

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Finanční matematika

Jednoduchá matematika ve financích

(Bakalářská práce)

Vypracovala:.....Jankůvová Kristýna

Vedoucí práce:.....RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem práci „*Jednoduchá matematika ve financích*“ vypracovala a napsala samostatně pod vedením RNDr. Vladimíry Petráškové, Ph.D. a s použitím uvedené literatury. Jsem si vědoma, že požadavky uvedené v tomto prohlášení jsou dány zákonem a že jejich porušení může být soudně stíháno.

.....

Poděkování

Ráda bych poděkovala RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D za odborné připomínky a cenné rady, kterými přispěla k vypracování této bakalářské práce.

Zvláštní díky patří mé rodině a mým přátelům, kteří šli tuto životní etapu se mnou.

Anotace

Tato práce je zaměřena na aplikační příklady z finanční matematiky. A to především na procenta, jednoduché a složené úročení a spotřebitelské úvěry spojené s výpočtem RPSN. Nejdříve se ve zkratce seznámíte s historií bankovníctví jak ve světovém, tak v českém měřítku. Cílem této kapitoly je ukázat, jak rozvoj bankovníctví napomohl ke stále vyšší zadluženosti lidstva. V kapitole metodika jsou teoreticky popsány metody, pro využití v praxi na daná témata. Cílem této kapitoly je nastínit problematiku použití jednoduchých základních matematických operací pro výpočty příkladů z finanční matematiky. Závěrečná kapitola se již věnuje aplikačním příkladům. Jsou to řešené příklady, které jsou inspirovány aktuálními informacemi.

Annotation

This work is focused on application examples from financial mathematics. And especially the percentage, simple and compound interest and consumer loans associated with the calculation of APR. Initially, in a nutshell acquainted with the history of banking in both the world and in the Czech context. This chapter aims to show how the development of banking has helped to increasing indebtedness of humanity. The methodology chapter theoretically describes methods, for use in practice on the issues. The aim of this chapter is an overview of the use of simple basic mathematical operations for computing examples from financial mathematics. The final chapter is devoted to application examples. There are solved examples, which are inspired by current information.

Obsah

1. Úvod.....	6
2. Teorie	7
2.1. Základní pojmy finanční matematiky.....	7
2.2 Historie bankovníctví	8
2.3. Historie českého bankovníctví	8
3. Metodika	10
3.1. Jednoduché úročení	10
3.2. Složené úročení	12
3.3. Spotřebitelské úvěry	14
3.4. Úroková míra versus RPSN	15
4. Aplikační příklady.....	17
4.1. Procenta	17
4.2. Jednoduché úročení	21
4.3. Složené úročení	28
4.4. Spotřebitelské úvěry a RPSN	33
5. Závěr	36
6. Seznam použité literatury.....	37
7. Internetové zdroje.....	38

1. Úvod

Po roce 1989 se u nás změnila tržní ekonomika a český občan této změně jen těžko navykal. Ze zahraničí se začalo dovážet nové, rozmanitější zboží a on po tomto zboží zatoužil. V některých případech ovšem neměl dostatek finančních prostředků pro jeho pořízení, což byla příležitost pro banky, které začaly nabízet pro klienta více, či méně výhodné úvěry. Jelikož se klient v této sféře dost dobře neorientuje, nezřídka se stávalo a stává, že podlehl psychologickému tlaku reklamy. Reklamy, které se i dneska objevují v médiích, jsou velmi „vypečené“. Lidé si často neumí spočítat, kolik bance zaplatí na úrocích, a poté nejsou schopni půjčku splácet. Tím nastává problém, který často končí exekucním řízením. Cílem této práce je pokusit se jednoduchými metodami poukázat na danou problematiku a pokusit se nastínit, jak se lze rychle a za použití jednoduché matematiky vyhnout těmto problémům.

2. Teorie

2.1. Základní pojmy finanční matematiky

Úrok je nutné posuzovat ze dvou hledisek:

- z hlediska **věřitele (vkladatele, investora)**: „je úrok v širším smyslu odměna za poskytnuté právo disponovat s jím zapůjčenou sumou peněz.“ [2]
- z hlediska **dlužníka**: „je úrok platba, kterou platí za získaný úvěr, tedy cena úvěru.“ [2]

Úročení: „je způsob získávání úroků k zapůjčenému kapitálu“. [5]

Úroková sazba: „je úrok vyjádřený relativně (nejčastěji v procentech) z hodnoty kapitálu. Například roční úroková míra 10% znamená, že věřitel obdrží 10 haléřů z každé koruny, kterou měl dlužník vypůjčenou po dobu jednoho roku.“ [5]
Úrokovou sazbu můžeme vyjádřit jako roční (značíme $p\%$ p.a.), pololetní ($p\%$ p.s.), čtvrtletní ($p\%$ p.q.), měsíční ($p\%$ p.m.) nebo denní ($p\%$ p.d.).

Nominální úroková sazba: „je úroková míra, která nezohledňuje frekvenci úročení ani inflaci.“ [14]

Úrokové období: je: „doba, za kterou se úroky pravidelně připisují“. [13]

Doba splatnosti: nazýváme tak „dobu, po kterou je peněžní částka (kapitál) uložena nebo zapůjčena“. [13]

Současná hodnota (jistina): „je částka, která byla investovaná nebo byla zapůjčena, a která podléhá úročení.“ [14]

Budoucí hodnota (zúročená částka): „je jistina navýšená o úrok.“ [14]

Polhůtní úročení: (dekurzivní) – o něm hovoříme, jestliže: „se úroky platí na konci úrokového období“. [13]

Předlhůtní úročení: (anticipativní) – o něm hovoříme, „dochází-li k placení úroků na začátku úrokového období“. [13]

2.2 Historie bankovníctví

Vznik bankovníctví je předpokládáno již ve třetím a druhém tisíciletí př. n. l. Tento vznik bývá spojován s vývojem peněz a jejich funkcí.

Bankovníctví, jako takové, patří mezi odvětví s nejvyšší dynamikou rozvoje. Bez kvalitně fungujících bank, by nebyl možný výrazný ekonomický pokrok. [1]

První banky byly zakládány v Itálii ve 12. století. Itálie byla v té době hlavním centrem obchodu. Funkcemi těchto bank, byly základní operace s penězi za určitý poplatek, včetně nákupu, prodeje, ukládání a půjčování peněz. Což se později stalo hlavní činností bank.

Významným mezníkem v historii bankovníctví je 17. století, kdy se začaly používat směnky a šeky. V této době také vznikla první „národní banka“, a to: Bank of England.

Velkým pokrokem v bankovní sféře byl rozvoj bezhotovostních peněz na počátku 20. století. K tomu velkému pokroku přispěl nástup a rozvoj kapitalismu a velkovýroby.

2.3. Historie českého bankovníctví

Do nástupu Habsburků na český trůn v roce 1526 v Českých zemích banky téměř neexistovaly. Hlavní pobočky velkých Evropských bank vznikaly ve Vídni a v českých zemích působily pouze jejich izolované pracoviště. Ty byly určeny pouze pro potřeby místní šlechty.

Zavedení prvních papírových peněz, tzv. bankocetlí, přinesla až vláda Marie Terezie. Důvodem bylo splácení dluhů vytvořených během válek a řešení rozpočtových deficitů.

Až na počátku 19. století začaly vznikat první české banky. Například v roce 1825 byla založena Česká spořitelna nebo v roce 1867 Živnostenská banka. Ovšem v 70. letech, v době finanční deprese, většina slabších bank zanikla, jelikož neměly dostatečnou moc na finančním a úvěrovém systému.

V poválečných letech se začaly zakládat ryze české akciové banky. Od roku 1918 do roku 1922 počet českých bank stoupl z 22 na 27. Jedny z nejvýznamnějších byly: Živnobanka, Česká eskontní banka, Česká banka Union, Moravská banka, aj. Dopad na počet akciových bank měla ovšem 2. světová válka. Po jejím skončení působilo v Českých zemích pouze 10 akciových bank.

V roce 1950 byla založená Státní banka Československá. V tomto období v podstatě zanikly všechny obchodní banky. V roce 1989 došlo ke změně režimu a také k rozdělení Státní banky Československé na Státní banku Československou jako ústřední banku a komerční banky Praha.

Po roce 1989 se zakládání bank nabralo velmi hektický trend. Jen během roku 1990 vzniklo 6 nových bank a v roce 1994 působilo v České Republice již 44 bank. Takovýto rychlý vzestup se ovšem negativně odrážel a odráží na zadluženosti českého lidu.

3. Metodika

3.1. Jednoduché úročení

„O jednoduchém úročení hovoříme tehdy, jestliže se vyplácené úroky k původnímu kapitálu nepřičítají a dále se neúročí. Úroky jsou vypláceny po uplynutí úrokového období, ke kterému se vztahují.“ [13]

„Tento přístup je typický v případě, kdy doba života příslušného produktu či jeho samostatné etapy nepřekračuje jeden rok.“ [2]

Úrok vypočítáme pomocí vzorce: $u = K * i * n$

kde K je základní kapitál,

i je roční úroková sazba jako desetinné číslo ($i = \frac{p}{100}$), kde p je roční úroková sazba vyjádřená v procentech,

n je doba splatnosti kapitálu v rocích ($n = \frac{k}{360}$), kde k je doba splatnosti vyjádřená ve dnech,

u je úrok.

Dále analogicky vytváříme vzorce pro výpočet:

úrokové míry: $i = \frac{u}{K * n}$,

základního kapitálu: $K = \frac{u}{i * n}$,

doby splatnosti: $n = \frac{u}{K * i}$.

Chceme-li pomocí jednoduchého úrokování vypočítat budoucí hodnotu po době n , použijeme následující vzorec:

$$K_n = K_0 + K_0 * i * n = K_0 * (1 + i * n),$$

Kde K_n je budoucí hodnota na konci n -tého roku

K_0 je současná hodnota

- i je roční úroková sazba vyjádřená v desetinných číslech
- n je doba splatnosti vyjádřená v letech

Pro určení doby splatnosti používáme různé standarty. Z nichž nejčastěji v praxi využívané jsou:

- standard ACT/365 (anglická metoda) je založen na skutečném počtu dnů úrokového období (čitatel) a délce roku 365(resp. 366) dnů,
- standard ACT/360 (francouzská či mezinárodní metoda) je založen opět na skutečném počtu dní v čitateli zlomku, ale délka roku (ve jmenovateli) se započítává jako 360 dnů,
- standard 30E/360 (německá či obchodní metoda) je založen na kombinaci započítávání celých měsíců jako 30 dnů (v čitateli) a délky roku (ve jmenovateli) jako 360dnů. [13]

3.2. Složené úročení

Složené úročení se používá v případech, kdy úrokovací doba tvoří několik celých úrokovacích období. [18]

Radová a Dvořák (1997) ve své knize uvádějí, že „složené úrokování vychází z toho, že vyplácené úroky se přičítají k původnímu kapitálu a v následujícím úrokovém období se jako základ pro výpočet úroku bere již hodnota kapitálu zvýšená o úrok“.

Způsob jak při složeném úročení můžeme vypočítat stav kapitálu ke konci jednotlivých let, ilustruje následující tabulka:

Rok	Stav kapitálu na konci roku
1	$K_1 = K_0 + K_0 * i = K_0 * (1 + i)$
2	$K_2 = K_1 + K_1 * i = K_1 * (1 + i) = K_0 * (1 + i)^2$
3	$K_3 = K_2 + K_2 * i = K_2 * (1 + i) = K_0 * (1 + i)^3$
...	...
n	$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} * i = K_{n-1} * (1 + i) = K_0 * (1 + i)^n$

Kde K_0 je původní kapitál,

i je úroková sazba vyjádřená jako desetinné číslo,

n je doba splatnosti kapitálu v letech,

$K_1, \dots, K_n$ je výše kapitálu na konci 1. ...n-tého roku.

[13]

Probíhá-li připisování úroků častěji, než jednou do roka, což znamená, že úrokové období není roční, ale například pololetní, čtvrtletní nebo měsíční, mluvíme o tom, že úročení probíhá m -krát do roka.

Postup výpočtu stavu kapitálu v rámci jednoho roku ukazuje následující tabulka:

Část roku	Stav kapitálu na konci příslušné části roku
1	$K_{\frac{1}{m}} = K_0 + K_0 * \frac{i}{m} = K_0 * \left(1 + \frac{i}{m}\right)$
2	$K_{\frac{2}{m}} = K_{\frac{1}{m}} + K_{\frac{1}{m}} * \frac{i}{m} = K_{\frac{1}{m}} * \left(1 + \frac{i}{m}\right) = K_0 * \left(1 + \frac{i}{m}\right)^2$
3	$K_{\frac{3}{m}} = K_{\frac{2}{m}} + K_{\frac{2}{m}} * \frac{i}{m} = K_{\frac{2}{m}} * \left(1 + \frac{i}{m}\right) = K_0 * \left(1 + \frac{i}{m}\right)^3$
...	
m	$K_{\frac{m}{m}} = K_{\frac{m-1}{m}} + K_{\frac{m-1}{m}} * \frac{i}{m} = K_{\frac{m-1}{m}} * \left(1 + \frac{i}{m}\right) = K_0 * \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$

Kde K_0 je původní kapitál,

i je roční úroková sazba,

i/m úroková sazba za 1 m -tinu roku,

$K_{\frac{1}{m}} \dots K_{\frac{m}{m}}$ je stav kapitálu na konci 1. ... m -té části roku ($K_{\frac{m}{m}} = K_1$)

[13]

Chceme-li připisovat úroky m -krát ročně po dobu n let, použijeme následující vzorec:

$$K_n = K_0 * \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}.$$

3.3. Spotřebitelské úvěry

„Specifickou formou úvěru je spotřebitelský úvěr. Jedná se většinou také o financování investice, avšak soukromým osobám (občanům).“ [2]

Spotřebitelské úvěry rozdělujeme na:

- bezhotovostní úvěry (účelové), které slouží k nákupu spotřebních předmětů (automobil, elektronika,...) nebo třeba k zaplacení různých služeb (dovolená, školné,...),
- hotovostní úvěry (neúčelové), které lze využít k libovolnému účelu,
- bankovní – financování investice bankou,
- nebankovní – tzv. prodej na splátky, hlavní výhodou je sjednání rovnou v obchodě a rychlé vyřízení.

Spotřebitelské úvěry se splácejí v měsíčních splátkách. Často lze první splátku o několik měsíců odložit od čerpání úvěru.

Musíme také počítat s poplatky, které po nás může banka požadovat. Zpravidla to bývají poplatky za:

- vyhodnocení žádosti o úvěr (i v případě zamítnutí žádosti),
- měsíční správu úvěrového účtu,
- vedení účtu,
- služby spojené se změnou úvěrové smlouvy, zaslání upomínky, apod.,
- pojištění schopnosti splácet.

3.4. Úroková míra versus RPSN

Jak již bylo zmíněno, úroková sazba je: „úrok vyjádřený relativně (nejčastěji v procentech) z hodnoty kapitálu. Například roční úroková míra 10% znamená, že věřitel obdrží 10 haléřů z každé koruny, kterou měl dlužník vypůjčenou po dobu jednoho roku.“ [5]

Roční procentní sazba nákladů (ve finančnictví vedená pod zkratkou RPSN), kterou mají banky za povinnost uvádět¹ je procentní sazba, která vyjadřuje celkové roční průměrné náklady na daný úvěr. Zahrnuje veškeré běžné poplatky spojené s produktem či službou (např. poplatky za schválení úvěru, poplatky za vedení účtu ...). Tento ukazatel musí být zveřejněn ve všech reklamách, ve kterých je otištěna úroková sazba, případně náklady na úvěr. Ukazatel RPSN v reklamách obvykle uváděn bývá, ale většinou někde v rohu a velmi malým písmem. Dále si musíme uvědomit, že ve svých sazebnících banky uvádějí sazby minimální. To znamená, že uvedenou úrokovou sazbu je velmi obtížné získat a v praxi klient získává zpravidla sazbu vyšší. [9]

Od 1. ledna 2002 je poskytovatel spotřebitelského úvěru ze zákona povinen u nabídky uvádět i sazbu RPSN, není-li to mu tak, pak je tento poskytnutý úvěr úročen diskontní sazbou. Úročení diskontní sazbou bývá zpravidla pro zákazníka výhodnější.

Účel RPSN

Při uzavírání půjčky je obvykle velmi obtížné porovnat nabídky jednotlivých poskytovatelů pouze podle roční úrokové míry úvěru. Často jsou vyžadovány různé dodatečné platby:

- poplatky za uzavření smlouvy (administrativní poplatky),
- poplatky za správu úvěru,
- poplatky za vedení účtu,
- poplatky za převody peněžních prostředků,

¹ Tato povinnost se nevztahuje na určité druhy úvěru.

- první navýšená splátka (akontace),
- u leasingu odkupní cena předmětu,
- pojištění schopnosti splácet
- apod.

I úrokové míry bývají uváděny s různým základem (roční, měsíční, týdenní). RPSN, které zahrnuje všechny platby a je zásadně na roční bázi, tak usnadňuje orientaci při porovnání různých nabídek.

[19]

Výpočet RPSN

RPSN je taková úroková míra, pro kterou platí, že čistá současná hodnota získaných půjček se rovná čisté současné hodnotě výdajů.

Pro jednoduchý výpočet RPSN jsou na internetu k dispozici takzvané kalkulačky RPSN. Např.: <http://www.hypoteky-pujcky-uvery.cz/rpsn-kalkulacka.php>

4. Aplikační příklady

4.1. Procenta

Př. 4.1.1.: Paní Nováková chce koupit novou pračku, ale cena nesmí překročit hranici 10 000 Kč. V obchodě Pan Novák vybral pračku, která stála 7 900 Kč bez DPH. Vejde se Pan Novák do limitu své manželky, uvažujeme-li, že DPH činí 20 %? Kolik za novou pračku zaplatí?

Řešení:

Nejprve si vypočteme, kolik tvoří hodnota DPH ze základní ceny pračky:

20% ze 7 900 Kč

100%...7 900 Kč

1%.....79 Kč

20%.....1 580 Kč

Hodnota DPH ze základní ceny tvoří 1 580 Kč-tady je chyba. Abychom zjistili, jaká je cena pračky s DPH, musíme hodnotu DPH přičíst k základní ceně pračky:

$$7\,900 + 1\,580 = 9\,480.$$

To znamená, že pan Novák udělá paní Novákové radost, vejde se do limitu, který mu dala a pračku pořídí za 9 480Kč.

Př. 4.1.2.: Hrubá mzda paní Benešové činí 16 520 Kč. Kolik čítá zdravotní a sociální pojištění, uvažujeme-li po řadě sazby 4,5% a 6,5%?

Řešení:

Zdravotní pojištění spočteme tak, že zjistíme, kolik je 4,5% ze základu 16 520Kč.

4,5% z 16 520 Kč

100%...16 520 Kč

1%.....165,2 Kč

4,5%.....743,40 Kč

Zdravotní pojištění při sazbě 4,5% činí 743,40 Kč.

Sociální pojištění spočteme tak, že zjistíme, kolik je 6,5% ze základu 16 520 Kč.

6,5% z 16 520 Kč

100%...16 520 Kč

1%.....165,2 Kč

6,5%.....1 073,80 Kč

Sociální pojištění při sazbě 6,5% činí 1 073,80 Kč.

Př. 4.1.3.: Prodejní cena výrobku tvoří 150% výrobní ceny. Výrobní cena toho samého výrobku činí 6300 Kč. Za kolik se tento výrobek prodá?

Řešení:

Chceme zjistit, kolik tvoří 150% ze základu 6 300.

150% z 6 300 Kč

100%.....6 300 Kč

1%.....63 Kč

150%.....9 450 Kč

Prodejní cena výrobku je 9 450 Kč.

Př. 4.1.4.: Směnný kurz ČNB během jednoho roku tj. od 14.4.2009 do 14.4.2010 poklesl z 26,580 na 25,045 CZK/EU. Jaký je jeho procentuální pokles?

Řešení:

Nejdříve si zjistíme kolik činí rozdíl v CZK/EU.

$$26,580 - 25,045 = 1,535$$

Nyní můžeme zjistit, kolik je tento rozdíl v procentech ze základu 26,580 Kč.

1,535 Kč z 26,580 Kč

100%.....26,580 Kč

1%.....0,2658 Kč

$$p\% \dots\dots\dots 1,535 \text{ Kč} \Rightarrow \frac{1,535}{0,2658} = 5,775\%$$

Procentuální pokles činí 5,775 % za rok.

Př. 4.1.5.: Ve firmě došlo k výměně zaměstnance. Do důchodu odešel pracovník, který dostával měsíční čistou mzdu 24 800 Kč. Na jeho místo přišel nový zaměstnanec, který bude vydělávat 16 500 Kč. O kolik procent se snížilo mzdové ohodnocení tohoto pracovního místa z pohledu zaměstnance?

Řešení:

Potřebujeme nejdříve zjistit, kolik činí rozdíl těchto dvou mezd.

$$24\,800 - 16\,500 = 8\,300 \text{ Kč}$$

Dále chceme zjistit, kolik činí tento rozdíl v procentech ze základu 24 800 Kč.

8 300 Kč z 24 800 Kč

100%.....24 800 Kč

1%.....248 Kč

$$p\% \dots\dots\dots 8\,300 \text{ Kč} \Rightarrow \frac{8\,300}{248} = 33,468\%$$

Mzdové ohodnocení pracovního místa se snížilo o 33,468%.

Př. 4.1.6.: Pan Komůrka si chce koupit nové lyže. Přejde do obchodu, kde mají výrazné slevy. Lyže, které se mu líbí, stojí 3 099 Kč po slevě 45%. Kolik stály tyto lyže původně?

Řešení:

Budeme počítat základ. Příklad nám říká, že odečteme-li od základu 45% ze základu, musí nám vyjít cena lyží po slevě, což je 3099 Kč. To znamená, že je-li základ 100% a nová cena je snížena o 45% pak lyže po slevě stojí 55% z původní částky. Tzn. že:

55%.....3 099 Kč

1%.....56,35Kč

100%.....5 635 Kč

Původní cena lyží byla 5 635Kč.

Př. 4.1.7.: Cena notebooku je 15 099 Kč včetně DPH. DPH činí 20%. Kolik notebook stojí bez DPH?

Řešení:

120%.....15 099 Kč

1%.....125,825Kč

100%.....12 582,50 Kč

Cena notebooku bez DPH je 12 582,50 Kč.

4.2. Jednoduché úročení

Př. 4.2.1.: Pan Novák si vezme úvěr ve výši 50 000 Kč. Banka poskytla tento úvěr s roční úrokovou sazbou 12 % na 1rok. Jaký úrok bude pan Novák platit?

Řešení:

Ze zadání známe: $K = 50\,000\text{ Kč}$,

$$i = \frac{0.12}{1},$$

$$n = 1$$

Dosadíme do vzorečku:

$$u = K * i * n$$

$$u = 50\,000 * \frac{0.12}{1} * 1$$

$$u = 6\,000\text{ Kč}$$

Pan Novák zaplatí na úrocích 6 000 Kč.

Př. 4.2.2.: Pan Bouda si v bance půjčí částku 30 000 Kč na 1 rok. Jaká úroková sazba je pro něj možná, pokud nechce platit úroky vyšší než 3 750 Kč.

Řešení:

Vzorec pro výpočet úrokové sazby si odvodíme ze vzorce:

$$u = K * i * n.$$

A to následovně:

$$i = \frac{u}{K * n}.$$

Podle údajů ze zadání dosadíme do odvozeného vzorce.

$$i = \frac{3\,750}{30\,000+1}$$

$$i = 0,125 \Rightarrow 12,5\%$$

Nejvyšší možná úroková míra, aby úroky nepřesáhly 3 750 Kč je 12,5%.

Př. 4.2.3.: Banka nabízí půjčku s úrokovou mírou 13 % na 1 rok. Kolik by měla určit jako horní hranici půjčky, pokud by úroky měli činit 3 900 Kč?

Řešení:

Vzorec pro výpočet základního kapitálu si odvodíme ze vzorce:

$$u = K * i * n.$$

A to následovně:

$$K = \frac{u}{i * n}.$$

Podle údajů ze zadání dosadíme do odvozeného vzorce.

$$K = \frac{3\,900}{0,13+1}$$

$$K = 30\,000 \text{ Kč}$$

Horní hranice půjčky by měla být určena na 30 000 Kč.

Př. 4.2.4.: Manželé Sýkorovi si půjčili 20 000 Kč od banky, která zaručuje úrokovou míru 14%. Jak dlouho spláceli tuto půjčku, když na úrocích zaplatili 2 800 Kč?

Řešení:

Vzorec pro výpočet doby splatnosti si odvodíme ze vzorce:

$$u = K * i * n.$$

A to následovně:

$$n = \frac{M}{K \cdot i}$$

Podle údajů ze zadání dosadíme do odvozeného vzorce.

$$n = \frac{2\,800}{20\,000 \cdot 0,14} = 1$$

$$n = 1 \text{ rok}$$

Manželé Sýkorovi půjčku spláceli 1 rok.

Př. 4.2.5.: Paní Haladová si půjčila 20 000 Kč na 7 měsíců. Banka nabízí úrokovou míru 15 %. Jakou částku musí paní Haladová vrátit?

Řešení:

Dosadíme do vzorečku:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n) \text{ tak, že:}$$

$$K_0 = 20\,000 \text{ Kč,}$$

$$i = \frac{15}{100} = 0,15,$$

$$n = \frac{7}{12}.$$

$$\text{Tzn.: } K_n = 20\,000 \cdot \left(1 + 0,15 \cdot \frac{7}{12}\right)$$

$$K_n = 21\,750 \text{ Kč}$$

Paní Haladová bance vrátí 21 750 Kč.

Př. 4.2.6.: Pan Eger si chce půjčit 5 000 na rok. Jakou úrokovou míru mu musí banka nabídnout, pokud za rok nechce vrátit více než 5 500 Kč.

Řešení:

Ze vzorce $K_n = K_0 * (1 + i * n)$ si vyjádříme i :

$$i = \frac{K_n - K_0}{K_0 * n}.$$

Do tohoto vzorce dosadíme:

$$K_n = 5\,500 \text{ Kč},$$

$$K_0 = 5\,000 \text{ Kč},$$

$$n = 1 \text{ rok}.$$

$$\text{Tzn.: } i = \frac{5\,500 - 5\,000}{5\,000 * 1}$$

$$i = 0,1 \Rightarrow 10\%$$

Požadovaná úroková sazba je 10%.

Př. 4.2.7.: Kolik by si pan Němec mohl od banky půjčit, je-li nabízená úroková míra 14,5% a vrácená částka za 6 měsíců by neměla překročit 21 450 Kč?

Řešení:

Odvodíme si vzorec. Z původního vzorce $K_n = K_0 * (1 + i * n)$ si vyjádříme počáteční hodnotu K_0 :

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + i * n)}.$$

Dosadíme do odvozeného vzorce:

$$K_0 = \frac{21\,450}{(1 + 0,145 * \frac{6}{12})}$$

$$K_0 = 20\,000 \text{ Kč}$$

Maximálně by si mohl půjčit 20 000 Kč, aby vrácená částka nepřesáhla 21 450 Kč.

Př. 4.2.8.: Pan Hrabec vloží na bankovní účet 10 000 Kč. Tento účet podléhá jednoduchému úročení s úrokovou mírou 2,5 %. Jak dlouho vklad nechal na svém účtu, jestliže se zvýšil o 125 Kč?

Řešení:

Známe:

$$K_n = 10\,125 \text{ Kč},$$

$$K_0 = 10\,000 \text{ Kč},$$

$$i = 0,025.$$

Ze vzorce:

$$K_n = K_0 * (1 + i * n) \text{ si vyjádříme } n:$$

$$n = \frac{K_n - K_0}{K_0 * i}.$$

Dosadíme:

$$n = \frac{10\,125 - 10\,000}{10\,000 * 0,025},$$

$$n = 0,5 \Rightarrow 0,5 * 360 = 180 \text{ dní}.$$

Vklad ležel na účtu 6 měsíců.

Př. 4.2.9.: Pan Novák si uložil do banky 200 000 Kč. Úroková míra činila 3,5% a vklad byl v bance ponechán od 1.10.2009 do 20.2.2010. Kolik si pan Novák 20.2.2010 vybral? Uvažujme standard ACT/360.

Řešení:

Podle uvedeného standardu spočteme počet dní, ve kterých vklad ležel na účtu:

$$30 + 30 + 31 + 31 + 20 = 142$$

$$\text{Tzn., že } n = \frac{142}{360}.$$

Můžeme dosadit do vzorce a dopočítat vyzvednutou částku:

$$K_n = K_0 * (1 + i * n).$$

$$K_n = 200\,000 * \left(1 + 0,035 * \frac{142}{360}\right)$$

$$K_n = 202\,761,10 \text{ Kč.}$$

Pan Novák si 20.2.2010 z banky odnese 202 761,10 Kč.

Př. 4.2.10.: Do banky si paní Marková 20.6.2009 vložila částku, která byla úročena 2,5 %. 28.2.2009 si z banky odnesla 50 878,40 Kč. Kolik do banky původně vkládala? Uvažujme standard ACT/360.

Řešení:

Ze zadání víme, že: $i = 0,025$,

$$K_n = 50\,878,40 \text{ Kč,}$$

$$n = \frac{10+31+31+30+31+30+31+31+28}{360} = \frac{253}{360}.$$

Dosadíme do vzorce:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i*n)}.$$

$$K_0 = \frac{50\,878,40}{(1+0,025*\frac{253}{360})}$$

$$K_0 = 50\,000 \text{ Kč}$$

20. 6. 2009 paní Marková do banky vložila 50 000 Kč.

Př. 4.2.11.: Pan Koníček by chtěl koupit stavební parcelu. Vybral si dvě stejně velké na stejně přijatelných místech, s jedním rozdílem. Jedna je k dispozici ihned za 2 000 000 Kč a druhá až za rok za 2 200 000 Kč. Pan Koníček má momentálně na účtu, s roční úrokovou mírou 3%, 2 100 000 Kč. Která varianta je pro něj výhodnější? Nechat peníze na účtu a koupit parcelu za rok nebo koupit parcelu hned?

Řešení:

Pan Koníček má k dispozici tolik peněz, aby mohl ihned koupit první parcelu. Zůstalo by mu na účtu 100 000 Kč. Otázkou je, zdali mu nezbude více, počká-li ještě rok na druhou parcelu. Toto si jednoduše spočteme dosazením do vzorce pro jednoduché úrokování.

$$K_n = K_0 * (1 + i * n).$$

$$K_n = 2\,100\,000 * (1 + 0,03 * 1)$$

$$K_n = 2\,163\,000 \text{ Kč.}$$

Zjistili jsme, že po roce bude mít pan Koníček na účtu 2 163 000 Kč. Což znamená, že ani po tomto roce nebude mít dostatečnou částku na zaplacení druhé parcely. To znamená, že je pro něj výhodnější koupit parcelu ihned.

4.3. Složené úročení

Př. 4.3.1.: Paní Veselá si na účet uložila 10 000 Kč. Předpokládá, že na účtu tato částka zůstane 6 let při složeném úročení a úrokové míře 1,5%. Jaká bude výše vkladu po šesti letech?

Řešení:

Dosadíme do vzorečku:

$$K_n = K_0 * (1 + i)^n, \text{ tak, že:}$$

$$K_0 = 10\,000 \text{ Kč,}$$

$$i = 0,015,$$

$$n = 6.$$

To znamená, že:

$$K_n = 10\,000 * (1 + 0,015)^6$$

$$K_n = 10\,934,40 \text{ Kč}$$

Paní Veselá si z banky po šesti letech odnese 10 934,40 Kč.

Př. 4.3.2.: Při jaké úrokové míře se za dobu 6 let zúročí částka 70 000 Kč o 11 178,50 Kč

Řešení:

Ze základního vzorečku pro složené úrokování si vyjádříme úrokovou míru:

$$K_n = K_0 * (1 + i)^n$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Ze zadání víme, že: $K_n = 81\,178,50 \text{ Kč}$,

$$K_0 = 70\,000 \text{ Kč},$$

$$n = 6 \text{ let.}$$

Dosadíme:

$$i = \sqrt[6]{\frac{81\,178,50}{70\,000}} - 1$$

$$i = 0,0249 \Rightarrow 2,5 \%$$

70 000 Kč se zúročí na 81 178,50 Kč při úrokové míře 2,5%

Př. 4.3.3.: Chceme, aby se nám vklad, 50 000 Kč zúročil na 55 000 Kč. Banka, nám nabízí úrokovou míru 2%. Jaká bude doba splatnosti?

Řešení:

Ze základního vzorce složeného úročení si vyjádříme dobu splatnosti a to následovně:

$$n = \frac{\log \frac{K_n}{K_0}}{\log(1+i)}.$$

Do tohoto vzorce dosadíme údaje, které známe ze zadání:

$$n = \frac{\log \frac{55\,000}{50\,000}}{\log(1+0,02)}$$

$$n = 4,8 \Rightarrow 0,8 * 360 = 288 \text{ dní}$$

Doba splatnosti bude 4 roky, 9 měsíců a 18 dní.

Př. 4.3.4.: Pan Novák si po 5 letech vyzvedl svůj vklad z banky. Odesl si 173 891 Kč. Kolik činil základní vklad, podléhá-li tento účet 3 % úroku?

Řešení:

Ze základního vzorce po výpočet pomocí složeného úrokování si vyjádříme základní vklad:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

Podle zadání dosadíme:

$$K_0 = \frac{173\,891}{(1+0,03)^5}$$

$$K_0 = 150\,000 \text{ Kč}$$

Původní vklad pana Nováka byl 150 000 Kč.

Př. 4.3.5.: Do banky vložíme 150 000 Kč. Uložíme ho na 10 let s roční úrokovou mírou 1%. Jaká bude budoucí hodnota po deseti letech při měsíčním, čtvrtletním, půlročním a ročním složeném úrokování?

Řešení:

Pro lepší přehlednost si načrtněme tabulku:

Složené úrokování	m	$n*m$	$\frac{t}{m}$	$(1+i)^{n+m}$	$K_n = K_0 * \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m*n}$
Měsíční	12	120	0,00083	1,1051	165 768
Čtvrtletní	4	40	0,0025	1,105	165 750
Půlroční	2	20	0,005	1,1049	165 735
Roční	1	10	0,01	1,1046	165 690

Př. 4.3.6.: Babička s dědou chtějí vnukovi finančně přispět na studia. Řekli si, že částku 50 000 Kč vloží na účet a nechají ho úročit až do jeho 18 let. Z nabídek si vybrali dvě banky, které se jim zdály nejvýhodnější. Banka A nabízí termínovaný vklad při čtvrtletním úročení úrokovou sazbu 2,5 % p.a. a banka B zase při půlročním úročení úrokovou sazbu 3 % p.a. Z obou banky si peníze mohou odnést každé 3 roky. Která z těchto nabídek je výhodnější? Kolik si může jejich vnuk v den svých 18 narozenin z banky odnést?

Řešení:

$$K_n = K_0 * \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m*n}$$

Banka A:

$$K_n = 50\,000 * \left(1 + \frac{0,025}{4}\right)^{4*18}$$

$$K_n = 78\,305,90 \text{ Kč}$$

Banka B:

$$K_n = 50\,000 * \left(1 + \frac{0,03}{2}\right)^{2*18}$$

$$K_n = 84\,457 \text{ Kč}$$

Výhodnější bude zvolit banku B.

Př. 4.3.7.: Pan Vomáčka si půjčil od banky 250 000 Kč na 3 roky. Banka nabízí 15% úrokovou sazbu, čtvrtroční úrokování. Jakou částku pan Vomáčka zaplatí celkem?

Řešení:

Dosazujeme do vzorečku:

$$K_n = K_0 * \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m*n}$$

$$K_n = 250\,000 * \left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{4*3}$$

$$K_n = 388\,863,60 \text{ Kč}$$

Pan Vomáčka celkem zaplatí 388 863,60 Kč.

4.4. Spotřebitelské úvěry a RPSN

Př. 4.4.1.: Banka A nabízí spotřebitelský úvěr do 300 000 Kč a dobu splatnosti 5 let (60 měsíců). Výše jedné měsíční splátky je 6 508 Kč. Nabízená sazba RPSN je od 10,9%. Poplatek při uzavření smlouvy je 450 Kč. Poplatek za vedení účtu činí 600 Kč ročně (tj. 3000 Kč za 5 let). Kolik zaplatíme bance celkem i s úroky?

Řešení:

Na této adrese nalezneme internetovou kalkulačku.

<http://www.hypoteky-pujcky-uvery.cz/rpsn-kalkulacka.php>

Dosadíme následovně:

Kalkulačka vám spočte RPSN a celkovou částku, kterou za půjčku zaplatíte.

Velikost půjčky <i>Zadejte kolik si půjčíte</i>	300000		
Výše pravidelných splátek <i>Zadejte kolik budete pravidelně splácet</i>	6508		
Počet splátek <i>Kolik splátek zaplatíte</i>	60		
Periodicita splácení <i>Jak často bude splácet</i>	Měsíční		
Další náklad <i>Například poplatek za uzavření smlouvy</i>	450	Dnů od pořízení půjčky <i>Kdy musíte zaplatit</i>	0
Další náklad 2	3000	Dnů od pořízení půjčky 2	1825

Další náklad je např. poplatek za uzavření smlouvy, poplatky za posouzení žádosti o spotřebitelský úvěr, **akontace** apod. Další náklad není nutné vyplňovat.

RPSN: **11.81%** Celkem zaplatíte: **393930**

Kalkulačka RPSN spočetla, že RPSN činí 11,81 % což je víc, než uvádí bankovní leták. Takže sazba RPSN uvedená na reklamách bankovních společností je pouze orientační. Celkem zaplatíme 393 930 Kč což je: $60 \cdot 6\,508 + \text{poplatky } (450 + 3000)$.

Př. 4.4.2.: Banka XY nám nabízí úvěr 50 000 Kč na 7 let. Výše jedné měsíční splátky je 969 Kč, poplatek při uzavření smlouvy je 1% z půjčené částky a vedení účtu je bez poplatku. RPSN je na reklamním letáku uvedeno od 9,85 %. Kolik vrátíme bance i s úroky?

Řešení:

<http://www.hypoteky-pujcky-uvery.cz/rpsn-kalkulacka.php>

Po dosazení do kalkulačky vidíme, že RPSN činí 16,64% což je mnohem víc, než 9,85% v zadání. Bance celkem vrátíme 81 396 Kč bez poplatku, což znamená, že s poplatkem při uzavření smlouvy vrátíme 81 896 Kč.

Př. 4.4.3.: Nabízený úvěr od splátkové společnosti XYZ je ve výši 150 000 Kč. Měsíční splátka činí 4 219 Kč a budu ji platit po dobu 45 měsíců. Banka si neúčtuje žádné poplatky a uvádí, že příslušné RPSN pro tento případ je 13,65%. Uvádí banka pravdu? Kolik bude zapláceno bance navíc?

Řešení:

<http://www.hypoteky-pujcky-uvery.cz/rpsn-kalkulacka.php>

Banka uvádí správné RPSN. V případě splátkových společností jsou měsíční splátky uvedeny již s poplatky, tudíž se jimi zabývat nemusíme. Navíc bance zaplatím 39 855 Kč ($4\,219\text{ Kč} \cdot 45 - 150\,000\text{ Kč}$).

Př. 4.4.4.: Reklamní leták splátkové společnosti B hlásá: „Nabízíme vám úvěr na 10 000 Kč. Budete měsíčně splácet jen 249 Kč.“. Pod tím, malým písmem, je dále uvedeno, že splácení bude probíhat po dobu 60 měsíců a sazba RPSN činí 18,4 %. Zkontrolujte, zda je uvedena správná sazba RPSN a spočtete, kolik vrátíte bance.

Řešení:

<http://www.hypoteky-pujcky-uvery.cz/rpsn-kalkulacka.php>

Sazba RPSN činí 18,49%, což je o něco víc, než je uvedeno v reklamním letáku. Celkem zaplatím 14 940 Kč ($249\text{ Kč} \cdot 60$).

Př. 4.4.5.: Banka A nabízí neúčelovou půjčku až 300 000 Kč na dobu až 7 let. Sazba RPSN pro tuto nabídku je od 9,9% do 26,5% a měsíční splátka činí 4 797 Kč. Poplatek při uzavření smlouvy je 1% z požadované částky a poplatek za vedení účtu je 50 Kč měsíčně. Kolik zaplatím bance i s úroky?

Řešení:

<http://www.hypoteky-pujcky-uvery.cz/rpsn-kalkulacka.php>

Poplatek za vedení účtu je 50 Kč na měsíc. Za sedm let = $50 \cdot 12 \cdot 7 = 4\,200$ Kč

Celkem bance zaplatíte 402 696 Kč + 4 200 Kč + 300 Kč = 410 148 Kč.

Př. 4.4.6.: Stejná banka z předchozího příkladu nabízí minimální půjčku 20 000 Kč a minimální doba splatnosti je jeden rok. Měsíční splátka činí 1 805 Kč. Počítejme se stejnými poplatky. Kolik vrátíte bance v tomto případě?

Řešení:

<http://www.hypoteky-pujcky-uvery.cz/rpsn-kalkulacka.php>

Celkem zaplatíme 22 460 Kč i s poplatky.

Př. 4.4.7.: Pan Straka si chce vzít spotřebitelský úvěr 100 000 Kč. Banka A mu úvěr nabízí na 60 měsíců s měsíční splátkou 2 471 Kč. Poplatek při uzavření smlouvy činí 1% z požadované částky a poplatek za vedení účtu je 50 Kč měsíčně. Banka B panu Strakovi nabízí úvěr také na 60 měsíců s měsíční splátkou 2 298 Kč. Banka B si počítá poplatky při uzavření smlouvy 500 Kč a za vedení účtu 20 Kč měsíčně. Která z nabídek je pro pana Straku z hlediska vrácené částky výhodnější?

Řešení:

<http://www.hypoteky-pujcky-uvery.cz/rpsn-kalkulacka.php>

V prvním případě vrátí i s poplatky 152 260 Kč.

V druhém případě vrátí i s poplatky 139 580 Kč.

Výhodnější je tedy druhý případ.

5. Závěr

Velmi často se stává, že lidé nejsou schopni splácet úvěry. Jedním z důvodů, proč se to děje, je jejich špatná informovanost. Banky nabízejí výhodné úvěry, které prezentují pomocí reklamních letáků nebo reklam v médiích. Řeknou Vám to, co Vy chcete slyšet. Např. jak nízká je úroková míra, že půjčku můžete splácet, jak dlouho si určíte, apod. Bohužel Vám již neřeknou, kolik zaplatíte na úrocích při splácení, ani to, že placené úroky se nejsou dány jen úrokovou sazbou, ale také různými poplatky, které si účtuje každá banka jinak a sama. Sazba RPSN je sazba, ve které jsou tyto poplatky již započteny, tudíž je vyšší, než samotná úroková míra. RPSN se od 1.1.2002 musí ze zákona v nabídkách uvádět. Bohužel tato sazba bývá uváděna menším písmem, které bývá okem špatně postřehnutelné.

Výsledkem mé práce je zjištění, že opravdu stačí základní matematické znalosti, abychom se vyhnuly nepříjemnostem, které by mohly vzniknout v souvislosti se splácením úvěrů.

Věřím, že má práce bude přínosem pro lidi, kteří se takovýmto problémům chtějí vyhnout.

6. Seznam použité literatury

- [1] Berezhnaya Alina, Analýza bankovního trhu ČR a trendy jeho budoucího vývoje, 2009, Bankovní institut vysoká škola Praha, Bakalářská práce
- [2] Bezvoda V., Blahuš P., Finanční matematika a statistika, 2001, CERM
- [3] Budinský Petr, Záškodný Přemysl, Finanční a investiční matematika, 2004, EUPRESS
- [4] Cipra Tomáš, Finanční matematika v praxi, 1993, HZ Praha
- [5] Cipra Tomáš, Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou, 2005, Ekopress
- [6] Hozák Pavel, Komunální banka (Ano či ne), 2008, Univerzita Pardubice, Bakalářská práce
- [7] Kletečková Marie, Nýdl Václav, Finanční a pojistná matematika, 2001, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
- [8] Kroh, Michael, Jak si vzít úvěr, 1999, GRADA
- [9] Kuřina František a kol., Matematika a porozumění světu, 2009, ACADEMIA
- [10] Papoušková Hana, Historický vývoj bankovníctví v ČR, 2006, Masarykova univerzita, Bakalářská práce
- [11] Pavlů Romana, Vývoj bankovního systému v České republice, 2009, Bankovní institut vysoká škola Praha, Bakalářská práce
- [12] Radová Jarmila, Chýna Vladislav, Mále Jiří, Finanční matematika v příkladech, 2005, Professional publishing
- [13] Radová Ludmila, Dvořák Petr, Finanční matematika pro každého, 1997, GRADA
- [14] Šulista, Marek, Nýdl, Václav, Gregory, Moore, Úvod do finanční a pojistné matematiky, 2008, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

7. Internetové zdroje

[15] <http://www.hypoteky-pujcky-uvery.cz/rpsn-kalkulacka.php>

[16] <http://penize.org/banky/historie/>

[17] <http://cs.wikipedia.org/wiki/Banka>

[18] http://cs.wikipedia.org/wiki/Složené_úročení

[19] <http://cs.wikipedia.org/wiki/RPSN>