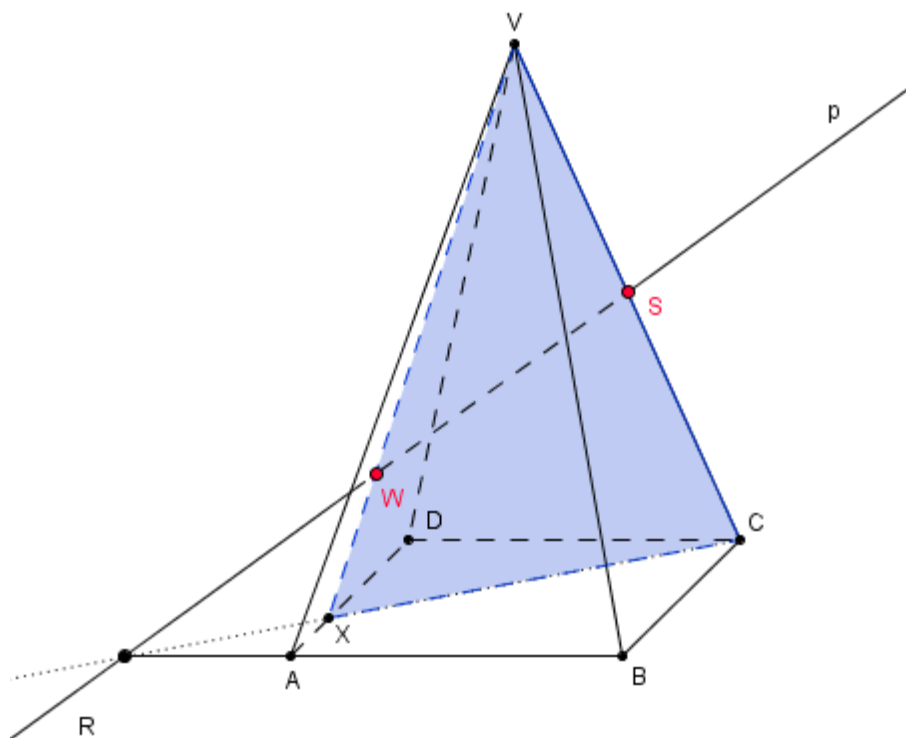
Bod $R \in EG \wedge$ nenáleží krychli $ABCDEFGH$; $|GR| = 2\text{ cm}$.

Bod $S \in AE \wedge$ nenáleží krychli $ABCDEFGH$; $|AS| = 2\text{ cm}$.



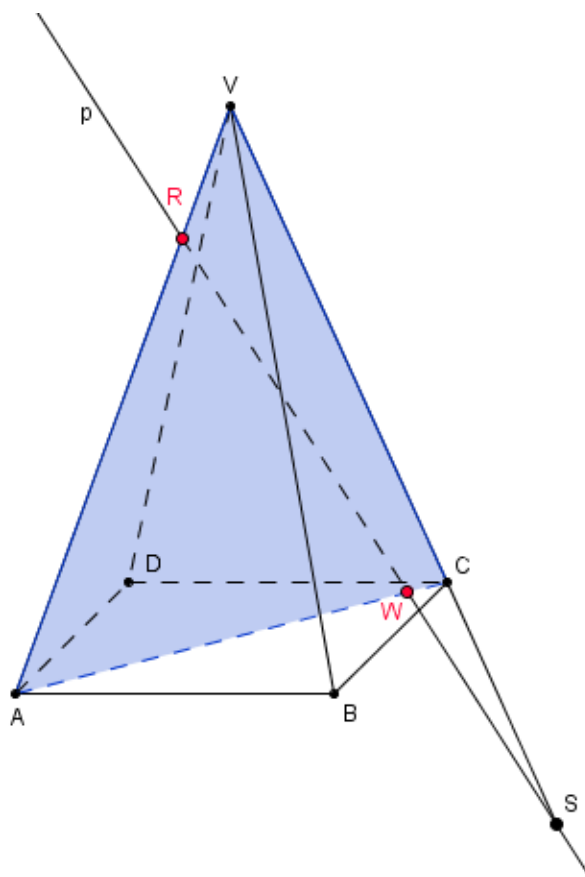
Komentář: Nejprve si sestrojíme zadané body R a S . Spojením bodů R a S dostaneme přímku p . Nyní je nutné sestrojit libovolnou rovinu tak, aby ji náležela zadaná přímka p . Nejvhodnější rovinou v tomto případě je rovina $ACGE$, protože jí náleží přímka p . Tam, kde nám zadaná přímka protнула sestrojenou rovinu, tedy řez krychle, dostáváme body V a W . Tyto dva body V a W jsou průnikem přímky p s krychlí.

Př. 3) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$.
 Určete průnik přímky p s povrchem jehlanu. Přímka p je zadána dvěma body R a S :
 Bod $R \in \leftrightarrow AB$ *nenáleží* jehlanu $ABCDV$; $|AR| = 2\text{ cm}$.
 Bod $S = S_{CV}$.



Komentář: Nejprve si sestrojíme zadané body R a S . Spojením bodů R a S dostaneme přímku p . Nyní je potřeba sestrojit libovolnou rovinu, které bude náležet zadaná přímka p . Zvolíme rovinu XCV , protože jí náleží přímka p . Bod X získáme protnutím přímky procházející body C a R s úsečkou AD . Tam, kde nám zadaná přímka protne sestrojenou rovinu, tedy řez jehlanu, dostáváme body S a W . Zadaný bod S je totiž sám o sobě bod průniku jehlanu. Tyto dva body S a W jsou průnikem přímky p s jehlanem.

Př. 4) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$.
 Určete průnik přímky p s povrchem jehlanu. Přímka p je zadána dvěma body R a S :
 Bod $R \in AV \wedge |AR| = 3|VR|$
 Bod $S \in \leftrightarrow CV \wedge \text{nenáleží jehlanu } ABCDV; |CS| = 3\text{ cm}$



Komentář: Nejprve si sestrojíme zadané body R a S . Spojením bodů R a S dostaneme přímku p . Nyní je potřeba sestrojit libovolnou rovinu, které bude náležet zadaná přímka p . V tomto případě je nejvhodnější rovinou rovina ACV , protože jí náleží přímka p . Tam, kde nám zadaná přímka protнула sestrojenou rovinu, tedy řez jehlanu, dostáváme body R a W . Zadaný bod R je totiž sám o sobě bod průniku jehlanu. Tyto dva body R a W jsou průnikem přímky p s jehlanem.

5.4 Příklady na procvičování

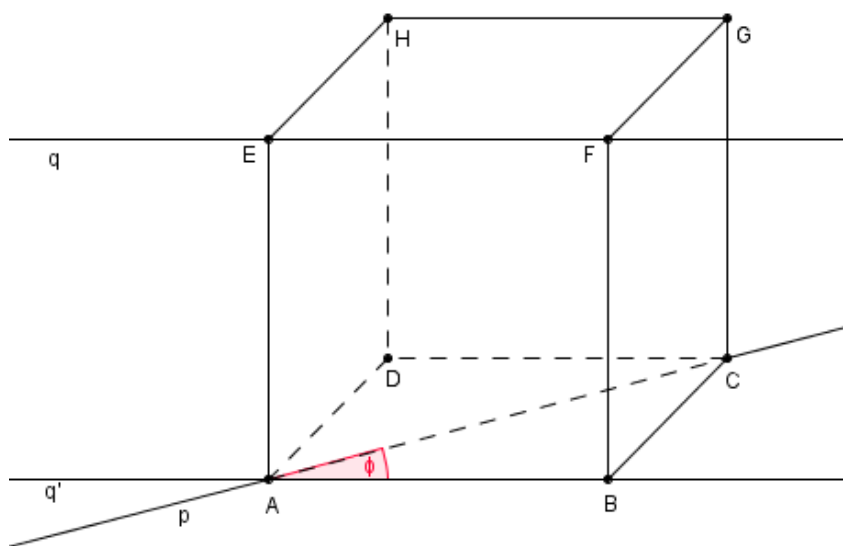
- 1) Je zadána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Úkolem je sestrojit průsečnici dvou rovin α a β . Rovina α je zadána body B, D, H . Rovina β je zadána trojicí bodů A, C, G .
- 2) Je zadána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Úkolem je sestrojit průsečík přímky z , kterou povedeme body F a D s rovinou α , která je tvořena trojicí bodů S_{GC}, S_{CG} a M , kde bod $M \in EF \wedge |FM| = 3|EM|$ [3].
- 3) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Určete průnik přímky l s povrchem krychle. Přímka l je zadána dvěma body X a Y :
Bod $X \in \leftrightarrow AE \wedge \text{nenáleží krychli } ABCDEFGH; |EX| = 2\text{ cm}$.
Bod $Y \in \leftrightarrow CG \wedge \text{nenáleží krychli } ABCDEFGH; |CY| = 2\text{ cm}$.
- 4) Je jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Úkolem je sestrojit průsečnici dvou rovin α a β . Rovina α je zadána body D, B, V . Rovina β je zadána trojicí bodů A, C, S_{DV} .
- 5) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Úkolem je sestrojit průsečík přímky p , kterou povedeme bodem C a bodem S_{AV} s rovinou α , která je zadaná trojicí bodů KLV , kde $K \in AB \wedge |BK| = 3|AK|$ a bod $L \in CD \wedge |DL| = 3|CL|$ [3].
- 6) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Určete průnik přímky o s povrchem jehlanu. Přímka o je zadána dvěma body X a S_{CV} , bod $X \in \leftrightarrow AB \wedge \text{nenáleží jehlanu } ABCDEFGH; |XA| = 3\text{ cm}$.

6. Odchylky

6.1 Odchylka přímek

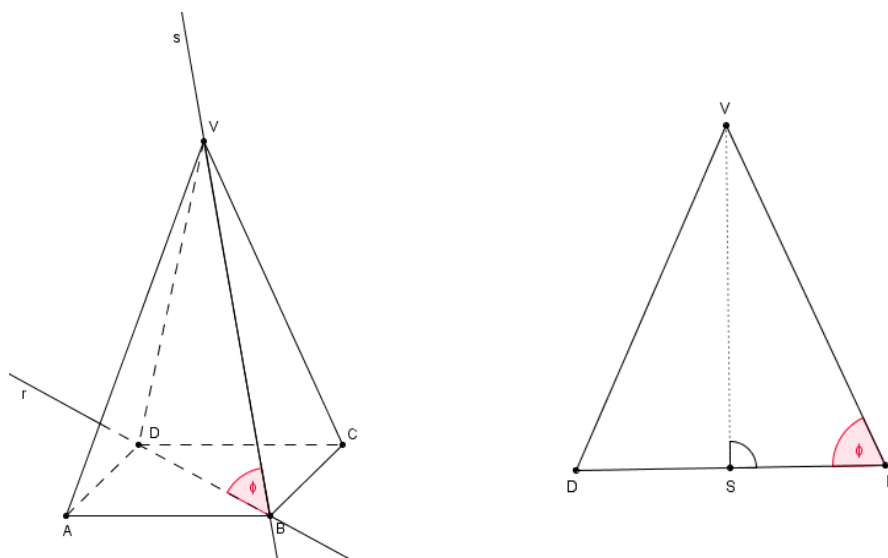
Pokud chceme určit odchylku dvou různoběžných přímek, určíme velikost úhlu ϕ , který spolu dvě přímky svírají. Tento úhel může být ostrý nebo pravý. V případě rovnoběžných přímek je odchylka $\phi = 0^\circ$. Pokud budou dvě přímky, u kterých budeme určovat odchylku mimoběžné, odchylka se bude rovnat odchylce různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami [4].

Př. 1) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Určete odchylku přímky p a přímky q . Přímka p prochází body A, C a přímka q prochází body E, F .



Komentář: Po narýsování zadaných přímek dostaneme dvě mimoběžné přímky p a q . Naším úkolem je najít odchylku těchto dvou mimoběžných přímek. Sestrojíme si tedy rovnoběžku q' s přímkou q a vedeme jí body A, B . Nyní nás tedy zajímá přímka p a q' . Tyto přímky jsou různoběžné, jejich průsečíkem je bod A . Hledaná odchylka je úhel, který svírají tyto dvě různoběžné přímky p a q' . Zde je velikost odchylky $\phi = 45^\circ$, protože se jedná o úhlopříčku ve čtverci.

Př. 2) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Určete odchylku přímky r a přímky s . Přímka r prochází body B a D . Přímka s prochází body B a V .

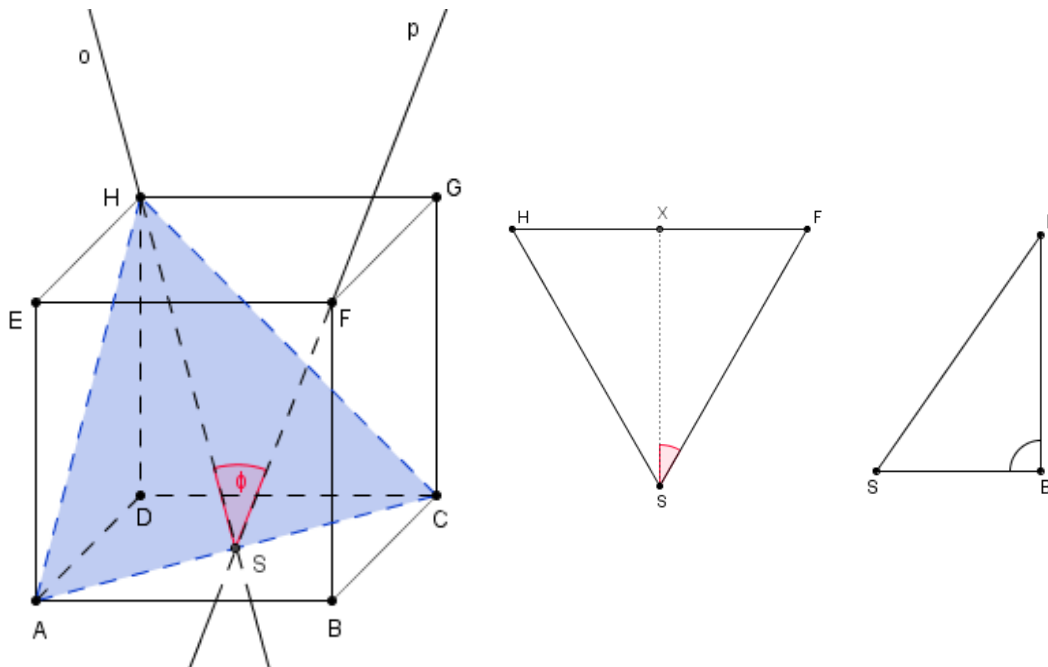


Komentář: Nejprve jsme si vyznačili přímky r a s podle zadání. Tyto dvě přímky jsou různoběžné, jejich průsečík je bod B . Hledaná odchylka je úhel, který svírají tyto dvě různoběžné přímky r a s . Zde je velikost odchylky $\phi \doteq 67^\circ$. Tento úhel nejde jednoznačně určit jako v prvním příkladu. Pro náš výpočet si vezmeme trojúhelník DBV , který máme na obrázku vpravo a pokusíme se odchylku vypočítat pomocí něho. Pro nás bude ještě výhodnější pro výpočet trojúhelník SBV . Máme tedy pravoúhlý trojúhelník a k výpočtu úhlu ϕ , což je naše odchylka, využijeme $\operatorname{tg} \phi = \frac{v}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$, tedy $\operatorname{tg} \phi = \frac{10}{\frac{6\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \phi \doteq 67^\circ$. Odchylka nám tedy vyjde $\phi \doteq 67^\circ$.

6.2 Odchylka přímky od roviny

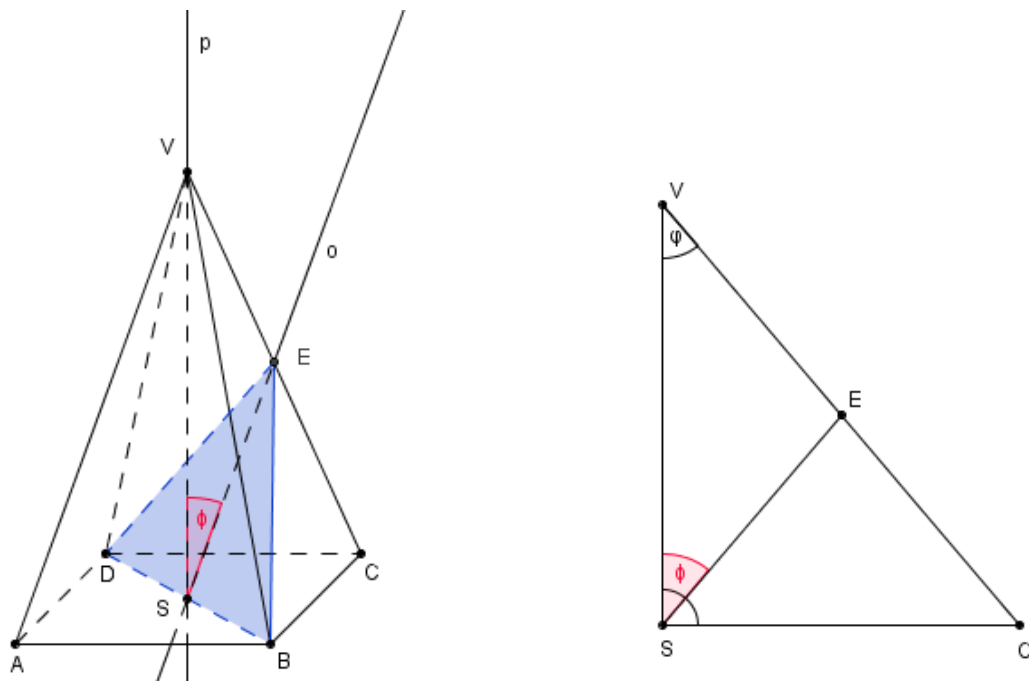
Odchylka přímky od roviny je nejmenší z odchylek této přímky a přímek roviny. Pokud bude přímka s rovinou rovnoběžná, odchylka $\phi = 0^\circ$. Pokud bude přímka kolmá k rovině, tzn., že bude kolmá ke všem jejím přímkám, odchylka $\phi = 90^\circ$. Není – li přímka kolmá k rovině, je odchylka přímky a roviny rovna odchylce přímky a jejího pravoúhlého průmětu do této roviny [4].

Př. 1) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6 \text{ cm}$. Určete odchylku přímky p zadanou body F a S , kde bod $S = S_{AC}$ a roviny ACH . [5]



Komentář: Nejprve jsme si vyznačili přímku p a rovinu ACH podle zadání. Při hledání této odchylky přímky p s rovinou ACH si budeme všimnout jen přímek, které procházejí bodem S . Pro vypočítání naší odchylky bude nejvhodnější přímka procházející body S a H . Tuto přímku nazveme přímkou o . Tedy nejmenší odchylka bude odchylka přímky p a přímky o , což je námi hledaná odchylka přímky p a roviny ACH . Zde je velikost odchylky $\phi \doteq 71^\circ 4'$. Tento úhel nejde jednoznačně určit z obrázku. Pro náš výpočet si nejprve vezmeme trojúhelník HFS , který máme na obrázku uprostřed. Tento trojúhelník je rovnoramenný a pomocí něho se pokusíme odchylku vypočítat. Délka strany HF je úhlopříčka ve čtverci a má délku $6\sqrt{2}$. Nyní je ještě potřeba zjistit délku strany SF . Velikost strany SF si umíme vypočítat z pravoúhlého trojúhelníku SBF , který vidíme vpravo na obrázku. Úsečka SF je přepona, tedy $|SF| = \sqrt{6^2 + \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2} \doteq 7,3 \text{ cm}$. Nyní se vrátíme k trojúhelníku HFS a pro výpočet si vezmeme jen trojúhelník XSF a vypočteme z něj odchylku pomocí funkce $\sin \frac{\phi}{2} = \frac{\frac{6\sqrt{2}}{2}}{7,3} \Rightarrow \frac{\phi}{2} \doteq 35^\circ 32'$, tedy $\phi \doteq 71^\circ 4'$ tj., že odchylka je $\phi \doteq 71^\circ 4'$.

Př. 2) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Určete odchylku přímky p zadanou body V a S , kde bod $S = S_{DB}$ a roviny DBE , kde bod $E = S_{CV}$.



Komentář: Nejprve jsme si vyznačili přímku p a rovinu DBE podle zadání. Při hledání této odchylky přímky p s rovinou DBE si budeme všimnout jen přímek, které procházejí bodem S . Pro vypočítání naší odchylky bude nejvhodnější přímka procházející body S a E . Tuto přímku nazveme přímku o . Tedy nejmenší odchylka bude odchylka přímky p a o , což je námi hledaná odchylka přímky p a roviny DBE . Zde je velikost odchylky $\phi \doteq 22^\circ 54'$. Tento úhel nejde jednoznačně určit z obrázku. Pro náš výpočet použijeme trojúhelník SCV , který máme na obrázku vpravo. Je pravoúhlý a pomocí něho se pokusíme odchylku vypočítat. Délka strany SC je polovina úhlopříčky ve čtverci a má délku $\frac{6\sqrt{2}}{2}\text{ cm}$. Nyní je ještě potřeba zjistit délku strany CV . Velikost strany CV si umíme vypočítat z pravoúhlého trojúhelníku SCV . Úsečka CV je přepona, tedy $|CV| = \sqrt{10^2 + \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2} \doteq 10,9\text{ cm}$. Dále si vypočteme úhel u vrcholu V , který nazveme φ , nejprve $\sin \varphi = \frac{\frac{6\sqrt{2}}{2}}{10,9} \doteq 0,3892 \Rightarrow \varphi \doteq 22^\circ 54'$ a také $\cos \varphi = \frac{10}{10,9} \doteq 0,9174 \Rightarrow \varphi \doteq 23^\circ 26'$. Tento úhel $\cos \varphi$ budeme potřebovat do

kosinové věty, protože pro výpočet odchylky potřebujeme velikost úsečky SE . Nyní nám tedy chybí velikost úsečky SE . Tu vypočteme pomocí kosinové věty v trojúhelníku SEV , tedy $|SE|^2 = 5,45^2 + 10^2 - 2 * 5,45 * 10 * \cos 23^\circ 26'$, tedy $|SE| = \sqrt{129,7 - 109 * 0,9174} \doteq 5,45 \text{ cm}$. Nyní se vrátíme k samotnému výpočtu odchylky, který vypočítáme $\frac{\sin \varphi}{SE} = \frac{\sin \phi}{VE}$, z tohoto vztahu nám vyjde $\sin \phi = \frac{0,3892 * 5,45}{5,45} \Rightarrow \phi \doteq 22^\circ 54'$.

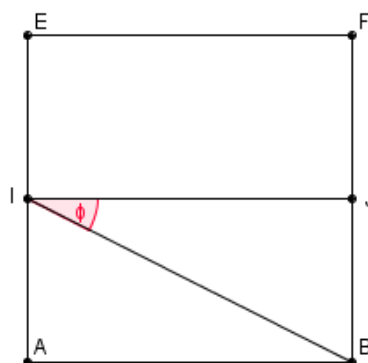
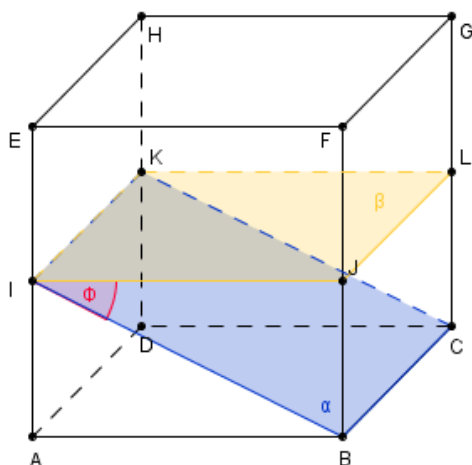
6.3 Odchylka dvou rovin

V tomto případě, odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá. Jsou-li dvě roviny rovnoběžné, odchylka je $\phi = 0^\circ$. Pokud jsou dvě roviny na sebe kolmé, odchylka je $\phi = 90^\circ$. Jinak platí, že $0^\circ < \phi < 90^\circ$ [3].

Př. 1) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6 \text{ cm}$. Určete odchylku dvou rovin.

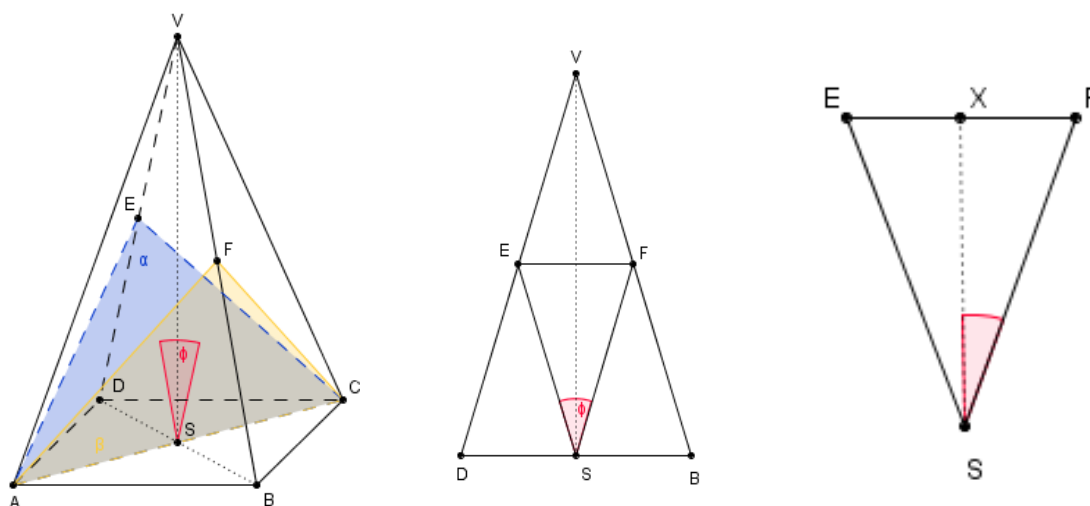
Rovina α je zadána trojicí bodů BCI , kde bod $I = S_{AE}$.

Rovina β je zadána trojicí bodů IJK , kde bod $I = S_{AE}$, bod $J = S_{BF}$ a bod $L = S_{CG}$.



Komentář: Nejprve jsme si vyznačili rovinu α a rovinu β podle zadání. Tyto dvě roviny jsou různoběžné, jejich odchylka tedy nebude $\phi = 0^\circ$ ani $\phi = 90^\circ$. Hledaná odchylka je jejich průsečnice s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá, tedy rovina $ABEF$. Zde je velikost odchylky $\phi \doteq 26^\circ 33'$. Tento úhel nejde jednoznačně určit. Pro náš výpočet si vezmeme čtverec $ABEF$, který máme na obrázku vpravo a pokusíme se odchylku vypočítat pomocí něho. Pro náš výpočet bude ještě výhodnější trojúhelník BIJ . Máme tedy pravoúhlý trojúhelník a k výpočtu úhlu ϕ , což je naše odchylka, využijeme $\operatorname{tg} \phi = \frac{3}{6} \Rightarrow \phi \doteq 26^\circ 33'$. Odchylka nám tedy vyjde $\phi \doteq 26^\circ 33'$.

Př. 2) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6 \text{ cm}$ a výškou $v = 10 \text{ cm}$. Určete odchylku dvou rovin. Rovina α je zadána trojicí bodů ACE , kde bod $E = S_{DV}$. Rovina β je zadána trojicí bodů ACF , kde bod $F = S_{BV}$.



Komentář: Nejprve jsme si vyznačili rovinu α a rovinu β podle zadání. Tyto dvě roviny jsou různoběžné, jejich odchylka tedy nebude $\phi = 0^\circ$ ani $\phi = 90^\circ$. Hledaná odchylka je jejich průsečnice s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá, tedy rovina DBV , kterou vidíme na obrázku uprostřed. Zde je velikost odchylky $\phi \doteq 45^\circ 58'$. Tento úhel nejde jednoznačně určit. Pro náš výpočet si vezmeme z roviny DBV trojúhelník EFS , který máme na obrázku vpravo a pokusíme se odchylku vypočítat pomocí něho. Pro náš výpočet bude ještě vhodnější pravoúhlý trojúhelník XFS , jak je zakresleno v pravém obrázku. Z něho vypočítáme $\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = \frac{\frac{6\sqrt{2}}{2}}{\frac{4}{5}} \doteq 0,4243 \Rightarrow \frac{\phi}{2} \doteq 22^\circ 59'$. Tedy $\phi \doteq 45^\circ 58'$. Odchylka nám tedy vyjde $\phi \doteq 45^\circ 58'$.

6.4 Příklady na procvičování

- 1) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Určete odchylku přímky a a přímky b . Přímka a prochází body B a S_{HF} a přímka b prochází body A a B .
- 2) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Určete odchylku přímky x zadanou body B a D a roviny F, S_{CD}, H .
- 3) Je dána krychle $ABCDEFGH$ se stranou $a = 6\text{ cm}$. Určete odchylku dvou rovin. Rovina α je zadaná trojicí bodů ABG . Rovina β je zadaná trojicí bodů BEG [3].
- 4) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Určete odchylku přímky o a přímky p . Přímka o prochází body B a C . Přímka p prochází body V a S_{BC} .
- 5) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Určete odchylku přímky a zadanou body V a S_{BD} , kde bod $S = S_{DB}$ a roviny ADV .
- 6) Je dán jehlan $ABCDV$ se stranou podstavy $a = 6\text{ cm}$ a výškou $v = 10\text{ cm}$. Určete odchylku dvou rovin. Rovina α je zadaná trojicí bodů V, S_{AB} a S_{CD} a rovina β je zadaná trojicí bodů ADV .

7. Závěr

Cílem mé bakalářské práce Konstrukční úlohy v prostoru bylo vhodně shrnout vybraná témata ze stereometrie, které by se daly využít žáky na základních a studenty na středních školách. Práce měla obsahovat řešené konstrukční úlohy i neřešené příklady na procvičení.

Ve své bakalářské práci jsem se podrobně věnovala tématům stereometrie od úplného základu. Teorie je vždy doplněna obrázkem, aby byla lépe pochopitelná a rozvíjela se prostorová představivost. Konstrukční úlohy mají ilustrované řešení a vše je doplněno podrobným komentářem. Tuto práci by mohli využít žáci na základních školách při výuce polohových vlastností, vzájemné poloze dvou přímek, přímky a roviny a při vzájemné poloze dvou rovin. Následně může být použita studenty na středních školách, kde využijí řezy krychle a jehlanu, průsečíky a průsečnice i odchylky. Studenti po probrání teorie a řešených příkladů si mohou vyzkoušet, zda vše pochopili, na příkladech k procvičení.

Téma mé bakalářské práce mi pomohlo se lépe orientovat v problematice stereometrie. Prohloubilo mi také vnímání mé prostorové představivosti. Při práci jsem se seznámila s velkým počtem učebnic a sbírek příkladů. Díky práci jsem se také naučila bezproblémově používat DGS GeoGebra. Rozšířit tuto práci by bylo možné o obrázky v DGS GeoGebra 3D, kde by byly obrázky 3D v prostoru. S obrázky by se dalo manipulovat, byly by názornější a ještě více by zlepšovaly prostorovou představivost. Vzhledem k rozsahu mé bakalářské práce však toto nebylo již nutné, protože jsem se chtěla soustředit především na vysvětlení základů konstrukčních úloh, aby žáci i studenti pochopením a procvičením dané problematiky mohli již tyto nástavby i sami využívat.

Literatura

- [1] HARANT, Michal a LANTA, Oldřich. *Deskriptivní geometrie pro II. ročník SVVŠ*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965, 283 s. Učebnice pro všeobecně vzdělávací školy.
- [2] JANEČEK, František. *Repetitorium středoškolské geometrie v příkladech*. 1. vyd. Praha: Scientia, 2009, 215s. ISBN 978-80-86960-33-3.
- [3] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 287s. ISBN 978-80-7196-099-7.
- [4] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 223 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-178-9.
- [5] ŘÍDKÁ, Eva, BLAHUNKOVÁ, Dana a CHÁRA, Petr. *Maturitní otázky: matematika*. 1. vyd. Praha: Fragment, 2007, 283 s. Maturitní otázky. ISBN 978-80-253-0497-6.