

DIFERENČNÍ ROVNICE



Diplomová práce

vypracoval:

Bc. ZBYNĚK KROS

vedoucí diplomové práce:

RNDr. Vladimíra Petrášková Ph.D.

Jihočeská univerzita
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

České Budějovice 2007

Anotace

Cílem této diplomové práce je seznámit potencionálního čtenáře s problematikou diferenčního počtu a především pak diferenčních rovnic. Důraz je kladen hlavně na propojení teoretických a praktických informací a předvedení metod výpočtů jednotlivých typů diferenčních rovnic. Každá z metod je pak také doplněna příkladem s podrobným postupem řešení. V závěru publikace je uvedeno několik ukázek využití diferenčních rovnic v ekonomii a zhodnocení jejich praktického využití.

Annotation

The purpose of this thesis is introducing readers with difference calculus and mainly with difference equation. Emphasis is especially laying on connection of theoretic and practical information and demonstration of some various calculation methods. The example with particular process of solving follows behind every of using method. Epilogue of this publication is composing by several samples of using difference equation in economy and analysis of their practical applications.

Poděkování

Rád bych poděkoval všem, kteří mi poskytli ať již fyzickou nebo morální podporu při vypracovávání této diplomové práce a především pak své vedoucí paní RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D. za její vedení a odborné rady.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a veškerá použitá literatura a jiné prameny jsou uvedeny v seznamu literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích 26.4.2007

.....
Bc. Zbyněk Kros

Obsah

Obsah	5
Použité matematické značení a zkratky.....	7
Úvod	8
Motivace pro zavedení diferenčního počtu	9
Diference	11
Diference prvního řádu	11
Diference vyšších řádů	12
Užití diferencí (monotonie a extrémy posloupnosti)	15
Monotónnost posloupnosti.....	15
Lokální extrémy	15
Globální (absolutní) extrémy	16
Primitivní posloupnost a sumace.....	19
Primitivní posloupnost	19
Sumace	20
Sumace vyšších řádů	21
Diferenční rovnice (Δ Rovnice nebo ΔR)	24
Řešení diferenční rovnice 1. řádu	27
Metoda krácení podílů	27
Lineární diferenční rovnice 1. řádu.....	29
Postup řešení $L\Delta$ rovnic 1. řádu	29
Zkrácená lineární Δ rovnice 1. řádu s konstantním koeficientem	32
Lineární Δ rovnice 1. řádu s pravou stranou ve tvaru součtu posloupností – princip superpozice.....	33
Lineární Δ rovnice 1. řádu s konstantním koeficientem a speciální pravou stranou – odhad řešení	34
Řešení diferenční rovnice k-tého řádu.....	37
Lineární diferenční rovnice k -tého řádu	37
Metody řešení zkrácené $L\Delta$ rovnice k -tého řádu	37
Snížení řádu zkrácené diferenční rovnice	39
Zkrácené $L\Delta$ rovnice k -tého řádu s konstantními koeficienty	42
Metody řešení nezkrácených $L\Delta$ rovnic k -tého řádu	46
$L\Delta$ rovnice k -tého řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou	48

Řešení soustav lineárních Δ rovnic 1. řádu.....	54
Metody řešení zkrácených soustav $L\Delta$ rovnic 1. řádu.....	55
Zkrácená soustava $L\Delta$ rovnic s konstantními koeficienty	57
Metody řešení obecných soustav $L\Delta$ rovnic 1. řádu.....	61
Metoda variace konstanty	62
Princip superpozice	65
Soustavy $L\Delta$ rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou	65
Převedení soustavy diferenčních rovnic 1. řádu na jednu rovnici vyššího řádu – metoda eliminace.....	69
Využití diferenčního počtu v ekonomické praxi	72
Pavučinový model rovnováhy trhu.....	72
Dynamický model národního důchodu	75
Závěr.....	77
Literatura.....	78

Použité matematické značení a zkratky

$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$	množina přirozených, celých, racionálních a reálných čísel
$\mathbf{N}_0$	množina $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\{y_n\}$ nebo (y_n)	posloupnost
y_{n+1} nebo $y(n+1)$	$(n+1)$ prvek posloupnosti $\{y_n\}$
Δy_n nebo $\Delta y(n)$	diference posloupnosti $\{y_n\}$
$\Delta^k y_n$ nebo $\Delta^k y(n)$	k -tá diference posloupnosti $\{y_n\}$
$S(y_n)$ nebo $S(y(n))$	sumace posloupnosti $\{y_n\}$
$S^k(y_n)$ nebo $S^k(y(n))$	k -tá sumace posloupnosti $\{y_n\}$
$y_{OZ}(n)$	obecné řešení zkrácené diferenční rovnice
$y_{PN}(n)$	partikulární řešení nezkrácené diferenční rovnice
$y_{ON}(n)$	obecné řešení nezkrácené diferenční rovnice

Úvod

Cílem této diplomové práce je seznámit potenciálního čtenáře s problematikou diferenčního počtu a především pak diferenčních rovnic. Vzhledem k tomu, že se tímto tématem většina česky psaných publikací zabývá pouze okrajově, snaží se tato práce především poskytnout dostatek teoretických i praktických informací pro osvojení si metod řešení jednotlivých typů diferenčních rovnic. K tomu je nezbytně nutné vytvořit u čtenáře také povědomí o pojmech difference, primitivní posloupnost a sumace. Těmto pojmům se proto věnují úvodní kapitoly. Střední část práce se pak již věnuje samotným metodám řešení diferenčních rovnic. Velký důraz je v tomto ohledu věnován praktickým příkladům, které jsou vždy doplněny podrobným postupem řešení s vysvětlením jednotlivých kroků. Závěrečné kapitoly této práce jsou věnovány praktické ukázce využití diferenčních rovnic v ekonomii a zhodnocení jejich praktického přínosu. Vzhledem k tomu, že diferenční počet vychází z počtu diferenciálního, předpokládá čtení této publikace alespoň základní znalosti pojmů jako derivace, určitý a neurčitý integrál a také základních principů řešení diferenciálních rovnic.

Motivace pro zavedení diferenčního počtu

Jak jistě víte metody klasické matematické analýzy (jako např. derivace, integrál či výpočet diferenciálních rovnic) se zabývají řešením problematiky spojené s funkcemi, jejichž definiční obory jsou spojité, případně alespoň částečně spojité (s konečným počtem nespojitých bodů). V technické, ekonomické, ale třeba i přírodovědné praxi, se však mnohem častěji setkáme s funkcemi, jejichž obory jsou nespojité a tudíž na ně nelze výše uvedené metody použít. Jsou to například hodnoty získané z pravidelně opakovaných měření, či pokusů s postupnou změnou vstupních dat v pravidelném intervalu. V tomto případě mluvíme tzv. o funkcích s diskrétním oborem (ve speciálním případě, též posloupnosti). A právě z důvodu potřeby pracovat i s tímto druhem dat, zavádíme zcela novou matematickou teorii jež se nazývá *diferenční počet*. Tato teorie je analogií k teorii diferenciálního počtu a proto zavádí i analogické pojmy k derivaci, primitivní funkci, určitému i neurčitému integrálu a diferenciálním rovnicím. Těmito pojmy jsou (ve stejném pořadí) difference, primitivní posloupnost, určitá sumace, sumace a diferenční rovnice. Výše zmíněná analogie bude v dalším textu ještě mnohokrát zdůrazněna, protože nám pomůže k snazšímu pochopení nově definovaných pojmů. I přestože, jak se ukáže, většina definic v diferenčním počtu je jednodušší než její ekvivalent v počtu diferenciálním, reálné výpočty budou naopak podstatně složitější (tuto skutečnost lze očekávat, mimo jiné i proto, že diferenční počet je mnohem blíže skutečnosti).

Dovolím si zde ještě stručný návrat k definování rozdílu mezi obecnou funkcí s diskrétním oborem a posloupností. Za funkci s diskrétním oborem můžeme považovat každou funkci jejíž definiční obor M můžeme zapsat ve tvaru $M = \{x_0 + nh\}$, $x_0, h \in \mathbf{R}$ $n = 0, 1, 2, \dots$, $h > 0$. Číslo h říkáme diferenční krok. Posloupností pak nazveme každou funkci s diskrétním oborem, pro

kterou platí, že diferenční krok $h = 1$. V této práci budu pracovat pouze s posloupnostmi, protože veškerá odvození vztahů pro funkce s diskretním oborem, jejichž diferenční krok $h \neq 1$, by byla zcela analogická.

Difference

Difference prvního řádu

Na základě úvah v předchozí kapitole nejdříve definujeme pojem difference (tedy pojem ekvivalentní k pojmu derivace v diferenciálním počtu).

Definice: Uvažujme posloupnost (y_n) definovanou na množině N a bod $n^* \in N$. Číslo

$$(\Delta y)_{n^*} = y_{n^*+1} - y_{n^*}$$

se nazývá difference posloupnosti (y_n) v bodě $n^* \in N$. Posloupnost $((\Delta y)_n)$ členů $(\Delta y)_n$ pro $n \in N$ se nazývá difference posloupnosti (y_n) . Místo $((\Delta y)_n)$ se běžně používá zápis Δy_n .

Z definice plyne, že difference posloupnosti (y_n) je vlastně posloupností rozdílů mezi dvěma následujícími členy posloupnosti (y_n) a lze ji tedy sestrojit ve všech bodech $n \in N$. Jedinou výjimkou je posloupnost definovaná na konečné množině, tam bude z logiky věci existovat difference pro všechny body s výjimkou posledního.

Věta 1 (o diferenci aritmetických operací): Necht' $(a_n), (b_n)$ jsou posloupnosti a C je konstanta pak platí.

$$\begin{aligned} \text{I. } \Delta(a_n \pm b_n) &= \Delta a_n \pm \Delta b_n, & \text{II. } \Delta(Ca_n) &= C\Delta a_n, \\ \text{III. } \Delta(a_n b_n) &= a_n \Delta b_n + b_n \Delta a_n + \Delta a_n \Delta b_n, & \text{IV. } \Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{(\Delta a_n)b_n - a_n(\Delta b_n)}{b_n b_{n+1}} \end{aligned}$$

DK I.:

$$\Delta(a_n \pm b_n) = (a_{n+1} \pm b_{n+1}) - (a_n \pm b_n) = (a_{n+1} - a_n) \pm (b_{n+1} - b_n) = \Delta a_n \pm \Delta b_n$$

DK II.:

$$\Delta(Ca_n) = Ca_{n+1} - Ca_n = C(a_{n+1} - a_n) = C\Delta a_n$$

DK III.:

$$\begin{aligned} \Delta(a_n b_n) &= a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n = a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n + a_n \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_{n+1} = \\ &= b_{n+1}(a_{n+1} - a_n) + a_n(b_{n+1} - b_n) = b_{n+1}\Delta a_n + a_n\Delta b_n = a_n\Delta b_n + b_{n+1}\Delta a_n - b_n\Delta a_n + \\ &+ b_n\Delta a_n = a_n\Delta b_n + \Delta a_n(b_{n+1} - b_n) + b_n\Delta a_n = a_n\Delta b_n + \Delta a_n\Delta b_n + b_n\Delta a_n \end{aligned}$$

DK IV.:

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}b_n - b_{n+1}a_n}{b_n \cdot b_{n+1}} = \frac{a_{n+1}b_n - b_{n+1}a_n + a_n b_n - a_n b_n}{b_n \cdot b_{n+1}} = \\ &= \frac{b_n(a_{n+1} - a_n) - a_n(b_{n+1} - b_n)}{b_n \cdot b_{n+1}} = \frac{(\Delta a_n)b_n - a_n(\Delta b_n)}{b_n \cdot b_{n+1}} \end{aligned}$$

Diference vyšších řádů

V diferenciálním počtu definujeme druhou derivaci funkce $y = f(x)$ jako derivaci funkce $y' = f'(x)$. Platí tedy vztah $y'' = (y')'$. Stejně tak definujeme derivaci k -tého řádu jako derivaci o řád nižší derivace funkce $y = f(x)$, tzn. $y^{(k)} = (y^{(k-1)})'$. Zcela analogicky postupujeme i v diferenčním počtu při zavádění derivací vyšších řádů.

Definice:

I. Diferencí druhého řádu posloupnosti y_n definované na množině N , v bodě $n \in N$, nazveme výraz

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n.$$

II. Diferencí k -tého řádu posloupnosti y_n definované na množině N , v bodě $n \in N$, nazveme výraz

$$\Delta^k y_n = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n.$$

Definice:

I. Druhá difference posloupnosti y_n je posloupnost všech druhých diferencí v bodě $n \in N$ tj.

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n).$$

II. K -tá difference posloupnosti y_n je posloupnost všech k -tých diferencí v bodě $n \in N$ tj.

$$\Delta^k y_n = \Delta(\Delta^{k-1} y_n).$$

Pomocí matematické indukce lze tento zápis vyjádřit jako vztah $k+1$ po sobě jdoucích členů posloupnosti

$$\Delta^k y_n = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} y_{n+i}.$$

Právě opakované použití definice difference (či výše uvedené indukční vyjádření) nám umožňuje rozepsat difference vyšších řádů tak, aby obsahovaly pouze členy dané posloupnosti a nikoli difference nižších řádů. Toho se často využívá při řešení diferenčních rovnic. Je samozřejmě možné poustupovat i obráceným způsobem. Tedy máme-li výraz, který obsahuje pouze několik po sobě jdoucích členů posloupnosti (y_n) lze jej přepsat do tvaru, který bude obsahovat pouze člen y_n a difference posloupnosti v tomto bodě. Toho lze někdy využít např. při vyjádření vzorců pro $(n+k)$ -tý prvek pomocí diferencí všech řádů až do k .

☑ Příklad:

Rozepište druhou a třetí diferenci posloupnosti y_n tak, aby obsahovaly pouze prvky dané posloupnosti.

Řešení:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n &= \Delta(\Delta y_n) = \Delta(y_{n+1} - y_n) = (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = \\ &= y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n \\ \Delta^3 y_n &= \sum_{i=0}^3 (-1)^{3-i} \binom{3}{i} y_{n+i} = (-1)^3 y_n + (-1)^2 \cdot 3y_{n+1} + (-1) \cdot 3y_{n+2} + y_{n+3} = \\ &= y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n\end{aligned}$$

☑ Příklad:

Vypočítejte $\Delta^3 y_n$ pro posloupnost $y_n = 4^n$.

Řešení: Rozepíšeme $\Delta^3 y_n$ na vyjádření bez diferencí

$$\Delta^3 y_n = y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n$$

a dosadíme naši posloupnost

$$\begin{aligned}\Delta^3(4^n) &= 4^{n+3} - 3 \cdot 4^{n+2} + 3 \cdot 4^{n+1} - 4^n = \\ &= 4^n \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^n \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^n \cdot 4 - 4^n = 4^n(64 - 3 \cdot 16 + 3 \cdot 4 - 1) = \\ &= 4^n(64 - 48 + 12 - 1) = 27 \cdot 4^n.\end{aligned}$$

☑ Příklad:

Vypočítejte první, druhou a třetí diferenci posloupnosti $y_n = n^2 + 4n + 3$.

Řešení:

První diferenci vypočteme dle definice:

$$\begin{aligned}\Delta y_n &= (n+1)^2 + 4(n+1) + 3 - (n^2 + 4n + 3) = n^2 + 6n + 8 - n^2 - 4n - 3 = \\ &= 2n + 5\end{aligned}$$

Pro výpočet druhé difference můžeme použít dříve odvozený rozpis na tvar bez diferencí,

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n &= (n+2)^2 + 4(n+2) + 3 - 2((n+1)^2 + 4(n+1) + 3) + n^2 + 4n + 3 = \\ &= n^2 + 8n + 15 - 2(n^2 + 6n + 8) + n^2 + 4n + 3 = 2,\end{aligned}$$

nebo využít již vypočtené první difference a použít vztah,

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta(2n+5) = 2(n+1) + 5 - (2n+5) = 2.$$

Analogicky lze postupovat v případě třetí difference,

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_n &= (n+3)^2 + 4(n+3) + 3 - 3((n+2)^2 + 4(n+2) + 3) + \\ &+ 3((n+1)^2 + 4(n+1) + 3) - (n^2 + 4n + 3) = \\ &= n^2 + 10n + 24 - 3(n^2 + 8n + 15) + 3(n^2 + 6n + 8) - (n^2 + 4n + 3) = 0\end{aligned}$$

nebo

$$\Delta^3 y_n = \Delta(\Delta^2 y_n) = \Delta(2) = 2 - 2 = 0.$$

Užití diferencí (monotonie a extrémy posloupnosti)

Monotónnost posloupnosti

Věta 2 (věta o monotonii posloupnosti): Je dána posloupnost y_n , definovaná na

$M \subseteq \mathbf{N}_0$. Pak řekneme že:

- a) posloupnost y_n je *rostoucí* na M , platí-li že $\Delta y_n > 0$,
- b) posloupnost y_n je *klesající* na M , platí-li že $\Delta y_n < 0$,
- c) posloupnost y_n je *neklesající* na M , platí-li že $\Delta y_n \geq 0$,
- d) posloupnost y_n je *nerostoucí* na M , platí-li že $\Delta y_n \leq 0$,

Lokální extrémy

Věta 3 (diskrétní Weierstrassova): Posloupnost y_n definovaná na množině

$M = \{a, a+1, \dots, a+n\}$, $a \in \mathbf{N}_0$ má na této množině své maximum i minimum.

Definice: Posloupnost y_n , $n \in M$ má ve vnitřním bodě $s \in M$ lokální maximum (lok. minimum), je-li $y_s > y_{s+1} \wedge y_s > y_{s-1}$ ($y_s < y_{s+1} \wedge y_s < y_{s-1}$).

Z této definice je odvozena také věta o nutné podmínce lokálního extrému, která výše uvedené nerovnosti převádí na difference v bodě s a $s-1$.

Věta 4 (nutná podmínka existence lokálního extrému): Posloupnost y_n , $n \in M$ má ve vnitřním bodě $s \in M$ lokální extrém, je-li

$$\Delta y_{s-1} \cdot \Delta y_s < 0.$$

Tato věta dokáže určit body, ve kterých bude lokální extrém, ovšem nedokáže určit, jakého druhu tento extrém bude. Proto zavádíme větu o postačující podmínce existence lokálního extrému, která předchází větu rozšiřuje právě o určení typu extrému.

Věta 5 (postačující podmínka lokálního extrému): Je dána posloupnost (y_n) , $n \in M$, $M = \{a, a+1, \dots, a+k\}$. Tato posloupnost má ve vnitřním bodě s množiny M lokální maximum (lokální minimum), platí-li

- a) $\Delta y_{s-1} \cdot \Delta y_s < 0$,
- b) $\Delta^2 y_{s-1} < 0$, $(\Delta^2 y_{s-1} > 0 - \text{pro lokální minimum})$.

Výpočty lokálních extrémů pomocí těchto vět bývají dosti složité, proto se v praxi mnohdy využívají ekvivalentní věty známé z diferenciálního počtu, jejichž řešení bývá jednodušší a s drobnými úpravami snadno aplikovatelné i na posloupnosti.

Globání (absolutní) extrémy

Globálním extrémem je bod (body), v němž má daná posloupnost (y_n) , $n \in M$ největší resp. nejmenší hodnotu. Takovýto bod (body) pak nazýváme absolutním maximem resp. minimem posloupnosti na množině M .

V případě ryze monotonní posloupnosti (y_n) , $n \in M$ jsou absolutními extrémy krajní prvky množiny $M = \langle a, b \rangle$ a to tak, že pro případ posloupnosti

rostoucí je absolutním minimem prvek a a absolutním maximem prvek b .
V případě posloupnosti klesající je tomu naopak.

V případě nemonotonních posloupností postupujeme při určování absolutních extrémů následujícím způsobem.

- 1) stanovíme všechny body lokálních extrémů,
- 2) určíme body, ve kterých platí $\Delta y_n = 0$,
- 3) Ve všech těchto bodech a dále také v krajních bodech množiny M určíme hodnotu y_n . Bod (body) s_1 , v němž je hodnota y_n nejvyšší je pak *absolutním maximem* a bod (body) s_2 , v němž je hodnota y_n nejnižší je *absolutním minimem*.

☑ *Příklad:*

Určete lokální a absolutní extrémy posloupnosti $y_n = n^3 - 6n^2 + 9n + 5$ na množině $M = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$.

Řešení:

Určíme Δy_n , Δy_{n-1} a stanovíme body vyhovující podmínce $\Delta y_{n-1} \cdot \Delta y_n \leq 0$.

$$\begin{aligned}\Delta y_n &= \Delta n^3 - 6\Delta n^2 + 9\Delta n + 5\Delta 1 = \\ &= (n+1)^3 - n^3 - 6((n+1)^2 - n^2) + 9((n+1) - n) + 5(1-1) = \\ &= 3n^2 + 3n + 1 - 6(2n+1) + 9 = 3n^2 - 9n + 4 \\ \Delta y_{n-1} &= \Delta(n-1)^3 - 6\Delta(n-1)^2 + 9\Delta(n-1) + 5\Delta 1 = \\ &= n^3 - (n-1)^3 - 6(n^2 - (n-1)^2) + 9(n - (n-1)) + 5(1-1) = \\ &= 3n^2 - 3n + 1 - 6(2n-1) + 9 = 3n^2 - 15n + 16.\end{aligned}$$

Pak tedy:

$$\begin{aligned}\Delta y_{n-1} \cdot \Delta y_n &\leq 0 \\ \underbrace{(3n^2 - 15n + 16)}_{P_1} \underbrace{(3n^2 - 9n + 4)}_{P_2} &\leq 0\end{aligned}$$

To bude zaručeno při rozdílnosti znamének polynomů P_1, P_2 .

$$P_1 : n_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{33}}{6} = \begin{cases} n_1 = 3,45 & \text{pro body } \{0,1,4,5,\dots,9\} \text{ kladný} \\ n_2 = 1,54 & \text{pro body } \{2,3\} \text{ záporný} \end{cases}$$

$$P_2 : n_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{6} = \begin{cases} n_1 = 2,45 & \text{pro body } \{0,3,4,\dots,9\} \text{ kladný} \\ n_2 = 0,54 & \text{pro body } \{1,2\} \text{ záporný} \end{cases}$$

Uvedené nerovnici tedy vyhovují body $s_1 = 1$ a $s_2 = 3$. Nyní určíme druhou diferenci $\Delta^2 y_n$ a ověříme typ lokálního extrému v jednotlivých bodech.

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta(3n^2 - 9n + 4) = 3(2n + 1) - 9 = 6n - 6$$

$s_1 : \Delta^2 y_n(1) = 6 - 6 = 0$, nelze určit, musíme tedy vyjít z definice a určit hodnoty posloupnosti y_n v tomto a sousedních bodech.

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= 0 - 6 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 5 = 5 \\ y_1 &= 1 - 6 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 5 = 9 \\ y_2 &= 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 5 = 7 \end{aligned} \right\} \text{ tedy lokální maximum}$$

$s_2 : \Delta^2 y_n(3) = 18 - 6 = 12$, jde tedy o lokální minimum.

Nyní dle bodu dva postupu určování absolutních extrémů musíme najít body, v nichž je $\Delta y_n = 0$, tedy kořeny polynomu $3n^2 + 9n + 4$. Ty už jsme však našli a jsou jimi body $n_1 = 2,45$ a $n_2 = 0,54$. Protože, ale $n_1, n_2 \notin M$ neexistuje žádný bod, pro který by tato podmínka byla splněna. Můžeme tedy přistoupit k určení absolutních extrémů tím, že vypočteme hodnoty posloupnosti v krajních bodech množiny M a v bodech námi nalezených lokálních extrémů.

$$\begin{aligned} y_0 &= 5 \\ y_1 &= 9 \\ y_3 &= 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 5 = 5 \\ y_9 &= 9^3 - 6 \cdot 9^2 + 9 \cdot 9 + 5 = 329 \end{aligned}$$

Posloupnost má tedy vzhledem k množině M absolutní minimum v bodech 0, 3 a absolutní maximum v bodě 9.

Primitivní posloupnost a sumace

Stejně tak jako jsme se v předchozí kapitole zabývali pojmem difference posloupnosti, který byl ekvivalentem pojmu derivace funkce, budeme se v této kapitole zabývat pojmem primitivní posloupnost, který koresponduje s pojmem primitivní funkce a sumací, která je ekvivalentem integrálu.

Primitivní posloupnost

Definice: O posloupnosti (Y_n) definované na $M \subseteq \mathbb{N}$ říkáme, že je *primitivní* k posloupnosti (y_n) definované na M , jestliže platí

$$\Delta Y_n = y_n, \text{ pro } n \in M$$

Věta 6 (o počtu primitivních posloupností): Je-li Y_n primitivní posloupnost k posloupnosti y_n a C je libovolná konstanta, potom též posloupnost $Y_n + C$ je primitivní k y_n . Platí tedy

$$\Delta Y_n = y_n \Rightarrow \Delta(Y_n + C) = y_n.$$

Z výše uvedené věty vyplývá, že pokud k dané posloupnosti existuje primitivní posloupnost, je takových posloupností nekonečně mnoho. Tím však vzniká otázka, zda k dané posloupnosti mohou existovat primitivní posloupnosti, které se vzájemně liší o víc než jen pouhou konstantu. Definicí a důkazem následující věty si však dokážeme že nikoli.

Věta 7 (o vztahu mezi primitivními posloupnostmi): Necht' Y_n a Z_n jsou dvě primitivní posloupnosti k posloupnosti y_n . Potom existuje konstanta C tak, že

$$Y_n = Z_n + C.$$

DK 7: Protože Y_n a Z_n jsou primitivní k y_n , platí $\Delta Y_n = y_n, \Delta Z_n = y_n$, a tedy

$$\Delta(Y_n - Z_n) = \Delta Y_n - \Delta Z_n = y_n - y_n = 0.$$

Označme $Y_n - Z_n = C_n$. Odtud plyne $\Delta C_n = C_{n+1} - C_n = 0 \Rightarrow C_{n+1} = C_n$

$\forall n \in \mathbf{N}$. Postupným dosazováním dostaneme $C_0 = C_1 = C_2 = \dots = C_n$.

Posloupnost (C_n) je tedy konstantní a po dosazení do vztahu $Y_n - Z_n = C_n$ dostáváme požadované tvrzení.

Předchozí dvě věty platily za předpokladu, že k dané posloupnosti existuje posloupnost primitivní. Položme si však otázku zda je tento předpoklad platný pro všechny posloupnosti? Následující věta nám dokazuje, že ano.

Věta 8 (o existenci primitivní posloupnosti): Ke každé posloupnosti (y_n) definované v $\mathbf{N}$ existuje posloupnost primitivní (Y_n) definovaná v $\mathbf{N}$ s předpisem:

$$Y_n = 0 \text{ pro } n = n_1, \quad Y_n = y_{n_1} + y_{n_1+1} + y_{n_1+2} + \dots + y_{n-1} \text{ pro } n > n_1$$

DK 8: Důkaz plyne z definice primitivní posloupnosti:

$$\Delta Y_n = Y_{n_1+1} - Y_{n_1} = y_{n_1} - 0 = y_{n_1},$$

$$\Delta Y_n = Y_{n+1} - Y_n = (y_{n_1} + y_{n_1+1} + \dots + y_{n-1} + y_n) - (y_{n_1} + y_{n_1+1} + \dots + y_{n-1}) = y_n$$

Jen pro připomenutí. Analogická věta diferenciálního počtu o existenci primitivní funkce předpokládá spojitost funkce v daném intervalu.

Sumace

Definice: Obecného reprezentanta množiny všech primitivních posloupností k posloupnosti (y_n) v množině $\mathbf{N}$ nazveme *neurčitá sumace posloupnosti* (y_n) nebo krátce *sumace* a značíme ji $S(y_n)$.

Platí tedy:

$$S(y_n) = C \quad \text{pro } n = n_1$$

$$S(y_n) = y_{n_1} + y_{n_1+1} + \dots + y_{n-1} + C \quad \text{pro } n \in \mathbf{N}.$$

Analogicky platí i následující věty o vlastnostech sumace.

Věta 9 (o vlastnostech sumace): Necht' (a_n) , (b_n) jsou posloupnosti definované na $\mathbf{N}$ a necht' c je konstanta. Pak při vhodném zvolení sumačních konstant C platí na uvedené množině:

$$I. S(a_n \pm b_n) = S(a_n) \pm S(b_n),$$

$$II. S(c \cdot a_n) = c \cdot S(a_n)$$

$$III. S(\Delta a_n) = a_n.$$

Věta 10 (o sumaci základních posloupností): Necht' P_k , Q_k jsou polynomy k -tého stupně, $a \neq 1$ konstanta, C sumační konstanta. Pak platí:

$$I. S(0) = C,$$

$$II. S(Q_k(n)) = P_{k+1}(n) + C,$$

$$III. S(a^n) = \frac{a^n}{a-1} + C,$$

$$IV. S(a^n Q_k(n)) = a^n P_k(n) + C.$$

Sumace vyšších řádů

Je dána posloupnost (y_n) , která má sumaci Y_n^1 . Hledáme-li sumaci posloupnosti (Y_n^1) , dostaneme posloupnost (Y_n^2) , které říkáme *sumace druhého řádu* posloupnosti y_n . Platí tedy $\Delta Y_n^2 = Y_n^1$, $\Delta Y_n^1 = y_n$ a tedy $\Delta^2 Y_n^2 = y_n$. Zobecněním tohoto tvrzení je následující definice.

Definice: Je dána posloupnost (y_n) , $n \in M$. Existuje-li posloupnost Y_n^k taková, že pro $\forall n \in M$ $\Delta^k Y_n^k = y_n$, potom posloupnost (Y_n^k) nazýváme *sumací k -tého řádu posloupnosti (y_n)* v množině M . Rovnost $\Delta^k Y_n^k = y_n$ se někdy zapisuje v opačném tvaru, tedy $\Delta^{-k} y_n = Y_n^k$.

☑ *Příklad:*

Odvoďte sumace prvního řádu pro a^n a na^n , kde $a \neq 1$.

Řešení:

Při řešení tohoto příkladu využijeme vztahu $S(\Delta y_n) = y_n$. Nejprve tedy určíme první diferenci a^n ,

$$\Delta a^n = a^{n+1} - a^n = a^n(a-1).$$

Nyní využijeme uvedeného vztahu a odvodíme sumaci a^n ,

$$\begin{aligned} S(\Delta a^n) &= S(a^n(a-1)) \Rightarrow a^n = (a-1)S(a^n) \Rightarrow \\ \Rightarrow S(a^n) &= \frac{a^n}{a-1}. \end{aligned}$$

Obdobný postup použijeme pro na^n . Opět tedy nejprve určíme první diferenci,

$$\Delta na^n = (n+1)a^{n+1} - na^n = na^{n+1} + a^{n+1} - na^n = na^n(a-1) + aa^n.$$

Tento vztah opět s pomocí vztahu $S(\Delta y_n) = y_n$ upravíme, tentokrát však ke konečnému odvození sumace využijeme i již určenou sumaci $S(a^n)$,

$$\begin{aligned} S(\Delta na^n) &= S(na^n(a-1)) + S(aa^n) \Rightarrow \\ \Rightarrow na^n &= (a-1)S(na^n) + aS(a^n) \Rightarrow \\ \Rightarrow na^n &= (a-1)S(na^n) + a \frac{a^n}{a-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow S(na^n) &= \frac{na^n}{a-1} - \frac{a^{n+1}}{(a-1)^2}. \end{aligned}$$

☑ *Příklad:*

Určete sumaci prvního a druhého řádu pro posloupnost $y_n = 2n + 1$.

Řešení:

Sumace prvního řádu posloupnosti y_n je Y_n^1 což je polynom $P_2(n)$. Platí:

$$Y_n^1 = \Delta^{-1}(2n + 1) = a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$

Proto:

$$\begin{aligned} 2n + 1 &= \Delta(a_2 n^2 + a_1 n + a_0) = a_2 \Delta n^2 + a_1 \Delta n + a_0 \Delta 1 = \\ &= a_2 ((n+1)^2 - n^2) + a_1 ((n+1) - n) = a_2 (2n + 1) + a_1 \end{aligned}$$

Určíme koeficienty $a_i, i = 1, 2$. Porovnáme koeficienty u mocnin n .

Pak pro:

$$\begin{aligned} n^1 : \quad 2 &= 2a_2 \\ n^0 : \quad 1 &= a_2 + a_1. \end{aligned}$$

Proto $a_2 = 1$, $a_1 = 0$ a tedy sumace prvního řádu je:

$$Y_n = n^2 + C_1,$$

kde C je konstanta nebo periodická posloupnost.

Analogicky postupujeme v případě sumace druhého řádu.

$$\begin{aligned} Y_n^2 &= \Delta^{-1}(n^2 + C_1) = b_3 n^3 + b_2 n^2 + b_1 n + b_0 \\ n^2 + C_1 &= b_3 \Delta n^3 + b_2 \Delta n^2 + b_1 \Delta n + b_0 \Delta 1 = b_3 (3n^2 + 3n + 1) + \\ &+ b_2 (2n + 1) + b_1 = n^2 (3b_3) + n(3b_3 + 2b_2) + b_3 + b_2 + b_1 \end{aligned}$$

Porovnáme koeficienty u mocnin n :

$$\left. \begin{aligned} n^2 : \quad 1 &= 3a_3 \\ n^2 : \quad 0 &= 3a_3 + 2a_2 \\ n^0 : \quad C_1 &= a_3 + a_2 + a_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}, a_2 = -\frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{6} + C_1$$

Hledané řešení sumace druhého řádu je tedy:

$$Y_n^2 = \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{2} n^2 + \left(\frac{1}{6} + C_1 \right) n + C_2.$$

Diferenční rovnice (Δ Rovnice nebo ΔR)

Podobně jako diferenciální rovnice udává vztah mezi hledanou funkcí a jejími derivacemi, diferenční rovnice udává vztah mezi *hledanou posloupností* a jejími *diferencemi*. Tyto difference je možné pomocí dříve uvedených vztahů rozepsat na výrazy, které obsahují pouze členy posloupnosti, a diferenční rovnice tedy může určovat i vztah mezi několika po sobě jdoucími členy posloupnosti.

Definice (diferenční rovnice 1. řádu): Necht' je dána funkce $f : \mathbf{N} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Pak *diferenční rovnici prvního řádu* rozumíme rovnicí:

$$\Delta y_n = f(n, y_n) \quad \text{nebo} \quad y_{n+1} = f(n, y_n).$$

Definice (diferenční rovnice k-tého řádu): Necht' je dána funkce $f : \mathbf{N} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $k+1$ proměnných. Pak *diferenční rovnici k-tého řádu* rozumíme rovnicí:

$$\Delta^k y_n = f(n, y_n, \Delta y_n, \dots, \Delta^{k-2} y_n, \Delta^{k-1} y_n),$$

nebo (zápis ve tvaru bez diferencí)

$$y_{n+k} = f(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-2}, y_{n+k-1}).$$

V literatuře se někdy ΔR zapsané zápisem s diferencemi označují jako *diferenční rovnice prvního typu* a ΔR ve tvaru bez diferencí jako *diferenční rovnice druhého typu*. Použitím vzorců pro rozepsání diferencí vyšších řádů lze jeden typ ΔR převádět na druhý a oba zápisy jsou proto ekvivalentní. My se budeme v dalším textu zabývat pouze řešením ΔR druhého řádu.

☑ *Příklad (převedení ΔR na tvar bez diferencí):*

Převeďte rovnici $2\Delta^2 y_n - 4\Delta y_n + 3y_n = n$ na tvar neobsahující difference.

Řešení: Vyjádříme vztahy pro $\Delta^2 y_n$ a Δy_n

$$\Delta^2 y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n \quad \text{a} \quad \Delta y_n = y_{n+1} - y_n,$$

dosadíme do původní rovnice

$$2(y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n) - 4(y_{n+1} - y_n) + 3y_n = n,$$

po úpravě dostáváme výsledek

$$2y_{n+2} - 8y_{n+1} + 9y_n = n$$

Definice (řešení ΔR): Řešením diferenční rovnice na intervalu $[a, b]$ rozumíme každou posloupnost definovanou na intervalu $[a, b+1]$, která splňuje na intervalu $[a, b]$ danou Δ rovnici.

Řešením na množině $\mathbf{N}_0$ rozumíme každou posloupnost, definovanou na $\mathbf{N}_0$ splňující danou Δ rovnici pro všechna $n \in \mathbf{N}_0$.

Všechna řešení diferenční rovnice řádu k lze často vyjádřit jedním vzorcem, který obsahuje k nezávislých konstant. Tento vzorec se nazývá *obecné řešení diferenční rovnice*. Řešení, které splňuje *počáteční podmínky* v bodě l

$$y_l = p_1, y_{l+1} = p_2, \dots, y_{l+k} = p_k,$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou reálná čísla, se nazývá *partikulární řešení ΔR* .

☑ *Příklad:*

Ověřte že posloupnost $y_n = \frac{C}{n+1}$ je pro libovolné $C \in \mathbf{R}$ řešením rovnice:

$$y_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot y_n$$

na $\mathbf{N}_0$. Dále najděte partikulární řešení této posloupnosti splňující počáteční podmínku $y_4 = -5$.

Řešení: Vypočteme $(n+1)$ -ní člen zadané posloupnosti a dosadíme jej do ΔR .

$$y_{n+1} = \frac{C}{n+2}, \quad \frac{C}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \frac{C}{n+1}.$$

Algebraickou úpravou dostaneme rovnici

$$\frac{C}{n+2} = \frac{C}{n+2},$$

která platí pro libovolné $n \in \mathbf{N}_0$. Posloupnost je tedy obecným řešením zadané rovnice. Nyní hledáme partikulární řešení, a proto do rovnice dosadíme počáteční podmínku. Tím dostáváme

$$-5 = \frac{C}{4+1} \Rightarrow C = -25.$$

Partikulárním řešením diferenční rovnice je tedy posloupnost $y_n = \frac{-25}{n+1}$, jejíž

první členy jsou $\left(-25, -\frac{25}{2}, -\frac{25}{3}, -\frac{25}{4}, -5, -\frac{25}{6}, \dots\right)$.

Řešení diferenční rovnice 1. řádu

Jak již bylo uvedeno, diferenční rovnicí (Δ rovnice) prvního řádu rozumíme rovnici $\Delta y_n = f(n, y_n)$ resp. $y_{n+1} = f(n, y_n)$ kde $f: \mathbf{N} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je daná funkce. Nejjednodušším typem Δ rovnice prvního řádu je pak rovnice $\Delta y_n = g_n$, jejímž obecným řešením je $y_n = S(g_n)$, tedy sumace posloupnosti g_n . Nyní si ukažme způsob řešení Δ rovnice $\Delta y_n = g_n y_n$. K řešení této rovnice použijeme *metodu krácení podílů*, jejíž analogií v diferenciálním počtu je *metoda separace proměnných*.

Metoda krácení podílů

Řešení Δ rovnice $\Delta y_n = g_n y_n$

1. Δ rovnici přepíšeme na tvar $y_{n+1} - y_n = g_n y_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n \underbrace{(1 + g_n)}_{p_n}$.
2. Obě strany rovnice vydělíme y_n přičemž předpokládáme $y_n \neq 0$ v $\mathbf{N}_0$. Pokud by $\exists n_0; y_{n_0} = 0$, pak by i $\forall n \geq n_0; y_n = 0$ a tyto případy zohledníme v bodě 6. Proto tedy může přistoupit k dělení:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = p_n.$$

3. Vynásobíme levé a pravé strany předchozí rovnice pro $n = 0, 1, 2, \dots, m-1$:

$$\frac{y_1}{y_0} \frac{y_2}{y_1} \frac{y_3}{y_2} \dots \frac{y_{m-1}}{y_{m-2}} \frac{y_m}{y_{m-1}} = p_0 p_1 p_2 \dots p_{m-2} p_{m-1}.$$

4. Podíly na levé straně můžeme zkrátit a dostaneme:

$$\frac{y_m}{y_0} = p_0 p_1 p_2 \dots p_{m-2} p_{m-1} = \prod_{i=0}^{m-1} p_i.$$

5. Zvolíme $y_0 = C$ a po vynásobení rovnice tímto výrazem a přechodu k proměnné n dostaneme obecné řešení:

$$y_{O.}(n) = C \prod_{i=0}^{n-1} p_i, \quad n \in \mathbf{N}_0, C \neq 0.$$

6. Vedle uvedeného obecného řešení má uvažovaná Δ rovnice ještě další obecná řešení typu $y_{O,k}(n)$, $k \in \mathbf{N}_0$, $C \neq 0$:

$$y_{O,k}(n) = \begin{cases} C \prod_{i=0}^{n-1} p_i & \text{pro } n \leq k, \\ 0 & \text{pro } n > k \end{cases},$$

a singulární řešení $y_{S.}(n) = 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}_0$.

☑ *Příklad:* Vyřešte rovnici $\Delta y_n = n y_n$.

Řešení: metoda krácení podílů

1. $y_{n+1} - y_n = n \cdot y_n$ tedy $y_{n+1} = y_n(1+n)$,
2. $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1+n$,
3. $\frac{y_1}{y_0} \frac{y_2}{y_1} \dots \frac{y_{m-1}}{y_{m-2}} \frac{y_m}{y_{m-1}} = \prod_{i=0}^{m-1} 1+i = m!$,
4. $\frac{y_m}{y_0} = m!$,
5. $y_n = Cn!$, pro $n \in \mathbf{N}_0$ případně $y_n = \begin{cases} Cn! & \text{pro } n \leq k, k \in \mathbf{N} \\ 0, & \text{pro } n > k \end{cases}$.

Lineární diferenční rovnice 1. řádu

Definice: Rovnice

$$y_{n+1} + p_n y_n = q_n,$$

o neznámé posloupnosti y_n , kde posloupnosti p_n , q_n jsou definovány na $M \subseteq \mathbf{N}_0$, se nazývá lineární diferenční rovnice 1. řádu v M (L Δ rovnice 1. řádu). V případě že $q_n = 0$, tedy nulové pravé strany, hovoříme o zkrácené L Δ rovnici. V literatuře se též někdy setkáme s označením zkrácené L Δ rovnice jako homogenní a nezkrácené (tedy s $q_n \neq 0$) jako nehomogenní, my se však budeme držet prvně jmenovaného názvosloví.

Postup řešení L Δ rovnic 1. řádu

Řešíme-li zkrácenou L Δ rovnici použijeme stejně jako v předcházejícím příkladě metodu krácení podílů (ostatně předchozí příklad je jedním z příkladů zkrácené L Δ rovnice 1. řádu). V případě obecné L Δ rovnice nám již však tato metoda sama o sobě k vyřešení rovnice stačit nebude. My však víme, že obecné řešení každé lineární rovnice lze zapsat jako součet obecného řešení zkrácené (homogenní) rovnice $y_{oz}(n)$ a jednoho partikulárního řešení rovnice obecné (nehomogenní) $y_{pN}(n)$. Zkrácenou L Δ rovnici vyřešit umíme, zbývá nám proto určit jedno partikulární řešení. K tomu použijeme *metodu variace konstanty*, která se používá i v diferenciálních rovnicích (název vychází z toho, že konstantu C nahrazujeme obecně nekonzantní posloupností $C(n)$). Shrňme si pro přehlednost celý postup řešení L Δ rovnic 1. řádu do dvou bodů.

A. **Metoda krácení podílů**

Hledáme-li řešení obecné L Δ rovnice ve tvaru $y_{n+1} + p_n y_n = q_n$, vyřešíme nejdříve příslušnou *zkrácenou* rovnici $y_{n+1} + p_n y_n = 0$

metodou krácení podílů. Tím dostaneme řešení $y_{oz}(n)$, tedy obecné řešení zkrácené rovnice, které bez konstanty C označíme jako $U(n)$:

$$y_{oz}(n) = C \prod_{i=0}^{n-1} (-p_i) = C \underbrace{(-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} p_i}_{U(n)}.$$

B. Metoda variace konstanty

Obecné řešení původní $L\Delta$ rovnice nyní předpokládáme ve tvaru

$$y_{on}(n) = C(n)U(n).$$

Nyní použijeme již zmíněnou *metodu variace konstanty*.

Konkrétní tvar $C(n)$ zjistíme dosazením $y_{on}(n) = C(n)U(n)$ a analogické $y_{on}(n+1) = C(n+1)U(n+1)$ do původní $L\Delta$ rovnice

$$y_{n+1} + p_n y_n = q_n.$$

Dostáváme tedy:

$$\underbrace{C(n+1)(-1)^{n+1} \prod_{i=0}^{n+1-1} p_i}_{y_{on}(n+1)} + p_n \underbrace{C(n)(-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} p_i}_{y_{on}(n)} = q_n \Rightarrow$$

$$\underbrace{[C(n+1) - C(n)]}_{\Delta C(n)} \cdot \underbrace{(-1)^{n+1} \prod_{i=0}^n p_i}_{U(n+1)} = q_n \Rightarrow C(n) = \underbrace{S\left(\frac{q_n}{U(n+1)}\right)}_{w(n)} + C^\bullet.$$

Po dosazení $C(n)$ do vzorce pro $y_{on}(n)$ dostáváme výsledek:

$$y_{on}(n) = (w(n) + C^\bullet)U(n) = \underbrace{w(n)U(n)}_{y_{pn}(n)} + \underbrace{C^\bullet U(n)}_{y_{oz}(n)},$$

kde $y_{pn}(n)$ je jedno z partikulárních řešení rovnice a $y_{zo}(n)$ je již určené obecné řešení zkrácené rovnice.

☑ *Příklad:* Vyřešte L Δ rovnici $y_{n+1} - \frac{1}{n}y_n = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$.

Řešení:

A. Řešíme příslušnou zkrácenou L Δ rovnici metodou krácení podílů:

$$y_{n+1} - \frac{1}{n}y_n = 0 \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{n}y_n \Rightarrow \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{n}.$$

Násobíme levé a pravé strany rovnice pro $n = 1, 2, \dots, m-1$:

$$\frac{y_2}{y_1} \frac{y_3}{y_2} \dots \frac{y_m}{y_{m-1}} = \frac{1}{1} \frac{1}{2} \dots \frac{1}{m-1}.$$

Po krácení podílů na levé straně a přeznačení dostáváme:

$$\frac{y_m}{y_1} = \frac{1}{(m-1)!} \Rightarrow y_n = y_1 \frac{1}{(n-1)!} \Rightarrow y_{oz}(n) = C \frac{1}{(n-1)!}.$$

B. Nyní hledáme obecné řešení $y_{on}(n)$ přičemž využíváme metodu variace konstanty. $y_{on}(n)$ uvažujeme ve tvaru:

$$y_{on}(n) = C(n) \frac{1}{(n-1)!}, \text{ a tedy } y_{on}(n+1) = C(n+1) \frac{1}{n!}.$$

Tyto dosadíme do původní nezkrácené L Δ rovnice a dostáváme:

$$\underbrace{C(n+1) \frac{1}{n!}}_{z_{on}(n+1)} - \frac{1}{n} \underbrace{C(n) \frac{1}{(n-1)!}}_{z_{on}(n)} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \underbrace{[C(n+1) - C(n)]}_{\Delta C(n)} \frac{1}{n!} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta C(n) = \frac{(n-1)!}{n} \Rightarrow C(n) = S\left(\frac{(n-1)!}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(i-1)!}{i} + C.$$

Dosazením $C(n)$ do $y_{on}(n)$ získáme výsledný vzorec

$$y_{on}(n) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(i-1)!}{i} + C \right) \frac{1}{(n-1)!} = \underbrace{\frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(i-1)!}{i}}_{y_{pn}(n)} + \underbrace{C \frac{1}{(n-1)!}}_{y_{oz}(n)}.$$

Zkrácená lineární Δ rovnice 1. řádu s konstantním koeficientem

Zkrácená lineární Δ rovnice 1. řádu s konstantním koeficientem je rovnice ve tvaru

$$y_{n+1} - ay_n = 0; \quad a \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

Hledáme-li pak obecné řešení takovéto rovnice není nutné postupovat dle dříve uvedeného postupu, ale lze hledat řešení ve tvaru $y_n = \lambda^n$, kde λ je obecně komplexní konstanta. Po dosazení do původní rovnice dostaneme pro λ *charakteristickou rovnici* $\lambda - a = 0$ (*CH rovnice*). Obecným řešením $L\Delta$ rovnice 1. řádu s konstantním koeficientem a je pak

$$y_{oz}(n) = Ca^n.$$

☑ *Příklad:* Vyřešte $y_{n+1} - 3y_n = 0$.

Řešení: Protože se jedná o $L\Delta$ rovnici s konstantním koeficientem můžeme určit řešení $y_{oz}(n)$ ve výše uvedeném tvaru:

$$y_{n+1} - 3y_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3 \quad \Rightarrow \quad y_{oz}(n) = C \cdot 3^n.$$

Pro ověření ještě vypočteme klasickou metodou krácení podílů:

$$1. - 2. \quad y_{n+1} - 3y_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_{n+1}}{y_n} = 3,$$

$$3. - 4. \quad \frac{y_1}{y_0} \frac{y_2}{y_1} \dots \frac{y_{m-1}}{y_{m-2}} \frac{y_m}{y_{m-1}} = 3^m \quad \Rightarrow \quad \frac{y_m}{y_0} = 3^m,$$

$$5. \quad y_{oz}(n) = C \cdot 3^n.$$

Lineární Δ rovnice 1. řádu s pravou stranou ve tvaru součtu posloupností – princip superpozice

Řešíme-li $L\Delta$ rovnici 1. řádu jejíž pravá strana je součtem několika posloupností tzn. je ve tvaru

$$y_{n+1} + p_n y_n = q_{1n} + q_{2n} + \dots + q_{kn},$$

můžeme najít partikulární řešení rovnice pro každou posloupnost q_{in} zvlášť tj.

najít partikulární řešení $y_{iPN}(n)$ rovnic

$$y_{iON}(n+1) + p_n y_{iON}(n) = q_{in}; \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Výsledné partikulární řešení pak bude součtem těchto řešení, tedy

$$y_{PN}(n) = y_{1PN}(n) + y_{2PN}(n) + \dots + y_{kPN}(n).$$

Jak již název kapitoly napovídá tomuto postupu říkáme *princip superpozice*.

☑ *Příklad:* Řešte Δ rovnici $y_{n+1} + ny_n = n! + \frac{1}{n+1}$.

Řešení:

První část příkladu řešíme klasicky tj. hledáme řešení zkrácené rovnice $y_{ZN}(n)$.

$$y_{n+1} + ny_n = 0 \Rightarrow \frac{y_{n+1}}{y_n} = -n \Rightarrow \frac{y_m}{y_0} = (-1)^{m-1} (m-1)! \Rightarrow y_{ZN}(n) = C \underbrace{(-1)^{n-1} (n-1)!}_{U(n)}$$

Protože pravá strana řešené rovnice je zadána ve tvaru součtu posloupností $n!$

a $\frac{1}{n+1}$ můžeme využít principu superpozice a najít partikulární řešení pro

každou posloupnost zvlášť. Po dosazení za $y_{ON}(n)$ a $y_{ON}(n+1)$ pak tedy dostáváme rovnice:

$$y_{1PN}(n): C(n+1)(-1)^n n! + nC(n)(-1)^{n-1} (n-1)! = n!$$

$$y_{2PN}(n): C(n+1)(-1)^n n! + nC(n)(-1)^{n-1} (n-1)! = \frac{1}{n+1}$$

$$1) C(n+1)(-1)^n n! + nC(n)(-1)^{n-1}(n-1)! = n! \Rightarrow \underbrace{(C(n+1) - C(n))}_{\Delta C(n)} (-1)^n n! = n!$$

$$\Delta C(n) = (-1)^n \Rightarrow C(n) = S((-1)^n) = \frac{1}{2}(-1)^{n+1} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1ON}(n) = \left(\frac{1}{2}(-1)^{n+1} + C_1 \right) \cdot (-1)^{n-1}(n-1)! = \underbrace{\frac{(n-1)!}{2}}_{y_{1PN}(n)} + C_1(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$2) C(n+1)(-1)^n n! + nC(n)(-1)^{n-1}(n-1)! = \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(C(n+1) - C(n))}_{\Delta C(n)} (-1)^n n! = \frac{1}{n+1}$$

$$\Delta C(n) = (-1)^n \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow C(n) = S\left((-1)^n \frac{1}{(n+1)!}\right) = \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{i!} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{2ON}(n) = \left(\sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{i!} + C_2 \right) \cdot (-1)^{n-1}(n-1)! =$$

$$= \underbrace{(-1)^{n-1}(n-1)! \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{i!}}_{y_{2PN}(n)} + C_2(-1)^{n-1}(n-1)!$$

Partikulárním řešením hledané Δ rovnice je pak součet nalezených partikulárních řešení, tj.

$$y_{PN}(n) = \frac{(n-1)!}{2} + (-1)^{n-1}(n-1)! \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{i!}.$$

Výsledné obecné řešení je tedy

$$y_{ON}(n) = \underbrace{\frac{(n-1)!}{2} + (-1)^{n-1}(n-1)! \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{i!}}_{y_{PN}(n)} + \underbrace{C(-1)^{n-1}(n-1)!}_{y_{OZ}(n)}$$

Lineární Δ rovnice 1. řádu s konstantním koeficientem a speciální pravou stranou – odhad řešení

Ve speciálním případě, kdy řešíme Δ rovnici 1. řádu s konstantním koeficientem a je-li pravá strana rovnice součet polynomů proměnné n , které jsou vynásobeny exponenciálními funkcemi, lze najít partikulární řešení

obecné rovnice odhadem. Přesněji, odhadujeme partikulární řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} - ay_n = \mu^n P_k(n),$$

kde $P_k(n)$ je polynom stupně k . Odhadované partikulární řešení bude ve tvaru $y_{PN}(n) = \mu^n R_k(n)n^\alpha$, kde α je násobnost čísla μ jako kořene *charakteristické rovnice* $\lambda - a = 0$, k ní příslušné zkrácené lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty. V případě rovnice 1. řádu je tedy $\alpha = 1$, pokud $\mu = \lambda$ (tj. μ je kořenem CH rovnice) a $\alpha = 0$, jestliže $\mu \neq \lambda$ (tj. μ není kořenem CH rovnice).

☑ *Příklad:*

Na množině $\mathbb{N}_0$ nalezněte řešení LΔ rovnice:

$$y_{n+1} + 2y_n = (-3)^n(n^2 - 1).$$

Řešení:

Jde o LΔ rovnici s konstantním koeficientem a speciální pravou stranou. Můžeme tedy použít předchozí postup. Ze zkrácené rovnice získáme pro λ charakteristickou rovnici:

$$\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow y_{oz}(n) = (-2)^n$$

Pravá strana je polynom 2. stupně vynásobený exponenciální posloupností $(-3)^n$. Protože $\mu = -3$ není kořenem charakteristické rovnice $\Rightarrow \alpha = 0$.

Hledáme tedy partikulární řešení ve tvaru:

$$\begin{aligned} y_{PN}(n) &= (-3)^n(an^2 + bn + c); \quad a, b, c \text{ jsou konstanty} \\ (-3)^{n+1}(a(n+1)^2 + b(n+1) + c) + 2(-3)^n(an^2 + bn + c) &= (-3)^n(n^2 - 1) \\ (-3)(-3)^n(a(n+1)^2 + b(n+1) + c) + 2(-3)^n(an^2 + bn + c) &= (-3)^n(n^2 - 1) \\ -3(an^2 + 2an + a + bn + b + c) + 2an^2 + 2bn + 2c &= n^2 - 1 = \\ -an^2 + 6an - 3a - bn - 3b - c &= n^2 - 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 n^2 : -a &= 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1 \\
 n^1 : -6an - bn &= 0 \Rightarrow -6a = b \quad \Rightarrow \quad b = 6 \\
 n^0 : -3a - 3b - c &= -1 \Rightarrow -3a - 3b + 1 = c \quad \Rightarrow \quad c = -14
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{PN}(n) = (-3)^n (-n^2 + 6n - 14)$$

Obecným řešením hledané lineární diferenční rovnice je pak součet $y_{OZ}(n)$ a $y_{PN}(n)$ tedy:

$$y_{ON} = \underbrace{(-3)^n (-n^2 + 6n - 14)}_{y_{PN}(n)} + \underbrace{C(-n)^n}_{y_{OZ}(n)} .$$

Řešení diferenční rovnice k -tého řádu

Lineární diferenční rovnice k -tého řádu

Definice: Rovnice

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + a_{k-2}y_{n+k-2} + \dots + a_2y_{n+2} + a_1y_{n+1} + a_0y_n = q_n,$$

o neznámé posloupnosti y_n , kde posloupnosti $a_i; i = 0, \dots, k-1$ jsou definovány na $M \subseteq \mathbb{N}_0$, se nazývá lineární diferenční rovnice k -tého řádu v M ($L\Delta$ rovnice k -tého řádu). V případě že $q_n = 0$, tedy nulové pravé strany, hovoříme stejně jako v případě $L\Delta$ rovnice 1. řádu o zkrácené (homogenní) rovnici.

Protože levá strana $L\Delta$ rovnice splňuje vlastnost linearitu, lze obecné řešení této rovnice psát ve tvaru

$$y_{ON}(n) = y_{PN}(n) + y_{OZ}(n),$$

kde $y_{OZ}(n)$ je obecné řešení příslušné zkrácené rovnice a $y_{PN}(n)$ je jedno libovolné partikulární řešení původní rovnice. Úloha najít obecné řešení $L\Delta$ rovnice k -tého řádu se tedy, stejně jako v případě rovnic řádu prvního, dělí na dvě úlohy, nalezení řešení zkrácené rovnice a určení partikulárního řešení nezkrácené rovnice.

Metody řešení zkrácené $L\Delta$ rovnice k -tého řádu

Z definice plyne, že každé řešení zkrácené $L\Delta$ rovnice k -tého řádu lze vyjádřit jako lineární kombinaci k řešení $y_i(n); i = 1, 2, \dots, k$, která odpovídají řešení této rovnice s počátečními podmínkami například $y_i(n_1 + j - 1) = \delta_{ij}$ pro $i, j = 1, 2, \dots, k$, kde $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $\delta_{ii} = 1$. Jelikož se jedná o zkrácenou (homogenní) rovnici, víme, že množina všech řešení této rovnice bude tvořit

vektorový prostor. Protože jak lze snadno dokázat, jednotlivá řešení výše uvedených rovnic jsou lineárně nezávislá, bude mít vektorový prostor definovaný $L\Delta$ rovnicí k -tého řádu dimenzi k . Každá množina k lineárně nezávislých řešení $L\Delta$ rovnice pak tvoří bázi vektorového prostoru a nazývá se *fundamentální systém řešení* diferenční rovnice. Obecné řešení $y_{oz}(n)$ této rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$y_{oz}(n) = C_1 y_1(n) + C_2 y_2(n) + \dots + C_k y_k(n),$$

kde $C_1, C_2, \dots, C_k$ jsou libovolné konstanty.

Zkoumejme nyní lineární závislost a nezávislost k řešení zkrácené $L\Delta$ rovnice. Necht' $y_i(n)$; $i = 1, 2, \dots, k$, jsou řešení $L\Delta$ rovnice. Na množině M sestrojme funkci:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(n) &= \mathbf{C}(y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n)) = \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \dots & y_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \dots & y_k(n+k-1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kterou nazýváme *casoratián* (má v teorii diferenčních rovnic stejný význam jako wronskián pro diferenciální rovnice a v literatuře se můžeme setkat i s jeho označením jako *wronskiánu pro posloupnosti*). Z této funkce pak plyne, že řešení $y_i(n)$ jsou lineárně nezávislá právě tehdy, když $\exists n \in M$; $\mathbf{C}(n) \neq 0$.

Pro casoratián odvodíme Δ rovnici prvního řádu. Dle definice platí

$$\mathbf{C}(n+1) = \det \begin{pmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & \dots & y_k(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & \dots & y_k(n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k) & y_2(n+k) & \dots & y_k(n+k) \end{pmatrix}$$

Protože posloupnosti $y_i(n)$ jsou řešením diferenční rovnice, lze v posledním řádku nahradit $y_i(k+n)$ lineární kombinací $y_i(n)$, $y_i(n+1)$, ..., $y_i(n+k-1)$. Po upravení dostaneme

$$\mathbf{C}(n+1) = -a_0(n) \det \begin{pmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & \dots & y_k(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & \dots & y_k(n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_k(n) \end{pmatrix} \quad \text{tj.}$$

$$\mathbf{C}(n+1) = (-1)^n a_0(n) \mathbf{C}(n).$$

Předpokládejme, že posloupnost $a_0(n)$ je pro všechna $n \in M$ různá od nuly. V tom případě je $\mathbf{C}(n)$ rovno nule nebo nenulové na celé množině M současně. Řešení $y_i(n); i = 1, 2, \dots, n$ jsou pak lineárně nezávislá právě tehdy, když je jejich casoratián $\mathbf{C}(n)$ nenulový pro každé $n \in M$. Proto stačí pro lineární nezávislost řešení $y_i(n)$ ověřit, že $\mathbf{C}(n_1) \neq 0$ a pomocí takto nalezených řešení jsme schopni určit obecné řešení zkrácené $L\Delta$ rovnice. Ovšem i nalezení takovýchto řešení je až na některé speciální typy zkrácených $L\Delta$ rovnic k -tého řádu značně složité. Pro zjednodušení proto zavádíme metodu *snížení řádu zkrácené Δ rovnice*.

Snížení řádu zkrácené diferenční rovnice

Tato metoda je shodná se stejně pojmenovanou metodou v diferenciálním počtu a vychází z předpokladu, že známe-li jedno řešení $L\Delta$ rovnice, můžeme o jednu snížit řád této rovnice.

Jestliže má tedy zkrácená $L\Delta$ rovnice k -tého řádu k lineárně nezávislých řešení $y_i(n)$; $i = 1, 2, \dots, k$, pak tedy existují konstanty C_i tak, že

$$\begin{aligned} y_{oz}(n) &= C_1 y_1(n) + C_2 y_2(n) + \dots + C_k y_k(n) \\ y_{oz}(n+1) &= C_1 y_1(n+1) + C_2 y_2(n+1) + \dots + C_k y_k(n+1) \\ &\vdots \\ y_{oz}(n+k) &= C_1 y_1(n+k) + C_2 y_2(n+k) + \dots + C_k y_k(n+k). \end{aligned}$$

Z tohoto zápisu pak nutně vyplývá, že

$$\det \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_k(n) & y_{oz}(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \dots & y_k(n+1) & y_{oz}(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1(n+k) & y_2(n+k) & \dots & y_k(n+k) & y_{oz}(n+k) \end{pmatrix} = 0.$$

Jestliže tento determinant rozvineme dle posledního sloupce a vydělíme casoratiánem, který je dle předpokladu nenulový, dostaneme diferenční rovnici k -tého řádu, která má k lineárně nezávislých řešení $y_i(n)$; $i = 1, 2, \dots, k$.

Nyní předpokládejme, že známe jedno řešení $y_1(n)$ zkrácené $L\Delta$ rovnice k -tého a platí $\forall n \in M; y_1(n) \neq 0$. Necht' $y_i(n)$; $i = 2, 3, \dots, k$ jsou řešením dané Δ rovnice a tvoří společně s $y_1(n)$ *fundamentální systém řešení*. Hledejme tedy řešení Δ rovnice ve tvaru $y_{oz}(n) = y_1(n) \cdot z_{oz}(n)$. Označme ještě posloupnosti $z_i(n)$; $i = 2, \dots, k$ tak, že na množině M platí $y_i(n) = y_1(n) \cdot z_i(n)$ a dosadíme tento vztah do determinantu z předchozího odstavce. Tím dostaneme vztah

$$\det \begin{pmatrix} y_1(n) & y_1(n)z_2(n) & \dots & y_1(n)z_k(n) & y_1(n)z_{oz}(n) \\ y_1(n+1) & y_1(n+1)z_2(n+1) & \dots & y_1(n+1)z_k(n+1) & y_1(n+1)z_{oz}(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1(n+k) & y_1(n+k)z_2(n+k) & \dots & y_1(n+k)z_k(n+k) & y_1(n+k)z_{oz}(n+k) \end{pmatrix} =$$

$$= y_1(n)y_1(n+1)\dots y_1(n+k)\det\begin{pmatrix} 1 & z_2(n) & \dots & z_k(n) & z_{oz}(n) \\ 1 & z_2(n+1) & \dots & z_k(n+1) & z_{oz}(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_2(n+k) & \dots & z_k(n+k) & z_{oz}(n+k) \end{pmatrix} = 0.$$

V tomto determinantu odečteme x -tý řádek od $x+1$ -ního a získáme Δ rovnici

$$\det\begin{pmatrix} 1 & z_2(n) & \dots & z_k(n) & z_{oz}(n) \\ 0 & \Delta z_2(n) & \dots & \Delta z_k(n) & \Delta z_{oz}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \Delta z_2(n+k-1) & \dots & \Delta z_k(n+k-1) & \Delta z_{oz}(n+k-1) \end{pmatrix} = 0.$$

Z této rovnice pak plyne, že posloupnost $\Delta z_{oz}(n)$ splňuje rovnici

$$\det\begin{pmatrix} \Delta z_2(n) & \dots & \Delta z_k(n) & \Delta z_{oz}(n) \\ \Delta z_2(n+1) & \dots & \Delta z_k(n+1) & \Delta z_{oz}(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta z_2(n+k) & \dots & \Delta z_k(n+k) & \Delta z_{oz}(n+k) \end{pmatrix} = 0$$

což je předpis pro zkrácenou $L\Delta$ rovnici $(k-1)$ -ního řádu pro $\Delta z_{oz}(n)$.

I s použitím této metody však nalezení obecného řešení zkrácené $L\Delta$ rovnice k -tého řádu není nijak jednoduché a ve většině obtížnějších příkladů se nám jej nepodaří nalézt vůbec. Uvedeme si proto jen jednoduchý příklady na zopakování metody snížení řádu a dále se budeme věnovat pouze speciálnímu případu $L\Delta$ rovnic s konstantními koeficienty, u kterého existuje i jiný snadnější způsob nalezení obecného řešení.

☑ Příklad:

Nalezněte obecné řešení diferenční rovnice, jestliže známe jedno její řešení.

$$(2n-1) \cdot y(n+2) - 2 \cdot y(n+1) - (2n+1) \cdot y(n) = 0, \quad y_1(n) = (-1)^n$$

Řešení:

Vzhledem k tomu, že známe jedno řešení můžeme rovnou přistoupit k hledání druhého řešení prostřednictvím metody *snížení řádu*. Hledáme tedy řešení ve tvaru $y_{oz2}(n) = (-1)^n z_{oz}(n)$. Tento tvar dosadíme do původní rovnice

a upravíme ji tak, abychom dostali zkrácenou L Δ rovnici 1. řádu pro $\Delta z_{oz}(n)$.

Tedy

$$\begin{aligned}(2n-1)(-1)^{n+2}z(n+2) - 2(-1)^{n+1}z(n+1) - (2n+1)(-1)^n z(n) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2n-1)z(n+2) + 2z(n+1) - (2n+1)z(n) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2n-1)(z(n+2) - z(n+1)) + (2n+1)(z(n+1) - z(n)) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2n-1)\Delta z(n+1) + (2n+1)\Delta z(n) &= 0.\end{aligned}$$

Tuto rovnici vyřešíme standardně metodou krácení podílů,

$$\begin{aligned}1. - 2. \quad (2n-1)\Delta z(n+1) + (2n+1)\Delta z(n) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\Delta z(n+1)}{\Delta z(n)} &= \frac{-(2n+1)}{(2n-1)} \\ 3. \quad \frac{\Delta z_1}{\Delta z_0} \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1} \dots \frac{\Delta z_{m-1}}{\Delta z_{m-2}} \frac{\Delta z_m}{\Delta z_{m-1}} &= \frac{1}{1} \frac{-3}{1} \frac{-5}{3} \dots \frac{-(2(n-2)+1)}{(2(n-2)-1)} \frac{-(2(n-1)+1)}{(2(n-1)-1)} \\ 4. \quad \frac{\Delta z_m}{\Delta z_0} &= \frac{1}{1} \frac{-3}{1} \frac{-5}{3} \dots \frac{-(2n-3)}{(2n-5)} \frac{-(2n-1)}{(2n-3)} = (-1)^{m-1} (2n-1) \\ 5. \quad \Delta z_n &= C(-1)^{n-1} (2n-1) = C(-1)^{n+1} (2n-1).\end{aligned}$$

Nyní provedeme odstranění difference

$$z(n) = S(\Delta z(n)) = S((-1)^{n+1} (2n-1)) = (-1)^n (n-1)$$

a po následném zpětném dosazení do substituce získáme druhé řešení zadané L Δ rovnice, tj.

$$y_{oz2}(n) = (-1)^n z(n) = (-1)^{2n} (n-1) = n-1.$$

Hledané obecné řešení tedy bude

$$y_{oz}(n) = C_1 y_{oz1}(n) + C_2 y_{oz2}(n) = (-1)^n C_1 + C_2 (n-1).$$

Zkrácené L Δ rovnice k -tého řádu s konstantními koeficienty

Tak jako v případě L Δ rovnice prvního řádu se řešení zkrácené Δ rovnice k -tého řádu podstatně zjednoduší jestliže je ve tvaru

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + \dots + a_{k-1} y_{n+1} + a_k y_n = 0 \quad \text{pro } n \in \mathbf{N}_0,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_k; a_k \neq 0$ jsou konstantní koeficienty. Pokud potom hledáme k lineárně nezávislých řešení, uvažujeme je ve tvaru $y_n = \lambda^n; \lambda \neq 0$.

Po dosazení do původní rovnice dostáváme tzv. *charakteristickou rovnici (CH rovnice)*

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \dots + a_{k-1} \lambda + a_k = 0.$$

Takto nalezených k lineárně nezávislých řešení této rovnice pak bude mít následující strukturu:

- s -tici různých jednoduchých reálných kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ CH rovnice odpovídá s -tice lineárně nezávislých řešení $(\lambda_1^n), (\lambda_2^n), \dots, (\lambda_s^n)$ původní rovnice,
- t -násobnému reálnému kořenu λ_0 CH rovnice odpovídá t -tice lineárně nezávislých řešení $(\lambda_0^n), (n\lambda_0^n), (n^2\lambda_0^n), \dots, (n^{t-2}\lambda_0^n), (n^{t-1}\lambda_0^n)$ původní rovnice,
- dvojice komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = a \pm b\mathbf{i} = r(\cos \varphi \pm \mathbf{i} \sin \varphi)$ CH rovnice odpovídá dvojici lineárně nezávislých řešení $(r^n \cos \varphi n), (r^n \sin \varphi n)$ původní rovnice,
- dvojice t -násobných komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = a \pm b\mathbf{i} = r(\cos \varphi \pm \mathbf{i} \sin \varphi)$ CH rovnice odpovídá $2t$ -tici lineárně nezávislých řešení původní rovnice ve tvaru:

$$\begin{aligned} & (r^n \cos \varphi n), (nr^n \cos \varphi), (n^2 r^n \cos \varphi), \dots, (n^{t-1} r^n \cos \varphi), \\ & (r^n \sin \varphi n), (nr^n \sin \varphi), (n^2 r^n \sin \varphi), \dots, (n^{t-1} r^n \sin \varphi). \end{aligned}$$

☑ *Příklad:* Najděte obecné řešení $y_{oz}(n)$ L Δ rovnice $y_{n+2} - 8y_{n+1} + 15y_n = 0$.

Řešení:

Vzhledem k tomu, že se jedná o zkrácenou L Δ rovnici s konstantními koeficienty sestavíme charakteristickou rovnici a vyřešíme ji:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}.$$

Kořeny mají strukturu dle bodu a) předchozí kapitoly a obecné řešení $y_{oz}(n)$ má tedy tvar:

$$y_{oz}(n) = C_1 5^n + C_2 3^n.$$

☑ *Příklad:* Řešte LΔ rovnici $y_{n+4} - 4y_{n+3} + 9y_{n+2} - 10y_{n+1} + 4y_n = 0$.

Řešení:

Jde opět o LΔ rovnici s konstantními koeficienty, a proto řešíme CH rovnici:

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 9\lambda^2 - 10\lambda + 4 = 0.$$

Nejprve hledáme potencionální racionální kořeny rovnice. Těmi mohou být $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Pomocí Hornerova schéma ověříme platnost kořenů včetně případných násobností. Začneme s +1:

$$\begin{array}{r} 1: 1 \quad -4 \quad 9 \quad -10 \quad 4 \\ \quad \quad 1 \quad -3 \quad 6 \quad -4 \\ \hline 1: 1 \quad -3 \quad 6 \quad -4 \quad \underline{\underline{0}} \\ \quad \quad 1 \quad -2 \quad 4 \\ \hline 1: 1 \quad -2 \quad 4 \quad \underline{\underline{0}} \\ \quad \quad 1 \quad -1 \\ \hline 1 \quad -1 \quad \underline{\underline{3}} \end{array}$$

Ověřili jsme tedy, že $\lambda_{1,2} = 1$ je dvojnásobný kořen rovnice a nyní nám zbývá už jen dořešit rovnici $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$ a najít poslední dva kořeny,

$$\lambda_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Kořeny rovnice jsou kombinací struktur b) $(\lambda_{1,2})$ a c) $(\lambda_{3,4})$ předchozí kapitoly a obecné řešení $y_{oz}(n)$ původní LΔ rovnice tedy bude:

$$y_{oz}(n) = C_1 1^n + C_2 n 1^n + C_3 2^n \cos \frac{\pi}{3} n + C_4 2^n \sin \frac{\pi}{3} n.$$

☑ *Příklad:* Řešte LΔ rovnici $y_{n+4} - 4y_{n+3} + 8y_{n+2} - 8y_{n+1} + 4y_n = 0$.

Řešení:

Opět hledáme kořeny CH rovnice

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0.$$

Tuto rovnici lze upravit

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 1)^4 + 2(\lambda - 1)^2 + 1 = ((\lambda - 1)^2 + 1)^2 = 0$$

Nyní stačí najít kořeny vnitřní kvadratické rovnice a získáme tak dvojici kořenů CH rovnice, které budou mít násobnost dva.

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm \mathbf{i} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \pm \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Nalezené kořeny odpovídají struktuře d) předchozí kapitoly a obecné řešení LΔ rovnice $y_{oz}(n)$ tedy bude:

$$y_{oz}(n) = C_1 (\sqrt{2})^n \cos \frac{\pi}{4} n + C_2 n (\sqrt{2})^n \cos \frac{\pi}{4} n + C_3 (\sqrt{2})^n \sin \frac{\pi}{4} n + \\ + C_4 n (\sqrt{2})^n \sin \frac{\pi}{4} n.$$

Metody řešení nezkrácených $L\Delta$ rovnic k -tého řádu

Jak už bylo dříve uvedeno nalezení obecného řešení nezkrácené $L\Delta$ rovnice k -tého řádu, tedy takové kde $q_n \neq 0$ se rozdělí na dvě části. Na určení obecného řešení zkrácené $L\Delta$ rovnice $y_{oz}(n)$, které bylo popsáno v předchozí kapitole a na nalezení partikulárního řešení rovnice nezkrácené. K tomu se stejně jako v případě $L\Delta$ rovnic prvního řádu používá metoda *variace konstant*. Za předpokladu, že $y_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, k$ je fundamentální systém řešení zkrácené rovnice, pak tedy hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_{op}(n) = C_1(n)y_1(n) + C_2(n)y_2(n) + \dots + C_k(n)y_k(n) = \sum_{i=1}^k C_i(n)y_i(n),$$

kde $C_i(n)$ budou neznámé posloupnosti definované na množině $\mathbf{N}$. K nalezení partikulárního řešení nám tedy stačí nalézt jednu k -tici těchto funkcí tak, aby byly řešením nezkrácené $L\Delta$ rovnice. Ve vztahu

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \sum_{i=1}^k C_i(n+1)y_i(n+1) = \\ &= \sum_{i=1}^k (C_i(n+1) - C_i(n))y_i(n+1) + \sum_{i=1}^k C_i(n)y_i(n+1) = \\ &= \sum_{i=1}^k \Delta C_i(n)y_i(n+1) + \sum_{i=1}^k C_i(n)y_i(n+1) \end{aligned}$$

Zvolíme funkce $C_i(n)$ tak, aby na $\mathbf{N}$ identicky platilo

$$\sum_{i=1}^k \Delta C_i(n)y_i(n+1) = 0.$$

Za tohoto předpokladu je pak

$$y(n+1) = \sum_{i=1}^k C_i(n)y_i(n+1),$$

a tedy

$$y(n+2) = \sum_{i=1}^k \Delta C_i(n)y_i(n+2) + \sum_{i=1}^k C_i(n)y_i(n+2).$$

Zde opět zvolíme

$$\sum_{i=1}^k \Delta C_i(n) y_i(n+2) = 0$$

a takto postupujeme pro $y(n+p)$, $p=1, 2, \dots, k-1$, čímž dostaneme vztahy

$$y(n+p) = \sum_{i=1}^k C_i(n) y_i(n+p) \text{ a } \sum_{i=1}^k \Delta C_i(n) y_i(n+p) = 0.$$

Protože za těchto předpokladů je

$$y(n+k) = \sum_{i=1}^k \Delta C_i(n) y_i(n+k) + \sum_{i=1}^k C_i(n) y_i(n+k),$$

dostaneme po dosazení do vzorce pro $L\Delta$ rovnici k -tého řádu (viz. str. 37)

$$\sum_{j=0}^k a_j(n) y_i(n+j) = \sum_{i=1}^k \Delta C_i(n) y_i(n+k) + \sum_{i=1}^k C_i(n) \sum_{j=1}^k a_j(n+j) y_i(n+j) = q(k),$$

předpokládáme-li $a_k(n)=1$. $y_i(n)$ jsou podle předpokladu řešení homogenní $L\Delta$ rovnice, z čehož plyne, že druhý člen na pravé straně takto vzniklé rovnice je roven nule. Tedy jestliže posloupnosti $\Delta C_i(n)$ splňují rovnice

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta C_1(n) y_1(n+1) & + \Delta C_2(n) y_2(n+1) & \dots + \Delta C_k(n) y_k(n+1) & = & 0 \\ \Delta C_1(n) y_1(n+2) & + \Delta C_2(n) y_2(n+2) & \dots + \Delta C_k(n) y_k(n+1) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta C_1(n) y_1(n+k-1) & + \Delta C_2(n) y_2(n+k-1) & \dots + \Delta C_k(n) y_k(n+k-1) & = & 0 \\ \Delta C_1(n) y_1(n+k) & + \Delta C_2(n) y_2(n+k) & \dots + \Delta C_k(n) y_k(n+1) & = & q(n), \end{array}$$

je posloupnost $y_{op}(n)$ řešením $L\Delta$ rovnice. Protože determinant matice této soustavy algebraických rovnic pro $\Delta C_i(n)$ odpovídá casoratiánu řešení $y_i(n)$, má tato soustava nenulový determinant, a lze z ní tedy nalézt posloupnosti $C_i(n)$ pomocí sumace a nakonec je dosadit do rovnice pro $y_{op}(n)$. Tím dostaneme partikulární řešení hledané nezkrácené $L\Delta$ rovnice k -tého řádu. Pro zopakování si celý postup řešení pomocí *metody variace konstant* uvedeme na následujícím příkladě.

☑ *Příklad:* Nalezněte partikulární řešení $y_{op}(n)$, L Δ rovnice

$$y(n+2) - \frac{2(n+2)}{n+1}y(n+1) + \frac{n+2}{n}y(n) = n(n+2),$$

jestliže známe dvě řešení zkrácené rovnice $y_1(n) = n$ a $y_2(n) = n^2$.

Řešení:

Hledané partikulární řešení bude ve tvaru:

$$y_{op}(n) = C_1(n)y_1(n) + C_2(n)y_2(n) = nC_1(n) + n^2C_2(n),$$

kde $C_1(n)$ a $C_2(n)$ jsou posloupnosti proměnné n . Dle vztahů z předchozí kapitoly nám tedy vznikne následující soustava rovnic.

$$\left. \begin{aligned} (n+1)\Delta C_1(n) + (n+1)^2 \Delta C_2(n) &= 0 \\ (n+2)\Delta C_1(n) + (n+2)^2 \Delta C_2(n) &= n(n+2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \Delta C_1(n) = -(n+1)n, \\ \Delta C_2(n) = n. \end{cases}$$

Provedeme sumaci a dostáváme

$$C_1(n) = -S((n+1)n) = -\frac{(n-1)n(n+1)}{3}, \quad C_2(n) = S(n) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Partikulární řešení $y_{op}(n)$ zadané L Δ rovnice je tedy

$$y_{op}(n) = -\frac{(n-1)n(n+1)}{3} \cdot n + \frac{(n-1)n}{2} \cdot n^2 = \frac{n^2(n-2)(n-1)}{6}.$$

L Δ rovnice k -tého řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

Při hledání řešení nezkrácené L Δ rovnice je ve speciálních případech možné využít i jiných postupů k nalezení partikulárního řešení než jen „čistě“ *variace konstant*. Prvním z nich je již u L Δ rovnic prvního řádu uváděný *princip superpozice*, který nám umožňuje v případě, že pravá strana je ve tvaru

$$q(n) = q_1(n) + q_2(n) + \dots + q_p(n),$$

nalézt partikulární řešení $y_{pNi}(n)$; pro každé $q_i(n)$; $i = 1, 2, \dots, p$ zvlášť. Z takto nalezených řešení lze pak určit výsledné partikulární řešení $y_{pN}(n)$, které bude

$$y_{PN}(n) = y_{PN1}(n) + y_{PN2}(n) + \dots + y_{PNp}(n).$$

Jak je vidět *princip superpozice* pro L Δ rovnici s k řády je zcela analogický s principem řešení pro L Δ rovnice prvního řádu a proto jej zde nebudeme více rozebírat.

Druhý způsob zjednodušení můžeme využít, jestliže máme najít partikulární řešení L Δ rovnice s konstantními koeficienty jejíž pravá strana je ve tvaru $q(n) = \mu^n P_t(n)$, tedy

$$y(n+k) + a_{n-1}y(n+k-1) + \dots + a_1y(n+1) + a_0y(n) = \mu^n P_k(n),$$

kde $P_t(n)$ je polynom stupně t . Toto řešení lze nalézt zcela bez použití metody variace konstant, pomocí tzv. *odhadu řešení*, protože víme, že partikulární řešení $y_{PN}(n)$ je ve tvaru

$$y_{PN}(n) = \mu^n n^r Q_t(n),$$

kde $Q_t(n)$ je polynom stupně t a r násobnost kořene μ v CH rovnici.

Jestliže si dále uvědomíme, že funkce $\cos \alpha n$ a $\sin \alpha n$ jsou v komplexním oboru lineární kombinace exponenciálních funkcí $e^{i\alpha n}$ a $e^{-i\alpha n}$, lze použít výše uvedený způsob nalezení partikulárního řešení i na L Δ rovnice, jejichž pravá strana obsahuje i tyto funkce a je tedy ve tvaru

$$q(n) = \mu^n P_t(n)(A \cos \alpha n + B \sin \alpha n)$$

kde $P_t(n)$ je polynom stupně t a μ , α , A , B jsou konstanty. Partikulární řešení $y_{PN}(n)$ u takovéto rovnice pak bude mít tvar

$$y_{PN}(n) = \mu^n n^r Q_t(n)(C \cos \alpha n + D \sin \alpha n),$$

kde $Q_t(n)$ je polynom stupně t , μ , α , C , D jsou konstanty a $r = 0$, resp. $r = j$, kde $j = 1, 2, \dots, k$, pokud CH rovnice příslušné L Δ rovnice nemá, resp. má j -násobný kořen $\lambda = \mu(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

☑ *Příklad:* Nalezněte obecné řešení LΔ rovnice

$$y(n+3) - 3y(n+1) - 2y(n) = 4n \cdot (-2)^n + 6 \cdot (-1)^{n+1}.$$

Řešení:

Nejprve určíme obecné řešení zkrácené rovnice $y_{oz}(n)$. Jedná se o LΔ rovnici s konstantními koeficienty, a proto hledáme řešení ve tvaru $y(n) = \lambda^n$ kde λ je konstanta. Řešíme tedy CH rovnici

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Máme tedy jednonásobný kořen $\lambda = 2$ a dvojnásobný kořen $\lambda = -1$. Obecné řešení zkrácené rovnice $y_{oz}(n)$ tedy bude

$$y_{oz}(n) = C_1 2^n + C_2 (-1)^n + C_3 n (-1)^n.$$

Nyní hledáme partikulární řešení. Pravá strana je součtem dvou posloupností, takže ji můžeme pomocí *principu superpozice* rozdělit na dvě úlohy.

Nalezneme tedy nejprve partikulární řešení pro pravou stranu $q_1(n) = 4n(-2)^n$.

Tato posloupnost má speciální tvar, jde o součin polynomu 1. stupně a posloupnosti $(-2)^n$, tudíž lze použít *odhad řešení*. Protože -2 není kořenem CH rovnice hledáme řešení ve tvaru $y_{PN1}(n) = (an + b)(-2)^n$, kde a, b jsou koeficienty polynomu $Q(n)$ prvního stupně. Nyní dosadíme do původní LΔ rovnice čímž získáme koeficienty a, b .

$$\begin{aligned} & (-2)^{n+3}(a(n+3)+b) - 3(-2)^{n+1}(a(n+1)+b) - 2(-2)^n(an+b) = 4n(-2)^n \\ & 4(-2)^{n+1}(a(n+3)+b) - 3(-2)^{n+1}(a(n+1)+b) + (-2)^{n+1}(an+b) = \\ & = -2n(-2)^{n+1} \\ & 4an + 12a + 4b - 3an - 3a - 3b + an + b = -2n \end{aligned}$$

$$n^1 : 2a = -2; \quad n^0 : 9a + 2b = 0 \Rightarrow a = -1, b = \frac{9}{2}.$$

Partikulární řešení $y_{PN1}(n)$ je tedy

$$y_{PN1}(n) = (-2)^n \left(-n + \frac{9}{2} \right) = (-2)^{n-1} (2n - 9)$$

Partikulární řešení pro druhou část pravé strany, tedy pro $q_2(n) = -6(-1)^n$ hledáme stejným způsobem, ovšem $Q(n)$ bude v tomto případě polynom stupně 0 a $(-1)^n$ je dvojnásobným kořenem CH rovnice. Z toho vyplývá, že partikulární řešení $y_{PN2}(n)$ bude mít tvar $y_{PN2}(n) = (-1)^n an^2$. Opět dosadíme do rovnice a určíme koeficient a .

$$\begin{aligned} (-1)^{n+3}(a(n+3)^2) - 3(-1)^{n+1}(a(n+1)^2) - 2(-1)^n an^2 &= -6(-1)^n \\ (-1)^{n+1}(a(n+3)^2) - 3(-1)^{n+1}(a(n+1)^2) + 2(-1)^{n+1} an^2 &= 6(-1)^{n+1} \\ an^2 + 6an + 9a - 3(an^2 + 2an + a) + 2an^2 &= 6 \Rightarrow 6a = 6 \Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

Partikulární řešení $y_{PN2}(n)$ je tedy

$$y_{PN2}(n) = (-1)^n \cdot n^2$$

Hledaným partikulárním řešením $y_{PN}(n)$ zadané $L\Delta$ rovnice je pak součet partikulárních řešení $y_{PN1}(n)$ a $y_{PN2}(n)$ tj.

$$y_{PN}(n) = y_{PN1}(n) + y_{PN2}(n) = (-2)^{n-1}(2n-9) + (-1)^n n^2.$$

Výsledným obecným řešením $y_{ON}(n)$ je pak součet $y_{OZ}(n)$ a $y_{PN}(n)$ tedy

$$y_{ON}(n) = \underbrace{C_1 2^n + C_2 (-1)^n + C_3 n(-1)^n}_{y_{OZ}(n)} + \underbrace{(-2)^{n-1}(2n-9) + (-1)^n n^2}_{y_{PN}(n)}.$$

☑ **Příklad:** Řešte $L\Delta$ rovnici

$$y(n+2) - 2\sqrt{3}y(n+1) + 4y(n) = 2^n \sin \frac{\pi}{6} n.$$

Řešení:

Nejprve řešíme zkrácenou rovnici s konstantními koeficienty

$$y(n+2) - 2\sqrt{3}y(n+1) + 4y(n) = 0.$$

Z příslušné CH rovnice určíme $\lambda_{1,2}$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-16}}{2} = \sqrt{3} \pm \mathbf{i} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \pm \mathbf{i} \sin \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Obecné řešení zkrácené rovnice je tedy

$$y_{OZ}(n) = C_1 2^n \cos \frac{\pi}{6} n + C_2 2^n \sin \frac{\pi}{6} n.$$

Nyní hledáme partikulární řešení nezkrácené $L\Delta$ rovnice. Pravá strana

$$q(n) = 2^n \sin \frac{\pi}{6} n \quad \text{odpovídá tvaru} \quad q(n) = \mu^n P_t(n)(A \cos \alpha n + B \sin \alpha n), \quad \text{kde}$$

$$\mu^n = 2^n, \quad P_t(n) = 1, \quad t = 0, \quad A = 0, \quad B = 1 \quad \text{a} \quad \alpha = \frac{\pi}{6}. \quad \text{Vzhledem k tomu,}$$

že $\mu(\cos \alpha + \sin \alpha)$ odpovídá jednoduchému kořenu λ bude mít námi hledané

$$\text{partikulární řešení tvar} \quad y_{PN}(n) = n 2^n a \left(C \cos \frac{\pi}{6} n + D \sin \frac{\pi}{6} n \right), \quad \text{kde navíc}$$

můžeme vypustit parametr a , předpokládáme-li, že jsme tímto parametrem vynásobili hledané konstanty C a D . Takto upravený tvar $y_{PN}(n)$ dosadíme do původní $L\Delta$ rovnice a najdeme hodnoty hledaných konstant.

$$\begin{aligned} & (n+2)2^{n+2} \left(C \cos \frac{\pi}{6} (n+2) + D \sin \frac{\pi}{6} (n+2) \right) - \\ & - 2\sqrt{3}(n+1)2^{n+1} \left(C \cos \frac{\pi}{6} (n+1) + D \sin \frac{\pi}{6} (n+1) \right) + \\ & + 4n2^n \left(C \cos \frac{\pi}{6} n + D \sin \frac{\pi}{6} n \right) = 2^n \sin \frac{\pi}{6} n \end{aligned}$$

Tuto rovnici vydělíme výrazem 2^n a poté použijeme součtové vzorce pro $\cos(\alpha + \beta)$ a $\sin(\alpha + \beta)$. Při výpočtu si také můžeme pomoci tím, že vypustíme všechny členy levé strany, které obsahují činitel n . Víme totiž i bez počítání, že tyto členy se vzájemně vynulují, což platí vždy, když $r = 1$, tedy když výraz $\mu(\cos \alpha + \sin \alpha)$ shodný s jednoduchým kořenem CH rovnice (podobně v případě $r = 2$ by se vynulovaly členy obsahující n^2 a n atd.). Po provedení uvedených úprav tedy dostaneme

$$2C \left(-\cos \frac{\pi}{6} n - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} n \right) + 2D \left(\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} n - \sin \frac{\pi}{6} n \right) = \sin \frac{\pi}{6} n.$$

upravíme tak abychom měli parametry pro jednotlivé goniometrické funkce u sebe a odvodíme příslušné rovnice pro určení parametrů C a D .

$$\begin{aligned} (-2C + 2\sqrt{3}D)\cos\frac{\pi}{6}n + (-2\sqrt{3}C - 2D)\sin\frac{\pi}{6}n &= \sin\frac{\pi}{6}n \\ \left. \begin{aligned} \cos : -2C + 2\sqrt{3}D &= 0 \\ \sin : -2\sqrt{3}C - 2D &= 1 \end{aligned} \right\} C &= -\frac{\sqrt{3}}{8}, D = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Partikulární řešení $y_{PN}(n)$ má tedy tvar

$$y_{PN}(n) = -\frac{1}{8}n2^n \left(\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}n + \sin\frac{\pi}{6}n \right).$$

Nyní již známe jak obecné řešení zkrácené $L\Delta$ rovnice $y_{OZ}(n)$ tak partikulární řešení nezkrácené $L\Delta$ rovnice $y_{PN}(n)$ a můžeme tedy určit obecné řešení nezkrácené $L\Delta$ rovnice $y_{ON}(n)$, které je jejich součtem. To bude mít tvar

$$y_{ON}(n) = \underbrace{C_1 2^n \cos\frac{\pi}{6}n + C_2 2^n \sin\frac{\pi}{6}n}_{y_{OZ}(n)} - \underbrace{\frac{1}{8}n2^n \left(\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}n + \sin\frac{\pi}{6}n \right)}_{y_{PN}(n)}.$$

Řešení soustav lineárních Δ rovnic 1. řádu

Soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= a_{11}(n)y_1(n) + a_{12}(n)y_2(n) + \dots + a_{1k}(n)y_k(n) + q_1(n) \\ y_2(n+1) &= a_{21}(n)y_1(n) + a_{22}(n)y_2(n) + \dots + a_{2k}(n)y_k(n) + q_2(n) \\ &\vdots \\ y_k(n+1) &= a_{k1}(n)y_1(n) + a_{k2}(n)y_2(n) + \dots + a_{kk}(n)y_k(n) + q_k(n), \end{aligned}$$

kde $(y_1(n)), (y_2(n)), \dots, (y_k(n))$ jsou neznámé posloupnosti definované na $\mathbf{N}$, $a_{ij}(n)$, $i, j = 1, 2, \dots, k$ a $q_1(n), q_1(n), \dots, q_1(n)$ jsou dané posloupnosti definované na $\mathbf{N}$ nazýváme soustavou lineárních diferenčních rovnic prvního řádu. Pokud jsou navíc posloupnosti $q_1(n), q_1(n), \dots, q_1(n)$ nulové, hovoříme o zkrácené (homogenní) soustavě. Soustavu lze zapsat i vektorově a to ve tvaru

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{y}(n) + \mathbf{q}(n),$$

resp. $\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{y}(n)$ – pro zkrácenou soustavu,

kde $\mathbf{A}(n)$ je matice typu $k \times k$ definovaná na množině $\mathbf{N}$ a $\mathbf{q}(n)$ je vektorová posloupnost definovaná také na $\mathbf{N}$. Jako pro každou jinou lineární rovnici platí i zde, že obecným řešením této rovnice je součet jejího libovolného partikulárního řešení s obecným řešením příslušné zkrácené rovnice. Z toho analogicky vyplývá, že obecné řešení soustavy $L\Delta$ rovnic prvního řádu bude mít tvar

$$\mathbf{y}_{ON}(n) = \mathbf{y}_{OZ}(n) + \mathbf{y}_{PN}(n),$$

kde $\mathbf{y}_{OZ}(n)$ je řešení příslušné zkrácené soustavy rovnic a $\mathbf{y}_{PN}(n)$ je jedno libovolné partikulární řešení zadané (nezkrácené) $L\Delta$ rovnice.

Metody řešení zkrácených soustav Δ rovnic 1. řádu

Z vektorového zápisu soustavy plyne, že množina všech řešení zkrácené lineární soustavy k diferenčních rovnic prvního řádu tvoří vektorový prostor. Každé řešení takové soustavy je pak jednoznačně určeno k nezávislými konstantami a dimenze prostoru všech řešení soustavy je tedy rovno k . K nalezení obecného řešení této soustavy tedy stačí najít k lineárně nezávislých řešení $\mathbf{y}_{Ozi}(n)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Každá taková množina k lineárně nezávislých řešení soustavy Δ rovnic nazveme *fundamentálním systémem řešení*. Obecným řešením je pak jakákoliv lineární kombinace tohoto řešení, tedy k -parametrický systém posloupností

$$\mathbf{y}_{OZ}(n) = C_1 \mathbf{y}_{OZ1}(n) + C_2 \mathbf{y}_{OZ2}(n) + \dots + C_k \mathbf{y}_{OZk}(n),$$

kde $C_1, C_2, \dots, C_k$ jsou libovolné konstanty.

S použitím vektorového zápisu zkrácené soustavy můžeme napsat, že

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n_0 + 1) &= \mathbf{A}(n_0) \mathbf{y}(n_0) \quad n_0 \in \mathbf{N} \\ \mathbf{y}(n_0 + 2) &= \mathbf{A}(n_0 + 1) \mathbf{y}(n_0 + 1) = \mathbf{A}(n_0 + 1) \mathbf{A}(n_0) \mathbf{y}(n_0) \\ \mathbf{y}(n_0 + 3) &= \mathbf{A}(n_0 + 2) \mathbf{A}(n_0 + 1) \mathbf{A}(n_0) \mathbf{y}(n_0) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(n + 1) &= \mathbf{A}(n) \dots \mathbf{A}(n_0 + 1) \mathbf{A}(n_0) \mathbf{y}(n_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Z toho lze vyvodit vztah

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{A}(n-1) \mathbf{A}(n-2) \dots \mathbf{A}(n_0 + 1) \mathbf{A}(n_0) \mathbf{y}(n_0) = \mathbf{U}(n, n_0) \mathbf{y}(n_0),$$

kde

$$\mathbf{U}(n, n_0) = \prod_{i=n_0}^{n-1} \mathbf{A}(i), \quad \mathbf{U}(n_0, n_0) = \mathbf{E}.$$

Fundamentální systém řešení pak volíme jako

$$\mathbf{y}_{Ozi}(n) = \mathbf{U}(n, n_0) \mathbf{e}_i,$$

kde vektor $\mathbf{e}_i$ má složky $(\mathbf{e}_i)_j = 0$ pro $i \neq j$ a $(\mathbf{e}_i)_i = 1$.

☑ *Příklad:* Nalezněte obecné řešení soustavy diferenčních rovnic

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= y_1(n) \cdot \cos n + y_2(n) \cdot \sin n \\ y_2(n+1) &= -y_1(n) \cdot \sin n + y_2(n) \cdot \cos n \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{A}(n) = \begin{pmatrix} \cos n & \sin n \\ -\sin n & \cos n \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Nejprve si určíme výsledek následujícího vztahu,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta & \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ -(\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta) & \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Za pomoci tohoto vztahu určíme $\mathbf{U}(0, n)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(n, n_0) &= \mathbf{A}(n-1) \cdot \mathbf{A}(n-1) \cdot \dots \cdot \mathbf{A}(1) \cdot \mathbf{A}(0) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(n-1) & \sin(n-1) \\ -\sin(n-1) & \cos(n-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(n-2) & \sin(n-2) \\ -\sin(n-2) & \cos(n-2) \end{pmatrix} \cdot \dots \\ &\dots \cdot \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ -\sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos((n-1) + (n-1) + \dots + 1 + 0) & \sin((n-1) + (n-1) + \dots + 1 + 0) \\ -\sin((n-1) + (n-1) + \dots + 1 + 0) & \cos((n-1) + (n-1) + \dots + 1 + 0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{n(n-1)}{2} & \sin \frac{n(n-1)}{2} \\ -\sin \frac{n(n-1)}{2} & \cos \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Na základě tohoto vztahu pak můžeme volit za fundamentální systém řešení například vektory

$$\mathbf{y}_{oz1}(n) = \begin{pmatrix} \cos \frac{n(n-1)}{2} & \sin \frac{n(n-1)}{2} \\ -\sin \frac{n(n-1)}{2} & \cos \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{n(n-1)}{2} \\ -\sin \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_{oz2}(n) = \begin{pmatrix} \cos \frac{n(n-1)}{2} & \sin \frac{n(n-1)}{2} \\ -\sin \frac{n(n-1)}{2} & \cos \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{n(n-1)}{2} \\ \cos \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení této soustavy L Δ rovnic tedy bude

$$\mathbf{y}_{oz}(n) = C_1 \mathbf{y}_{oz1}(n) + C_2 \mathbf{y}_{oz2}(n) = C_1 \begin{pmatrix} \cos \frac{n(n-1)}{2} \\ -\sin \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin \frac{n(n-1)}{2} \\ \cos \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix},$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty. To rozepsáno ve složkách znamená, že

$$\begin{aligned} y_1(n) &= C_1 \cos \frac{n(n-1)}{2} + C_2 \sin \frac{n(n-1)}{2}, \\ y_2(n) &= -C_1 \sin \frac{n(n-1)}{2} + C_2 \cos \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Zkrácená soustava L Δ rovnic s konstantními koeficienty

V případě, že matice $\mathbf{A}(n)$ zkrácené soustavy L Δ rovnic nezávisí na n , říkáme, že soustava má *konstantní koeficienty*. Takováto soustava má tedy tvar,

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n),$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

je matice $k \times k$ a a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, k$ jsou libovolné konstanty.

Z předchozí kapitoly plyne, že obecné řešení takovéto soustavy bude mít následující tvar

$$\mathbf{y}_{oz}(n) = \underbrace{\mathbf{A}^n}_{\mathbf{U}(n,0)} \mathbf{v},$$

kde $\mathbf{v}$ je libovolný k -členný konstantní vektor, a nazýváme jej *CH vektor*. Jestliže je $\mathbf{v}$ vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný k vlastnímu číslu λ , tj. platí

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \text{ resp. } (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = 0,$$

je funkce $\mathbf{y}_{oz}(n) = \lambda^n \mathbf{v}$ obecně komplexním řešením soustavy. Vlastní čísla λ jsou pak řešením *charakteristické rovnice*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0.$$

My však využijeme toho, že na základě struktury jednotlivých řešení *charakteristické rovnice* lze stejně jako v případě $L\Delta$ rovnic k -tého stupně vyvodit závěr o řešení celé soustavy.

- a) Je-li řešením CH rovnice k různých reálných čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, bude mít obecné řešení soustavy tvar

$$\mathbf{y}_{oz}(n) = C_1 \mathbf{v}_1 \lambda_1^n + C_2 \mathbf{v}_2 \lambda_2^n + \dots + C_k \mathbf{v}_k \lambda_k^n,$$

kde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ jsou CH vektory příslušné ke kořenům λ_i , $i = 1, \dots, k$.

- b) Je-li řešením CH rovnice k násobné reálné číslo λ_0 , bude obecné řešení dané soustavy ve tvaru

$$\mathbf{y}_{oz}(n) = \mathbf{P}_k(n) \lambda_0^n,$$

kde $\mathbf{P}_k(n)$ je vektor polynomů proměnné n : ${}^1P_k(n), {}^2P_k(n), \dots, {}^kP_k(n)$ nejvýše $(k-1)$ -ho stupně.

Koeficienty polynomů ${}^1P_k(n), {}^2P_k(n), \dots, {}^kP_k(n)$ závislé na obecných konstantách $C_1, C_2, \dots, C_k$ se určí dosazením do původní soustavy. $\mathbf{y}_{oz}(n)$ lze poté vyjádřit jako obecnou lineární kombinaci k lineárně nezávislých řešení $\mathbf{y}_1(n), \mathbf{y}_2(n), \dots, \mathbf{y}_k(n)$.

- c) Je-li k sudé a je-li řešením CH rovnice k -násobné imaginární číslo

$$\lambda = a + \mathbf{i}b = |\lambda|(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi),$$

pak obecné řešení dané soustavy bude mít tvar

$$\mathbf{y}_{oz}(n) = \mathbf{P}_k(n) |\lambda|^n \cos(\varphi n) + \mathbf{Q}_k(n) |\lambda|^n \sin(\varphi n),$$

kde $\mathbf{P}_k(n)$, resp. $\mathbf{Q}_k(n)$ jsou vektory polynomů

$${}^1P_k(n), {}^2P_k(n), \dots, {}^kP_k(n), \text{ resp. } {}^1Q_k(n), {}^2Q_k(n), \dots, {}^kQ_k(n)$$

nejvýše $(k-1)$ -ho stupně.

Koeficienty polynomů $\mathbf{P}_k(n)$, $\mathbf{Q}_k(n)$ závislé na obecných konstantách $C_1, C_2, \dots, C_k$ se opět určí dosazením do původní soustavy. Stejně tak i obecné řešení $\mathbf{y}_{oz}(n)$ lze tak i poté vyjádřit jako obecnou lineární kombinaci k lineárně nezávislých řešení $\mathbf{y}_1(n), \mathbf{y}_2(n), \dots, \mathbf{y}_k(n)$ s koeficienty $C_1, C_2, \dots, C_k$.

- d) Je-li řešením CH rovnice kombinace libovolných předchozích typů bude i výsledné obecné řešení lineární kombinací příslušných řešení.

☑ *Příklad:* Nalezněte obecné řešení soustavy diferenčních rovnic

$$\left. \begin{aligned} y_1(n+1) &= 2y_1(n) + y_2(n) \\ y_2(n+1) &= y_1(n) + 2y_2(n) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Nejprve stanovíme řešení CH rovnice

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= \det \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ &\Downarrow \\ \lambda_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Struktura řešení odpovídá bodu a) předchozí kapitoly, nyní tedy určíme příslušné CH vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ z příslušné rovnice.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení $\lambda_1 = 1$ dostáváme

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow v_1 = -v_2$$

a po dosazení $\lambda_2 = 3$ dostáváme

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} -v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow v_1 = v_2.$$

CH vektory tedy můžeme volit libovolně ve tvaru $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$, kde

$a, b \in \mathbb{R}$. Obecné řešení soustavy pak tudíž bude například

$$\mathbf{y}_{oz}(n) = C_1 \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \lambda_1^n + C_2 \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \lambda_2^n = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 3^n,$$

pro $a, b = 1$.

☑ *Příklad:* Nalezněte obecné řešení soustavy diferenčních rovnic

$$\left\{ \begin{matrix} y_1(n+1) = -5y_1(n) - y_2(n) \\ y_2(n+1) = y_1(n) - 3y_2(n) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Stanovíme řešení CH rovnice

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-3-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$$\underbrace{\lambda^2 - 8\lambda + 16}_{(\lambda-4)^2} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4.$$

Řešení CH rovnice odpovídá bodu b) předchozí kapitoly a obecné řešení této soustavy tedy bude mít tvar

$$\mathbf{y}_{oz}(n) = \mathbf{P}_k(n) \lambda^n = \begin{pmatrix} y_{oz1}(n) \\ y_{oz2}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 n + b_1 \\ a_2 n + b_2 \end{pmatrix} (-4)^n,$$

kde a_1, b_1, a_2, b_2 jsou konstanty závislé na obecných konstantách C_1, C_2 a stanovíme je dosazením do původní soustavy $\mathbf{L}\Delta$ rovnic.

$$\begin{aligned}
(a_1(n+1)+b_1)(-4)^{n+1} &= -5(a_1n+b_1)(-4)^n - (a_2n+b_2)(-4)^n \\
(a_2(n+1)+b_2)(-4)^{n+1} &= (a_1n+b_1)(-4)^n - 3(a_2n+b_2)(-4)^n \\
-4(a_1(n+1)+b_1) &= -5(a_1n+b_1) - (a_2n+b_2) \\
-4(a_2(n+1)+b_2) &= (a_1n+b_1) - 3(a_2n+b_2) \\
-4a_1n - 4a_1 - 4b_1 &= -5a_1n - 5b_1 - a_2n - b_2 \\
-4a_2n - 4a_2 - 4b_2 &= a_1n + b_1 - 3a_2n - 3b_2 \\
(a_1+a_2)n &= 4a_1 - b_1 - b_2 \\
-(a_1+a_2)n &= 4a_2 + b_1 + b_2 \\
0 &= 4a_1 + 4a_2 \Rightarrow a_1 = -a_2 = C_1 \\
(C_1 - C_1)n &= 4C_1 - b_1 - b_2 \Rightarrow b_1 = C_2 \Rightarrow b_2 = 4C_1 - C_2.
\end{aligned}$$

Celkové obecné řešení dané soustavy má tedy tvar

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{oz}(n) &= \begin{pmatrix} y_{oz1}(n) \\ y_{oz2}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1n + C_2 \\ -C_1n + 4C_1 - C_2 \end{pmatrix} (-4)^n = \\
&= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} n (-4)^n + \begin{pmatrix} C_2 \\ 4C_1 - C_2 \end{pmatrix} (-4)^n = \\
&= C_1 \begin{pmatrix} n \\ -n + 4 \end{pmatrix} (-4)^n + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (-4)^n.
\end{aligned}$$

Výsledek je zapsán jako obecná lineární kombinace dvou lineárně nezávislých řešení $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$.

Metody řešení obecných soustav $L\Delta$ rovnic 1. řádu

Tak jako u jednoduchých L rovnic i u L soustav platí, že jejich řešením je součet obecného řešení příslušné zkrácené soustavy a jednoho partikulárního řešení soustavy nezkrácené. Vzhledem k tomu, že nalézt obecné řešení zkrácené soustavy již umíme, budeme se nyní zabývat nalezením partikulárního řešení soustavy a jako obvykle k tomu v obecném případě využijeme metodu *variace konstanty*.

Metoda variace konstanty

Nechť je dána nezkrácená soustava lineárních diferenčních rovnic

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{y}(n) + \mathbf{q}(n),$$

a nechť posloupnosti $\mathbf{y}_{Ozi}(n), i = 1, 2, \dots, k$, tvoří fundamentální systém řešení příslušné zkrácené soustavy

$$\mathbf{y}_{OZ}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{y}_{OZ}(n).$$

Obecné řešení zkrácené soustavy je pak dáno vztahem

$$\mathbf{y}_{OZ}(n) = \sum_{i=1}^k C_i \mathbf{y}_{Ozi}(n),$$

kde C_i jsou libovolné konstanty. Při hledání partikulárního řešení $\mathbf{y}_{PN}(n)$ nezkrácené soustavy použitím *metody variace konstanty* nahradíme tyto konstanty posloupnostmi na množině $\mathbf{N}$ a hledáme tedy řešení ve tvaru

$$\mathbf{y}_{PN}(n) = \sum_{i=1}^k C_i(n) \mathbf{y}_{Ozi}(n).$$

Protože $\mathbf{y}_{Ozi}(n)$ jsou řešením zkrácené soustavy, platí

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{PN}(n+1) &= \sum_{i=1}^k C_i(n+1) \mathbf{y}_{Ozi}(n+1) = \\ &= \sum_{i=1}^k (C_i(n+1) - C_i(n)) \mathbf{y}_{PNi}(n+1) + \sum_{i=1}^k C_i(n) \mathbf{y}_{Ozi}(n+1) = \\ &= \sum_{i=1}^k \Delta C_i(n) \mathbf{y}_{Ozi}(n+1) + \sum_{i=1}^k C_i(n) \mathbf{A}(n) \mathbf{y}_{Ozi}(n). \end{aligned}$$

Jestliže tento vztah dosadíme do nezkrácené soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \Delta C_i(n) \mathbf{y}_{Ozi}(n+1) + \sum_{i=1}^k C_i(n) \mathbf{A}(n) \mathbf{y}_{Ozi}(n) &= \mathbf{A}(n) \sum_{i=1}^k C_i \mathbf{y}_{Ozi}(n) + \mathbf{q}(n) \\ \sum_{i=1}^k \Delta C_i(n) \mathbf{y}_{Ozi}(n+1) &= \mathbf{q}(n). \end{aligned}$$

Protože jsme předpokládali, že posloupnosti $\mathbf{y}_{PNi}(n)$ tvoří fundamentální systém řešení, je determinant matice této soustavy nenulový, a tedy z ní lze jednoznačně určit difference $\Delta C_i(n)$. Tak lze principiálně získat posloupnosti

$C_i(n)$ sumací a s jejich pomocí následně vyjádřit hledané partikulární řešení $\mathbf{y}_{PN}(n)$ nezkrácené soustavy lineárních diferenčních rovnic.

☑ *Příklad:* Nalezněte partikulární řešení soustavy

$$\begin{aligned}y_1(n+1) &= 4y_1(n) + y_2(n) + 1 + \ln(n+1) \\ y_2(n+1) &= -6y_1(n) - y_2(n) - 2 - 3\ln(n+1).\end{aligned}$$

Řešení:

Nejprve nalezneme obecné řešení příslušné zkrácené soustavy

$$\left. \begin{aligned}y_1(n+1) &= 4y_1(n) + y_2(n) \\ y_2(n+1) &= -6y_1(n) - y_2(n)\end{aligned} \right\} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jedná se o soustavu $L\Delta$ rovnic s konstantními koeficienty, proto řešíme pomocí určení kořenů charakteristické rovnice

$$\begin{aligned}|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.\end{aligned}$$

Nyní dopočteme příslušné CH vektory $\mathbf{v}$ a určíme obecné řešení $\mathbf{y}_{oz}(n)$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{pmatrix} 4-1 & 1 \\ -6 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Bigg\} 3v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -3v_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ -3v_1 \end{pmatrix} \quad \text{zvolme } v_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ -6 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Bigg\} 2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix} \quad \text{zvolme } v_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\mathbf{y}_{oz}(n) = C_1 \mathbf{v}_1 \lambda_1^n + C_2 \mathbf{v}_2 \lambda_2^n = C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}_{oz1}(n)} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} 2^n}_{\mathbf{y}_{oz2}(n)}.$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že námi hledané partikulární řešení bude mít tvar

$$\mathbf{y}_{PN}(n) = C_1(n)\mathbf{y}_{OZ1}(n) + C_2(n)\mathbf{y}_{OZ2}(n) = C_1(n)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2(n)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}2^n,$$

rozepsáno po složkách

$$\begin{aligned} y_{PN1}(n) &= C_1(n) + 2^n C_2(n) \\ y_{PN2}(n) &= -3C_1(n) - 2^{n+1}C_2(n). \end{aligned}$$

Nyní využijeme v předchozí kapitole odvozeného vztahu

$$\sum_{i=1}^n \Delta C_i(n) \mathbf{y}_{OZi}(n+1) = \mathbf{q}(n),$$

dosadíme do něj a určíme posloupnosti $C_1(n)$, $C_2(n)$

$$\begin{aligned} \Delta C_1(n) + 2^{n+1} \Delta C_2(n) &= 1 + \ln(n+1) \\ \underline{-3\Delta C_1(n) - 2^{n+2} \Delta C_2(n) = -2 - 3\ln(n+1)} \\ 3\Delta C_1(n) + 3 \cdot 2^{n+1} \Delta C_2(n) &= 3 + 3\ln(n+1) \\ \underline{-3\Delta C_1(n) - 2^{n+2} \Delta C_2(n) = -2 - 3\ln(n+1)} \\ 3 \cdot 2^{n+1} \Delta C_2(n) - 2 \cdot 2^{n+1} \Delta C_2(n) &= 3 - 2 \Rightarrow \Delta C_2(n) = \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta C_1(n) + \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} &= 1 + \ln(n+1) \Rightarrow \Delta C_1(n) = \ln(n+1). \\ C_1(n) = S(\Delta C_1(n)) = S(\ln(n+1)) &= \ln(n!) \Rightarrow \underline{\underline{C_1(n) = \ln(n!)}} \\ C_2(n) = S(\Delta C_2(n)) = S\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) &= \frac{-1}{2^n} \Rightarrow \underline{\underline{C_2(n) = -2^{-n}}}. \end{aligned}$$

Nyní již nám nic nebrání v určení partikulárního řešení, které tedy bude

$$\mathbf{y}_{PN}(n) = C_1(n)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2(n)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}2^n = \ln(n!)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

nebo rozepsáno po složkách

$$\begin{aligned} y_{PN1}(n) &= \ln(n!) - 1 \\ y_{PN2}(n) &= -3\ln(n!) + 2. \end{aligned}$$

Princip superpozice

Stejně jako pro všechny lineární rovnice s nenulovou pravou stranou, platí i pro soustavy lineárních diferenčních rovnic v tomto tvaru *princip superpozice*. To znamená, že když je $\mathbf{y}_{PNi}(n)$, $i = 1, 2, \dots, r$, řešení soustavy rovnic

$$\mathbf{y}_{PNi}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{y}_{PNi}(n) + \mathbf{q}_i(n),$$

pro $i = 1, 2, \dots, r$, pak je posloupnost

$$\mathbf{y}_{PN}(n) = \sum_{i=1}^r \mathbf{y}_{PNi}(n)$$

řešením rovnice

$$\mathbf{y}_{PN}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{y}_{PN}(n) + \sum_{i=1}^r \mathbf{q}_i(n).$$

Soustavy $L\Delta$ rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

Tak jako v případě jednotlivých $L\Delta$ rovnic, existují i v případě soustav speciální případy, kdy lze najít partikulární řešení jednodušším způsobem a vyhnout se tak především jejímu nejobtížnějšímu kroku, za který můžeme v obecném případě považovat hledání sumace. Nutným předpokladem pro použití těchto „alternativních“ postupů, je však jednak soustava $L\Delta$ rovnic pouze s konstantními a také jeden ze dvou typů pravých stran.

Pravá strana jako vektor polynomů

Jestliže má pravá strana $\mathbf{q}(n)$ soustavy diferenčních rovnic

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{q}(n)$$

tvar

$$\mathbf{q}(k) = \mu^n \mathbf{P}_s(n),$$

kde $\mathbf{P}_s(n)$ je vektor polynomů nejvýše s -tého stupně, lze vždy najít partikulární řešení $\mathbf{y}_{PN}(n)$ takovéto soustavy a to ve tvaru

$$\mathbf{y}_{PN}(n) = \mu^n \mathbf{Q}_{s+t}(n),$$

kde $\mathbf{Q}_{s+t}(n)$ je polynom vektorů nejvýše $(s+t)$ -tého stupně a t je násobnost kořene μ v charakteristické rovnici $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$.

Pravá strana jako vektor polynomů a funkcí sinus a kosinus

Jestliže má pravá strana $\mathbf{q}(n)$ soustavy diferenčních rovnic

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{q}(n)$$

tvar

$$\mathbf{q}(k) = \alpha^n (\mathbf{P}_{s_1}(n) \cos \beta n + \mathbf{P}_{s_2}(n) \sin \beta n),$$

kde $\mathbf{P}_{s_1}(n)$, resp. $\mathbf{P}_{s_2}(n)$ jsou polynomy vektorů nejvýše stupně s_1 , resp. s_2 , lze hledat partikulární řešení $\mathbf{y}_{PN}(n)$ ve tvaru

$$\mathbf{y}_{PN}(n) = \alpha^n (\mathbf{R}_{s+t}(n) \cos \beta n + \mathbf{S}_{s+t}(n) \sin \beta n),$$

kde $s = \max(s_1, s_2)$, t je násobnost čísla $\alpha e^{i\beta}$ jako kořene charakteristické rovnice a $\mathbf{R}_{s+t}(n)$ resp. $\mathbf{S}_{s+t}(n)$ jsou polynomy vektorů nejvýše stupně $(s+t)$.

☑ *Příklad:* Nalezněte partikulární řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= 3y_1(n) - 2y_2(n) - 1 + 3 \cdot 2^n \\ y_2(n+1) &= 2y_1(n) - 2y_2(n) + n. \end{aligned}$$

Řešení:

Nejprve určíme kořeny CH rovnice pro zkrácenou soustavu, tedy

$$\left. \begin{aligned} y_1(n+1) &= 3y_1(n) - 2y_2(n) \\ y_2(n+1) &= 2y_1(n) - 2y_2(n) \end{aligned} \right\} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 = \\ &= (\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \end{aligned}$$

Nyní budeme hledat partikulární řešení nezkrácené soustavy. Pravá strana $\mathbf{q}(n)$ LΔ rovnice je ve tvaru

$$\mathbf{q}(n) = \begin{pmatrix} -1 & 2^n \cdot 3 \\ n & 0 \end{pmatrix},$$

využijeme tedy principu superpozice a získáme dva vektory $\mathbf{q}_1(n)$ a $\mathbf{q}_2(n)$, které vyřešíme zvlášť a výsledné partikulární řešení pak bude dáno součtem těchto výsledků.

$$\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}_1(n) + \mathbf{q}_2(n) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2^n \cdot 3 \\ n & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ n \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}_1(n)} + 2^n \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}_2(n)}$$

Nyní tedy hledáme řešení pro soustavu rovnic s pravou stranou $\mathbf{q}_1(n)$, která je vektorem polynomů 1. stupně. Protože 1 není kořenem CH rovnice bude hledané řešení $\mathbf{y}_{PN1}(n)$ ve tvaru

$$\mathbf{y}_{PN1}(n) = \begin{pmatrix} an + b \\ cn + d \end{pmatrix}, \text{ kde } a, b, c, d \text{ jsou konstanty.}$$

Tento tvar dosadíme do původní LΔ rovnice (ovšem s pravou stranou jen $\mathbf{q}_1(n)$) a upravíme

$$a(n+1) + b - 3(an+b) + 2(cn+d) = -1$$

$$c(n+1) + d - 2(an+b) + 2(cn+d) = n$$

$$an + a + b - 3an - 3b + 2cn + 2d = -1$$

$$cn + c + d - 2an - 2b + 2cn + 2d = n$$

$$2n(c-a) + (a-2b+2d) = -1$$

$$(-2an+3cn) + (-2b+c+3d) = n$$

$$n^1 : \left. \begin{array}{l} a = c \\ -2a + 3c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow c = 1 \quad a = 1$$

$$n^0 : \left. \begin{array}{l} a - 2b + 2d = -1 \\ -2b + c + 3d = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 2 \quad d = 1$$

Partikulární řešení $\mathbf{y}_{PN1}(n)$ tedy bude mít tvar

$$\mathbf{y}_{PN1}(n) = \begin{pmatrix} n+2 \\ n+1 \end{pmatrix}.$$

Druhé partikulární řešení $\mathbf{y}_{PN2}(n)$ pro soustavu rovnic s pravou stranu $\mathbf{q}_2(n)$,

$$\mathbf{q}_2(n) = 2^n \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

určíme analogicky, ovšem s tím rozdílem, že 2 je kořenem charakteristické rovnice. Hledané řešení tedy bude ve tvaru

$$\mathbf{y}_{PN2}(n) = 2^n \begin{pmatrix} an+b \\ cn+d \end{pmatrix}.$$

Tento tvar dosadíme a provedeme úpravy

$$2^{n+1}(a(n+1)+b) - 3 \cdot 2^n(an+b) + 2^{n+1}(cn+d) = 2^n \cdot 3$$

$$2^{n+1}(c(n+1)+d) - 2^{n+1}(an+b) + 2^{n+1}(cn+d) = 0$$

$$2an + 2a + 2b - 3an - 3b + 2cn + 2d = 3$$

$$cn + c + d - an - b + cn + d = 0$$

$$2cn - an + 2a - b + 2d = 3$$

$$2cn - an - b + c + 2d = 0$$

$$n^1 : a = 2c, \text{ např. } c = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$n^0 : \begin{cases} 2a - b + 2d = 3 \\ b - c - 2d = 0 \end{cases} \text{ pro } c = 1 \Rightarrow b = 2d + 1, \text{ např. } d = 1 \Rightarrow b = 3.$$

Partikulární řešení $\mathbf{y}_{PN2}(n)$ tedy bude

$$\mathbf{y}_{PN2}(n) = 2^n \begin{pmatrix} 2n+3 \\ n+1 \end{pmatrix}.$$

Výsledné partikulární řešení $\mathbf{y}_{PN}(n)$ bude součtem zjištěných partikulárních řešení, tedy

$$\mathbf{y}_{PN}(n) = \mathbf{y}_{PN1}(n) + \mathbf{y}_{PN2}(n) = \begin{pmatrix} n+2 \\ n+1 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 2n+3 \\ n+1 \end{pmatrix}$$

nebo po složkách

$$y_{PN1}(n) = n+2 + 2^n(2n+3), \quad y_{PN2}(n) = n+1 + 2^n(n+1).$$

Převedení soustavy diferenčních rovnic 1. řádu na jednu rovnici vyššího řádu – metoda eliminace

Metoda eliminace jak již název kapitoly napovídá neslouží k samotnému vyřešení soustavy diferenčních rovnic, ale k jejímu převedení na jednu $L\Delta$ rovnici vyššího řádu a to tak, že máme-li soustavu k diferenčních rovnic 1. řádu převedeme tuto soustavu na lineární diferenční rovnici k -tého řádu. Tuto rovnici pak řešíme běžnými metodami pro řešení $L\Delta$ rovnic k -tého řádu, z čehož jasně vyplývá, že tato metoda je využitelná především v případech jednodušších soustav obvykle pouze s konstantními koeficienty. Nyní si tedy popíšeme metodu po jednotlivých krocích.

Řešíme-li soustavu rovnic

$$\begin{aligned}y_1(n+1) &= a_{11}(n)y_1(n) + a_{12}(n)y_2(n) + \dots + a_{1k}(n)y_k(n) + q_1(n) \\y_2(n+1) &= a_{21}(n)y_1(n) + a_{22}(n)y_2(n) + \dots + a_{2k}(n)y_k(n) + q_2(n) \\&\vdots \\y_k(n+1) &= a_{k1}(n)y_1(n) + a_{k2}(n)y_2(n) + \dots + a_{kk}(n)y_k(n) + q_k(n),\end{aligned}$$

postupujeme při použití *metody eliminace* následujícím způsobem:

1. Z i -té rovnice soustavy vyjádříme neznámou $y_j(n)$ kde $i \neq j$ a z tohoto vztahu stanovíme předpis pro $y_j(n+1)$.
2. Výrazy pro $y_j(n)$ a $y_j(n+1)$ dosadíme do zbývajících $k-1$ rovnic.
3. Kroky 1. a 2. opakujeme pro další neznámou y_m z některé ze zbývajících rovnic obsahujících neznámou $y_m(n)$ $m \neq j$, ale nikoli $y_m(n+1)$. Tuto neznámou opět osamostatníme a dosadíme do zbývajících rovnic. Pokud každá ze zbývajících rovnic obsahuje s neznámou posloupností i její hodnotu v bodě $n+1$, odstraníme

tuto hodnotu odečtením vhodného násobku jiné rovnice a postup znovu opakujeme.

4. Po skončení kroků 1.–3. nám zbude jedna rovnice k -tého řádu, kterou vyřešíme standardním způsobem
5. Řešení stanovené v předchozím kroku dosadíme do všech zbývajících rovnic soustavy, čímž dostaneme soustavu $k - 1$ rovnic o $k - 1$ neznámých, na které celý postup znovu opakujeme.

Jak je na první pohled vidět tato metoda je v případě soustavy většího počtu neznámých velmi zdoluhavá, na druhou stranu jsou ovšem její kroky natolik rutinní (s výjimkou samotného řešení $L\Delta$ rovnice vyššího řádu), že je tato metoda dobře algoritmizovatelná, a tudíž se používá především v případě implementace metod řešení soustav $L\Delta$ rovnic do výpočetních systémů.

☑ *Příklad:* Řešte soustavu $L\Delta$ rovnic metodou eliminace neznámých

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= 2y_n + z_n + 3 \\z_{n+1} &= y_n + 2z_n.\end{aligned}$$

Řešení: Postupujeme dle jednotlivých kroků

1. $z_n = y_{n+1} + 2y_n - 3 \Rightarrow z_{n+1} = y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3,$
2. $y_{n+2} - 2y_{n+1} - 3 = 2y_n + 2(y_{n+1} - 2y_n - 3) \Rightarrow y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = -3,$
4. Nalezenou rovnici řešíme standardním postupem pro řešení $L\Delta$ rovnice s konstantními koeficienty

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = -3.$$

Nejprve nalezneme obecné řešení zkrácené $L\Delta$ rovnice

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 4\lambda + 3 &= (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_{OZ}(n) &= C_1 + C_2 \cdot 3^n\end{aligned}$$

a následně také jedno partikulární řešení

$$q(n) = \mu^n P_s(n) = 1^n(-3) \Rightarrow y_{PN}(n) = \mu^n n^r Q_s(n) = 1^n n^1(a)$$

$$a(n+2) - 4a(n+1) + 3an = -3$$

$$0an - 2a = -3$$

$$a = \frac{3}{2} \Rightarrow y_{PN}(n) = \frac{3}{2}n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{ON}(n) = C_1 + C_2 3^n + \frac{3}{2}n$$

5. Toto řešení dosadíme do první rovnice v bodě 1. a dořešíme

$$z_{ON}(n) = y_{ON}(n+1) + 2y_{ON}(n) - 3 =$$

$$= C_1 + C_2 3^{n+1} + \frac{3}{2}(n+1) - 2C_1 - 2C_2 3^n - 3n + 3 =$$

$$= -C_1 + C_2 3^n - \frac{3}{2}(n+1).$$

obecné řešení soustavy je tedy

$$y_{ON}(n) = C_1 + C_2 3^n + \frac{3}{2}n$$

$$z_{ON}(n) = -C_1 + C_2 3^n - \frac{3}{2}(n+1).$$

Využití diferenčního počtu v ekonomické praxi

Jak již bylo v předchozích kapitolách několikrát uvedeno, řešení obecných LA rovnic, ať už prvního nebo vyššího řádu, stejně tak jako obecných soustav, je velice obtížná a v reálných situacích téměř neřešitelná věc. Proto se v praxi obvykle přistupuje pouze k využívání diferenčních rovnic s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Při jejich řešení se totiž můžeme vyhnout určování sumací, které jsou obvykle největší překážkou pro nalezení řešení rovnic jejichž koeficienty nejsou pouze konstanty. Nyní si ukážeme dva modely, ve kterých se využívá diferenčních rovnic. Prvním je *pavučinový model rovnováhy trhu* a druhým *dynamický model národního důchodu*.

Pavučinový model rovnováhy trhu

Označme

t – čas, $t = 1, 2, 3, \dots$

D_t – poptávka po zboží v období t ,

S_t – nabídka zboží v období t ,

p_t – cena zboží v období t .

Předpokládejme, že závislost nabídky i poptávky na ceně je lineární a řídí se rovnicemi

$$D_t = -ap_t + b,$$

$$S_{t+1} = cp_t + d,$$

kde a, b, c, d jsou kladné konstanty, při čemž koeficient b představuje výši poptávky, když cena $p_t = 0$ a koeficient d je výše nabídky při ceně $p_t = 0$.

Cena zboží je stanovena tak, aby bylo dosaženo rovnováhy trhu, tj. aby se v uvažovaném období nabídka rovnala poptávce. To znamená, že v čase $t+1$ je

$$S_t = D_t.$$

Když do této rovnice dosadíme za S_{t+1} a D_{t+1} z předchozích dvou vztahů, dostaneme

$$\begin{aligned} -ap_{t+1} + b &= cp_t + d \\ p_{t+1} + \frac{c}{a}p_t &= \frac{b-d}{a} \end{aligned}$$

Když označíme $A = -\frac{c}{a}$, $B = \frac{b-d}{a}$ dostaneme z poslední rovnice tvar

$$p_{t+1} = Ap_t + B$$

a zároveň označíme jako p_0 počáteční cenu, tj.

$$p_0 = p(0).$$

Chceme-li zjistit, jaká je cena zboží v čase t , znamená to, že pro $t = 1, 2, \dots$ budeme řešit následující úlohu pro lineární diferenční rovnici s konstantními koeficienty:

$$\begin{aligned} p_{t+1} - Ap_t &= B \\ p(0) &= p_0. \end{aligned}$$

Řešení:

Obecné řešení zkrácené rovnice bude ve tvaru

$$p_{oz}(t) = C \cdot A^t$$

a z něj plynoucí předpokládaný tvar partikulárního řešení nezkrácené rovnice bude

$$p_{PN}(t) = \begin{cases} a_0 & \text{pro } A \neq 1 \\ a_0 t & \text{pro } A = 1 \end{cases}$$

1. Jestliže $A \neq 1$ dostaneme po dosazení do diferenční rovnice,

$$a_0 - Aa_0 = B \Rightarrow p_{PN}(t) = a_0 = \frac{B}{1-A}.$$

Obecné řešení rovnice pak bude ve tvaru

$$p_{ON}(t) = CA^t + \frac{B}{1-A}.$$

Z počáteční podmínky určíme hodnotu konstanty C

$$p_0 = C \cdot A^0 + \frac{B}{1-A} \Rightarrow C = p_0 - \frac{B}{1-A}.$$

Řešením daného počátečního problému pro $A \neq 1$ je

$$p_t = \left(p_0 - \frac{B}{1-A} \right) A^t + \frac{B}{1-A}, \quad t = 1, 2, \dots$$

2. Jestliže $A = 1$ dostaneme po dosazení do diferenční rovnice,

$$a_0(t+1) - a_0t = B \Rightarrow p_{PN}(t) = a_0t = Bt.$$

Obecné řešení nezkrácené rovnice je pak

$$p_{ON}(t) = C \cdot A^t + Bt.$$

Opět dopočteme konstantu C pro počáteční podmínky p_0

$$p_0 = C \cdot A^0 \Rightarrow C = p_0.$$

Řešení daného počátečního problému pro $A = 1$ pak tedy je

$$p_t = p_0 + Bt, \quad t = 1, 2, \dots$$

Chování cen je ovlivněno konstantou $A = -\frac{c}{a} < 0$:

- a) Pokud $-1 < A < 0$, posloupnost $\{A^t\}$ konverguje k 0 a ceny tedy budou klesat.
- b) Když $A = -1$, je posloupnost $\{A^t\}$ konstantní a ceny zůstanou zachovány. Hovoříme o tzv. rovnovážném cyklu.
- c) Pokud $A < 0$, posloupnost $\{A^t\}$ roste nade všechny meze a ceny také porostou.

Dynamický model národního důchodu

Označme

t – čas, $t = 1, 2, 3, \dots$

C_t – výdaje na spotřebu v období t ,

Y_t – národní důchod v období t ,

I_t – investiční výdaje v období t .

Uvažujme model

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t, \\ C_t &= a + bY_{t-1}, \end{aligned}$$

kde a, b . Proměnné C_t a Y_t nazýváme endogenní proměnné a I_t nazýváme exogenní proměnná. Exogenní proměnné na rozdíl od endogenních nelze vypočítat ze zadané úlohy.

Po eliminaci proměnné C_t ze soustavy dostáváme diferenční rovnici pro neznámou posloupnost Y_t

$$Y_t - bY_{t-1} = I_t + a.$$

Pokud je posloupnost I_t konstantně rovná I , dostáváme po transformaci $t \rightarrow t+1$ diferenční rovnici

$$Y_{t+1} - bY_t = I + a,$$

jejíž obecné řešení je

$$\begin{aligned} Y_{ON}(t) &= \frac{I+a}{1-b} + C \cdot b^t \quad \text{pro } b \neq 1, \\ Y_{ON}(t) &= (I+a)t + C \quad \text{pro } b = 1. \end{aligned}$$

Nyní uvažujme případ $b \neq 1$, a hledejme řešení při kterém pro $t \rightarrow \infty$ hodnota $Y_{ON}(t)$ konverguje k

$$Y = \frac{I + a}{1 - b}.$$

Toto řešení, jak jasně vidíme, bude platit pro $|b| < 1$, protože

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_{ON}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{I + a}{1 - b} + C \cdot b^t \right) = \frac{I + a}{1 - b}.$$

Tímto je tedy nalezeno rovnovážné řešení.

Závěr

Mám-li zhodnotit přínosy, ale také problémy spojené s řešením diferenčních rovnic a jejich praktickou aplikací, vypíchl bych především následující. Diferenční rovnice a diferenční počet jako takový, je systém zaměřený na řešení úloh jejichž zdrojem jsou nespojitě množiny, čímž se velice blíží realitě. Za tuto svou vlastnost pak ovšem platí vysokou daň v podobě praktické neřešitelnosti složitějších příkladů, které naopak silně limitují jeho využití. Především značná limitace jeho praktického použití v reálných výpočtech je pak příčinou nevelkého zájmu o toto téma jak v oblasti dalšího rozvoje, tak především v oblasti publikace a to nejen v české literatuře. Dá se tedy říci, že z hlediska matematické analýzy jako celku je toto téma spíše okrajové. Reálné uplatnění znalostí diferenčních rovnic lze aplikovat zejména v oblasti ekonomie, kde jsou využívány především diferenční rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Setkáme-li se však v praxi s potřebou řešit i složitější problémy, přistupuje se obvykle k řešení těchto problémů přes diferenciální počet, který má především pro určování integrálů vybudován mnohem propracovanější systém. Jeho nevýhodou je však odklon od reálné situace ve smyslu předpokladu spojitých množin dat (až na konečný počet nespojitostí), které jsou v reálných podmínkách měření nezískatelné.

Literatura

DEMLOVÁ MARIE: *Diskrétní matematika a logika; Přednáška č. 6, Lineární diferenční rovnice*. ČVUT v Praze – fakulta elektrotechnická, katedra matematiky 2006.

URL: <http://math.feld.cvut.cz/demlova/teaching/dml/pred06.pdf>

DEMLOVÁ MARIE: *Diskrétní matematika a logika; Příklady č. 3, Lineární diferenční rovnice*. ČVUT v Praze – fakulta elektrotechnická, katedra matematiky 2006.

URL: http://math.feld.cvut.cz/demlova/teaching/dml/prikl_difrov.pdf

HENZLER JIŘÍ: *Integrály, diferenciální a diferenční rovnice*. První vydání, Praha, Vysoká škola ekonomická, 2000, 194 s. ISBN 80-245-0091-4.

JOHN OLDŘICH: *Užití diferenčních rovnic k modelování v ekonomii*. Praha, MFF UK. Přednáška na VŠB-TU Ostrava z 3.2.2005.

URL: http://www.am.vsb.cz/semdiff/john/sem_john.html

KAŇKA MILOŠ, HENZLER JIŘÍ: *Matematika 2*. První vydání, Praha, Ekopress, 2003, 215 s. ISBN 80-86119-77-7.

KLEIN W. MICHAEL: *Mathematical methods for economics*. Addison-Wesley Educational Publishers Inc., 1998, 565 s. ISBN 0-201-85572-0.

MAŘÍK ROBERT: *Diferenciální a diferenční rovnice*. První vydání, Brno, Mendelova zemědělská a lesnická univerzita, 2004, 79 s. ISBN 80-7157-754-5.

MAŠEK JOSEF: *Sbírka úloh z matematiky: diferenční rovnice a transformace Z*. První vydání, Plzeň, Vydavatelství západočeské univerzity, 1998, 64 s. ISBN 80-7082-457-3.

MORAVČÍK JOZEF: *Matematika: vybrané části II., Základy teorie diferenčních rovnic, transformácie Z a variačného počtu*. První vydání, Bratislava, Alfa, 1982, 174 s. ISBN 63-795-82.

MOŠOVÁ VRATISLAVA: *Matematická analýza III.: obyčejné diferenciální rovnice, diferenční rovnice*. První vydání, Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, 2002, 95 s. ISBN 80-244-0463-X.

NAGY JOZEF, NAVRÁTIL ONDŘEJ: *Diferenciální a diferenční rovnice*. První vydání, Praha, ČVUT, 2005, 79 s. ISBN 80-01-03284-7.

PALOUČKOVÁ ALENA, OŠTÁDALOVÁ EVA: *Diferenciální a diferenční rovnice*. První vydání, Ostrava, Vysoká škola báňská – technická univerzita Ostrava, 2003, 156 s. ISBN 80-248-0267-8.

POLÁCH EDUARD: *Pravidla sazby diplomových prací*. České Budějovice, Pedagogická fakulta jihočeské univerzity, 1998 (aktualizováno 23.1.2000). URL: <http://home.pf.jcu.cz/~edpo/pravidla/pravidla.html>

PRÁGEROVÁ ALENA, VOŘÍŠEK JAN: *Metodické listy z matematiky pro posluchače dálkového studia – sešit 12, Diferenciální a diferenční rovnice*. Třetí vydání (1. v SPN), Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1985, 62 s. ISBN 17-028-85.

SMRKOVSKÝ DAVID: *Diferenční rovnice*.

URL: <http://david.smrkovsky.com/?s=texty&detail=diferencni-rovnice>

ŠKRÁŠEK JOSEF, TICHÝ ZDENĚK: *Základy aplikované matematiky. Díl 2, Integrální počet, diferenciální geometrie, obyčejné a parciální diferenciální rovnice, funkce komplexní proměnné, Laplaceova transformace, diferenční rovnice*. Praha, Státní nakladatelství technické literatury, 1986, 896 s.