

## Posudek oponenta bakalářské práce

Alexej Moskovka: Nerovnosti Friedrichsova a Poincarého typu a jejich výpočet

Obor: Aplikovaná matematika

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Ústav matematiky a biomatematiky

Alexej Moskovka se ve své práci zabývá Wirtingerovými a Poincarého nerovnostmi, tedy nerovnostmi mezi  $L^2$  normou funkce a jejího gradientu. Zaměřuje se na výpočet hodnot konstanty v těchto nerovnostech pro spojitě funkce s nulou na hranici a pro funkce s nulovým průměrem přes danou oblast. Nachází tyto konstanty pro případ jedné, dvou a tří prostorových dimenzí. K výpočtu samotnému využívá rozvoje do Fourierových řad vzhledem k trigonometrickému systému funkcí — tím získá přesné analytické vyjádření Poincarého konstant, a v druhé řadě numerické metody konečných prvků, pomocí které získá jejich přibližnou hodnotu, zato však pro širší třídu oblastí. Zároveň s tím najde tzv. etremální funkce, tedy ty, pro které ve zmiňovaných (neostrých) nerovnostech nastává rovnost. Ve druhé kapitole práce pak ukazuje, že tyto extrémální funkce jsou vlastní funkce Laplaceova operátoru s příslušnými okrajovými podmínkami a nejmenší vlastní čísla těchto úloh jsou převrácené hodnoty kvadrátů studovaných Poincarého konstant.

Práce je náročná, jak rozsahem, tak obsahem. Připomíná spíše práci diplomovou. K bakalářské práci by stačila jen samotná kapitola o analytickém výpočtu konstant. Autor přidává i numerický výpočet, a to pro oba uvažované typy funkcí a hned v jedné i dvou prostorových dimenzích. Práce je psaná stylem jako vědecký článek. To je vhodné pro její případnou publikaci. Na druhou stranu se tím zvyšuje náročnost jejího čtení a verifikace. Ve studentské práci bych čekal místo vědecké náročnosti větší důraz na přesnost formulací. Autor na mnoha místech předpokládá čtenářovu znalost používaných pojmů. (Namátkou hned na první straně úvodní kapitoly jsou ve formulaci Poincarého nerovnosti použity normy v  $L^2$  prostoru, aniž by byly kde v práci definovány, resp. jsou ‘definovány’ na str. 7. Nerovnosti v úvodních Lemmatech jsou formulovány pro Sobolevovy prostory, tyto jsou slovně ‘definovány’ až na str. 61.) Dále chybí konkrétní citace formulovných nerovností a některých vět, některá tvrzení jsou schována v textu místo aby byla zdůrazněna jako Věty, obzvláště když následuje jejich formální Důkaz (tvrzení o konvergenci norem na str. 10). Práce je rozsáhlá, proto by podrobnější strukturování také zjednodušilo orientaci (např. nadpisy pro podkapitoly s nehomogenními okrajovými podmínkami na str. 48 a 55). Čtenář se může také ztrácet v množství použitých prostorů funkcí, tím myslím, že některé formulace Vět jsou pro funkce spojitě a po částech spojitě diferencovatelné, některé dokonce pro funkce ze Sobolevových prostorů, skalární součin a používaná norma se ale berou vždy ty z prostoru  $L^2$  na příslušné oblasti — usnadnilo by čtení, kdyby byl tento fakt zdůrazněn někde na začátku textu.

V práci samotné jsem nenašel žádné věcné chyby a jen několik překlepů, jejichž množství přirozeně odpovídá rozsahu práce. Na Obr. 1.2 je zobrazena jiná funkce než zmiňovaná v jeho popisku, na Obr. 1.5 je v popisku překlep, má být  $(x - 2.5)$  místo  $(x - 2)$ . Na str. 16 a 19 je funkce  $f$  sudá v  $(x, y)$  a lichá jak v  $x$ , tak v  $y$ . Na Obr. 2.8 je zobrazena diskretizace pro interval  $[0, 2] \times [0, 1]$  místo uváděného  $[0, 1] \times [0, 2]$  včetně  $m = 6$  a  $n = 5$  dělících bodů. Matice diskretizace na další stránce ale odpovídá (správně) už jinak zvolenému intervalu  $[0, 1] \times [0, 1]$ , stejně jako na Obr. 3.11 a 3.12 — tady bych zvolil pro ukázkou pokud možno stejnou oblast pro stejné problémy. V Definici 7 na str. 43 by měl být nad  $\Omega$  uzávěr, resp. průnik s množinou  $C(\overline{\Omega})$ , podobně na str. 59 (jinak není zaručena omezenost funkce a ani její příslušnost do  $L^2(J)$ ). V rozvoji derivace v (3.3) by měla být čárka nad funkcí  $\varphi_k$  místo nad koeficientem  $u_k$  a následně “ $\varphi'_k$  chápeme jako slabou derivaci  $\varphi_k$ ” místo  $u'_k$  a  $u_k$ , jinak by asi neplatil odhad normy nad (3.4). Na str. 65 by mělo být  $v \neq 0$  součástí zobecněné úlohy na vlastní čísla.

Co se týče terminologie, funkce, pro které v Poincarého nerovnosti nastane rovnost, bych nazýval *extremální*. V Poznámce 21 na str. 44 bych hovořil o *homogenních Neumannových okrajových podmínkách* (obdobně i na jiných příslušných místech) místo o *nehomogenních okrajových podmínkách*.

Student rozhodně splnil zadání, přes uvedené nedostatky bakalářskou práci hodnotím velmi kladně, a doporučuji ji k obhajobě.

V Českých Budějovicích, 15.5.2018, Jan Eisner



Otázka pro studenta:

Jaký je vztah Poincarého konstanty, úlohou na vlastní čísla, minimalizační úlohou a pozitivitou příslušného diferenciálního operátoru?