

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Bakalářská práce

MATEMATIKA V GEOGRAFII

Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

Autor práce: Jaroslav Pátek

Studijní obor: M - Z

Ročník: 3.

2012

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s využitím literatury a další pramenů uvedených na přiloženém seznamu.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 25. 4. 2012

Jaroslav Pátek

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucí práce RNDr. Libuši Samkové, Ph.D. za cenné rady, připomínky a čas, který mi věnovala.

Anotace

Tato práce popisuje možnosti využití matematiky v oblasti geografie. Toto téma je zúženo na dílčí disciplínu geografie, kterou je kartografie – zejména matematická kartografie. Jejím předmětem studia je mapování zemského tělesa. Důraz je kladen na konkrétní příklady.

Annotation

This bachelor thesis describes possibilities of using mathematics in the field of geography. The topic is reduced to the partial discipline of geography, which is cartography – especially mathematic cartography. Its subject of study is making maps of the Earth. An accent is put on particular examples.

Obsah

1	Úvod	5
2	Historické určování tvaru Země	6
3	Současný pohled na Zemi a její tvar	8
4	Způsoby aproximace	10
4.1	Geoid	10
4.2	Referenční elipsoid	11
4.2.1	Trojosý referenční elipsoid	11
4.2.2	Rotační referenční elipsoid	12
4.2.3	Porovnání geoidu s referenčními elipsoidy	14
4.3	Referenční koule	15
4.4	Referenční rovina	17
5	Určování nadmořské výšky	18
6	Souřadnicové systémy	20
6.1	Zeměpisné souřadnice	20
6.2	Prostorové pravoúhlé souřadnice	21
6.3	Pravoúhlé rovinné souřadnice	22
6.4	Rovinné polární souřadnice	22
7	Kartografické zkreslení	23
7.1	Délkové zkreslení	23
7.2	Plošné zkreslení	23
7.3	Úhlové zkreslení	24
7.4	Tissotova indikatrix	24
8	Kartografická zobrazení	26
8.1	Azimutální mapy	27
8.2	Válcové mapy	29
8.3	Kuželové mapy	32
8.4	Obecné mapy	33
9	Zakřivení Země na území České republiky	35
10	Závěr	41
11	Seznam literatury a ostatních použitých pramenů	42

1 Úvod

Matematika je přírodní vědou, která se vyznačuje absolutní přesností a nezpochybnitelností svých výsledků. Tento hlavní znak ji zcela odlišuje od ostatních vědních disciplín, ale zároveň ji i předurčuje k jejímu využívání při řešení praktických problémů v těchto vědách. Takové matematice se pak říká aplikovaná matematika. Je nepřeberné množství vědních oborů, ve kterých se uplatňují výsledky aplikované matematiky - fyzika, chemie, informatika, ekonomie, filosofie a další. Matematika má své nezastupitelné místo i v oblasti geografie.

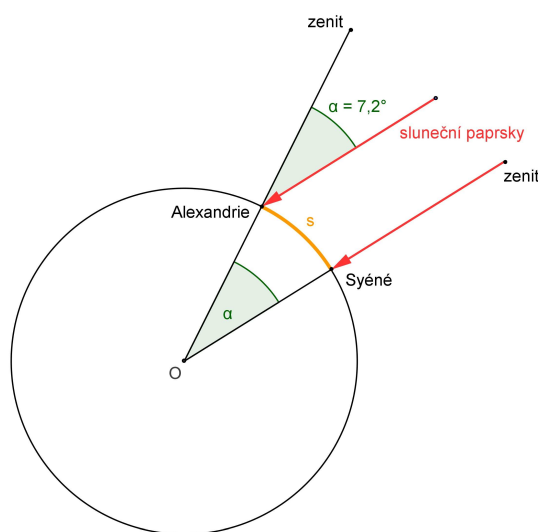
Téma této bakalářské práce je Matematika v geografii. To je nesmírně široký pojem, který se může pohybovat od jednoduchého výpočtu měřítka mapy pomocí trojčlenky až po užití nejrůznějších statistických metod při sčítání lidu, domů a bytů. Geografii lze rozdělit na fyzickou geografii, sociální geografii, regionální geografii a kartografii. Osobně mi byla vždy blízká práce s mapou, proto jsem se rozhodl toto téma zúžit a směřovat k dílčí disciplíně - kartografii.

Kartografie je vědní obor, který se zabývá prostorovým rozmístěním jevů v krajinné sféře, tedy tvorbou map. Kartografii tvoří celá řada dílčích disciplín - geodetická kartografie, topografická kartografie, tematická kartografie, počítačová kartografie (GIS) atd. Jednou z nich je i matematická kartografie, jejímž předmětem studia je určování tvaru a rozměrů Země a matematické zákonitosti při jejím mapování. Cílem této práce je shrnout a objasnit základní principy této disciplíny a demonstrovat je na konkrétních příkladech.

2 Historické určování tvaru Země

Názory na tvar Země se v průběhu věků výrazně měnily. Lidé ve starověku se domnívali, že Země je ploché těleso. Není divu, jelikož relativně malá křivost zemského povrchu je pouhým okem velmi špatně vnímatelná a pro naše předky bylo zcela nepředstavitelné, že by se mohli pohybovat na takovém tělese, jakým je koule. Postupem času proti tomuto tvrzení začala nasvědčovat různá pozorování, která ale zatím nebyla vědecky podložena. Například pozorování lodí, jak vyplouvá z přístavu a postupně se blíží k obzoru až za ním „zmizí“ nebo fakt, že při zatmění Měsíce je vrhán kulatý stín, který pravděpodobně náleží Zemi.

První historicky doložené měření velikosti Země provedl Eratosthenés z Kyrény v 3. st. př. n. l. Jeho úvaha spočívala v přiřazení středového úhlu zemské koule ke známé vzdálenosti na jejím povrchu. Zvolil si vzdálenost mezi Alexandrií a Syéné (dnešní Asuán), o kterých předpokládal, že leží na stejném



Obr. 1: Eratosthénova úvaha měření [2]

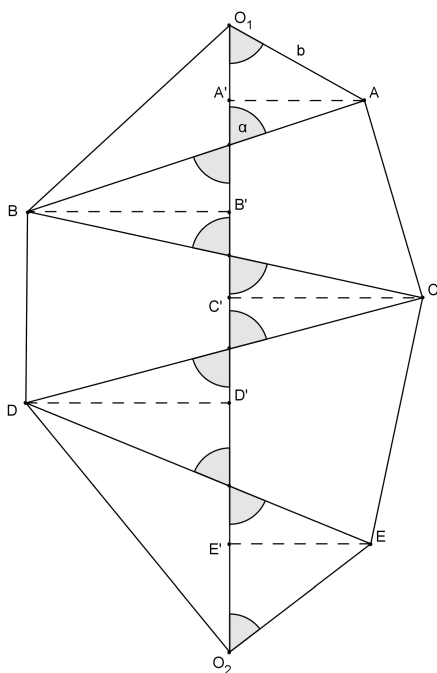
poledníku. Poté v Syéné provedl v den letního slunovratu pozorování, při kterém zjistil že v pravé poledne dopadají sluneční paprsky až na dno jedné studny - tudíž zenitová vzdálenost Slunce je nula. To samé měření provedl i v Alexandrii, kde zjistil, že zde je zenitová vzdálenost Slunce rovna $\alpha = 7,2^\circ$. Pokud tedy označíme vzdálenost mezi výše zmíněnými městy jako s , může na základě této úvahy vypočítat obvod Země o :

$$\frac{s}{o} = \frac{\alpha}{360^\circ} \quad \Rightarrow \quad o = \frac{s \cdot 360^\circ}{\alpha}$$

Vzdálenost mezi Alexandrií a Syéné byla tehdy odhadnuta na 5000 stadií. Stadion byla délková jednotka, která odpovídala 600 řeckým footům. Bohužel v té době nešlo o unifikovanou jednotku a používaly se footy různé délky - od 0,264 m

do 0,354 m. Tím se výsledek Eratosthénova měření pohybuje v intervalu od 39650 do 53150 km. Skutečný obvod rovníku činí 40074 km, takže lze říci, že i přes četné nepřesnosti byl Eratosthénovo měření na tehdejší dobu poměrně přesné.

V novodobých dějinách se ve snaze eliminovat chyby při měření na zemském povrchu začíná uplatňovat metoda triangulace, která byla poprvé použita nizozemským matematikem a fyzikem W Snelliem (1591 - 1626). Princip metody triangulace je



Obr. 2: Metoda triangulace [2]

založen na tom, že vzdálenost dvou bodů není měřena přímo, ale pomocí sítě trojúhelníků, proložených mezi oba body. Pro měření vzdáleností bodů O_1O_2 se vybere několik bodů A, B, C, D, E tak, aby jejich vzdálenost bylo kolem 30 - 40 km a z každého bodu byly vidět další dva. Jedna strana trojúhelníku, kterou lze přímo změřit, se volí jako základna a provede se měření všech úhlů v trojúhelnících. Je-li např. $b = O_1A$ změřená základna, lze další strany trojúhelníku BO_1 a AB stanovit pomocí sinové věty:

$$\frac{O_1A}{\sin \angle ABO_1} = \frac{AB}{\sin \angle AO_1B} = \frac{BO_1}{\sin \angle BAO_1}$$

Změříme-li dále úhly sevřené spojnicí O_1O_2 a stranami O_1A , AB , BC , ... , EO_2 , lze snadno vypočítat postupně úseky O_1A' , $A'B'$, $B'C'$, ... , $E'O_2$, jejichž součet dává hledanou vzdálenost O_1O_2 . Např. pro $A'B'$ platí: $A'B' = AB \cdot \cos \alpha$ a analogicky pro ostatní úseky. [2]

3 Současný pohled na Zemi a její tvar

V dnešní době se nám mohou poznatky z předchozí kapitoly jevit jako primitivní, protože díky vědeckým poznatkům a především technologickému pokroku můžeme s jistotou říci, že Země je opravdu „kulatá“. Toto tvrzení je však dost obecné. Je pravdou, že částice hmoty mají tendenci se sdružovat v podobě kulových těles, protože v tomto tvaru je zapotřebí nejmenší soudržné síly. I kapka vody, pokud by se nacházela ve vakuu, by měla kulový tvar, ale díky vnějším vlivům, především gravitační síle, je její tvar determinován.

To stejné platí i v případě Země, ačkoli v mnohonásobně větším měřítku. Po dobu existence Země, tj. zhruba 4,5 miliardy let, byl a neustále je ovlivňován její tvar nesčetnou řadou faktorů. Naše planeta, jakožto nedílná součást Sluneční soustavy, podléhá velké gravitační síle Slunce. V důsledku toho Země vykoná revoluční pohyb kolem Slunce a zároveň rotační pohyb kolem své vlastní osy. Tímto jevem se dá vysvětlit zploštění Země v pólových oblastech. Gravitační síla jediné přirozené zemské družice Měsíce také velmi ovlivňuje naši Zemi, a to především kvůli jejich relativně malé vzdálenosti. Nejvíce pozorovatelným úkazem jsou tzv. slapové jevy, které jsou tedy i zčásti způsobeny gravitací Slunce. Slapové jevy nezahrnují pouze pohyby vody, jakými jsou příliv a odliv, ale je dokázáno, že se tyto jevy objevují i v případě látek pevného skupenství, tzn. pevného povrchu Země.

Výše popsané faktory působí na Zemi z vnějšku a určují její tvar především v makroskopickém měřítku. Existují ještě další faktory ovlivňující tvar naší planety, ale už poněkud v menším měřítku a pouze v rámci vymezení Země. Povrch planety není stálý a je v neustálém pohybu. Tento fakt popisuje Wegenerova teorie kontinentálního driftu, kdy se jednotlivé litosferické desky pohybují na tzv. astenosféře. Na rozhraní mezi těmito deskami může docházet ke vzniku nové zemské kůry a to v případě, pokud se desky pohybují směrem od sebe. Taková rozhraní nazýváme divergentními a nejčastěji jimi jsou středooceánské hřbety. Jestliže v opačném případě se desky pohybují směrem k sobě, jedna deska se podsouvá pod druhou. K tomuto jevu dochází v hlubokooceánských příkopech a toto rozhraní je nazýváno konvergentním neboli subdukční zónou. Podél těchto zón dochází k zániku oceánské zemské kůry a k mírnému nárůstu kontinentální zemské kůry. Na základě tohoto komplexního procesu se povrch Země neustále přetvářel až do podoby, kterou známe dnes. Během tohoto

vývoje docházelo i ke vzniku rozmanitých geologických struktur v jednotlivých oblastech světa. Geologické podloží je totiž také nedílnou součástí toho, jak vypadá reliéf zemského povrchu. Různorodost hornin určuje nehomogenitu zemského povrchu z hlediska hustoty a především odolnosti vůči exogenním vlivům, které jsou zapříčiněny ději odehrávajícími se v atmosféře. Mezi tyto děje zejména patří intenzita srážek, eolická činnost a různé zvětrávání. Působením těchto dějů vznikají erozně-denudační tvary, které určují ráz zemského povrchu resp. krajiny.

Rozhodně by se dalo polemizovat o dalších možných příčinách a faktorech utvářející tvář naší planety, ale cílem této kapitoly je uvědomit si rozmanitost a nesmírnou členitost zemského povrchu, jak v horizontálním, tak i ve vertikálním směru, který se navíc ještě mění v čase. Není tedy prakticky možné na tak nestálé a složité ploše vyjádřit přesnou polohu daného bodu.

4 Způsoby aproximace

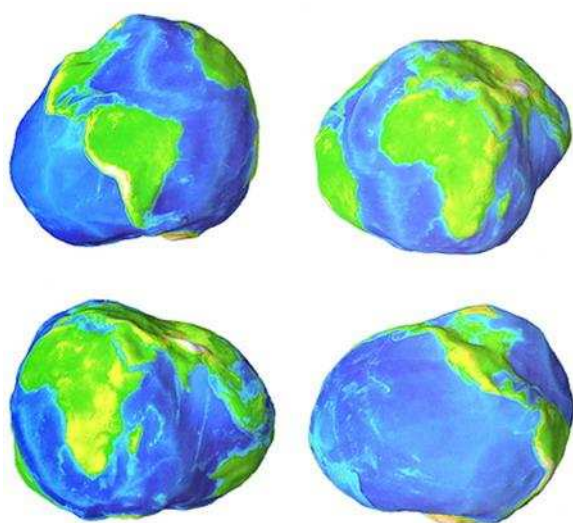
Z předchozí kapitoly vyplývá, že pro vyjádření přesné polohy jednoho či více bodů, je zapotřebí idealizovat tvar zemského tělesa a provést jeho aproximaci. To znamená nahrazení tělesem, které se svým tvarem a velikostí přibližuje skutečnému tvaru Země a je možné ho vyjádřit matematicky. Plocha tohoto tělesa se nazývá referenční plochou. Existuje několik druhů referenčních ploch, které se navzájem liší svými parametry, a tudíž i přesností nahrazení zemského tělesa. Mezi tyto plochy patří geoid, referenční elipsoid, referenční koule, referenční rovina.

4.1 Geoid

Tvar Země podléhá vlivům přitažlivé a odstředivé síly, jejichž výslednicí je tíhová síla. V důsledku nehomogenního rozmístění hmoty se její hodnoty, směr i velikost mění s daným místem na Zemi. Uzavřené plochy, které jsou v každém bodě kolmé ke směru tíhové síly Země, vytvářejí hladinové plochy, které procházejí zvoleným nulovým výškovým bodem klidné hladiny a na které se redukují většinou veškerá měření na zemském povrchu, se nazývají nulové plochy a vytvářejí základní plochu zemského tělesa nazývanou geoid. [1]



Obr. 3: Planeta Země [11]



Obr. 4: Tvar geoidu s mnohonásobně zvýrazněným zvlněním [11]

vyjádření tvaru Země než-li matematické. Už roku 1872 J. B. Listing jej definoval jako „matematicky nedefinovatelnou plochu“, nicméně se jedná o těleso, které nejpřesněji vystihuje tvar Země. Ze složitosti definice vyplývá, že geoid není vhodný k matematickým výpočtům v kartografii a v praxi se takřka nepoužívá. Je nahrazován matematicky jednodušeji definovanými tělesy.

4.2 Referenční elipsoid

V rámci pojmu referenční elipsoid jsou vymezeny dva dílčí pojmy – trojosý referenční elipsoid a rotační referenční elipsoid. Jedná se o tělesa, jejichž tvar lze vyjádřit matematicky v soustavě pravouhlých prostorových souřadnic.

4.2.1 Trojosý referenční elipsoid

Trojosý elipsoid je v pravouhlé soustavě prostorových souřadnic vyjádřen rovnicí:

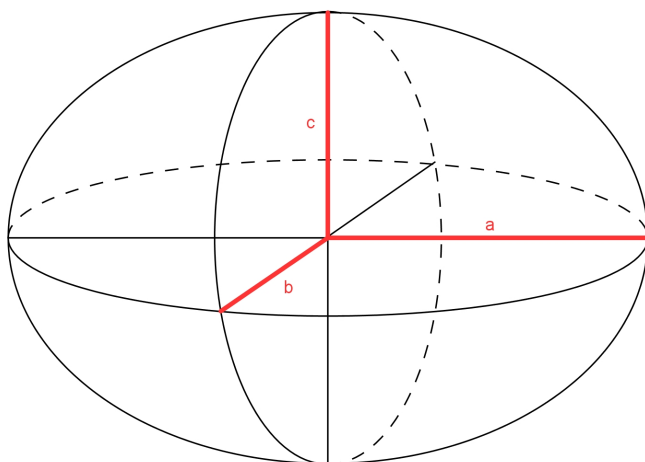
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Rovníková elipsa je tvořena hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b . Vedlejší poloosa c společně s hlavní poloosou a tvoří poledníkovou elipsu. Trojosý elipsoid lze též kromě poloos charakterizovat rovníkovým zploštěním f_R a pólovým zploštěním f_P . Jejich vztah s poloosami vyjadřují tyto rovnice:

$$f_R = \frac{a-b}{a}, \quad f_P = \frac{a-c}{a}.$$

Ačkoli je trojosý elipsoid nejbližší matematickou aproximací vystihující dobře tvar geoidu, v kartografii se nevyužívá především z důvodu nerovnoměrného zploštění, které má za následek, že rovnoběžky tvoří elipsy a navíc poledníky jsou různě dlouhé – poledník ležící v rovině os a a c má jinou délku než poledník ležící v rovině os b a c .

Při tvorbě map se používá jiné těleso – rotační referenční elipsoid. Jeho matematické vyjádření je oproti trojosému elipsoidu jednodušší.



Obr. 5: Trojosý elipsoid

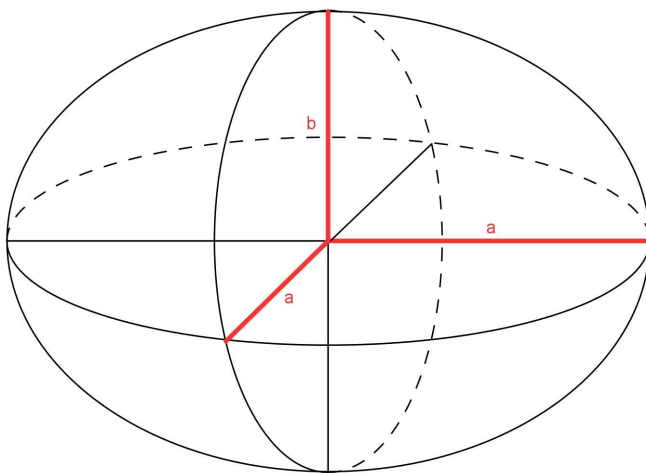
4.2.2 Rotační referenční elipsoid

Toto těleso vzniká rotací elipsy kolem své vedlejší osy a v soustavě pravoúhlých prostorových souřadnic je vyjádřeno rovnicí:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

V důsledku rotace elipsy mají obě dvě rovníkové poloosy stejnou velikost, to znamená, že rovníkem rotačního elipsoidu je kružnice s poloměrem velikosti hlavní poloosy a . Ostatní rovnoběžky také tvoří kružnice a navíc poledníky jsou stejně dlouhé. Kratší vedlejší poloosa b pak leží v ose rotace. K určení velikosti a tvaru rotačního elipsoidu jsou oproti trojosému elipsoidu nezbytné pouze dva parametry – buď poloosy a a b , nebo jedna poloosa a excentricita e , nebo jedna poloosa a zploštění f . Pro tyto parametry platí vztahy:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad f = \frac{a - b}{a}.$$



Obr. 6: Rotační elipsoid

Díky těmto flexibilním možnostem definice má rotační elipsoid široké uplatnění v kartografii a zejména v průběhu 20. století bylo odvozeno hned několik elipsoidů.

Besselův elipsoid, který roku 1841 odvodil F. W. Bessel, se používal i pro mapování našeho území v civilní zeměměřičské praxi. Byl určen na základě počtu

poledníkových oblouků stanovených z deseti různých stupňových měření. Používali ho hlavně další státy střední Evropy k mapování svého území, ale našel i využití v jiných státech. SSSR ho používal až do roku 1942, ale pouze pro svoji evropskou část.

V roce 1924 byl Mezinárodní geodetickou a geofyzikální unií prohlášen za Mezinárodní elipsoid tzv. Hayfordův elipsoid. Už roku 1909 ho odvodil J. F. Hayford a použil k tomu metodu astronomicko-geodetického měření na území USA. Tento elipsoid byl přijat řadou zemí, ačkoli pro střední Evropu je pro velké odchylky prakticky nepoužitelný. Z tohoto důvodu Československo na jeho přijetí nikdy nepřistoupilo.

Tabulka 1: Parametry vybraných rotačních referenčních elipsoidů [1]

Elipsoid	Parametr			
	$a[m]$	$b[m]$	f	e^2
Besselův 1841	6377397,1550	6356078,9633	1:299,152813 = 0,00334277318158	0,00667437223061
Hayfordův 1910	6378388,0000	6356911,9461	1:298,3 = 0,003367003367	0,00672267002233
Krasovského 1940	6378245,0000	6356911,0188	1:297,0 = 0,00335232986926	0,00669342162297
IAG 1967	6378160,0000	6356774,5161	1:298,247167 = 0,00335292371299	0,00669460532856
WGS 1980	6378137,0 ± 2	6356752,4	1:298,257222101 = 0,0035281068	0,00669436
WGS 1984	6378136,0 ± 1	6356752,0	1:298,257 = 0,00335281317	0,00669378

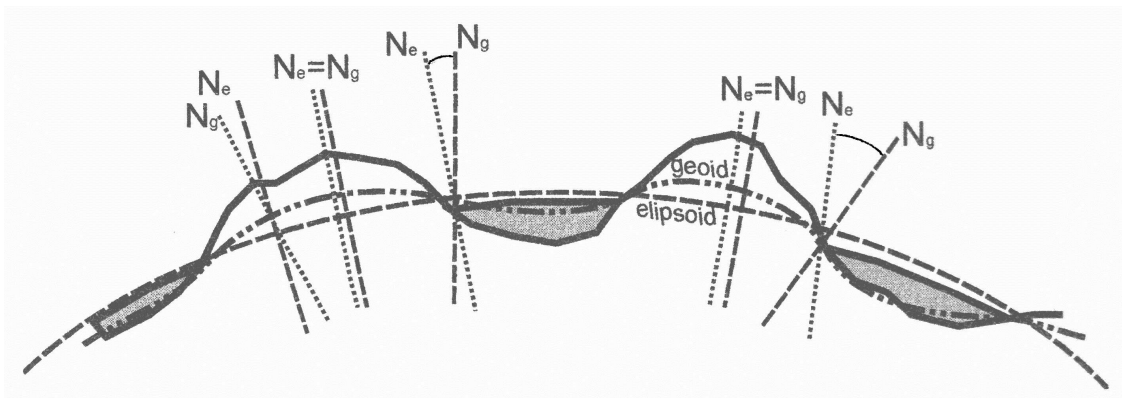
Dále je třeba zmínit Krasovského elipsoid odvozený roku 1940 F. N. Krasovským. O určení tohoto elipsoidu se zasadil především Sovětský svaz, protože pro celkové zobrazení takového rozsáhlého území není ideálně vhodný ani jeden z výše zmíněných elipsoidů. Při určení rozměrů tohoto elipsoidu byla poprvé v historii využita gravimetrická měření a jeho parametry byly stanoveny na základě astronomicko-geografických sítí SSSR, západní Evropy, ale i USA. Od roku 1950 byl zaveden

ve všech socialistických zemích. V Československu se zpočátku používal ve vojenské praxi a roku 1952 byl použit k topografickému mapování našeho státu v měřítku 1:25000.

Pro vědecké práce mezinárodního významu bylo v průběhu 70. let přijato několik elipsoidů – elipsoid geodetického referenčního systému IAG 1967 a referenční elipsoid WGS 1980. Roku 1983 byl vypočten pomocí družicových měření referenční elipsoid WGS 1984, který je dodnes považován za nejpřesnější. Na rozdíl od elipsoidů Besselova, Hayfordova a Krasovského je jeho střed totožný s těžištěm Země a jeho povrch se přimyká ke geoidu s maximální odchylkou 60 metrů. [1] V důsledku snahy dosáhnout maximální aproximace zemského tělesa se rozdíly mezi jednotlivými rotačními elipsoidy postupem času neustále zmenšovaly. Tyto rozdíly se pohybují se v řádu desítek metrů. (viz Tabulka 1)

Hlavní výhodou rotačního referenčního elipsoidu je jeho schopnost vystihnout s minimálními odchylkami skutečný tvar Země pomocí analyticky definovaných vzorců. Proto se používá především při tvorbě přesných topografických map velkých měřítek při použití úhlojevných geodetických zobrazení.

4.2.3 Porovnání geoidu s referenčními elipsoidy



Obr. 7: Řez referenčním elipsoidem a geoidem [1]

Z definice geoidu (viz kapitola 4.1.) vyplývá, že jeho povrch je značně zvlněn. V porovnání s elipsoidem se toto zvlnění projevuje poklesem geoidní plochy pod plochu elipsoidu v oblastech oceánů a v oblastech pevnin naopak zdvihem nad plochu elipsoidu. Výška geoidu nad elipsoidem závisí na tížnicové odchylce, což je úhel svírající normála elipsoidu se směrem tíhové síly. Nejvyšší hodnoty této odchylky se

pohybují mezi 10' - 50', a to ve velehorských oblastech. Obecně lze říci, že větší odchylky jsou zaznamenávány v oblastech pevninských bloků a v oblastech oceánů s velkými rozdíly v hustotě mořské vody.

4.3 Referenční koule

Referenční elipsoid bývá nahrazován referenční koulí především za účelem zjednodušení výpočtů, které jsou na elipsoidu poměrně složité. Referenční koule vystihuje tvar zemského tělesa s menší přesností než referenční elipsoid, proto se používá v případech, kdy tato zmenšená přesnost bude vyhovovat daným účelům.

Pro odvození poloměru referenční koule existuje několik možností. Při geodetických a topografických úlohách se povrch části referenčního elipsoidu převede na referenční kouli s poloměrem R , který je určen ke středu zobrazovaného území resp. bodu dotyku koule a elipsoidu. Nezobrazuje se nijak rozsáhlé území. Jedná se o okrouhlou část zemského povrchu s maximálním poloměrem 200 km. Na takto velké ploše není téměř patrné délkové a plošné zkreslení, a tudíž není potřeba je brát v potaz. Poté se z kulové plochy převádějí příslušné body přímo do zobrazovací roviny. V tomto případě se jedná pouze o nahrazení části referenčního elipsoidu referenční koulí.

Pro méně přesné kartografické úlohy, jakými jsou například konstrukce map malých měřítek ve školních atlasech, je celý referenční elipsoid nahrazován koulí. Poloměr se v tomto případě určuje několika následujícími způsoby [1]:

- a) Za předpokladu, že objem referenční koule je stejný jako objem referenčního rotačního elipsoidu, se poloměr koule R počítá jako geometrický průměr všech poloos elipsoidu:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 b \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{a^2 b}$$

- b) Uvažujeme-li, že povrch referenční koule je stejný jako povrch referenčního rotačního elipsoidu, je poloměr koule R matematicky vyjádřen jako kvadratický průměr všech tří poloos elipsoidu.

$$4\pi R^2 \cong \frac{4}{3}\pi(2a^2 + b^2) \quad \Rightarrow \quad R \cong \sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{3}}$$

- c) Poloměr referenční koule R lze také vypočítat jako aritmetický průměr všech tří poloos rotačního elipsoidu.

$$R = \frac{2a + b}{3}$$

- d) K výpočtu poloměru koule R je možné použít délku kvadrantu Q , tj. čtvrtina délky (obvodu) rovníku, která se rovná délce kvadrantu referenčního elipsoidu.

$$\frac{1}{2}\pi R = Q \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2Q}{\pi}$$

Je zřejmé, že poloměry referenčních koulí pro jednotlivé elipsoidy budou různé. Pohybují se v rozmezí od 6 366 743 m do 6 371 291 m. V české kartografické tvorbě se používá referenční koule, která je odvozena od Krasovského elipsoidu. Rozdíly mezi možnostmi odvození poloměru koule z tohoto elipsoidu ilustruje následující příklad.

Příklad 1

Výpočet poloměru koule R_1 za předpokladu, že objem referenční koule V_k je totožný s objemem referenčního (Krasovského) elipsoidu V_e .

$$V_k = V_e$$

$$\frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

$$R_1 = \sqrt[3]{a^2 b}$$

$$R_1 = \sqrt[3]{6378245,0^2 \cdot 6356911,0188} = 6371125,7 \text{ m}$$

Výpočet poloměru koule R_2 za předpokladu, že povrch referenční koule S_k je shodný s povrchem referenčního (Krasovského) elipsoidu S_e .

$$S_k \cong S_e$$

$$4\pi R_2^2 \cong \frac{4}{3}\pi(2a^2 + b^2)$$

$$R_2 \cong \sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{3}}$$

$$R_2 \cong \sqrt{\frac{2 \cdot 6378245,0^2 + 6356911,0188^2}{3}} = 6371141,6 \text{ m}$$

Výpočet poloměru koule R_3 za předpokladu, že je roven aritmetickému průměru všech tří poloos Krasovského elipsoidu.

$$R_3 = \frac{2a + b}{3}$$

$$R_3 = \frac{2 \cdot 6378245,0 + 6356911,0188}{3} = 6371133,7 \text{ m}$$

Poloměry referenčních koulí R_1 , R_2 a R_3 se liší pouze o několik metrů – maximálně o 16 metrů. V podstatě tedy nezáleží na tom, jaký z výše uvedených způsobů pro odvození poloměru referenční koule bude použit.

4.4 Referenční rovina

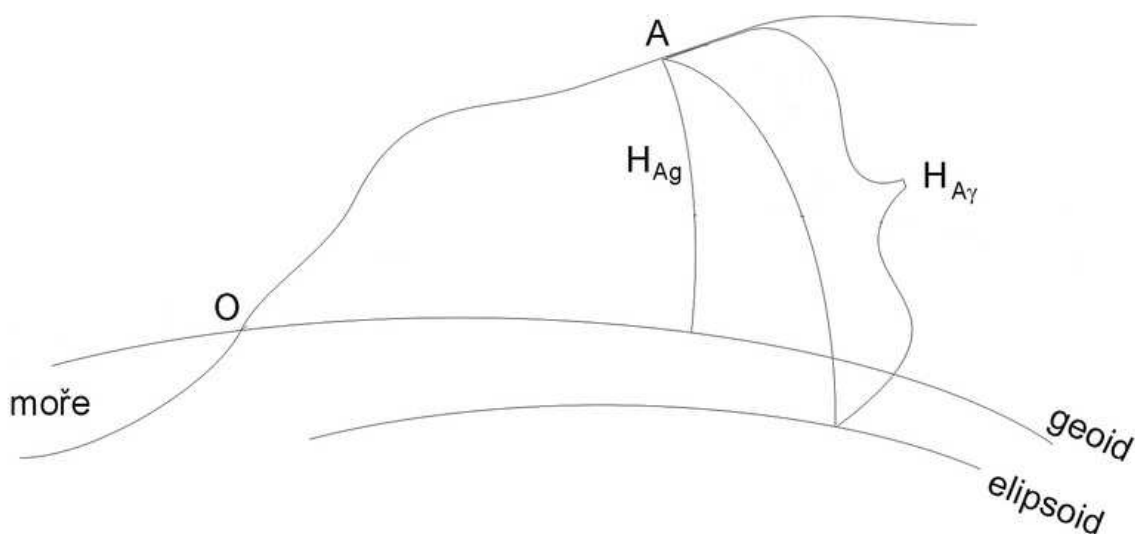
Referenční rovina má velmi podobné vlastnosti jako elipsoid a používá se při kartografických a geodetických úlohách pro zobrazení území malého rozsahu s maximální výměrou 700 km^2 , což zhruba odpovídá okrouhlému území s poloměrem 15 km. Na takto velké ploše není nutné uvažovat délkové a plošné zkreslení, tudíž je samotný zemský povrch brán jako rovina a zakřivený kulový tvar zemského tělesa se nebere v úvahu.

5 Určování nadmořské výšky

Nadmořská výška je vzdálenost daného bodu od nulové hladinové plochy, tj. střední hladina moře, která prochází zvoleným nulovým výškovým bodem a je měřena podél svislice. Nulovou hladinovou plochou je rozuměna jakákoli referenční plocha (kromě referenční roviny) ze zmíněných v předchozí kapitole.

V závislosti na volbě nulové hladinové (referenční) plochy se nadmořská výška odečítá následujícími způsoby:

- a) Pokud zvolíme za nulovou hladinovou plochu geoid s konstantním tíhovým potenciálem, definujeme pravou ortometrickou (geoidickou) výšku H_{Ag} bodu A jako délku tížnice mezi geoidem a tímto bodem. [8] Z této definice vyplývá, že svislice bude deformována ve směru siločar tíhového pole Země.
- b) Zvolíme-li za nulovou hladinovou plochu elipsoid a definujeme-li výšku bodu A jako délku tížnice mezi elipsoidem a tímto bodem, získáme tzv. normální ortometrickou výšku $H_{A\gamma}$. Při výpočtu normální ortometrické výšky se namísto skutečných hodnot tíhového zrychlení použijí normální hodnoty tíhového zrychlení v poloviční výšce bodu a namísto skutečné tíže hodnoty normálního tíhového zrychlení pro body nivelačního pořadu. [8]



Obr. 8: Výška bodu A na geoidem a elipsoidem [8]

- c) Pokud za nulovou hladinovou plochu bude považována plocha koule, svislice bude přímka kolmá k této ploše v daném bodě. Nadmořská výška pak odpovídá délce úsečky (vzdálenosti bodu od kulové plochy) na této přímce.

Hodnota nadmořské výšky může být ovlivněna i volbou nulového výškového bodu. Následující tabulka uvádí použité výškové systémy na území ČR. Všechny využívají normální ortometrické výšky.

Tabulka 2: Přehled výškových systémů použitých na území ČR [8]

Výškový systém	Časové období	Nulový výškový bod	Výška výchozího bodu pro ČR - Lišov
Jaderský - Lišov	1875 - 1942	Terst, Jaderské moře	565,1483 m
Normal Null	1938 - 1945	Amsterdam, Severní moře	564,8997 m
Baltský - B68 odečteno 0,68 m od Jaderského	1945 - 1957	Kronšadt, Baltské moře	564,4683 m
Baltský - B46 odečteno 0,46 m od Jaderského	1955 - 1957 (dočasně)	Kronšadt, Baltské moře	564,6883 m
Baltský - po vyrovnaní s ostatními socialistickými státy	1957 - nyní	Kronšadt, Baltské moře	564,7597 m

6 Souřadnicové systémy

Pro orientaci na referenční ploše i na jejím kartografickém obraze resp. mapě slouží souřadnicové systémy. Hlavní úkolem je jednoznačné stanovení polohy libovolné dvojice vzájemně si odpovídajících bodů, a to s pomocí geometrických prostředků, kdy každý zvolený bod je dán dvojicí souřadnic.

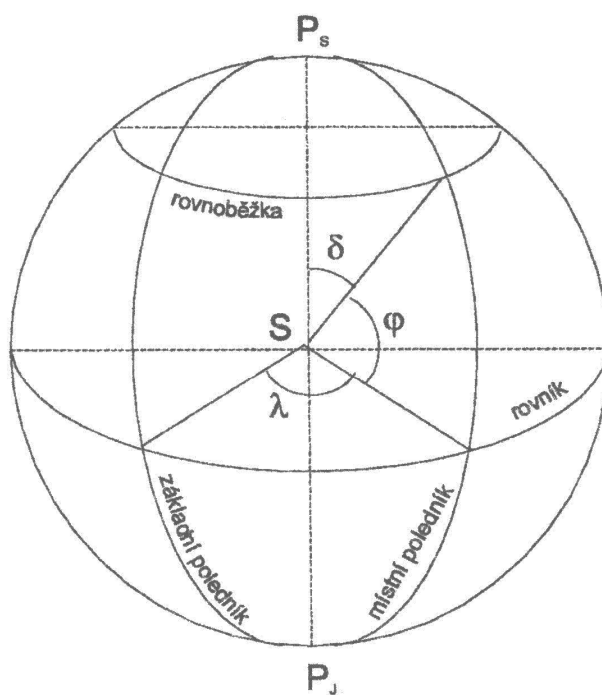
Následující text se zabývá nejpoužívanějšími souřadnicovými systémy na referenční kouli.

6.1 Zeměpisné souřadnice

Souřadnice daného bodu je dána zeměpisnými souřadnicemi, tzn. zeměpisnou šířkou a zeměpisnou délkou.

Zeměpisná šířka φ je úhel, který svírá rovina rovníku s normálou ke kulové referenční ploše, která je myšleně sestrojena v daném bodě. Její hodnota je měřena od rovníku k pólům, tudíž se pohybuje v rozmezí 0° až 90° . Na severní polokouli se určuje severní zeměpisná šířka (s. z. š.) s kladným znaménkem a na jižní polokouli jižní zeměpisná šířka (j. z. š.) se záporným znaménkem.

Zeměpisná délka λ je úhel, který svírá rovina základního poledníku s rovinou místního poledníku. Místní poledník prochází hledaným bodem a za základní (nultý) poledník je v současnosti považován místní poledník hvězdárny Old Royal Observatory v Greenwichi v Londýně. Celkově se její hodnota pohybuje v intervalu od -180° do 180° . Od základního poledníku východním směrem se měří východní zeměpisná délka a



Obr. 9: Zeměpisné souřadnice [1]

nabývá hodnot 0° až 180° . Na západ od základního poledníku se měří západní zeměpisná délka a nabývá hodnot 0° až -180° .

6.2 Prostorové pravoúhlé souřadnice

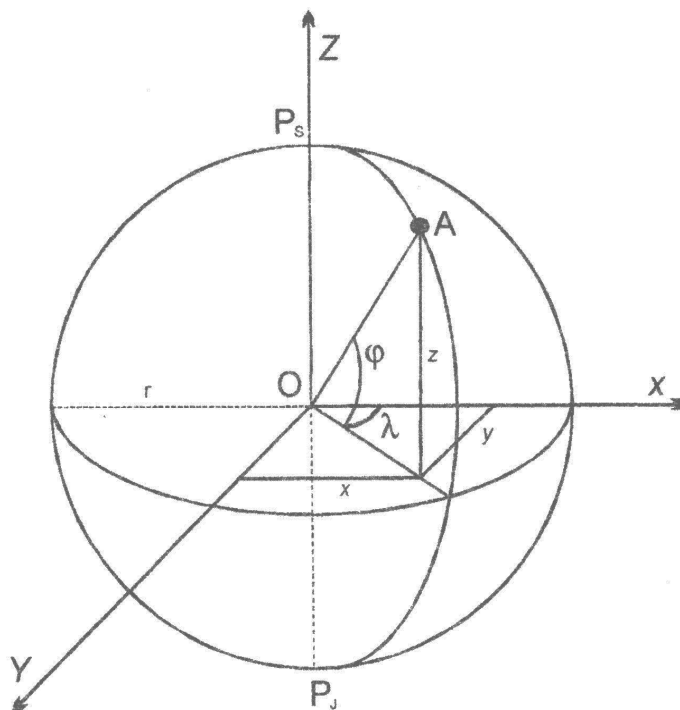
Prostorové pravoúhlé souřadnice se používají pro geodetické a geofyzikální účely s využitím umělých družic Země. Proto jejich význam vzrostl teprve nedávno, dříve se používaly zřídka. Jsou definovány počátkem O , který leží ve středu referenční koule, osou X , jež je průsečnicí roviny rovníku s rovinou základního poledníku, osou Y ležící v rovině rovníku a svírající s osou X úhel 90° a osou Z ,

která leží v zemské ose a tím je kolmá k rovině rovníku, tj. k ose X i ose Y . Za předpokladu, že r je poloměr referenční koule, jsou pravoúhlé souřadnice bodu $A = [x; y; z]$ vzhledem k zeměpisným souřadnicím dány rovnicemi:

$$x = r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$y = r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda$$

$$z = r \cdot \sin \varphi \quad \varphi \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle, \lambda \in \langle -180^\circ; 180^\circ \rangle$$



Obr. 10: Prostorové pravoúhlé souřadnice [1]

V mapách neboli do roviny rozvinutých zobrazovacích ploch, které vytvářejí kartografický obraz odvozený z referenční koule, se používají rovinné souřadnice.

6.3 Pravoúhlé rovinné souřadnice

Pravoúhlé rovinné souřadnice udávají kolmé vzdálenosti od souřadnicových os x a y , jimiž jsou definovány. Osa x leží v obrazu rovníku a osa y v obrazu základního poledníku. Z toho vyplývá, že počátek O leží v průsečíku obrazů rovníku a základního poledníku. Pravoúhlé souřadnice se nejčastěji používají pro válcová a obecná kartografická zobrazení. (viz kapitola 8)

6.4 Rovinné polární souřadnice

K určení rovinných polárních souřadnic musí být definovány počátek V , což je obecně konstrukční pól a nejčastěji jím bývá bod dotyku či obraz zemského pólu a dále osa x a osa y , která leží v obrazu základního poledníku. Poté se rovinnými polárními souřadnicemi rozumí průvodič daného bodu ρ resp. vzdálenost tohoto bodu od počátku V a úhel průvodiče ε , který se nachází mezi průvodičem ρ a osou x . Tyto souřadnice se používají při azimutálních a kuželových zobrazeních. (viz kapitola 8)

Za předpokladu, že počátky pravoúhlých a polárních rovinných souřadnic jsou totožné, lze vztah mezi nimi vyjádřit rovnicemi:

$$x = \rho \cdot \cos \varepsilon$$

$$y = \rho \cdot \sin \varepsilon \quad \rho \in \langle 0; +\infty \rangle, \quad \varepsilon \in \langle -180^\circ; 180^\circ \rangle$$

7 Kartografické zkreslení

Při kartografickém zobrazení, kdy je převáděna zeměpisná síť referenční plochy o daném poloměru křivosti (koule, elipsoid) do roviny zobrazovací plochy (mapy), dochází ke zkreslení. To znamená, že není možné vytvořit mapu, která by po všech stránkách tvarově odpovídala svému skutečnému obrazu. Z geometrického hlediska lze vymezit tři aspekty, které se deformují - délky, plochy a úhly.

7.1 Délkové zkreslení

Délkové zkreslení je definováno jako poměr délkového segmentu na zobrazovací ploše k jeho obrazu na referenční ploše. Hodnota délkového zkreslení závisí nejen na poloze bodu, z kterého délkový segment vychází, ale i na jeho směru. K určení délkového zkreslení je tedy zapotřebí dvou základních směrů - poledníkového (k_p) a rovnoběžkového (k_r). Kartografická zobrazení, která v daném směru nezkreslují délky, se nazývají délkojevná (ekvidistantní).

Nutno podotknout, že délkové zkreslení je nadřazené dvěma následujícím zkreslením, k jejichž určení jsou potřeba délkové parametry.

7.2 Plošné zkreslení

Plošné zkreslení je dáno poměrem plošného elementu na zobrazovací ploše k jeho obrazu na referenční ploše, resp. poměrem obsahu elipsy (zkresleného kruhu) v mapě ku obsahu kruhu na referenční ploše. V praxi to znamená, že k výpočtu těchto obsahů je nutné použít délková zkreslení v poledníkovém a rovnoběžkovém směru, kdy platí $k_p \cdot k_r = 1$. Kartografická zobrazení nezkreslující plochy se nazývají plochojevná (ekvivalentní) a kladou důraz na vzájemnou srovnatelnost velikostí různých území.

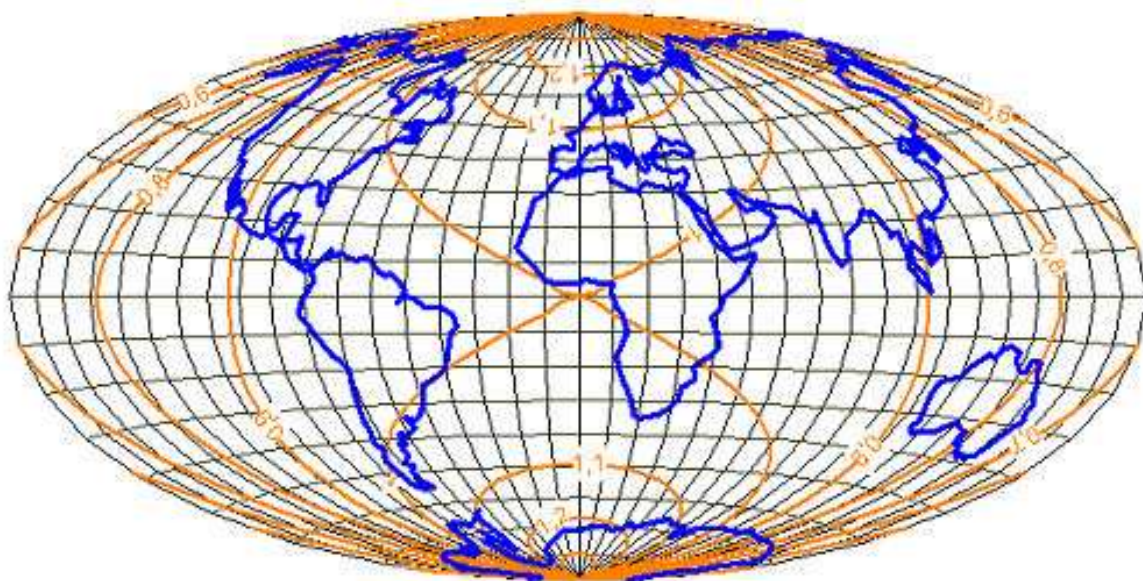
7.3 Úhlové zkreslení

Úhlové zkreslení je chápáno jako rozdíl úhlu mezi dvěma soustavami křivek, tj. zeměpisnou sítí na referenční ploše a jejím obrazem na mapě. Úhlojevná (konformní) zobrazení nezkrslují úhly, a proto nachází využití v topografii a v námořní a letecké navigaci. Při výpočtech zkreslení úhlů se vychází z předpokladu, že $k_p = k_r$.

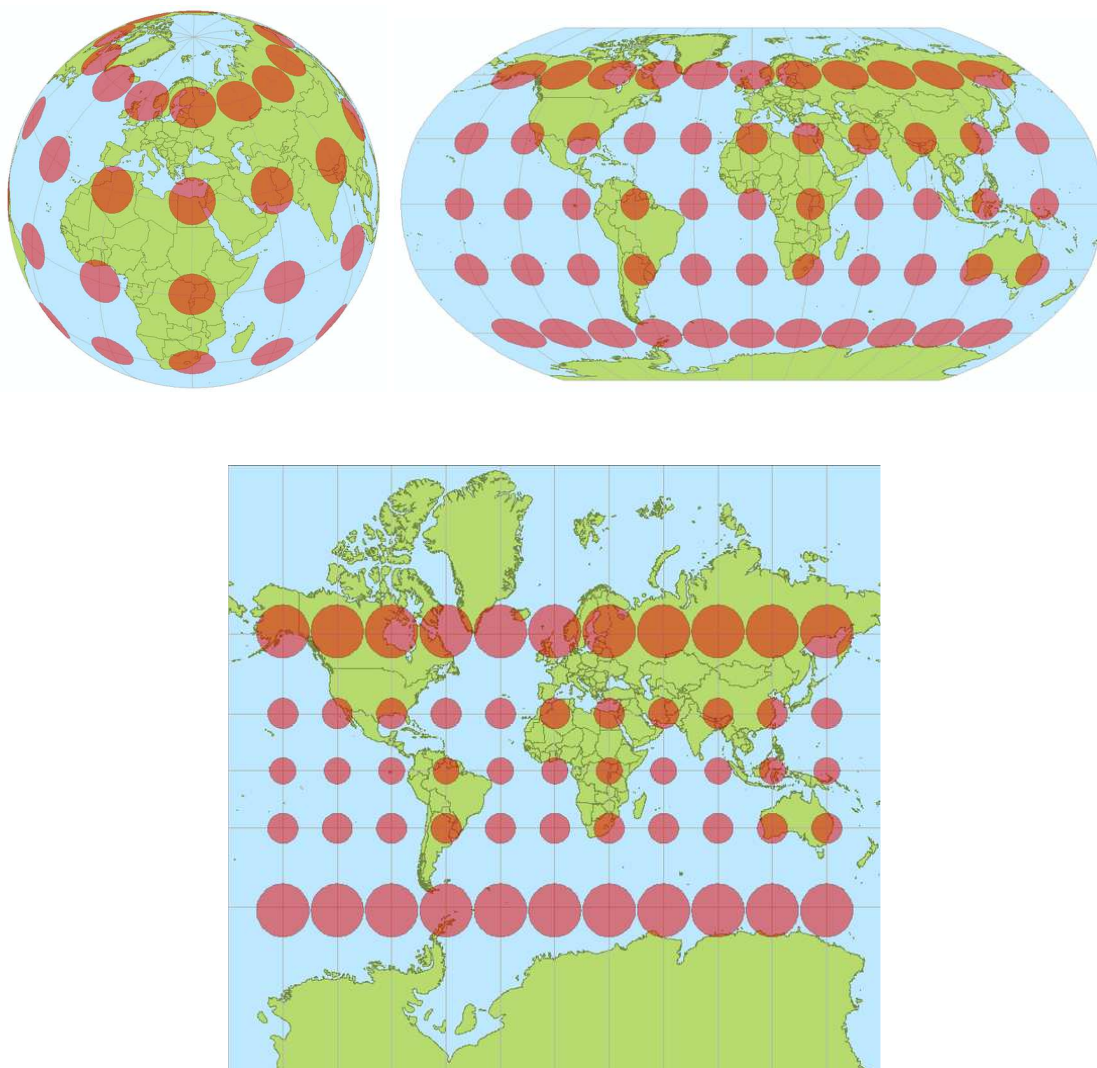
Plošné a úhlové zkreslení stojí ve vzájemném protikladu, tzn., že v plochojevných mapách dochází k velkému zkreslení úhlů a stejně tak v úhlojevných mapách dochází k velkému zkreslení ploch. Proto se často hledá kompromis mezi plošným i úhlovým zkreslením, aby byla zachována transparentnost mapy. Tím vzniká kartografické zobrazení, které se nazývá vyrovnávací (kompenzační).

7.4 Tissotova indikatrix

Na mapě se tedy projevují všechny tři typy zkreslení zároveň. Na celé ploše mapy zkreslení dosahuje různých hodnot, avšak se tyto hodnoty mění kontinuálně bod od bodu. Izolinie, které spojují body se stejnou hodnotu zkreslení, se nazývají ekvideformáty.



Míru kartografického zkreslení je možno v zeměpisné síti názorně vyznačit pomocí tzv. Tissotových indikatrix. Princip tohoto vyznačení spočívá v rozmístění kružnic v typických místech referenční plochy, která je následně převedena do roviny plochy zobrazovací. Poté se kružnice vykreslená na referenční ploše zobrazí buď opět jako kružnice (jiné velikosti) anebo jako elipsa. Ze vzájemné polohy a velikosti těchto geometrických útvarů lze odvodit a určit velikost zkreslení.



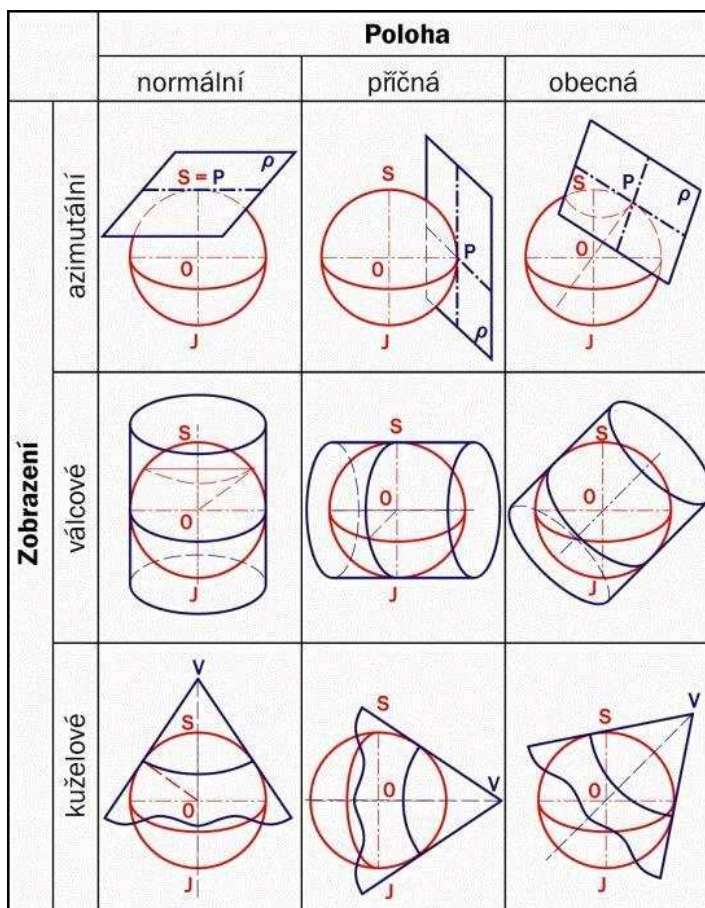
Obr. 12: Ukázka Tissotových indikatrix [12]

8 Kartografická zobrazení

Způsob, kterým je každému bodu na referenční ploše přiřazen právě jeden bod na zobrazovací ploše, se nazývá kartografické zobrazení. Těchto způsobů existuje nepřeberné množství. V podstatě se jedná o funkci, která svým předpisem jednoznačně matematicky vyjadřuje vztah mezi souřadnicemi bodů na referenční a zobrazovací ploše.

Podle použitého typu zobrazovací plochy se kartografická zobrazení dělí na azimutální, válcová, kuželová a obecná. U azimutálního kartografického zobrazení je zobrazovací plochou rovina, u válcového a kuželového se používají pláště válce resp. kužele a u obecného kartografického zobrazení se kombinuje více zobrazovacích ploch dohromady.

V souladu s nejpřesnějším vyjádřením zobrazení zemského povrchu nebo jeho části se zobrazovací plochy při konstrukci map k referenčním plochám přiřazují v různých polohách. Celkem se rozlišují tři polohy, a to poloha normální (polární), kdy osa zobrazovací plochy je shodná s osou referenční plochy, tj. zemskou osou. Pokud osa zobrazovací plochy leží v rovině rovníku, jedná se o polohu příčnou (transversální). Poslední polohou zobrazovací plochy je poloha šikmá (obecná), přičemž osa sice



Obr. 13: Kartografická zobrazení [9]

prochází středem referenční plochy, ale v jiném směru než u polohy normální a příčné.

Na základě tohoto rozdělení kartografických zobrazení lze analogicky rozdělit i sestavené mapy vykazující určité základní konstrukční vlastnosti, které jsou zejména

patrné v podobě zeměpisné sítě, tedy obrazů poledníků a rovnoběžek na zobrazovací ploše. Zaleží ještě na zvolené projekci, ale princip je stejný.

8.1 Azimutální mapy

Mezi nejpoužívanější projekce při tvorbě azimutálních map patří gnómonická, stereografická a ortografická projekce. Pokud je zobrazovací plocha v poloze normální, tak u všech třech zmíněných projekcí obrazy poledníků vycházejí z jednoho bodu, tj. pólu, a obrazy zeměpisných rovnoběžek tvoří soustředné kružnice se středem v pólu. Proto zobrazovací rovnice vycházejí z rovinných polárních souřadnic, kdy počátek leží v pólu a jedna z os v obrazu základního poledníku.

V případě gnómonické se průvodiče odpovídajících si bodů promítají ze středu Země, tudíž v normální poloze nelze zobrazit rovník, protože se promítá do nekonečna. Při umístění zobrazovací plochy v poloze příčné nebo šikmé se poledníky stále zobrazují jako přímky, ale rovnoběžky se zobrazují jako kuželosečky nebo jejich části. Zkreslení narůstá od pólů směrem k rovníku a stejně tak narůstají vzdálenosti rovnoběžek od středu mapy.

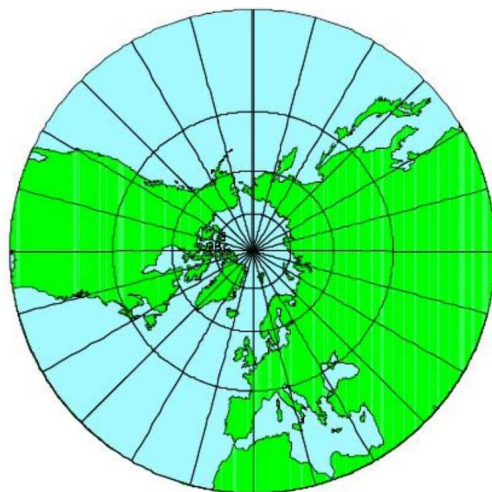
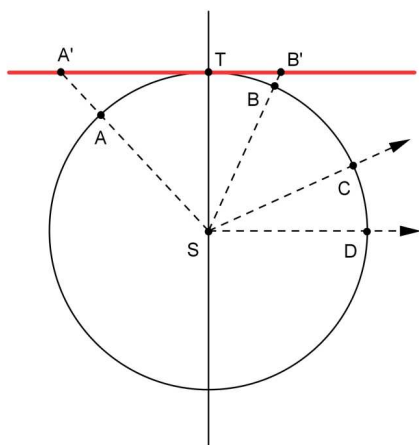
Stereografická projekce je promítání z bodu, který je protilehlý bodu dotykovému. Vzdálenosti rovnoběžek se od středu mapy postupně zvětšují. Je možné v normální poloze zobrazit rovník, který má dvojnásobný poloměr, než je poloměr Země.

U ortografické projekce se jedná o projekci z nekonečně vzdáleného bodu. V příčné poloze se poledníky jeví jako části elips a zeměpisné rovnoběžky jako rovnoběžné přímky, v šikmé poloze obojí tvoří elipsy. Při této projekci lze zachytit maximálně jednu polokouli, na jejímž obrazu se vzdálenosti mezi rovnoběžkami rychle zmenšují směrem od středu k okrajům mapy.

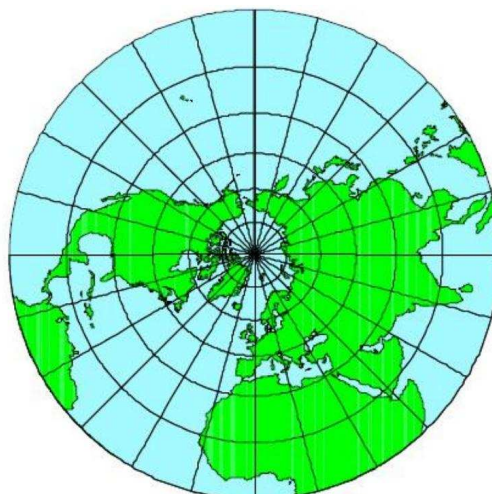
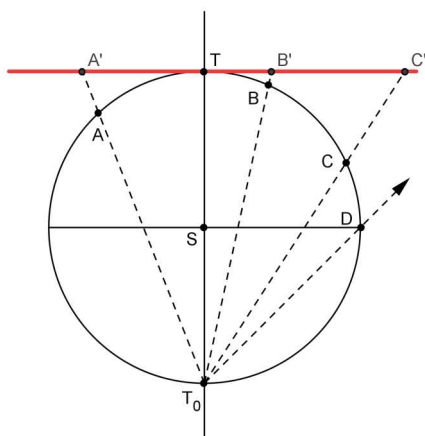
Zobrazovací plochou azimutálních map je rovina, a tak je zřejmé, že nelze pomocí nich zobrazit celý svět za použití jakékoli projekce, proto se používá zejména pro zobrazení pólu a polárních oblastí.

Obr. 14: Projekce u azimutálního zobrazení - a) gnómonická, b) stereografická, c) ortografická [13]

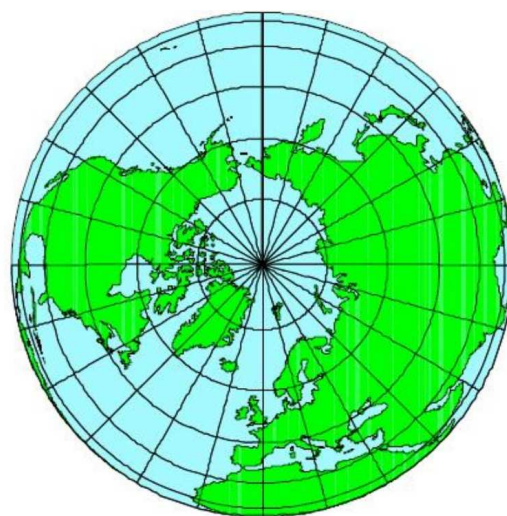
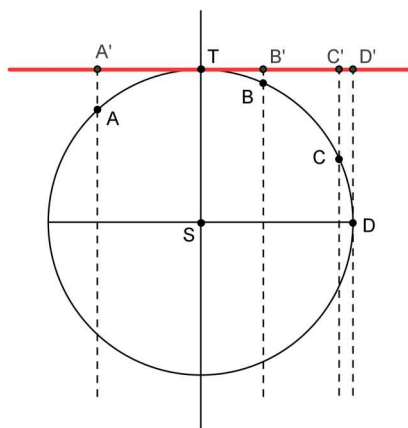
a)



b)



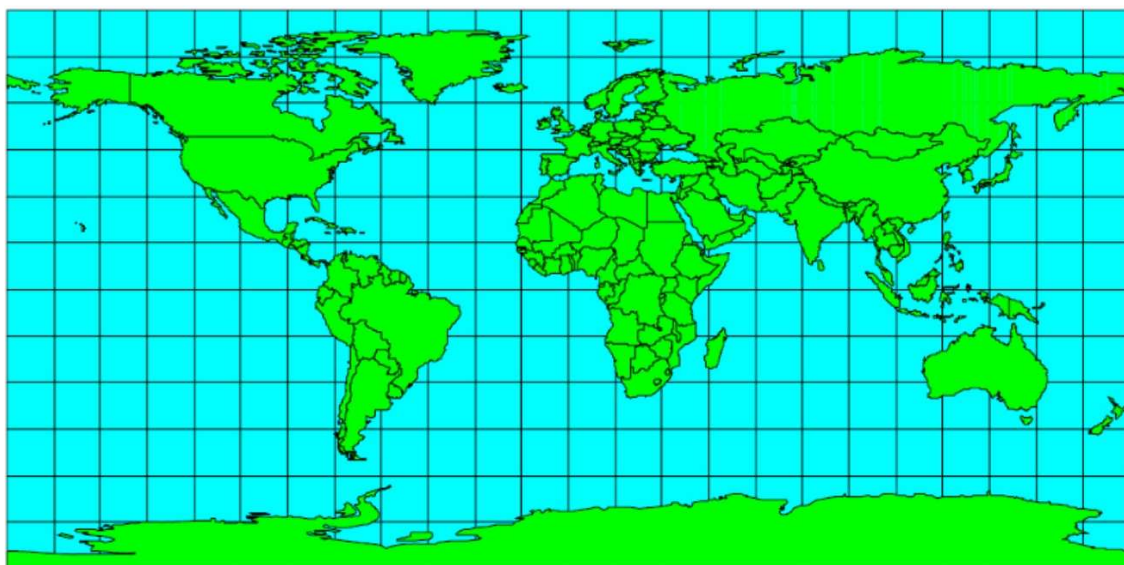
c)



8.2 Válcové mapy

Pro určení bodu se u válcových map používají pravoúhlé rovinné souřadnice, kdy osa x je totožná s obrazem rovníku a osa y s obrazem základního poledníku. V normální poloze pak zeměpisné rovnoběžky vytvářejí úsečky rovnoběžné s osou x a zeměpisné poledníky tvoří úsečky rovnoběžné s osou y a tím tak tvoří pravidelnou pravoúhlou zeměpisnou síť. V příčné a šikmé poloze je zeměpisná síť tvořena křivkami, jejichž matematické vyjádření je velmi složité. Z toho vyplývá, že v těchto polohách se využívá minimálně. Válcové mapy můžeme dále rozdělit na mapy vytvořené tečným válcem nebo sečným válcem. Plášť tečného válce se ovíjí kolem referenční plochy a dotýká se jí v tečné kružnici, zatímco plášť sečného válce protíná referenční plochu ve dvou sečných kružnicích.

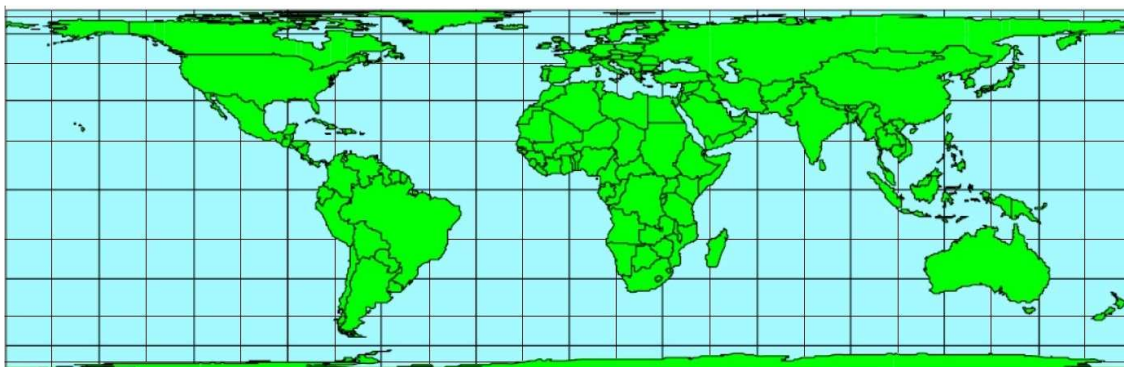
Nejmenší zkreslení je v oblasti dotykové (sečné) kružnice. S narůstající vzdáleností směrem k pólům se především zvětšuje úhlové zkreslení (zobrazení pólů – viz kapitola 8.1.), což je nedostatek řady válcových zobrazení, která byla odvozena. Mezi taková zobrazení patří Marinovo, Lambertovo či Behrmannovo. Jedním z mála válcových zobrazení, které sice na úkor plošného zkreslení zachovává úhly, je Mercatorovo.



Obr. 15: Marinovo válcové zobrazení [13]

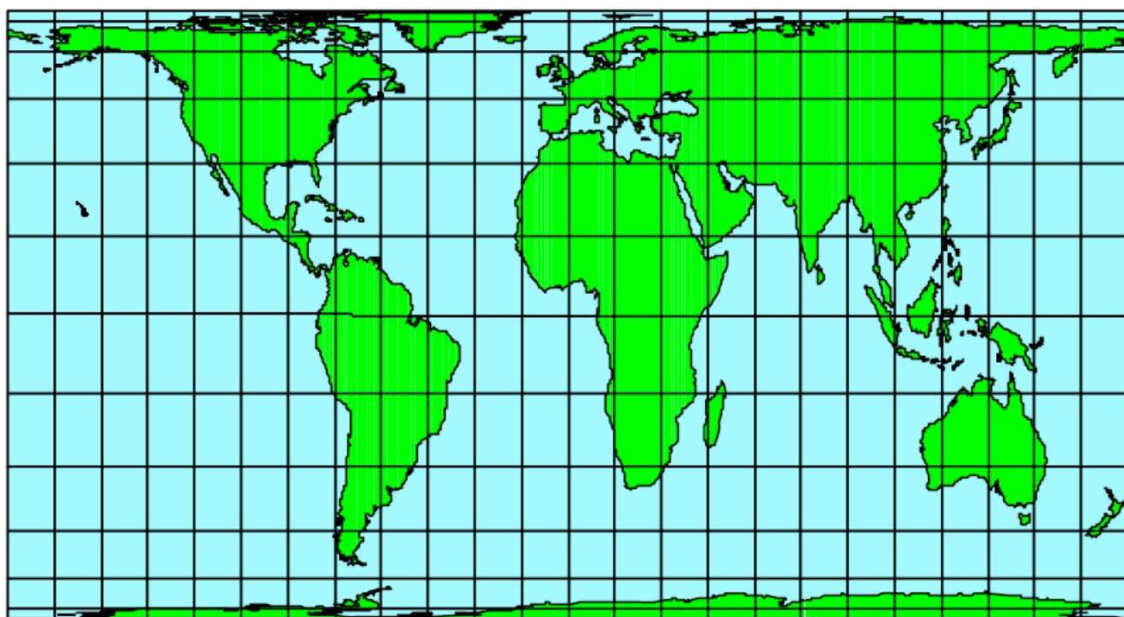
Marinovo zobrazení odvodil Marinos z Tyru roku 120. Někdy bývá nazýváno jako čtvercové zobrazení a to proto, že obrazy zeměpisných rovnoběžek a poledníků

tvoří čtvercovou síť. K jeho konstrukci se používá tečný válec v normální poloze a je délkojevné (viz kapitola 7) podél rovníku a poledníku. Z Marinova zobrazení byla později odvozena i další zobrazení. Například Cassiniho-Soldnerovo zobrazení, které vzniklo roku 1745, bylo z části použito pro vytvoření katastrálních map českých zemí v 19. století.



Obr. 16: Lambertovo válcové zobrazení [13]

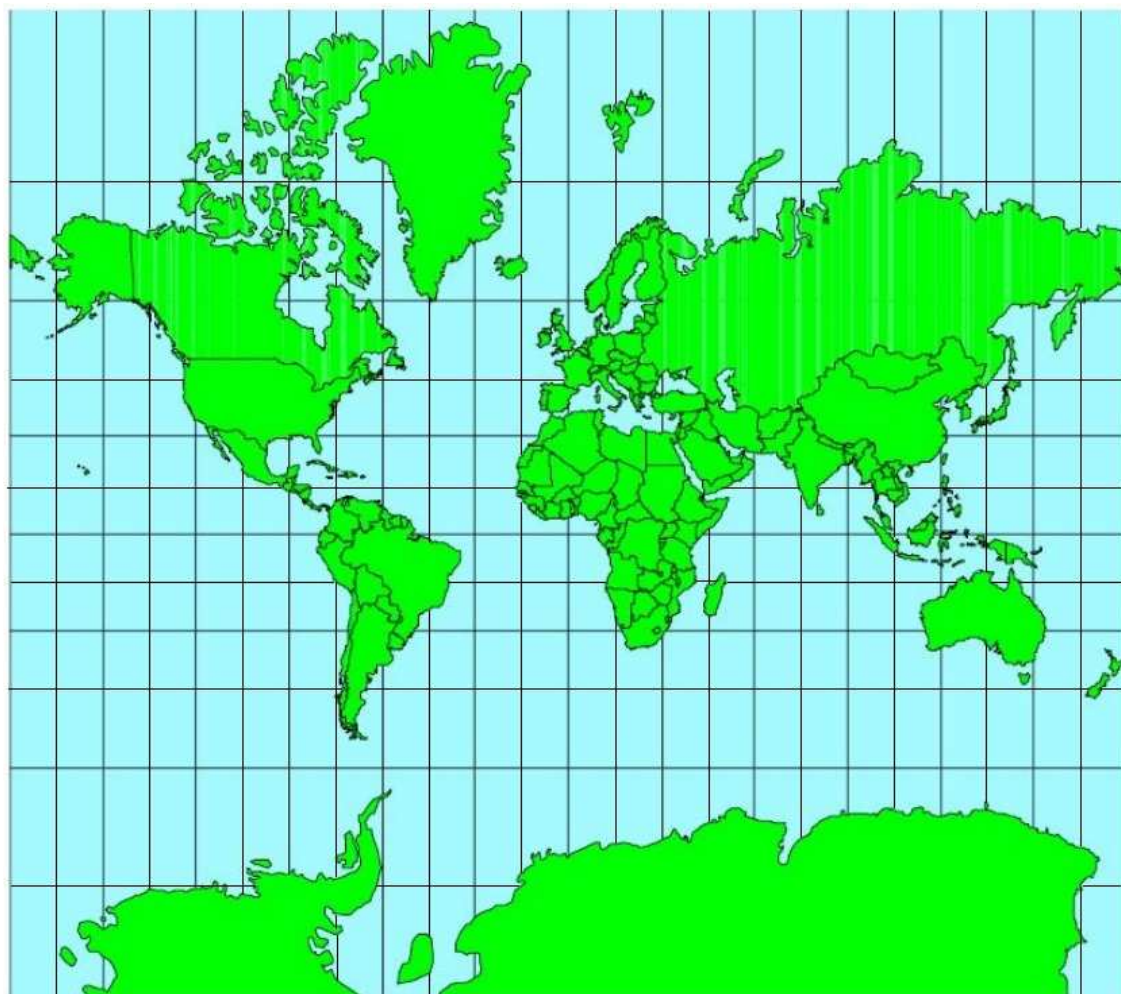
Johann Heinrich Lambert roku 1772 odvodil Lambertovo válcové zobrazení. Jedná se o ortografickou projekci na plášť tečného válce v normální poloze. Toto zobrazení je plochojevné a podél rovníku délkojevné. (viz kapitola 7) Intervaly mezi jednotlivými zeměpisnými rovnoběžkami se směrem k pólům zmenšují, čímž dochází k velkému úhlovému zkreslení v polárních oblastech.



Obr. 17: Behrmannovo válcové zobrazení [13]

Behrmannovo válcové zobrazení, odvozené roku 1909 Walterem Behrmannem, vychází z Lambertova a je mu velmi podobné. Hlavní rozdíl oproti Lambertovu zobrazení je, že se jedná o projekci na sečný válec, kdy sečnými kružnicemi jsou zeměpisné rovnoběžky o souřadnicích 30° s. z. š. a 30° j. z. š. Podél nich se zachovává délkojevnost, plochojevnost je zachována na celé mapě a úhlové zkreslení je o něco menší než Lambertova zobrazení.

Roku 1569 Gerhard Mercator odvodil své Mercatorovo válcové zobrazení. Narozdíl od výše zmíněných válcových zobrazení je toto zobrazení úhlojevné, ale v důsledku toho dochází k velkému zkreslení ploch. Vzniklo pro potřeby námořní navigace a později z něj bylo odvozeno válcové zobrazení UTM (Universal Transverse Mercator), které nachází využití při tvorbě geodetických map.



Obr. 18: Mercatorovo válcové zobrazení [13]

Navzdory velkému úhlovému zkreslení, kvůli kterému nelze zobrazit světové póly, je možné pomocí válcových map zobrazit víceméně celý svět, proto řadu z nich nalezneme i ve školních atlasech.

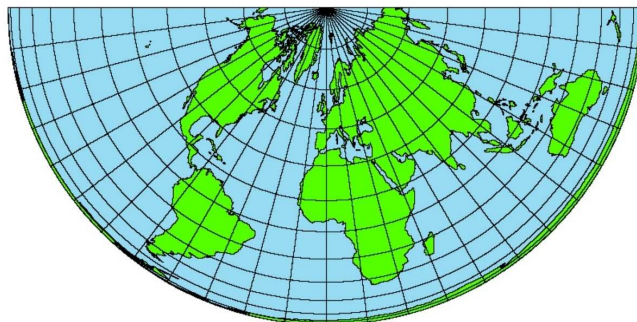
8.3 Kuželové mapy

Zobrazovací plochou je plášť kužele, který je, podobně jako u válcového zobrazení, součástí buď tečného nebo sečného kužele. V normální poloze zeměpisné rovnoběžky tvoří soustavu soustředných kružnic se středem v obrazu pólu, z nichž jedna (dotyková kružnice) nebo dvě (sečné kružnice) zachovávají délku. Podobně jako u azimutálních map poledníky tvoří trs polopřímek, jejichž počáteční bod je totožný s obrazem pólu. V příčné poloze se nepoužívá.

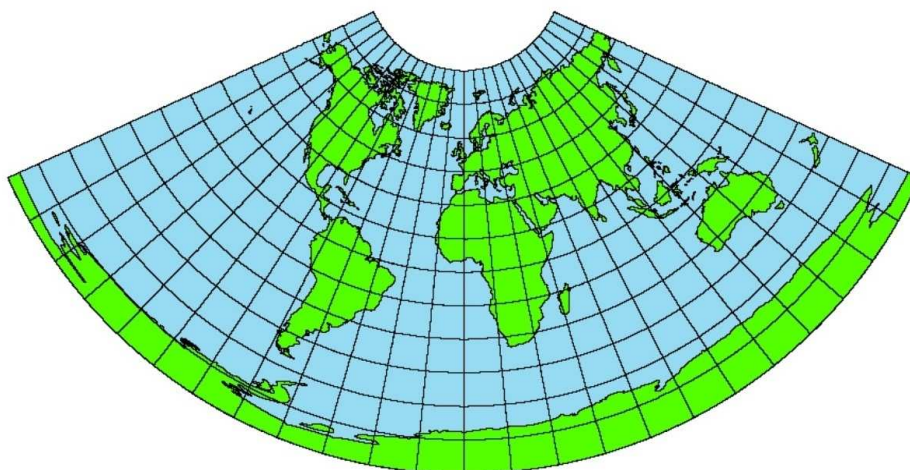
V šikmé poloze se v praxi používá pro zobrazení protáhlých území ve středních zeměpisných šířkách, kdy dotyková, resp. sečná, kružnice je prokládána mapovaným územím za účelem minimálního zkreslení. S narůstající vzdáleností od těchto kružnic narůstá i zkreslení.

Jednotlivé body jsou určeny na základě zobrazovacích rovnic udávajících jejich polární rovinné souřadnice. Jedna z os leží v obrazu základního poledníku a počátek soustavy souřadnic leží v kartografickém pólu, tj. obraz vrcholu kužele, nebo přímo v obrazu samotného zemského pólu.

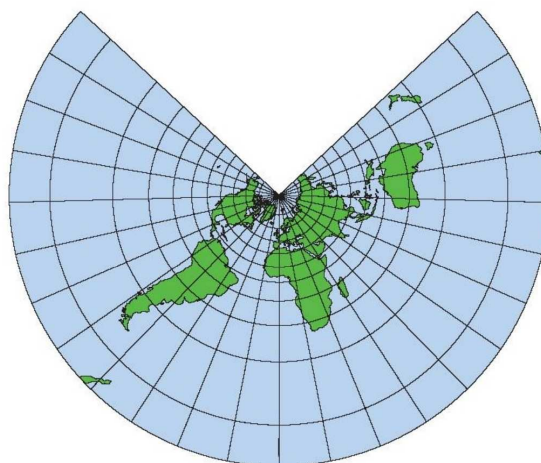
Mezi zástupce kuželových zobrazení se řadí Ptolemaiovo, Lambertovo nebo Gaussovo zobrazení. Gaussovo zobrazení se používá v geodézii či letectví a je podle něj vytvořena Mezinárodní aeronavigační mapa v měřítku 1:1000000. Ptolemaiovo zobrazení je hojně využíváno při tvorbě geografických map středních a malých měřítek.



Obr. 19: Lambertovo kuželové zobrazení [13]



Obr. 20: Ptolemaiovo kuželové zobrazení [13]



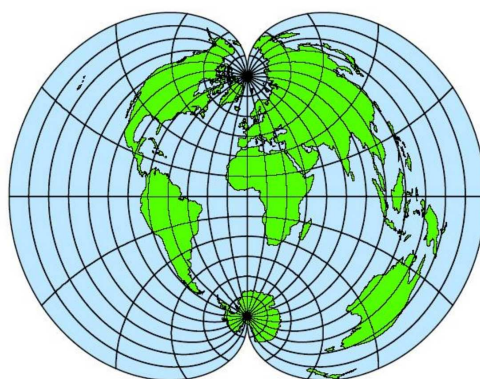
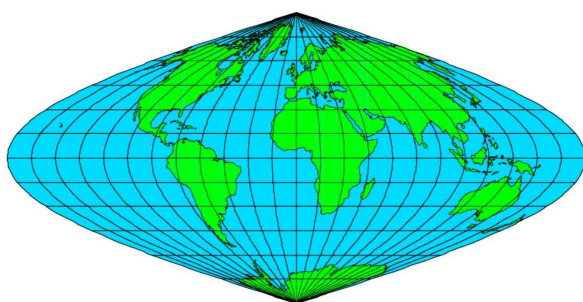
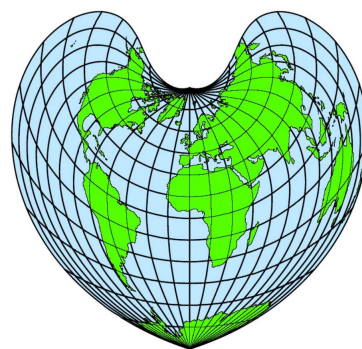
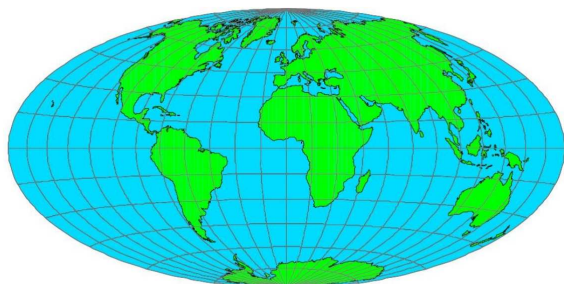
Obr. 21: Gaussovo kuželové zobrazení [13]

8.4 Obecné mapy

U obecných map zobrazovací plochou nemusí být rovina, plášť válce ani plášť kužele. Transformace referenční plochy do roviny se může zaprvé provést matematicky nebo geometricky bez toho, aniž by se musela použít jakákoli z uvedených jednoduchých zobrazovacích ploch, anebo druhou možností je naopak kombinace těchto ploch.

Nejčastěji se používá v normální poloze pro zobrazení celého světa, kdy obrazy rovníku a základního poledníku jsou navzájem kolmé.

Obr. 22: Ukázky obecných zobrazení [13]



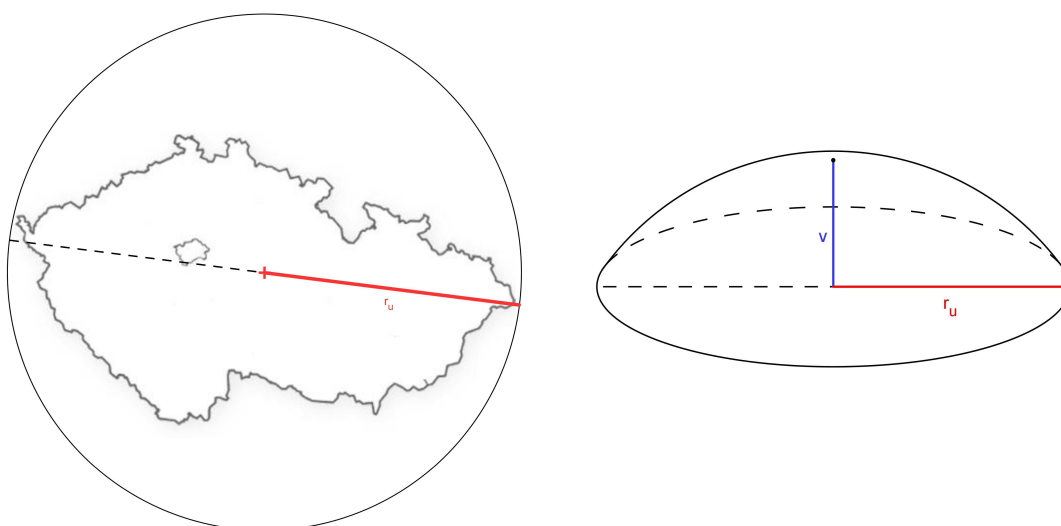
9 Zakřivení Země na území České republiky

Dosud jsme se zabývali problematikou určování tvaru Země a mapování jejího povrchu v globálním měřítku. Z tohoto pohledu je velmi těžké si uvědomit velikost naší planety. Následující příklad demonstruje tyto parametry z pohledu menšího měřítka - na území České republiky.

Příklad 2

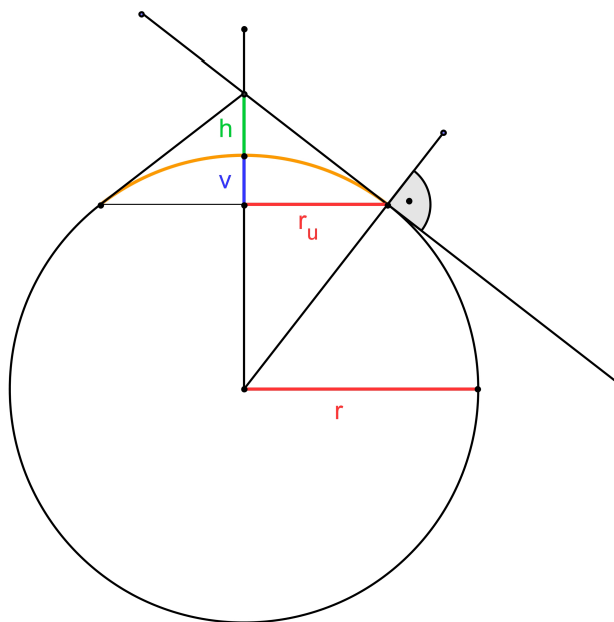
Výpočet výšky kulového vrchlíku referenční koule, na jehož plášti je zobrazeno celé území České republiky.

Pro jednoduchost výpočtu uvažujeme referenční kouli o poloměru $r = 6371$ km (viz *Příklad 1* - kapitola 4.3.). Ke stanovení poloměru kulového vrchlíku r_u byla použita obecně zeměpisná mapa České republiky ze školního atlasu [6] v měřítku $1 : 1\,200\,000$. V tomto měřítku 1 cm na mapě odpovídá 12 km ve skutečnosti. Na mapě byl stanoven poloměr 21,5 cm, tudíž ve skutečnosti poloměr činí $r_u = 21,5 \cdot 12 = 258$ km. Tomuto kulovému vrchlíku odpovídá hledaná výška v .



Obr. 23: Schéma určení poloměru r_u , kulový vrchlík daný poloměrem r_u a výškou v

Dále uvažujeme výšku h , což je výška nad povrchem referenční koule, kdy kružnice o poloměru r_u tvoří obzor, tzn. je vidět právě celá plocha daného kulového vrchlíku. Poté můžeme uvažovat hledanou výšku kulového vrchlíku v (viz Obr. 24).



Obr. 24: h - výška nad Zemí, v - výška kulového vrchlíku, r_u - poloměr kulového vrchlíku, r - poloměr referenční koule

Pro řešení příkladu využijeme dvou pravoúhlých trojúhelníků - BTC a CTA (viz Obr. 25). V trojúhelníku CTA využijeme Eukleidovu větu o výšce, která obecně zní:

$$c_a \cdot c_b = v_c^2.$$

V tomto příkladu platí:

$$c_a = h + v$$

$$c_b = r - v$$

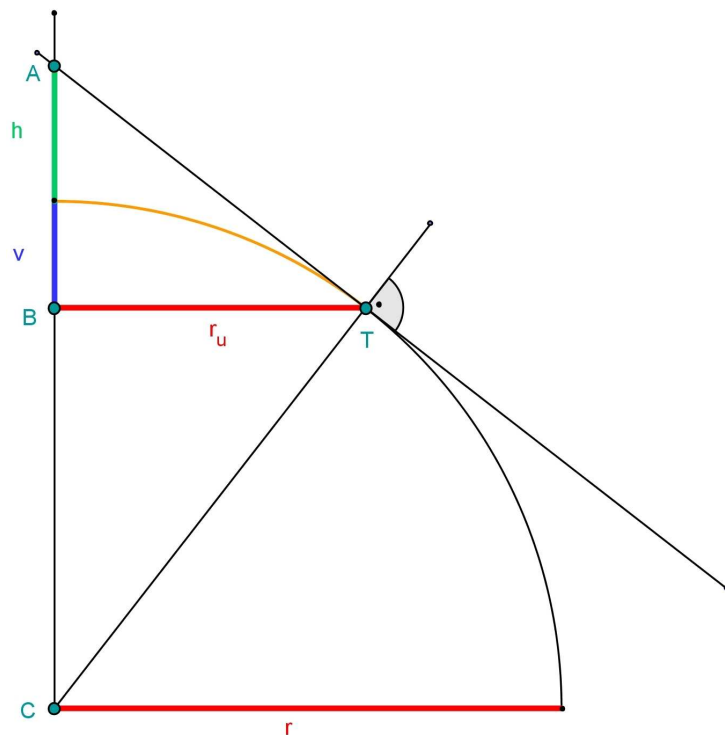
$$v_c = r_u$$

Poté dostáváme rovnici:

$$(h + v) \cdot (r - v) = r_u^2$$

Dále v trojúhelníku CTA využijeme Pythagorovu větu k vyjádření strany AT. Pythagorova věta zní:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Obr. 25: Řešení příkladu

V našem případě platí:

$$c = h + r$$

$$a = r$$

$$b = |AT|$$

Po dosazení a úpravě dostáváme vyjádření strany AT ve tvaru:

$$|AT| = \sqrt{(h+r)^2 - r^2} = \sqrt{h^2 + 2hr}$$

V trojúhelníku BTC také použijeme Pythagorovu větu. Strana AT je přeponou, jedna odvěsna má délku r_u a druhou odvěsnu tvoří součet délek h a v :

$$|AT|^2 = r_u^2 + (h+v)^2$$

Dosadíme z předchozího vyjádření strany AT:

$$h^2 + 2hr = r_u^2 + (h+v)^2$$

Úpravou dostáváme rovnici:

$$2hr - 2hv = r_u^2 + v^2$$

Dosavadním postupem jsme získali dvě rovnice. Z předpokladu, že jsou nám známy poloměr kulové úseče r_u a poloměr referenční koule r , vyplývá, že se jedná o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tj. h a v .

$$(h + v) \cdot (r - v) = r_u^2$$

$$2hr - 2hv = r_u^2 + v^2$$

Z druhé rovnice si vyjádříme neznámou h :

$$h = \frac{r_u^2 + v^2}{2 \cdot (r - v)}$$

Dosadíme do první rovnice a upravíme:

$$\left(\frac{r_u^2 + v^2}{2 \cdot (r - v)} + v \right) \cdot (r - v) = r_u^2$$

$$v^3 - 3rv^2 + (2r^2 + r_u^2) \cdot v - r_u^2 r = 0$$

Po úpravě dostáváme rovnici třetího stupně a k jejímu vyřešení použijeme matematický program Maple. Nejprve je nutné definovat konstanty r a r_u . Výše uvedená rovnice se poté zobrazí i s vyčíslenými koeficienty.

```
> r:=6371;
                                     r := 6371
> r_u:=258;
                                     r_u := 258
> rovnice:=v^3-3*r*v^2+(2*r^2+(r_u)^2)*v-(r_u)^2*r=0;
                                     rovnice := v^3 - 19113 v^2 + 81245846 v - 424079244 = 0
```

Pro numerické řešení rovnice použijeme příkaz **fsolve**. Jelikož jde o rovnici třetího stupně, řešením jsou tři různé reálné kořeny. Našemu příkladu vyhovuje pouze první kořen, protože z logiky věci uvažujeme vzdálenost, která se pohybuje v intervalu mezi 0 a 6371 km, tj. poloměr referenční koule r .

```

> reseni:=fsolve({rovnice},{v});
               reseni := {v = 5.226127170}, {v = 6371.}, {v = 12736.77387}
> reseni[1];
               {v = 5.226127170}

```

Pro úplnost řešení celé soustavy rovnic vypočítáme druhou neznámou h zpětným dosazením výšky v do vztahu $h = \frac{r_u^2 + v^2}{2 \cdot (r - v)}$.

```

> h:=((r_u)^2+v^2)/(2*(r-v));
               h := (66564 + v^2) / (12742 - 2 v)
> h:=subs(reseni[1],h);
               h := 5.230417677

```

Dostáváme tedy výšku v kulového vrchlíku, na jehož plášti je zobrazeno území celé České republiky.

$$v \cong 5,226 \text{ km} = 5226 \text{ m}$$

Celý povrch této kulového vrchlíku je vidět z výšky h .

$$h \cong 5,230 \text{ km} = 5230 \text{ m}$$

Velikosti výšky v by v použité mapě České republiky podle měřítka, tj. 1 : 1 200 000, odpovídala vzdálenost 0,44 cm.

Na závěr můžeme porovnat obsah pláště kulového vrchlíku s rozlohou České republiky. Obsah se počítá dle vztahu:

$$S = 2\pi r v$$

$$S = 2\pi \cdot 6371 \cdot 5,226 \cong 209198 \text{ km}^2$$

Rozloha České republiky je 78864 km^2 , čímž tedy zabírá 37% obsahu pláště daného kulového vrchlíku.

Příklad lze vypočítat i pomocí následujícího vzorce [7]:

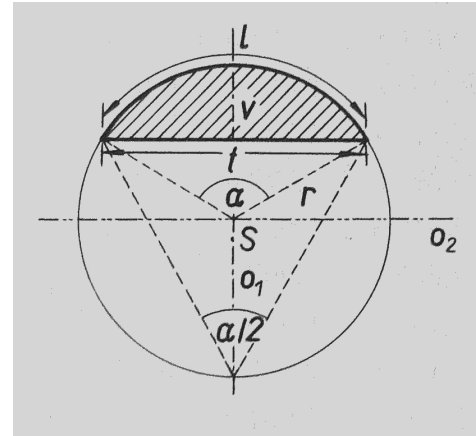
$$t = 2 \cdot \sqrt{2vr - v^2}$$

V našem případě by platilo, že $t = 2r_u$.

$$2r_u = 2 \cdot \sqrt{2vr - v^2}$$

Úpravou dostaneme kvadratickou rovnici ve tvaru:

$$v^2 - 2vr + r_u^2 = 0$$



Obr. 26: Kruhová úseč [7]

Při řešení příkladu opět bereme v potaz, že hledaná výška v se pohybuje v intervalu mezi 0 a 6371 km. Řešení tedy vyhovuje první kořen a opět dostáváme výslednou výšku $v \cong 5226$ m.

```
> r:=6371;
                                     r := 6371
> r_u:=258;
                                     r_u := 258
> rovnice:=v^2-2*r*v+(r_u)^2=0;
                                     rovnice := v^2 - 12742 v + 66564 = 0
> reseni:=fsolve({rovnice},{v});
                                     reseni := {v = 5.226127170}, {v = 12736.77387}
> reseni[1];
                                     {v = 5.226127170}
```

10 Závěr

Cílem této práce bylo přiblížit využití matematiky v oblasti geografie. Jelikož lze na tuto problematiku nahlížet z mnoha úhlů pohledu, rozhodl jsem se dané téma zúžit na oblast kartografie, konkrétně matematické kartografie.

Inspiraci jsem hledal v dále uvedených knižních zdrojích. V Brázdilově Úvodu do studia planety Země [2] kromě jiného nalezneme fyzikální příčiny tvaru Země a historii určování jeho rozměrů. Voženílkova Aplikovaná kartografie [1] mi posloužila jako hlavní zdroj k nastudování problematiky samotné tvorby map. Jelikož se v této problematice objevují jasně definované pojmy, obsah dalších uvedených knižních zdrojů [3], [4], [5] je víceméně podobný. Tyto zdroje sloužili k ověřování informací, případně k doplnění nějakého detailu.

Práce tedy objasňuje základní matematické principy a zákonitosti při určování tvaru a velikosti planety Země a následně při jejím mapování. V úvodu jsem se zabýval historií tohoto měření, především Eratosthénovým prvním historicky doloženým měřením. V následujícím textu nalezneme klasifikaci matematických aproximací zemského tělesa. Výstupem těchto aproximací jsou tzv. referenční plochy, které jsou základem pro vznik map. Dále jsem se soustředil na kartografické zkreslení, které vzniká při převodu zakřivené referenční plochy do roviny mapy neboli zobrazovací plochy. Podle typu zobrazovací plochy je dále v textu uvedeno rozdělení map.

Vzhledem k velikosti a rozměrům Země, které se pohybují ve vysokých číslech, a tudíž nejsou zcela transparentní, jsem se na základě předchozích informací a poznatků rozhodl demonstrovat vliv velikosti Země, resp. jejího zakřivení, na menším území - na území České republiky. Jde o zjednodušený příklad, který svým řešením poukazuje na to, jak je možné vnímat zemský povrch v bezprostředním světě kolem nás. Jistě by se dala vymyslet celá řada takovýchto podobných příkladů.

Závěrem je nutné podotknout, že tvář naší planety se neustále mění v čase. Tyto změny jsou však velmi malé a v porovnání s jednou lidskou generací jsou zanedbatelné. Lidstvo může pouze rozvíjet různé spekulace, jak bude vypadat zemský povrch za sto, tisíc či milión let.

11 Seznam literatury a ostatních použitých pramenů

- [1] Voženílek, V.: Aplikovaná kartografie I. Tematické mapy. Univerzita Palackého, Olomouc, 2001.
- [2] Brázdil, R. a kol.: Úvod do studia planety Země. SPN, Praha, 1988.
- [3] Hojovec, V., Kovařík, J.: Matematická kartografie. ČVUT, Praha, 1977.
- [4] Srnka, E.: Matematická kartografie. VAAZ, Brno, 1986.
- [5] Čapek, R., Mikšovský, M., Mucha, L.: Geografická kartografie. SPN, Praha, 1992.
- [6] Kolektiv autorů.: Školní atlas světa. Kartografie Praha, Praha, 1998.
- [7] Rektorys, K.: Přehled užité matematiky I. Prometheus, s.r.o., Praha, 1996.

Internetové zdroje:

- [8] <http://www.gis.zcu.cz/studium/gen1/html/ch10.html>
- [9] http://gis.vsb.cz/GISacek/GISacek_2001/sbornik/Hanzlova/Hanzlova.htm
- [10] http://gis.zcu.cz/studium/mk2/multimedialni_texty/index_soubory/hlavni_soubory/zkresleni.html
- [11] <http://casopis.ulet.sk/2007/05/28/vesmirna-hruska/>
- [12] <http://www.winkart.cz/ukazky.htm>
- [13] http://web.natur.cuni.cz/~bayertom/Mmk/4_zobrazeni.pdf

Matematický software:

- Maple - <http://www.maplesoft.com/>
- Geogebra - <http://www.geogebra.org/>