



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Geometrie v reálném životě

Vypracoval: Tomáš Zoubek
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Geometrie v reálném životě jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, dne 26.6.2015

.....

Zoubek Tomáš

Anotace

Cílem diplomové práce je metodické zpracování vybraných geometrických jevů, s nimiž se běžně setkáváme, do podoby textu, který by bylo možno využívat ve výuce geometrie na základní a střední škole, popřípadě v úvodních vysokoškolských kurzech. Poznání a pochopení těchto jevů může sehrát důležitou roli při studiu matematiky a geometrie, ukazuje tyto disciplíny v jejich úzkém vztahu k reálnému světu.

Součástí popisů těchto geometrických jevů jsou řešené a ukázkové úlohy. Pro každou úlohu je připraveno zadání, řešení a metodické komentáře.

Při zpracování se vycházelo z aktuálních poznatků didaktiky matematiky a byly voleny formy, prostředky a didaktické postupy, které odpovídají požadavkům na názornost řešení (matematický a geometrický software, pracovní listy, ...) i účelu použití příkladu (výklad, procvičování, ...).

Součástí práce jsou pracovní listy, pomocí nichž je možno se seznámit s geometrickými jevy uvedenými v práci. Pracovní listy odpovídají svými nároky úrovni žáků základních a středních škol.

Annotation

The aim of this diploma thesis is a set of methodical materials for geometry education on primary, secondary schools and possibly during the basic courses on a university. This materials will be based on real geometry phenomenon which we meet every day. The knowledge and understanding of this phenomenon might play an important part during studies of mathematics and geometry. It also shows mathematics and geometry in their close relationship with the real world.

The part of the description this phenomenon presented will be solved examples, examples for demonstration and also examples for practise. They are prepared a task, solution and a methodical reviews for each exercise.

When preparing this work, it was used his current knowledge of methodology of mathematics and it was selected such forms, means and didactics procedures, which will go together with requirements on a visual solution (mathematical and geometrical software, an interactive whiteboard, worksheets, ...) and with the purpose of the example presented (it's interpretation, practise, testing, ...).

The part of this diploma thesis are worksheets. This worksheets can help get to know with geometrical phenomena in this work. The worksheets have primary and secondary school level.

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu diplomové práce panu Mgr. Romanovi Haškovi, Ph.D. za jeho neocenitelné rady, připomínky a podněty. Mé poděkování patří i mé rodině a přítelkyni, kteří mě, nejen při psaní této práce, ale i po dobu celého studia, podporovaly.

Zoubek Tomáš

Obsah

1	Úvod	3
2	Představení programu Phun pomocí modelu šikmého vrhu vzhůru	4
2.1	Model šikmého vrhu vzhůru v programu GeoGebra	4
2.2	Model šikmého vrhu vzhůru v programu Phun	5
3	Řetězovka	22
3.1	Odvození obecné rovnice řetězovky	22
3.2	Vybrané vlastnosti řetězovky	26
3.3	Řetězovka nebo parabola?	28
3.4	Čtvercové kolo	31
4	Traktrix	38
4.1	Odvození obecné rovnice traktrix	38
4.2	Vybrané vlastnosti traktrix	41
4.2.1	Evolventa traktrix	42
4.2.2	Pseudosféra	44
4.3	Tažení řetízku	46
4.4	Karetní trik	50
5	Zrcadla	52
5.1	Rovinná zrcadla	53
5.1.1	Osová souměrnost	54
5.1.2	Zobrazení předmětů v rovinném zrcadle	57
5.1.3	Problémová úloha se zrcadlem	58
5.2	Sférická (kulová) a asférická zrcadla	60
5.2.1	Vypuklá zrcadla	61
5.2.2	Dutá zrcadla	65

6	Nefroida	72
6.1	Křivka v hrnku	72
6.2	Odvození parametrických rovnic nefroidy	75
6.3	Další možnosti konstrukce nefroidy	78
6.3.1	Nefroida jako epicykloida	79
6.3.2	Nefroida jako obálka kružnic	80
7	Závěr	82

1 Úvod

S geometrickými jevy se setkáváme ve svém životě prakticky neustále. Těch základních, jako například tvarů kol u automobilu, oken v bytě, budov okolo nás, si jistě na první pohled všimneme. Nad jinými, složitějšími, geometrickými jevy však moc lidí nepřemýšlí. Některé z těchto složitějších geometrických jevů jsou obsaženy v této práci s cílem je představit. Pochopení různých geometrických jevů kolem nás pomáhá i v rozvoji naší společnosti. Některé architektonické prvky jsou například odvozeny z tvarů, které můžeme nalézt v přírodě. Je proto důležité aby se již děti na základních školách naučily geometrii jako soubor pouček a návodů k rýsování, ale aby jim byla geometrie představena ve své provázanosti s reálným životem a při hodinách tyto spojitosti objevovaly.

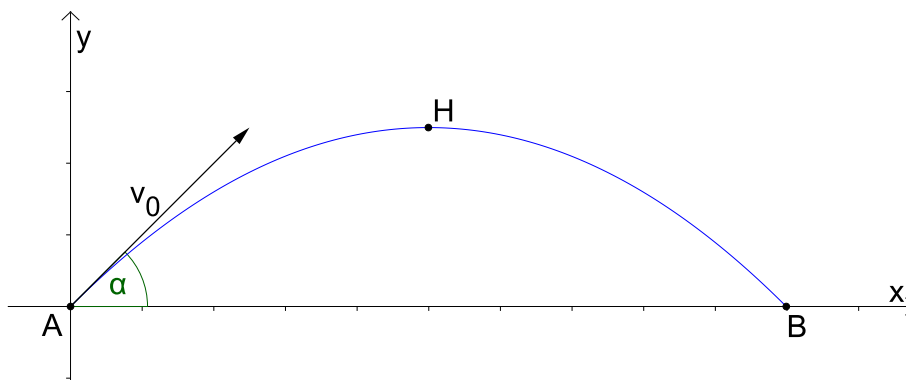
Práce je rozdělena do pěti kapitol. První kapitola představuje program Phun, který se může využívat nejen pro modelování různých fyzikálních jevů. Jde o volně stažitelný program a jeho ovládání je vcelku intuitivní. Zbylé čtyři kapitoly jsou vždy věnovány některému geometrickému jevu, odvození jeho rovnic, jeho přínosem pro náš život a místům jeho výskytu. Těmito jednotlivými geometrickými jevy jsou řetězovka, traktrix, zrcadla a nefroida.

Přílohou práce jsou CD s modely některých jevů uvedených v textu práce, kde je na ně i odkazováno, a deset pracovních listů, které by mohli sloužit k představení geometrických jevů z této práce žákům jednotlivých škol.

2 Představení programu Phun pomocí modelu šikmého vrhu vzhůru

2.1 Model šikmého vrhu vzhůru v programu GeoGebra

Šikmý vrh vzhůru se skládá z rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru počáteční rychlosti v_0 a volného pádu. Trajektorií šikmého vrhu vzhůru je parabola, jejíž vrchol leží v nejvyšším bodě trajektorie (bod H). [1] Pro lepší představu, o trajektorii šikmého vrhu vzhůru, ji máme vymodelovanou na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Model trajektorie šikmého vrhu vzhůru

Model šikmého vrhu na obrázku 2.1 je vytvořen v programu dynamické geometrie GeoGebra. Trajektorie byla vytvořena zadáním parametrických rovnic šikmého vrhu vzhůru. Šikmý vrh vzhůru má parametrické rovnice:

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha) \tag{2.1}$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot gt^2, \tag{2.2}$$

kde v_0 je počáteční rychlost, α je úhel vrhu, g je tíhové zrychlení a t je parametr. [2] Proto pro trajektorii šikmého vrhu vzhůru zadáme do vstupu $Krivka[v_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha), v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha), t, 0, 2 \cdot (v_0 \cdot \sin(\alpha))/g]$. Koncovou hodnotu parametru t získáme dosazením $y = 0$ do rovnice 2.2. Postupně nám vyjde:

$$v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot gt^2 = 0 \quad (2.3)$$

$$v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot gt^2 \quad (2.4)$$

$$v_0 \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot gt \quad (2.5)$$

$$t = 2 \cdot \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g} \quad (2.6)$$

Tuto koncovou hodnotu jsme hledali proto, aby nám křivka trajektorie šikmého vrhu vzhůru končila na ose x . Pokud bychom zadali jinou hodnotu, křivka by nám končila nad nebo pod osou x . Na CD (složka MODELÝ, soubor 02_GeoGebra_sikmy_vrh_model.ggb) máme vytvořené posuvníky a můžeme měnit počáteční rychlost v_0 a úhel α a sledovat změny v trajektorii. Co ale, kdybychom chtěli šikmý vrh vzhůru vymodelovat bez znalostí rovnic? Kdybychom chtěli, například, vytvořit dělo a sledovat trajektorii dělové koule z něho vystřelené? Takový program, v němž fungují některé fyzikální zákony (gravitace, odpor vzduchu a jiné), si představíme na následujících řádcích.

2.2 Model šikmého vrhu vzhůru v programu Phun

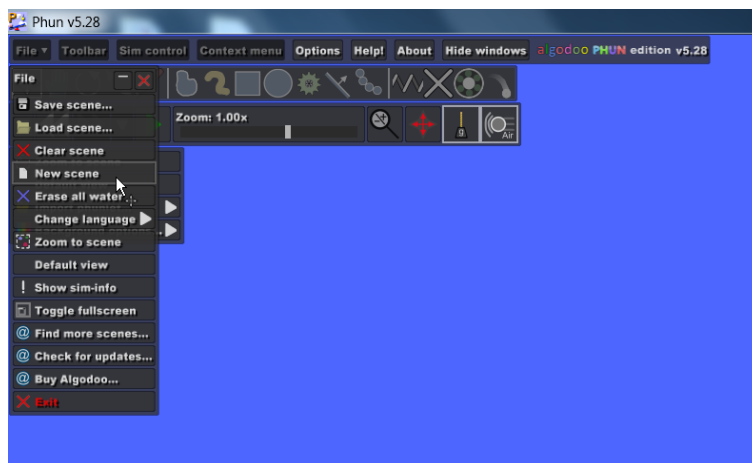
Programátorem Phunu je švéd Emil Ernerfeld, který v době vzniku programu Phun studoval na univerzitě ve švédském městě Umea. [3] Program Phun je velmi zajímavý a jeho odlišností od většiny programů je fungování některých fyzikálních zákonů (např.: gravitace, foukání větru, odrazy předmětů atd.) Nebudu zde dělat podrobný návod na program Phun a popisovat každou jeho funkci. K tomuto účelu může posloužit zdroj [4]. Jedná se sice o závěrečnou práci žáka ZŠ ale pro orientaci v programu Phun je více než dostačující. My si představíme program Phun při vytváření modelu mechanizmu vystřelující dělové koule a pak budeme pozorovat jejich trajektorii a její závislost na úhlu náklonu děla. Je použita verze programu 5.28. Bohužel se mi podařilo získat

pouze anglickou verzi programu. Názvy jednotlivých nástrojů tak uvádím v angličtině a za ním v závorce český předklad získaný ze zdroje [4], jehož autor měl k dispozici českou verzi programu. Program Phun již nějakou dobu není původními tvůrci podporován. Na internetu je však dostupný. Můžete se setkat i s jeho následovníkem programem Algodoo dostupného na webové adrese <http://www.algodoo.com/>, který z Phunu vychází.

Spustíme program Phun a začneme s vytváření modelu děla. Pro krátké seznámení s programem máme na obrázku 2.2 zachyceno *Menu a Nástroje* a na obrázku 2.3 otevření *New scene (Nové scény)*.

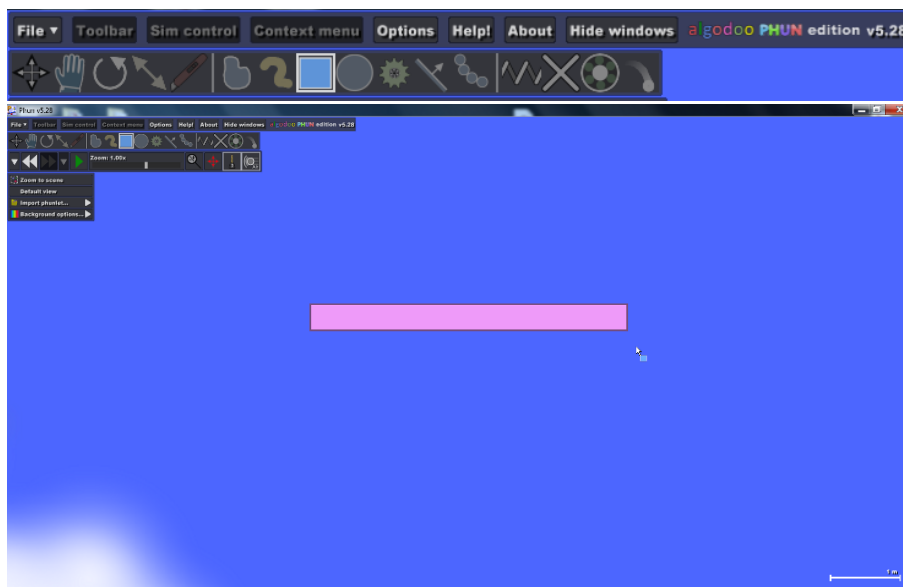


Obrázek 2.2: Menu a nástrojové lišty programu Phun



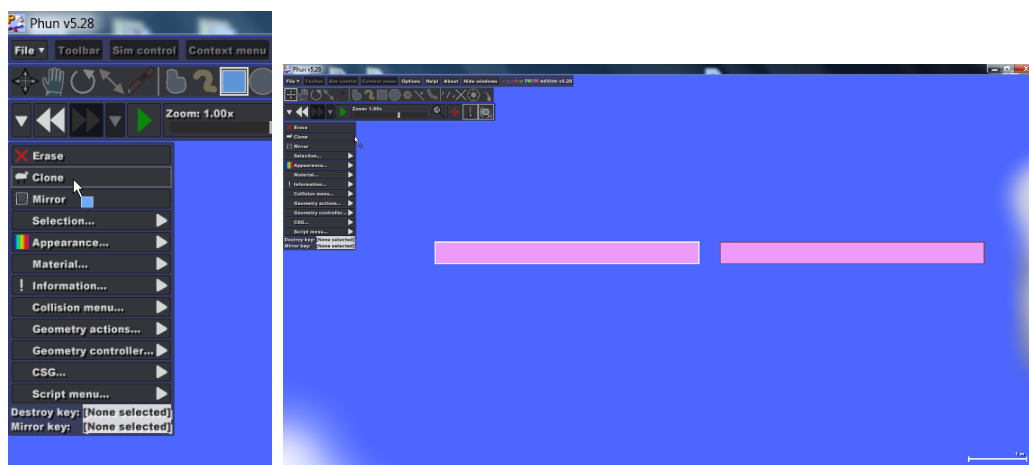
Obrázek 2.3: Otevření nové scény

Po otevření nové scény můžeme začít s tvorbou děla. Nejprve si zvolíme nástroj *Box* (*obdélník*) a vytvoříme obdélník jaký je na obrázku 2.4. Pokud bychom při použití tohoto nástroje drželi klávesu Shift vytvořili bychom čtverec.



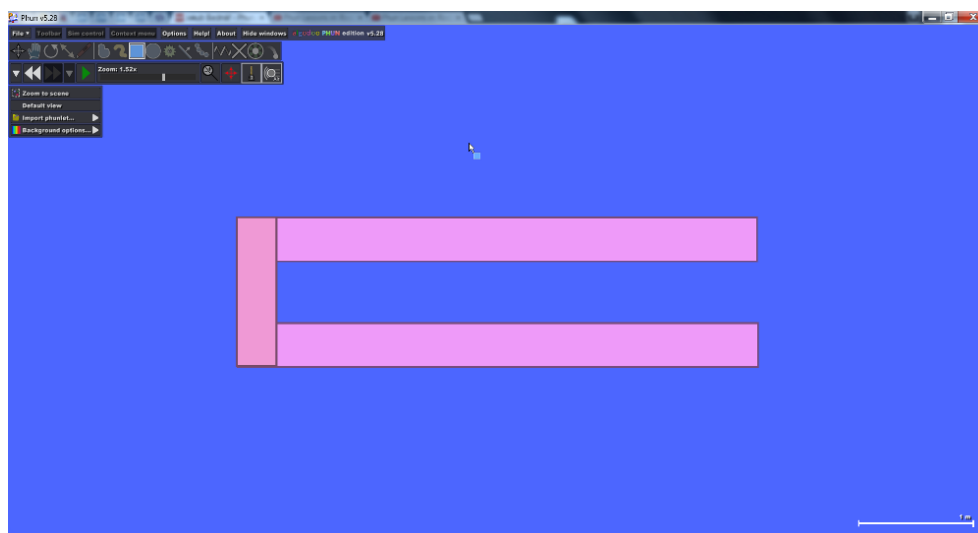
Obrázek 2.4: Vytvoření obdélníku

Náš obdélník bude tvořit horní díl děla. Ted' budeme chtít vytvořit stejný obdélník, který bude použit na dolní díl. Abychom dostali rozměrově stejný obdélník použijeme nástroj *Clone* (*Klonování*). Nejprve musíme kliknout na náš již vytvořený obdélník a na levé straně okna programu se nám objeví menu. Zde vybereme nástroj *Clone* (je u něj obrázek ovce). Po potvrzení nástroje *Clone* se nám klonovaný obdélník objeví vedle našeho původního, stejně jako na obrázku 2.5. Klonovaný obdélník přesuneme pod ten původní (necháme mezi nimi prostor, kde se bude nacházet mechanismus odpalování a budou se sem umisťovat dělové koule) pomocí nástroje *Move* (*Posouvání*). Je to hned první nástroj na nástrojové liště.



Obrázek 2.5: Využití nástroje *Clone* (*Klonování*)

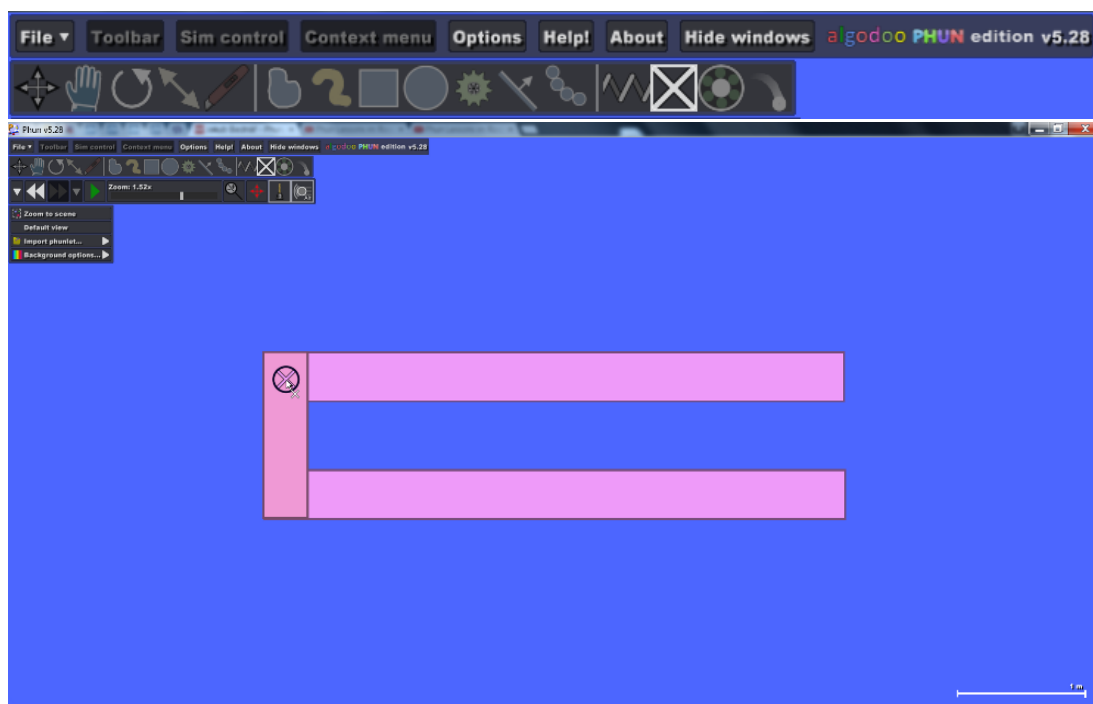
V následujícím kroku vytvoříme další obdélník, jenž bude překrývat levé konce horního a dolního dílu děla, tak jako na obrázku 2.6. Máme tak již vytvořenou siluetu hlavně děla.



Obrázek 2.6: Silueta hlavně děla

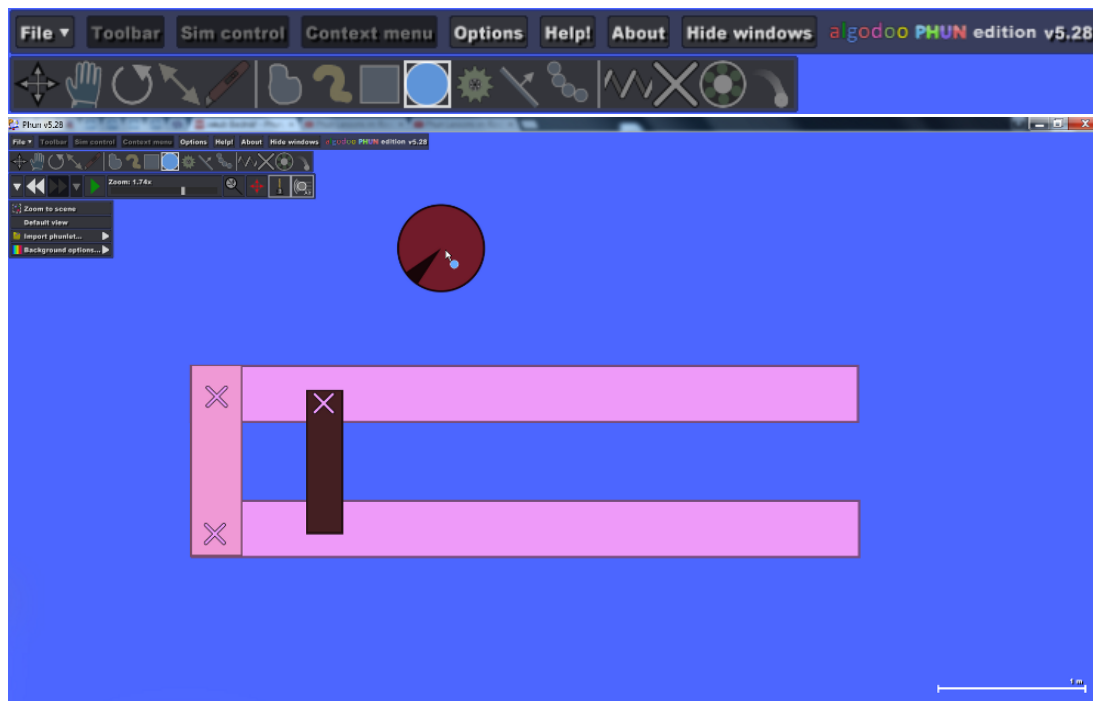
Aby naše jednotlivé čtverce držely pohromadě musíme je spojit. K tomu slouží nástroj *Fixate* (*Ukotvení*). Umístění nástroje *Fixate* a jeho vizualizaci vidíme na obrázku

2.7. Nový obdélník ukotvíme k horní i dolní části hlavně. Barva křížku, který prezentuje ukotvení, je shodná s barvou objektu, k němuž jsme ukotvili. Objekt lze ukotvit i k pozadí. Čehož využijeme později.



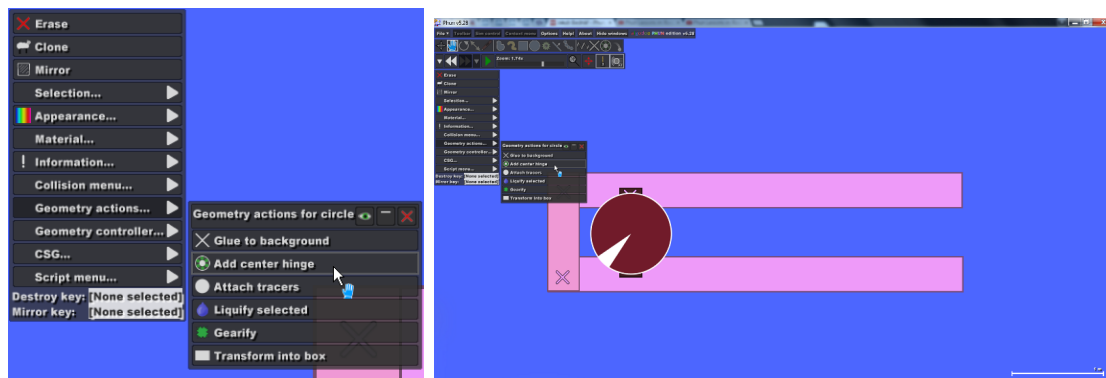
Obrázek 2.7: Využití nástroje *Fixate* (*Ukotvení*)

Kousek od levého konce hlavně zkonstruujeme sloupek, stejně jako na obrázku 2.8, a ukotvíme ho k horní části hlavně děla. Na obrázku jste si jistě všimli i kruhu, který budeme také vytvářet. Na jeho konstrukci použijeme nástroj *Circle* (*Kruh*). Po jeho vytvoření ho přesuneme na sloupek.



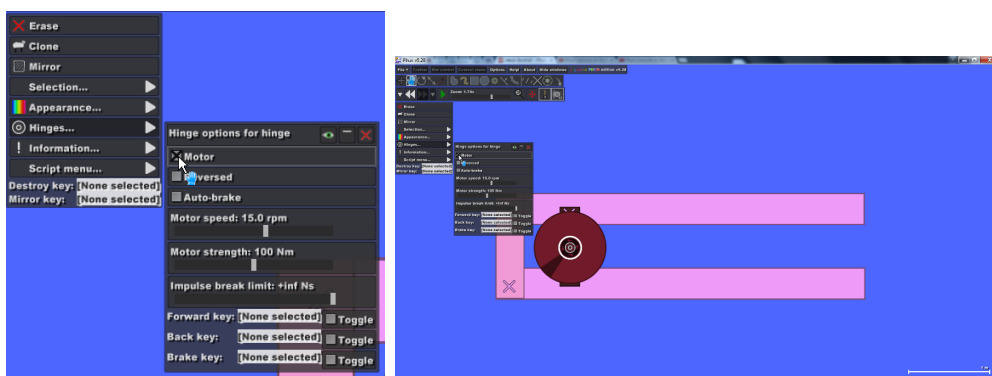
Obrázek 2.8: Vytvoření sloupku a kruhu

Kruh musíme spojit se sloupkem. Chceme aby se kruh mohl otáčet. Nepoužijeme proto nástroj *Fixate* ale ukotvíme ho pomocí ložiska. Ložisko musíme umístit do středu kruhu. I na toto programátor Phunu myslel a takový příkaz najdeme. Stačí označit kruh a v menu najet na *Geometry actions* (*Možnosti útvaru*) a v podmenu zvolit *Add center hinge* (*Přidat do středu ložisko*). Cestu k tomuto nástroji máte zobrazenou na obrázku 2.9.



Obrázek 2.9: Ukotvení kruhu pomocí ložiska

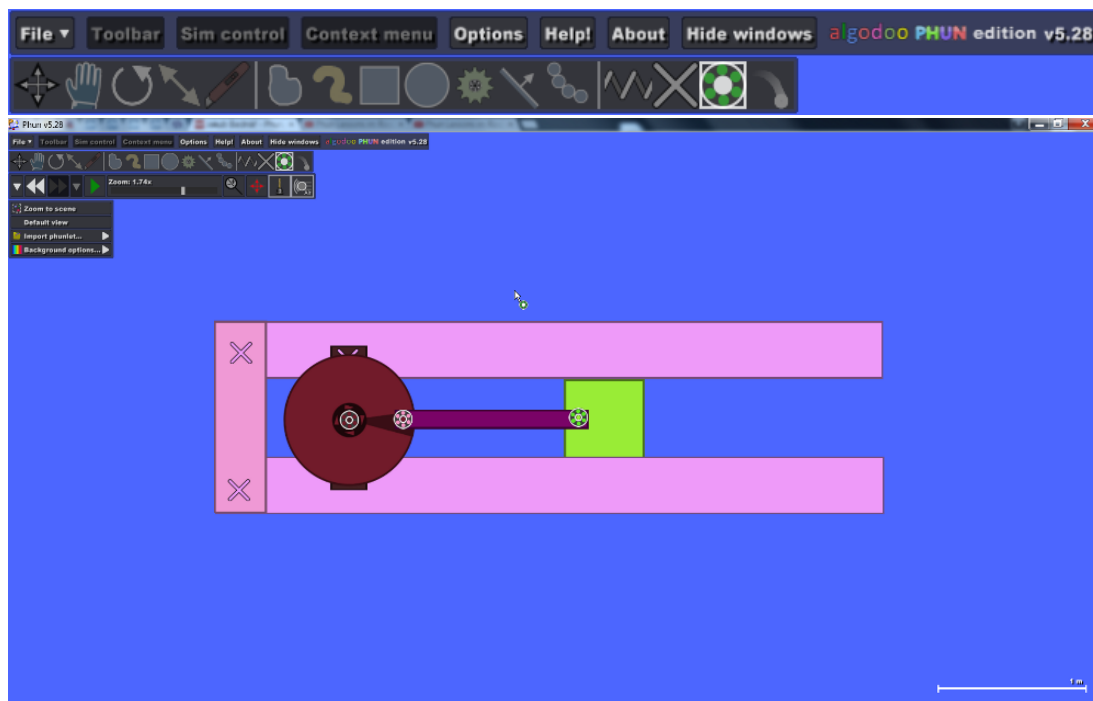
Ložisko, kterým jsme ukotvili kruh, můžeme jednoduše přeměnit na motor. Označíme ložisko a v levém menu, které se nám objeví, označíme *Hinges* (*Ložiska*). V okně, jenž se nám objeví zaškrtneme možnost *Motor*. Dále zde můžeme nastavit rychlost otáčení motoru a jeho sílu. Nás bude zajímat pouze možnost zvolení kláves na zapínání a vypínání motoru. U nápisu *Brake key*: (*Brzdová klávesa*;) klikneme na bílé políčko a zmáčkneme na klavesnici nějakou klávesu (v našem případě šipku dolu). Dále zaškrtneme vedle možnost *Toggle* (*Přepínání*). Popsaný postup je zachycen na obrázku 2.10.



Obrázek 2.10: Možnosti nastavení motoru

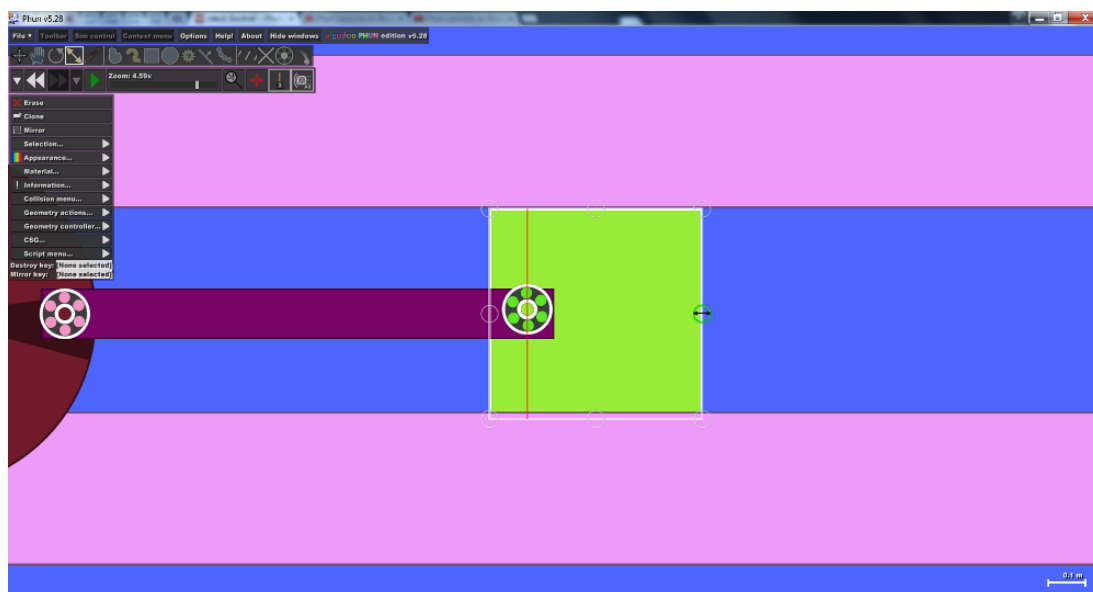
Nyní vytvoříme v hlavní děla píst a spojíme ho s kruhem. Výsledek je ilustrován na obrázku 2.11. Nejprve vytvoříme v hlavní jeden obdélník a pak druhý, který bude

částečně překrývat první obdélník a také bude částečně překrývat kruh. Druhý obdélník k prvnímu a ke kruhu upevníme pomocí ložisek. Zde už nevyžadujeme aby byla ložiska ve středu objektů. Využijeme proto nástroje *Hinge* (*Ložiska*), který je přímo na nástrojové liště.



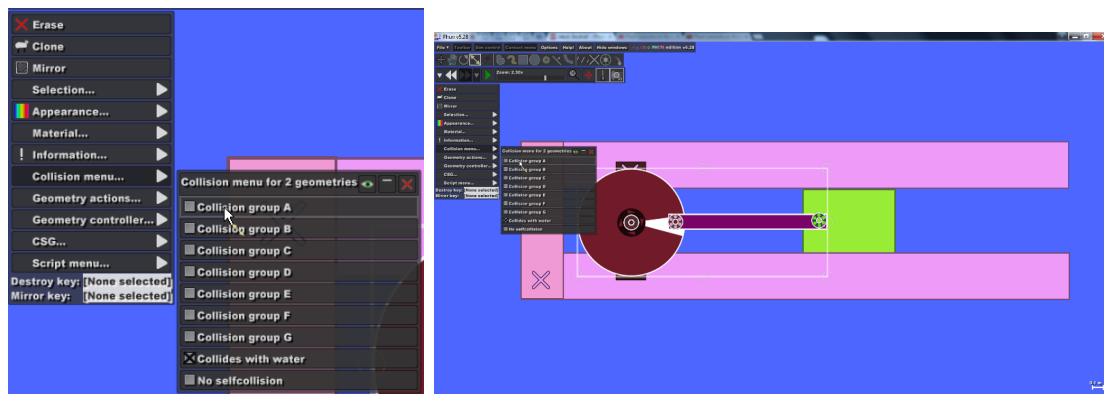
Obrázek 2.11: Vytvoření pístu

Na pístu si ukážeme, jak se dají upravovat rozměry již vytvořených objektů. Na nástrojové liště si vybereme nástroj *Scale* (*Měřítko*). Poté klikneme na píst a objeví se nám body, kterými můžeme pohybovat a měnit velikosti objektu. Pokud budeme držet klávesu Shift, budou se zachovávat poměry stran. Body, kterými můžeme hýbat u pístu, jsou zobrazeny na obrázku 2.12.



Obrázek 2.12: Uprava rozměrů

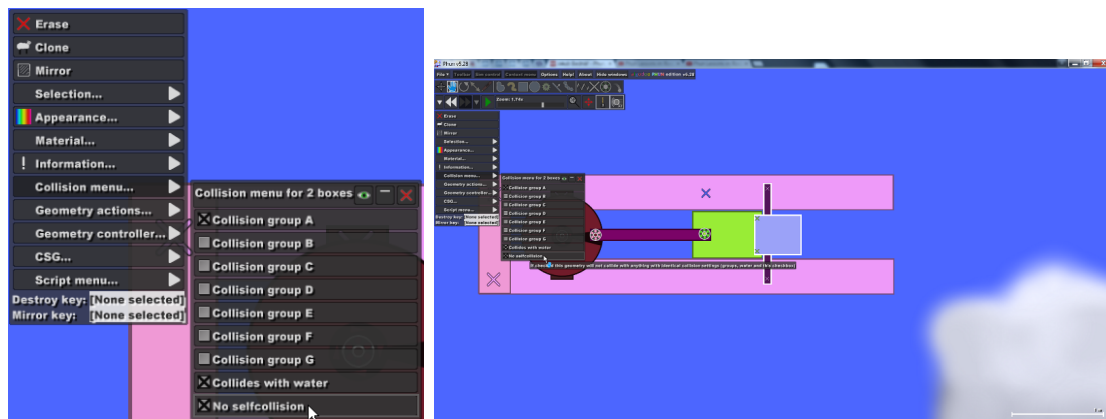
V programu Phun funguje i kolize objektů. To znamená, že jeden objekt může narazit do druhého. Při našem sestavení mechanismu děla by nám nyní kruh a obdélník spojující kruh a píst kolidovaly s dolní a horní částí hlavně. V programu se dají nastavit různým skupinám objektů odlišné kolizní skupiny. Toho mi využijeme. Pomocí nástroje *Box* (*Obdélník*) vybereme kruh a obdélník spojující kruh s pístem, jako na obrázku 2.13. V menu vybereme *Collision menu* (*Kolize*) a odškrtneme *Collision group A* (*Kolizní skupina A*).



Obrázek 2.13: Kolizní skupiny

Můžeme si vyzkoušet zda se nám podařilo kolizi odstranit. Nejprve musíme hlavěň upevnit k pozadí a pak můžeme spustit simulaci. Spustíme ji zelenou šipkou pod nástrojovou lištou. Píst by se vám měl pohybovat a zvolenou klávesou (v našem případě klávesou *šipka dolu*) můžeme motor vypínat a zapínat. Poté animaci vypneme abychom mohli pokračovat v budování modelu děla.

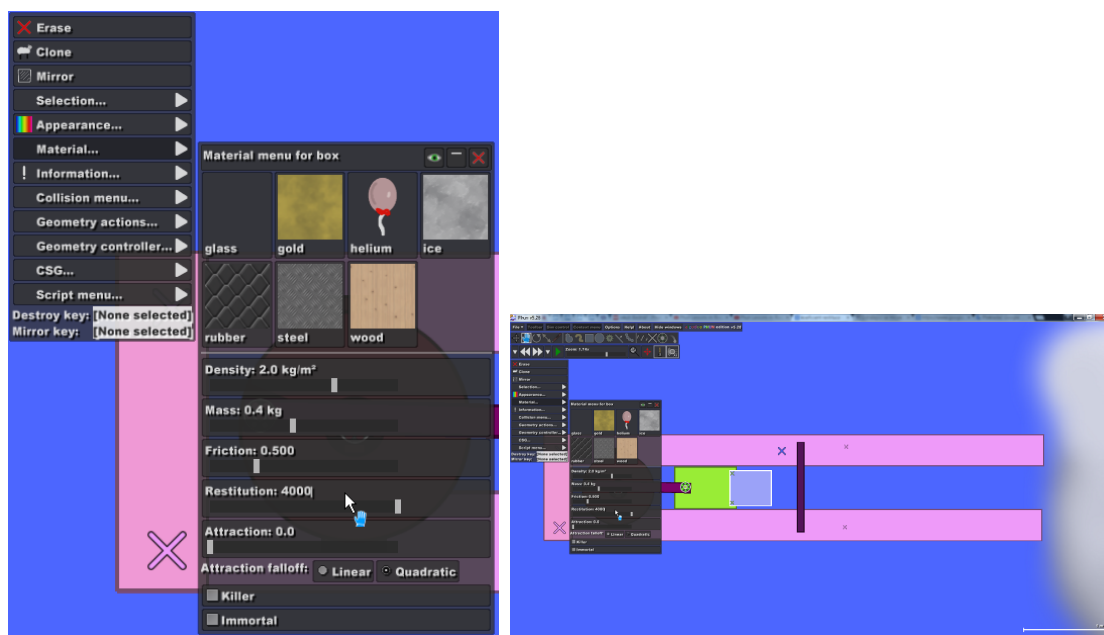
Dále uděláme pomocí obdélníku příčku z horního dílu na spodní díl hlavně. Příčka musí být v takové vzdálenosti aby se jí ve své krajní poloze píst nedotýkal. Ale nebudeme ji od krajní polohy pístu dělat moc vzdálenou. O tuto příčku se budou zarážet dělové koule. Budeme teď potřebovat sestavit ještě jeden obdélník, který bude ukotven na pístu a bude ve své krajní poloze zasahovat až za příčku. Až ho zkonstruuje, označíme ho spolu s příčkou a v *Collision menu* (*Kolize*) zaškrtneme možnost *No self-collision* (*Nekolidovat sám se sebou*). Postup máme ilustrovaný na obrázku 2.14. Tím docílíme, že ikdyž se objekty překrývají, nekolidují se sebou. Což si můžete vyzkoušet zapnutím animace.



Obrázek 2.14: Odstranění kolize dvou překrývajících se objektů

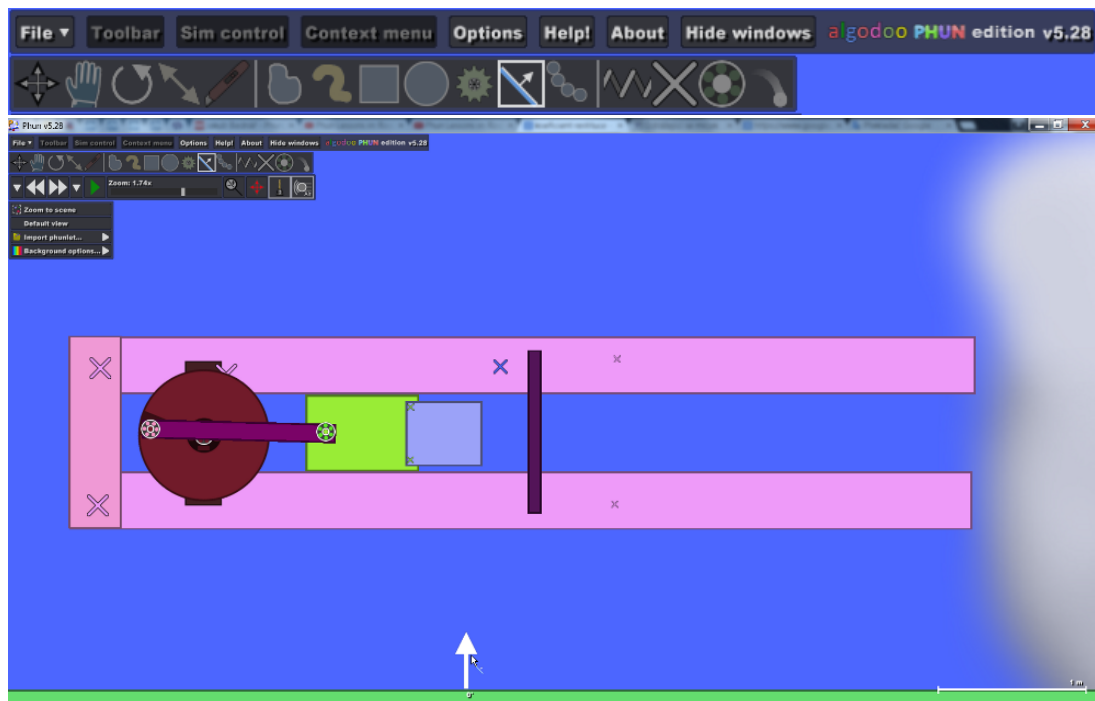
Horní i dolní část hlavně prodloužíme. Vnitřní mechanismus děla máme již hotový. Vytvořili jsme motor, který bude pohybovat pístem a obdélník spojený s pístem bude narážet do dělové koule a předá ji svou kinetickou energii. Množství předané energie můžeme buď upravit výkonem motoru nebo změnou hodnoty koeficientu restituce.

Při nedokonalé pružném rázu se velikost vzájemné rychlosti po rázu zmenší. To vyjádříme rovnicí $u_2 - u_1 = k \cdot (v_1 - v_2)$, kde u_1 a u_2 jsou rychlosti objektů před rázem, v_1 a v_2 jsou rychlosti objektů po rázu a $0 < k < 1$ je koeficient restituce. [5] Jak vidíme, při srážce dvou předmětů dochází pouze k částečnému předání energie a tudíž bude mít druhý objekt menší rychlost než první objekt před srážkou. Výsledná rychlost druhého tělesa samozřejmě závisí i na poměru hmotnosti obou těles. My chceme simulovat výbuch, který svou silou vystřelí dělovou kouli. Proto nastavíme koeficient restituce mnohonásobně větší než 1. Klikneme na obdélník překrývající příčku a v menu vybereme *Material* (*Materiál*) a klikneme na hodnotu vedle nápisu *Restitution*:. Tam napíšeme hodnotu 4000. Pro lepší orientaci máme toto menu zobrazené na obrázku 2.15.



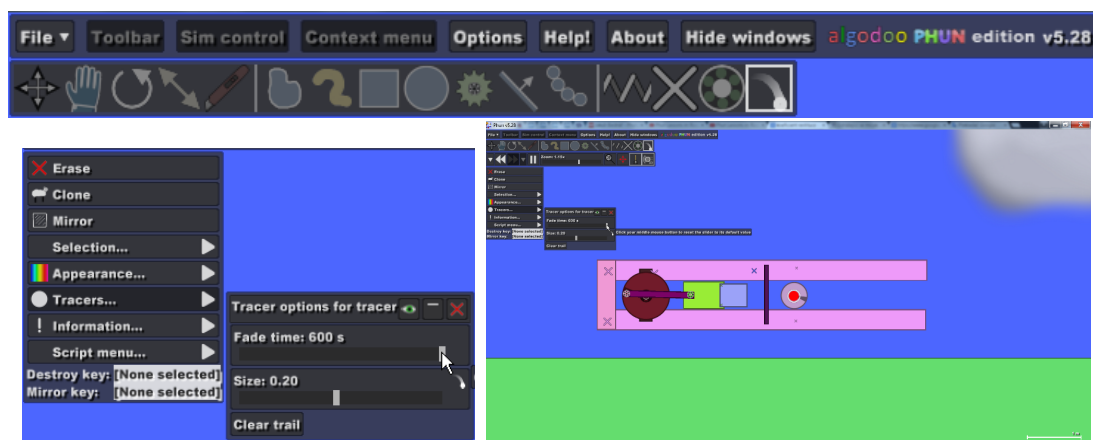
Obrázek 2.15: Nastavení koeficientu restituce

Dělo už máme hotovo. Máme ho zavěšené v prostoru. Pro lepší orientaci a srovnání dostřelu jednotlivých dělových koulí při různých úhlech naklonění děla, si vytvoříme rovinu na níž budou koule dopadat. Použijeme nástroj *Plane* (*Rovina*). Rovinu můžeme naklonit ale my budeme chtít rovinu s úhlem 0° , jak vidíme na obrázku 2.16. Po jejím vytvoření můžeme rovinu pomocí nástroje *Scale* (*Měřítka*) vytáhnout a přiblížit ji dělu.



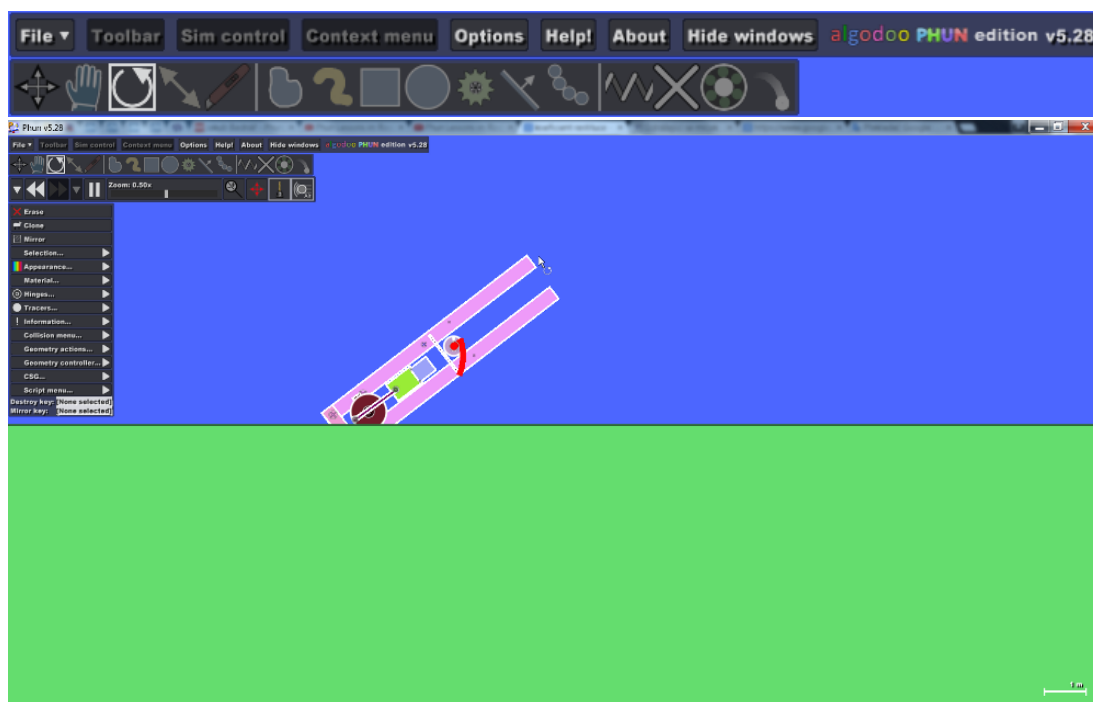
Obrázek 2.16: Vytvoření roviny

Nyní vytvoříme dělovou kouli. Použijeme nástroj *Circle* (*Kruh*) a umístíme ji do hlavního děla. Protože chceme sledovat trajektorii této dělové koule, umístíme na dělovou kouli stopu pomocí nástroje *Tracer* (*Stopovka*). Stopovku umístíme na dělovou kouli. Pak ji označíme a v levém menu, stejně jako na obrázku 2.17, vybereme *Tracers* (*Stopovka*) a nastavíme *Fade time* (*Doba trvání*) na maximální hodnotu. To nám zaručí, že při porovnávání trajektorií více dělových koulí nám nebude stopovka mizet.



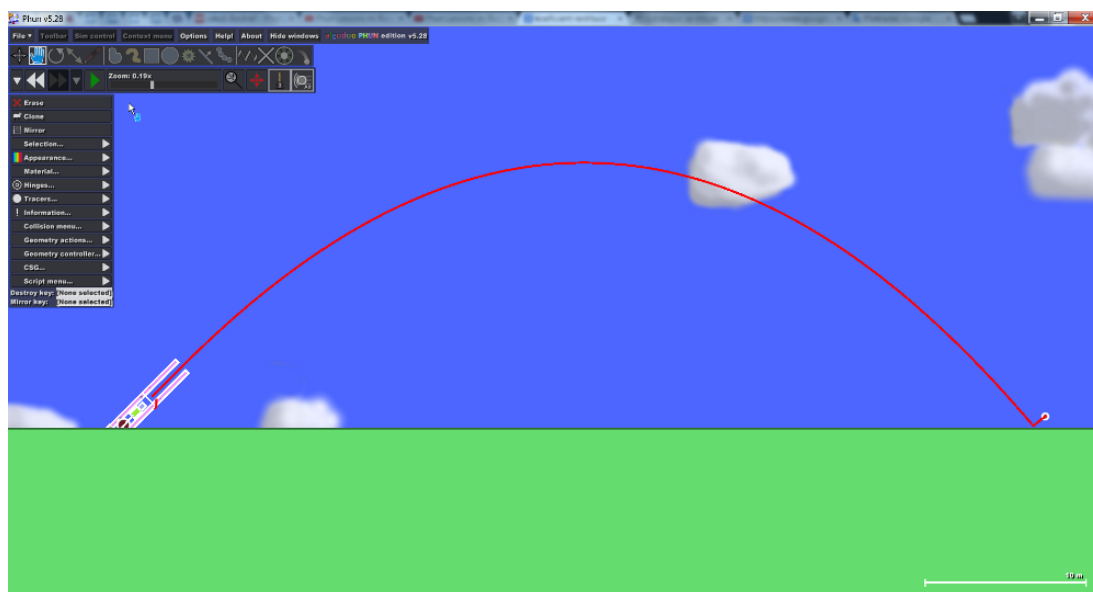
Obrázek 2.17: Vytvoření stopovky a její nastavení

Posledním krokem je naklonění děla a výstřel z něj. Před otočením musíme nejprve pomocí nástroje *Box* (*Obdélník*) označit celé dělo. Pak vybereme na nástrojové liště nástroj *Rotate* (*Otáčení*), klikneme levým tlačítkem myši na dělo a můžeme ho otáčet. Dostaneme podobný výsledek jako na obrázku 2.18. Pokud budeme mít dělo dostatečně oddálené bude se nám úhel měnit po 15° . Po přiblížení děla a následném použití nástroje *Rotate* (*Otáčení*) bude změna úhlu i v řádech desetin stupně.



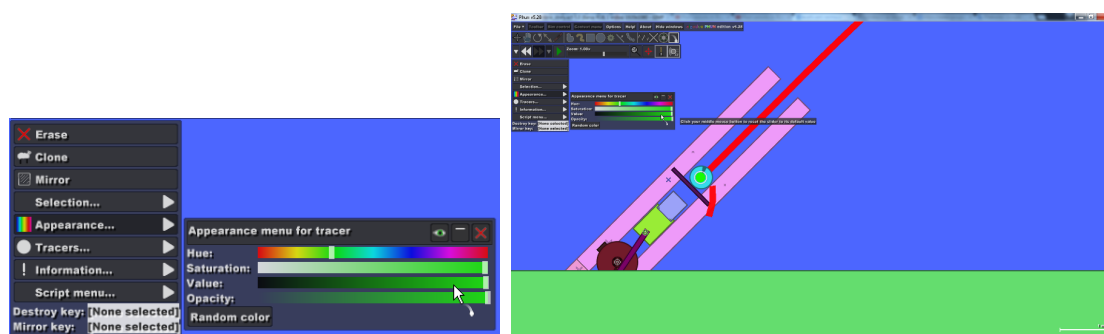
Obrázek 2.18: Otočení děla

Ted' už jen oddálíme dělo kolečkem myši, spustíme animaci, zmáčkneme tlačítko pro spuštění motoru (v našem případě tlačítko *šipka dolu*) a můžeme sledovat podobnou trajektorii té na obrázku 2.19.

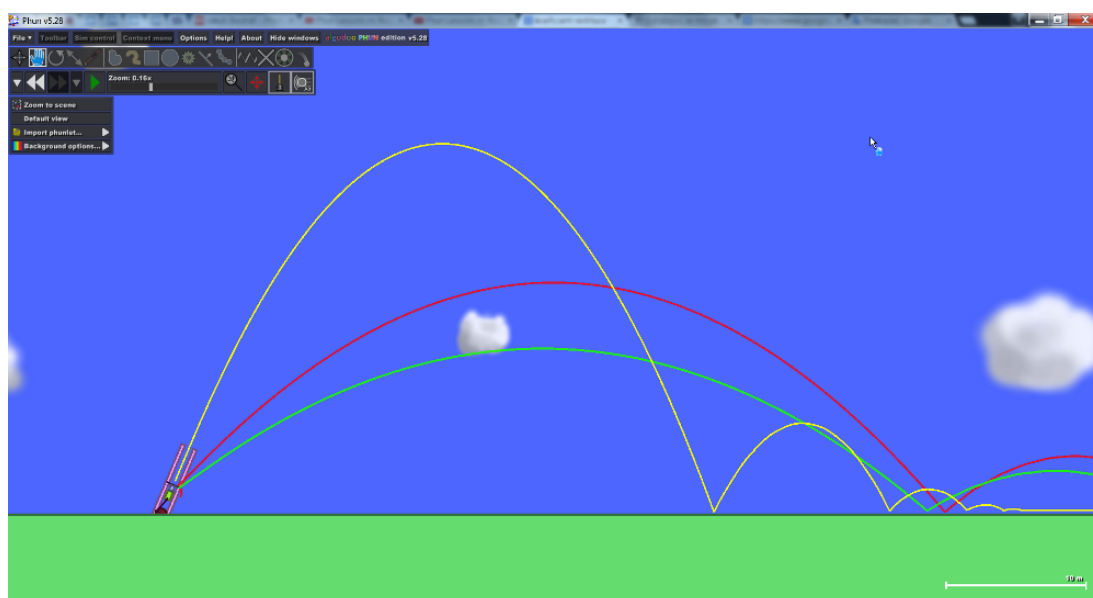


Obrázek 2.19: Trajektorie dělové koule

Pro porovnání různých trajektorií vytvoříme další dělovou kouli a umístíme na ní stopovku. Pokud stopovku označíme a v levém menu vybereme *Appearance* (*Vzhled a barvy*) můžeme změnit její barvu. Pak změníme náklon děla a můžeme znovu vystřelit. Ilustrace upřesňující umístění nastavení barev je na obrázku 2.20 a na obrázku 2.21 je porovnání trajektorií dělových koulí vystřelených pod různým úhlem. Takto vytvořený model najdete na CD (složka MODELÝ, soubor 02_Phun_sikmy_vrh_model.phz)



Obrázek 2.20: Změna barvy

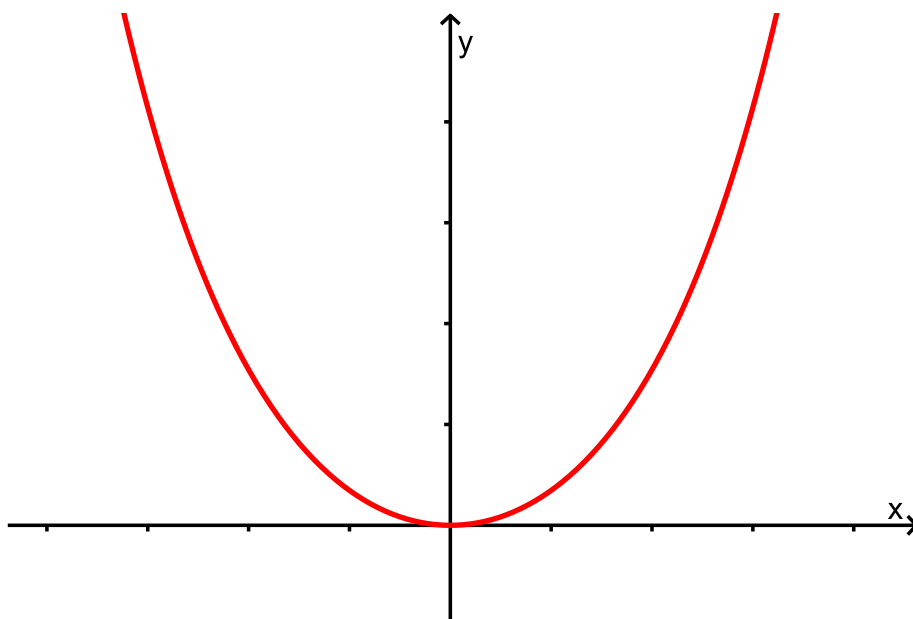


Obrázek 2.21: Porovnání trajektorií dělových koulí vystřelených pod různým úhlem

3 Řetězovka

Řetězovka je rovinná křivka tvaru ohebného volně visícího vlákna, zavěšeného ve dvou bodech (stejně či různě vysoko). [6]

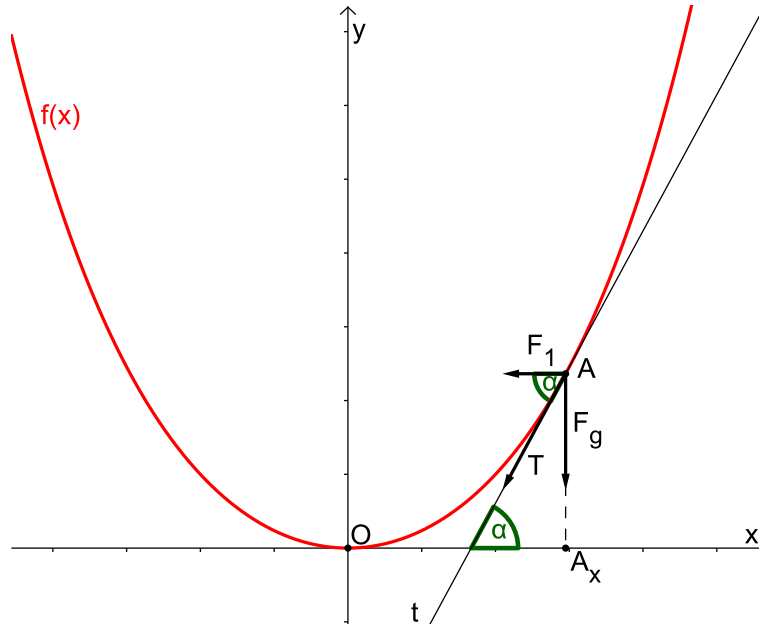
Pro lepší představu tohoto tvaru máme řetězovku na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Řetězovka

3.1 Odvození obecné rovnice řetězovky

Odvození rovnice řetězovky si můžeme ukázat například na zavěšeném kabelu elektrického vedení, jehož model vidíme na obr. 3.2. Na kabel v bodě A působí tahová síla T , která je způsobena váhou kabelu pod úrovní bodu A . Tahovou sílu T lze rozložit na dvě složky, jež jsou na sebe kolmé. Složku horizontální F_1 a složku vertikální (tíhovou sílu) F_g . [7] Rovnici budeme zjišťovat pomocí směrnice tečny t kabelu v bodě A . V následujících výpočtech označení kabelu $f(x)$ nahradíme znakem y , neboli $y = f(x)$.



Obrázek 3.2: Odvození rovnice řetězovky

Z výše uvedených informací a z obr. 3.2 je patrné, že můžeme sestavit rovnice:

$$F_g = T \cdot \sin(\alpha) = \rho_l \cdot s(x) \quad (3.1)$$

$$F_1 = T \cdot \cos(\alpha) = c, \quad (3.2)$$

kde ρ_l je délková hustota kabelu ($[\rho_l] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$) [7], $s(x)$ je délka kabelu, jenž působí tíhovou silou a spočítáme ji pomocí vzorce $s(x) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$, kde a, b jsou x -ové souřadnice krajních bodů kabelu. Díky vlastnosti ohebnosti kabelu se velikosti horizontální síly působící v každém bodě kabelu vyrovnávají. Hodnota horizontální síly F_1 bude proto v každém bodě kabelu stejná (konstantní). V rovnici 3.2 je tedy c konstanta.

Využijeme vzorce $k_t = \tan(\alpha) = f'(A)$, kde k_t je směrnice tečny t :

$$\tan(\alpha) = \frac{F_g}{F_1} = \frac{T \cdot \sin(\alpha)}{T \cdot \cos(\alpha)} = \frac{\rho_l \cdot s(x)}{c} \quad (3.3)$$

Za $s(x)$ dosadíme výše zmíněný vzorec:

$$\tan(\alpha) = \frac{\rho_l}{c} \cdot \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx, \quad (3.4)$$

kde a a b jsou x -ové souřadnice krajních bodů kabelu. V našem případě $a = 0$ a $b = A_x$.

Znovu využijeme výše zmíněný vzorec $k_t = \tan(\alpha) = f'(A)$, kde k_t je směrnice tečny t . Využijeme i vztahu $f' = \frac{dy}{dx}$. Dostaneme diferenciální rovnici, v níž se vyskytuje integrál:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho_l}{c} \cdot \int_0^{A_x} \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \quad (3.5)$$

Pro odstranění integrálu obě strany rovnice zderivujeme:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho_l}{c} \cdot \sqrt{1 + (y')^2} \quad (3.6)$$

Diferenciální rovnici 3.6 dopočítáme níže za pomoci programu Maple:

Pro lepší přehlednost následujících výpočtů provedeme substituci:

$$u = \frac{\rho_l}{c}$$

Po substituci získáme tvar diferenciální rovnice:

$$difrov := \frac{d^2}{dx^2}y(x) = u \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2}$$

Řešením rovnice je funkce:

$$res := y(x) = \frac{\cosh(-C1 \, u + ux)}{u} + C2$$

Po integraci odstraníme integrační konstanty $C1$ a $C2$. Nejnižší bod funkce si umístíme do počátku soustavy souřadnic. Takže bude mít souřadnice $[0; 0]$. V nejnižším

bodě funkce je její tečna vodorovná, což znamená, že derivace v tomto bodě bude rovna 0. Po derivaci $y(x)$ dostaneme $y'(x) = \sinh(C1 \cdot u + u \cdot x)$. V nejnižším bodě tedy $y'(x) = 0$ neboli $\sinh(C1 \cdot u + u \cdot x) = 0$. Z definice hyperbolického sinu vyplývá, že $\sinh(a) = 0$ právě tehdy, když $a = 0$. Tudíž $C1 \cdot u + u \cdot x = 0$. Jak je výše uvedeno $x = 0$ proto $C1 \cdot u = 0$. Konstanta u nám uvádí poměr délkové hustoty kabelu ku konstantní horizontální síle. Z toho vyplývá, že u nebude nikdy rovno 0 a proto $C1 = 0$. Dostali jsme tvar $y(x) = \frac{\cosh(u \cdot x)}{u} + C2$. Dalším krokem je odstranění konstanty $C2$. Nejnižší bod funkce jsme si umístili do počátku soustavy souřadnic, proto $y(0) = 0$ právě tehdy, když $\frac{\cosh(u \cdot 0)}{u} + C2 = 0$. Z definice hyperbolického cosinu plyne, že $\cosh(0) = 1$. To znamená, že $\frac{1}{u} + C2 = 0$. Dostaneme výsledek $C2 = -\frac{1}{u}$. V programu Maple proto využijeme následující kód.

```
> _C1:=0,
> _C2:=-1/u;
```

$$_C1 = 0, \quad _C2 = -u^{-1}$$

Dostaneme funkci bez integračních konstant:

$$res2 := y(x) = \frac{\cosh(ux)}{u} - u^{-1}$$

Abychom se zbavili zlomku provedeme substituci:

$$u = a^{-1}$$

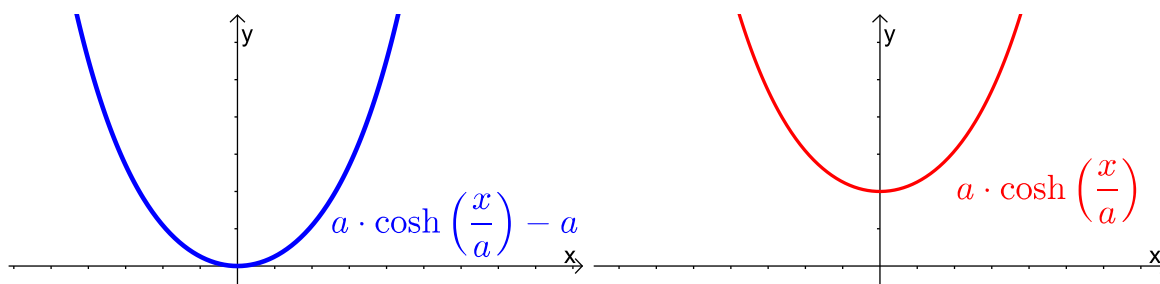
Výsledný tvar bude:

$$res3 := y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) - a$$

Funkci můžeme převést i na exponenciální tvar:

$$ex := y(x) = \frac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2 \right)$$

Nyní máme odvozenou obecnou rovnici řetězovky v exponenciálním tvaru i ve tvaru hyperbolického cosinu. Můžeme se setkat i s rovnicí ve tvaru $a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, kde a je poloměr křivosti. Poloměr křivosti je vzdálenost mezi středem oskulační kružnice a bodem T , přičemž oskulační kružnice je taková kružnice, která nejlépe vystihuje křivku v okolí daného bodu T . [8] Vrchol řetězovky v tomto tvaru nebude ležet v počátku soustavy souřadnic. Bude stále ležet na ose y ale jeho y -ová souřadnice bude rovna a . Pro rovnici řetězovky ve tvaru $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ bude platit stejné tvrzení. Demonstrace tohoto tvrzení je na obrázku 3.3.

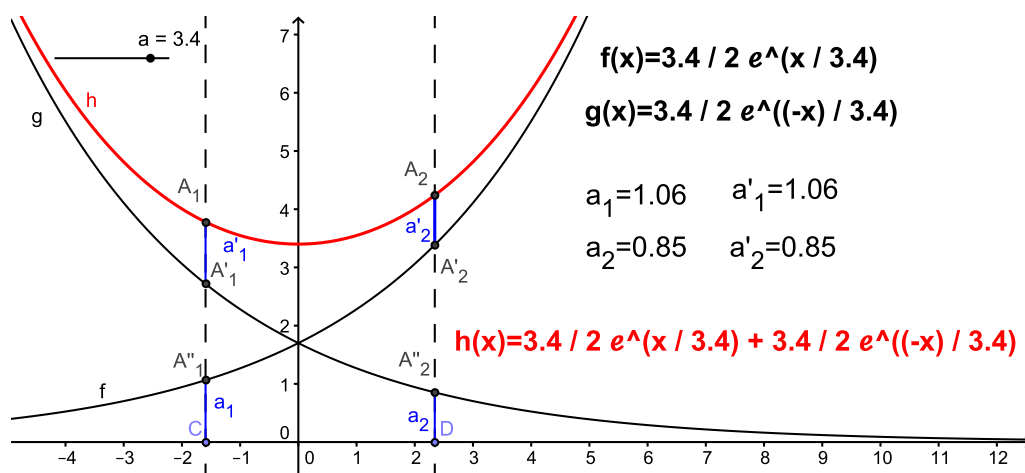


Obrázek 3.3: Srovnání obecných rovnic řetězovky

3.2 Vybrané vlastnosti řetězovky

Z exponenciálního tvaru obecné rovnice řetězovky můžeme postřehnout, že by se řetězovka dala interpretovat také jako aritmetický průmět y -ových souřadnic rostoucí a klesající exponenciály, které se odlišují pouze ve znaménku v exponentu. Obrázek 3.4 nám zmíněnou vlastnost demonstruje. Exponenciály na obrázku 3.4 jsou již, kvůli lepší přehlednosti a názornosti, vyděleny dvěma. Pro získání jejich aritmetického průměru

y -ových souřadnic je tedy stačí pouze sečíst. Způsob použitý na obrázku 3.4 je porovnání úseček a_1 a a'_1 . Pokud má být řetězovka aritmetickým průměrem exponenciály rostoucí a klesající musí se $a_1 = a'_1$. Totéž musí platit pro všechny dvojice úseček, které leží na jedné kolmici na osu x , z nichž jedna je ohraničena osou x a exponenciálou bližší k ose x a druhá je ohraničena vzdálenější exponenciálou od osy x a řetězovkou (například a_2 a a'_2).

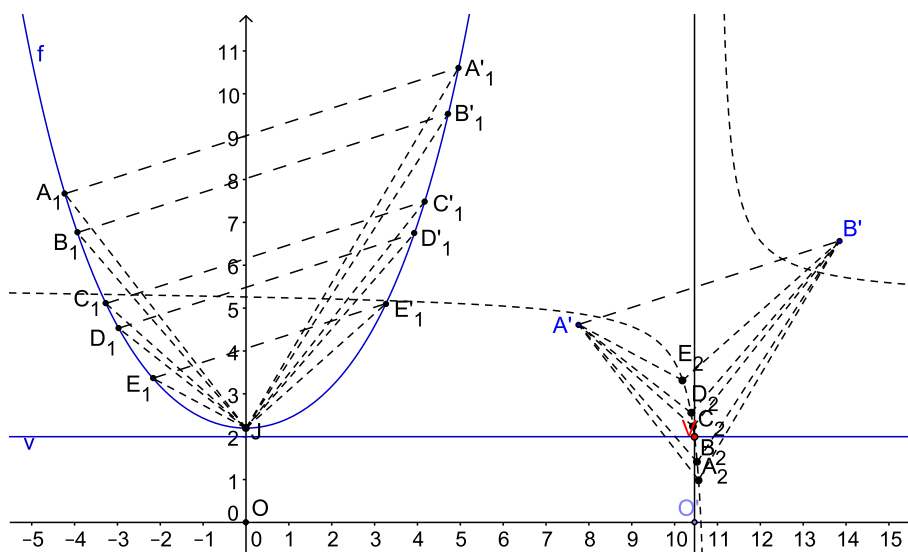


Obrázek 3.4: Řetězovka jako aritmetický průměr exponenciál, převzato z [10]

Řetězovka je, jak je patrné například na obrázcích 3.1, 3.2, 3.4, osově souměrná podle osy y . Zároveň bod ležící na ose y je nejhlubším bodem (vrcholem) řetězovky. Řetězovka je určena parametrem nebo dvěma závěsnými body a vrcholovou tečnou. [6]

Pokud bychom drželi dva konce zavěšeného řetězu a přibližovali bychom je k sobě, je tvar křivky, která je reprezentována oním zavěšeným řetězem, popsán stále toutéž rovnicí, v níž se mění pouze parametr a . [9]

Na základě výše zmíněné podobnosti řetězovek můžeme pomocí jedné řetězovky najít vrchol druhé řetězovky, u níž známe jen dva body, které jí náležejí. Nástin řešení je na obrázku 3.5. Podrobné řešení je uvedeno v [10] na stranách 14 a 15.

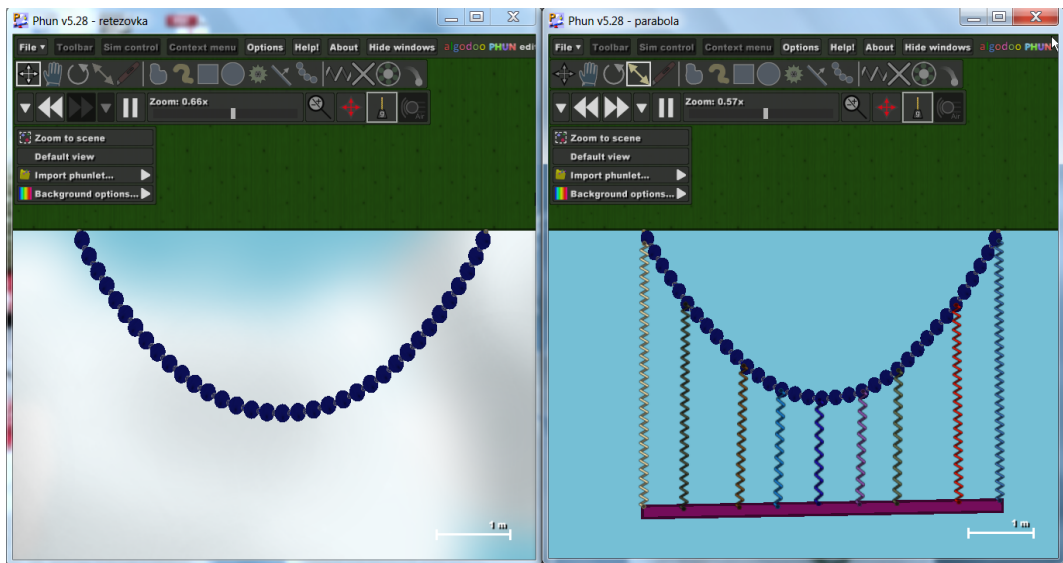


Obrázek 3.5: Zjištění vrcholu pomocí podobnosti řetězovek, převzato z [10]

3.3 Řetězovka nebo parabola?

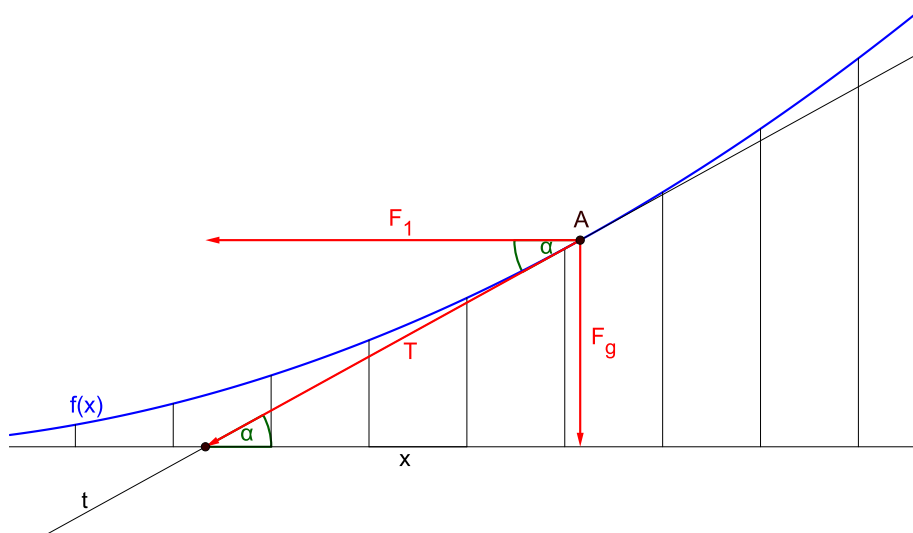
Na první pohled se dá řetězovka lehce zaměnit s parabolou. Potvrzuje to i historie této rovinné křivky. V jedné staré matematické úloze bylo úkolem matematicky vyjádřit tvar křivky, kterou vytvoří řetěz nebo lano, jehož konce jsou upevněny stejně vysoko. Roku 1638 tvrdil Galileo Galilei, že tento problém vyřešil. Prohlásil, že řetěz zavěšený v gravitačním poli zaujme tvar paraboly (s obecnou rovnicí $y = A \cdot x^2$). Ovšem roku 1669 ukázal německý matematik Joachim Jjingius, že se Galileo mýlil. Správné řešení této úlohy našli v roce 1691 Gottfried Leibniz, Christiaan Huygens, David Gregory a Johann Bernoulli. [9]

Zavěšený řetěz nebo lano jsou zatíženy pouze svou vlastní vahou. Jak je to ale u lan visutých mostů, u nichž se může na první pohled zdát, že mají také tvar řetězovky? Oproti zavěšenému řetězu jsou však lana visutých mostů zatížena nejen vlastní vahou ale také vahou samotné mostovky. [11] Už z obrázku 3.6 je zřetelné, že tato skutečnost má vliv na tvar prověšení lan visutých mostů.



Obrázek 3.6: Srovnání modelů zavěšeného lana a lana u visutého mostu

Odvoďme si tedy rovnici lana u visutého mostu. Budeme vycházet z obrázku 3.7. Na lano visutého mostu působí v bodě A tahová síla T . Můžeme ji rozložit na dvě na sebe kolmé složky. Na horizontální sílu F_1 a vertikální tíhovou sílu F_g .



Obrázek 3.7: Model visutého mostu

Z obrázku je zřejmé, že můžeme sestavit rovnice:

$$F_g = T \cdot \sin(\alpha) = \rho_l \cdot x \quad (3.7)$$

$$F_1 = T \cdot \cos(\alpha) = c, \quad (3.8)$$

kde ρ_l je délková hustota lana ($[\rho_l] = kg \cdot m^{-1}$) a c je konstanta. [7]

Pro další postup využijeme vztahu:

$$k_t = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = f'(A), \quad (3.9)$$

kde k_t je směrnice tečny t .

Dostaneme rovnici:

$$\tan(\alpha) = \frac{T \cdot \sin(\alpha)}{T \cdot \cos(\alpha)} \quad (3.10)$$

Po dosazení rovnic 3.7 a 3.8 do rovnice 3.10:

$$\tan(\alpha) = \frac{\rho_l \cdot x}{c} \quad (3.11)$$

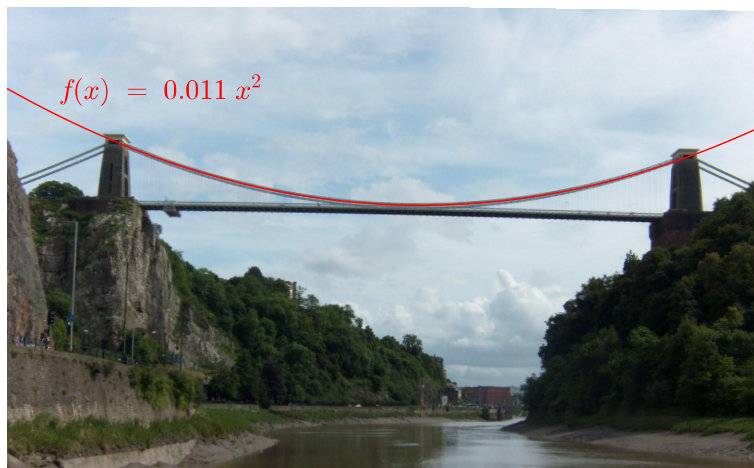
Opět využijeme vztahu 3.9 a upravíme rovnici 3.11 do tvaru:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho_l}{c} \cdot x \quad (3.12)$$

Posledním krokem je zintegrování rovnice 3.12:

$$y = \frac{\rho_l}{2c} \cdot x^2 \quad (3.13)$$

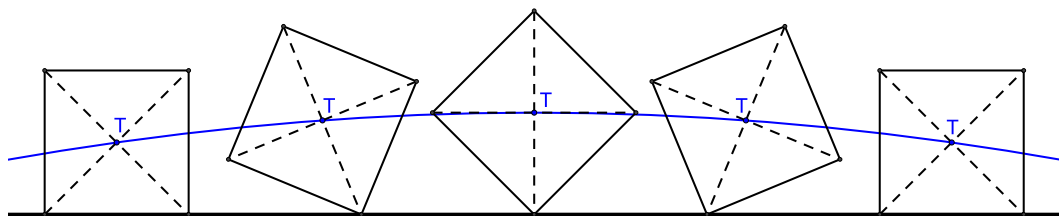
Jak jsme zjistili, lana u visutých mostů nemají tvar řetězovky. Rovnice 3.13 je rovnicí paraboly. Na obrázku 3.8 máme Cliftonský visutý most proložený parabolou v programu GeoGebra.



Obrázek 3.8: Cliftonsý most, převzato z [12]

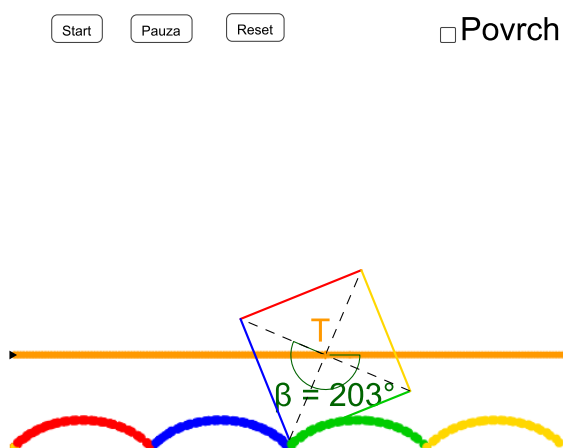
3.4 Čtvercové kolo

Naprostá většina kol, která můžeme ve svém okolí vidět mají kulatá kola. Proto na otázku, zda se dá hladce jezdit i na bicyklu se čtvercovými koly, téměř každý odpoví záporně. Hladká jízda závisí na tom aby kolo při jízdě neustále nepohazovalo nahoru a dolů. Při jízdě s kruhovými koly na rovném povrchu se těžiště kola pohybuje vpřed po přímce. Na rovném povrchu se plynule pohybovat na bicyklu se čtvercovými koly opravdu nedá. Jak naznačuje i obrázek 3.9 těžiště bicyklu se čtvercovými koly se na rovném povrchu pohybuje po křivce. [9]



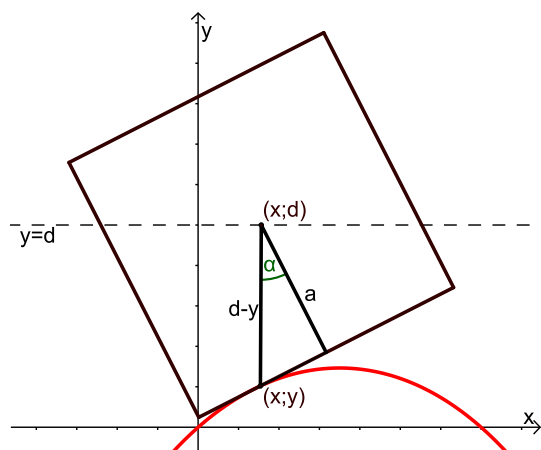
Obrázek 3.9: Trajektorie těžiště čtvercového kola na rovném povrchu

Co ale kdybychom upravili povrch? Zkusme najít povrch vhodný pro jízdu na bicyklu se čtvercovými koly. Takovýto povrch musí splňovat hned několik podmínek. Těžiště čtvercového kola při pohybu vpřed musí zůstat stále ve stejné výšce (y -ová souřadnice těžiště musí být konstantní). Strana čtvercového kola, která je v kontaktu s povrchem, musí být tečnou povrchu v bodě dotyku. Kolmice s osou x procházející bodem dotyku musí procházet i těžištěm kola. Již teď si lze představit, že naším povrchem bude řada "kopečků". Poslední podmínkou je, že délka jednotlivých "kopečků" musí být rovna délce strany čtvercového kola. Povrch vhodný pro hladkou jízdu na bicyklu se čtvercovým kolem vymodelovaný v programu GeoGebra je na obrázku 3.10. Tento model najdete na CD (složka MODELÝ, soubor 03_ctvercove_kolo_model.ggb)



Obrázek 3.10: Model povrchu vhodného pro jízdu na čtvercovém kole

Představu o tvaru povrchu vhodného pro jízdu na čtvercovém bicyklu již máme. Teď se ho pokusíme matematicky vyjádřit. Pomůže nám k tomu obrázek 3.11.

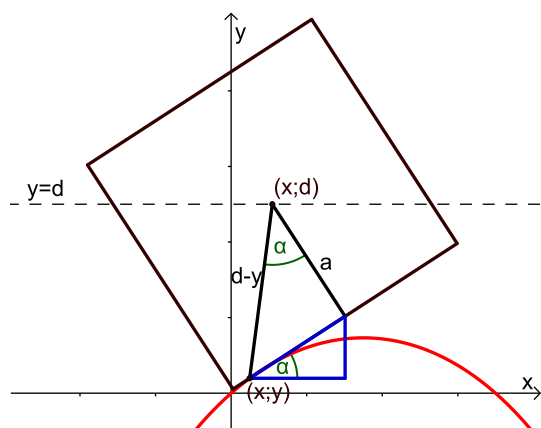


Obrázek 3.11: Odvození rovnice povrchu vhodného pro jízdu na čtvercovém kole

Z obrázku je patrné, že můžeme a vyjádřit jako:

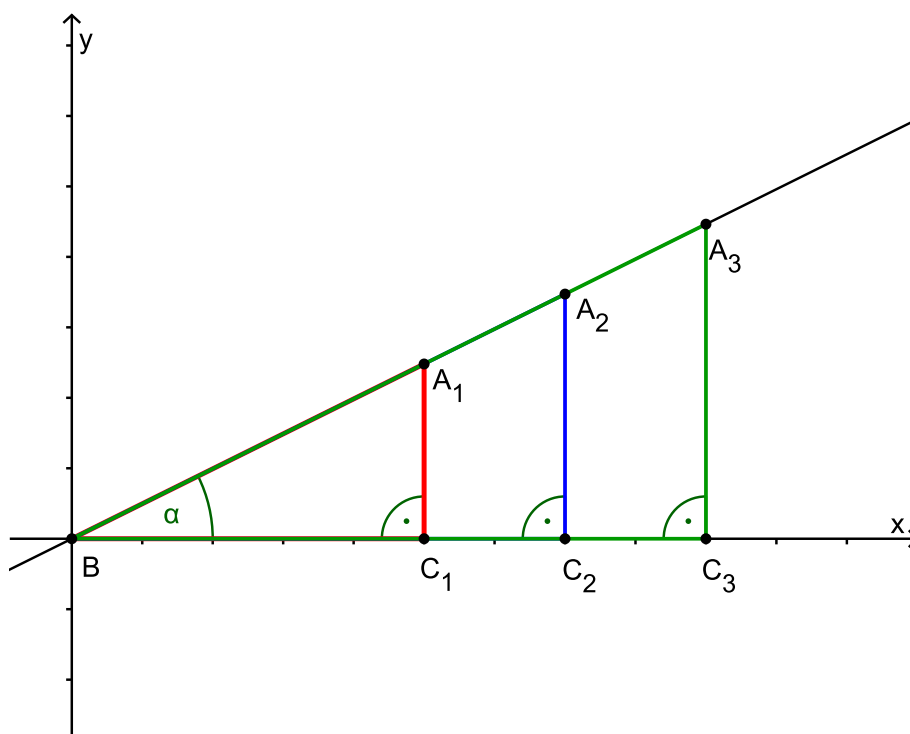
$$a = (d - y) \cdot \cos(\alpha) \quad (3.14)$$

V obrázku 3.11 můžeme zkonstruovat ještě jeden pravoúhlý trojúhelník a dostaneme obrázek 3.12.

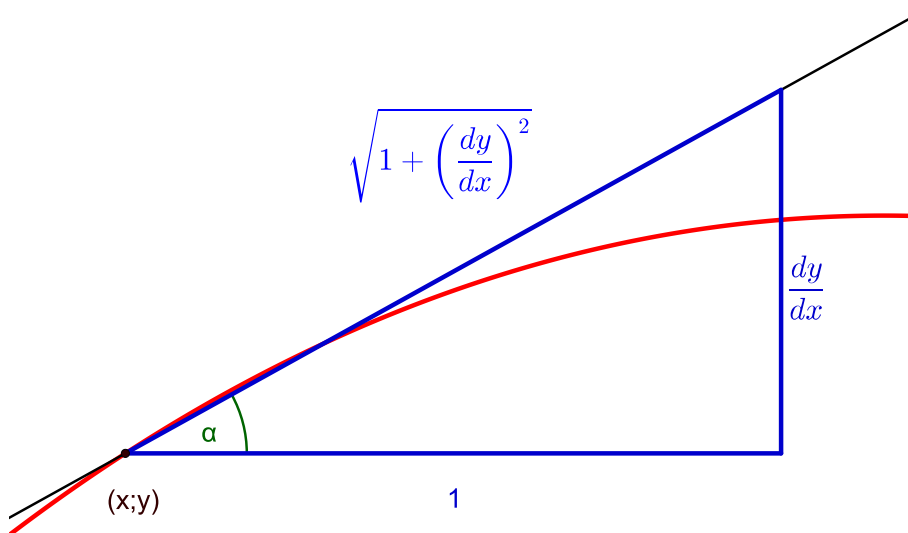


Obrázek 3.12: Obrázek 3.11 doplněný o druhý pravoúhlý trojúhelník

Při přechodu z obrázku 3.12 na obrázek 3.14 využijeme podobnosti trojúhelníků ilustrovanou na obrázku 3.13. Pokud máme daný úhel α při vrcholu B pravoúhlého trojúhelníku A_1BC_1 , jsou trojúhelníky A_1BC_1 , A_2BC_2 a A_3BC_3 podobné podle věty *uu* (pravý úhel a úhel α). Můžeme proto zkonstruovat takový podobný trojúhelník k modrému trojúhelníku na obrázku 3.12, který bude mít délku jedné přepony rovnu 1. Libovolnou přímku můžeme zadat ve tvaru $y = k \cdot x$, kde k je směrnice přímky. Pokud je délka horizontální odvěsny rovna 1, pak délka vertikální odvěsny je rovna právě k . Využijeme vztahu $k = \tan(\alpha) = \frac{dy}{dx}$. Odtud jsme dostali délku vertikální odvěsny $\frac{dy}{dx}$. Délka přepony je pak, dle Pythagorovy věty, $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Takový trojúhelník máme na obrázku 3.14.



Obrázek 3.13: Využití podobnosti trojúhelníků



Obrázek 3.14: Trojúhelník podobný s pravoúhlým trojúhelníkem z obrázku 3.12

Po těchto úpravách doplníme rovnici 3.14 na tvar:

$$a = (d - y) \cdot \cos(\alpha) = (d - y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad (3.15)$$

Rovnici 3.15 můžeme upravit vynásobením celé rovnice $\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{a}$ a umocnění rovnici na druhou. Rovnice pak bude mít tvar:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d - y}{a}\right)^2 \quad (3.16)$$

Dále si z rovnice 3.16 osamostatníme na levé straně rovnice $\frac{dy}{dx}$ a odmocníme:

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = \sqrt{\left(\frac{d - y}{a}\right)^2 - 1} \quad (3.17)$$

Abychom odstranili absolutní hodnotu, musíme zohlednit znaménka proměnných dx

a dy . Proměnná dx je kladná, zatímco dy , protože y -ová souřadnice se během pohybu čtverce po hledaném povrchu zmenšuje, je záporná. Proto po odstranění absolutní hodnoty dostaneme tvar:

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\left(\frac{d-y}{a}\right)^2 - 1} \quad (3.18)$$

Nyní vyřešíme diferenciální rovnici 3.18 pomocí metody separace proměnných. Nejprve osamostatníme na levé straně rovnice dx :

$$dx = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{d-y}{a}\right)^2 - 1}} dy \quad (3.19)$$

Poté obě strany rovnice zintegrujeme:

$$\int dx = \int \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{d-y}{a}\right)^2 - 1}} dy \quad (3.20)$$

Při řešení použijeme substituci $u = \frac{d-y}{a}$ a $dy = -a \cdot du$:

$$\int dx = \int \frac{a}{\sqrt{u^2 - 1}} du \quad (3.21)$$

Po zintegrování dostaneme:

$$a \cdot \cosh^{-1}(u) = x + c \quad (3.22)$$

$$a \cdot \cosh^{-1}\left(\frac{d-y}{a}\right) = x + c, \quad (3.23)$$

kde $\cosh^{-1}$ je inverzní funkce k hyperbolickému kosinu a c je konstanta.

Postupně vyjádříme proměnnou y :

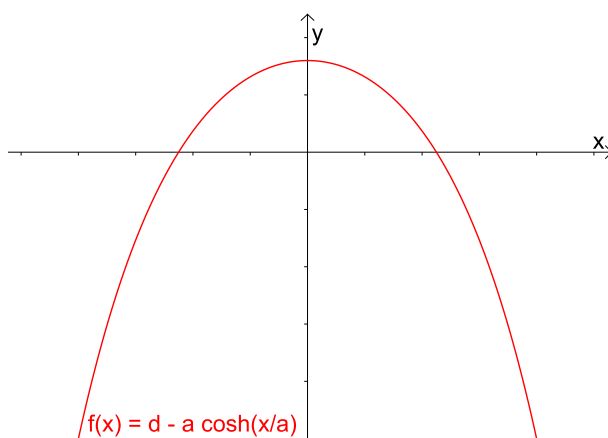
$$\cosh^{-1}\left(\frac{d-y}{a}\right) = \frac{x}{a} + c \quad (3.24)$$

$$\frac{d-y}{a} = \cosh\left(\frac{x}{a} + c\right) \quad (3.25)$$

$$d-y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a} + c\right) \quad (3.26)$$

$$y = d - a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a} + c\right) \quad (3.27)$$

Rovnice 3.27 je rovnicí křivky, která tvoří náš hledaný povrch. Výsledný tvar rovnice máme zobrazený na obrázku 3.15. Z obrázku i rovnice je patrná podobnost s řetězovkou. A skutečně se o ní jedná. Jen je obrácena vzhůru nohama. Podobným způsobem lze zkonstruovat povrch pro kolo libovolného pravidelného n -úhelníku. Povrch se s vyšším počtem vrcholů pravidelného n -úhelníku zplošťuje a přibližuje se přímce. Problém je pouze s rovnostranným trojúhelníkem, který při převalování bude zadržávat rohy neprve o vzestupný oblouk a pak o sestupný. [9] V Matematickém muzeu v New Yorku můžete takový povrch i kola vidět. Na obrázku 3.16 jsou zachyceny.



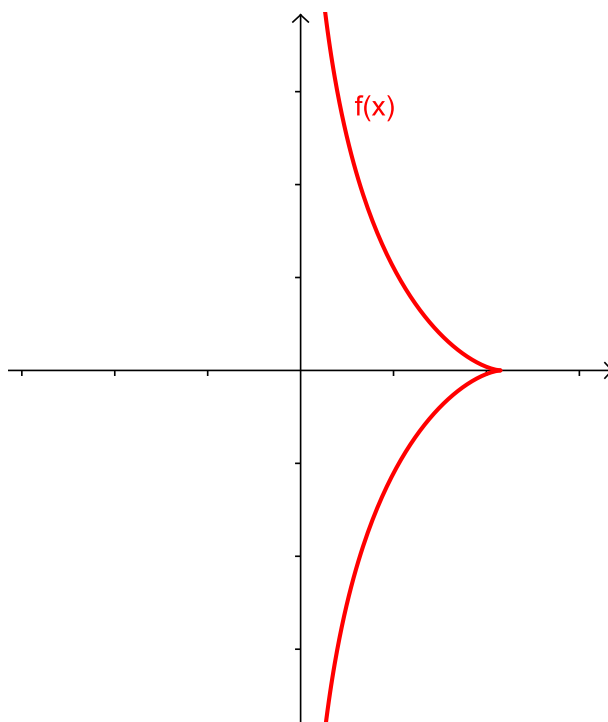
Obrázek 3.15: Obrácená řetězovka



Obrázek 3.16: Kola v Matematickém muzeu v New Yorku, převzato z [13]

4 Traktrix

Traktrix je rovinná křivka, jejíž tečny mají od tečného bodu k průsečíku s řídící křivkou stálou délku a . Pro lepší představu tohoto tvaru ji máme zobrazenou na obrázku 4.1. [6]

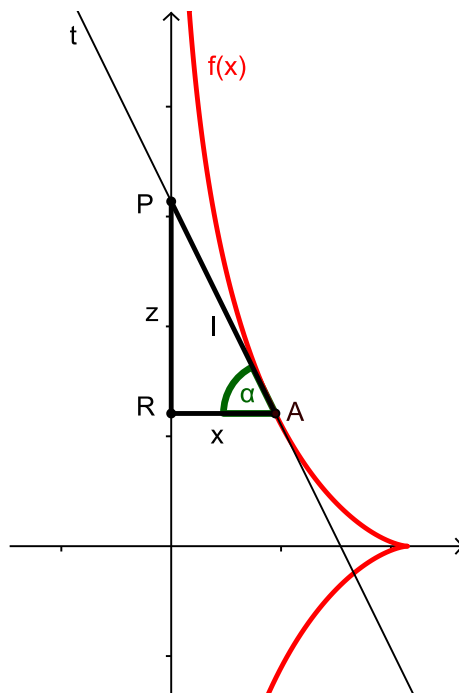


Obrázek 4.1: Traktrix

4.1 Odvození obecné rovnice traktrix

K odvození obecné rovnice traktrix nám pomůže obr. 4.2. Vidíme funkci traktrix $f(x)$, tečný bod A a pravoúhlý trojúhelník tvořený stranami x , z a l , kde x je x -ová souřadnice bodu A , l je úsečka ležící na tečně t křivky $f(x)$ v bodě A , jejíž velikost je $|AP|$, kde P

je průsečík tečny s osou y , a z je úsečka o velikosti $|RP|$, kde R má souřadnici $x = 0$ a y -ovou souřadnici má stejnou jako bod A . [14]



Obrázek 4.2: Odvození rovnice tratrix

Z obr. 4.2 je patrné, že můžeme sestavit následující rovnice:

$$\tan(\alpha) = \frac{z}{x} \quad (4.1)$$

$$z = \sqrt{l^2 - x^2} \quad (4.2)$$

Dosazením z rovnice 4.2 do rovnice 4.1 dostaneme::

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x} \quad (4.3)$$

Využijeme vzorce $k_t = \tan(\alpha) = f'(A)$

$$y' = \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x} \quad (4.4)$$

Zbytek výpočtu provedeme v programu Maple:

$$dy := -\frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x}$$

Rovnici zintegrujeme a dostaneme:

$$y := -\sqrt{l^2 - x^2} + l^2 \ln \left(\frac{2l^2 + 2\sqrt{l^2}\sqrt{l^2 - x^2}}{x} \right) (\sqrt{l^2})^{-1} + c$$

Pomocí vzorců pro počítání součtů a rozdílů logaritmů funkci upravíme na tvar:

$$y := l \ln(2) + l \ln(l) + l \ln(\sqrt{l^2 - x^2} + l) - l \ln(x) - \sqrt{l^2 - x^2} + c$$

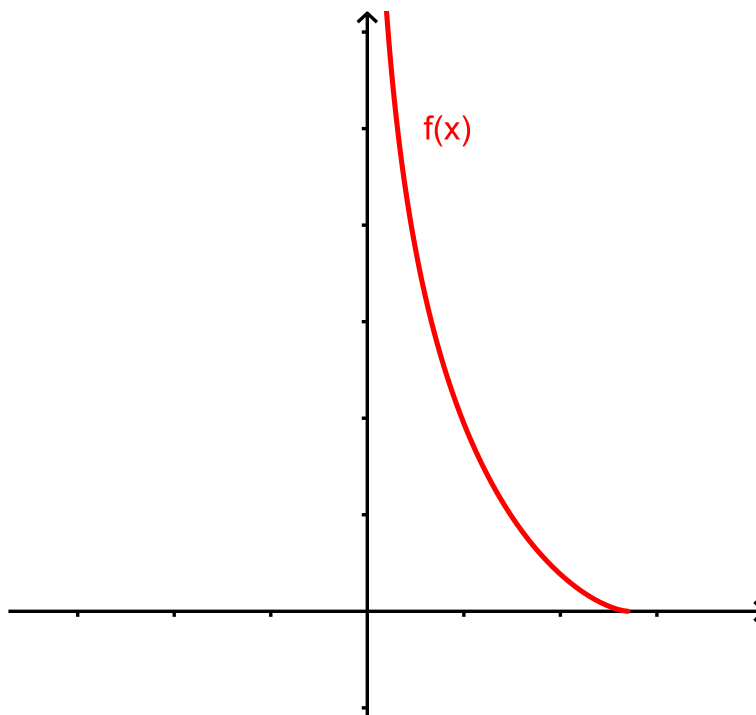
Konstantu c zvolíme tak abychom eliminovali první a druhý člen funkce:

$$c := -l \ln(2) - l \ln(l)$$

Dostali jsme obecnou rovnici funkce traktrix:

$$Tratrix := l \ln \left(\frac{\sqrt{l^2 - x^2} + l}{x} \right) - \sqrt{l^2 - x^2}$$

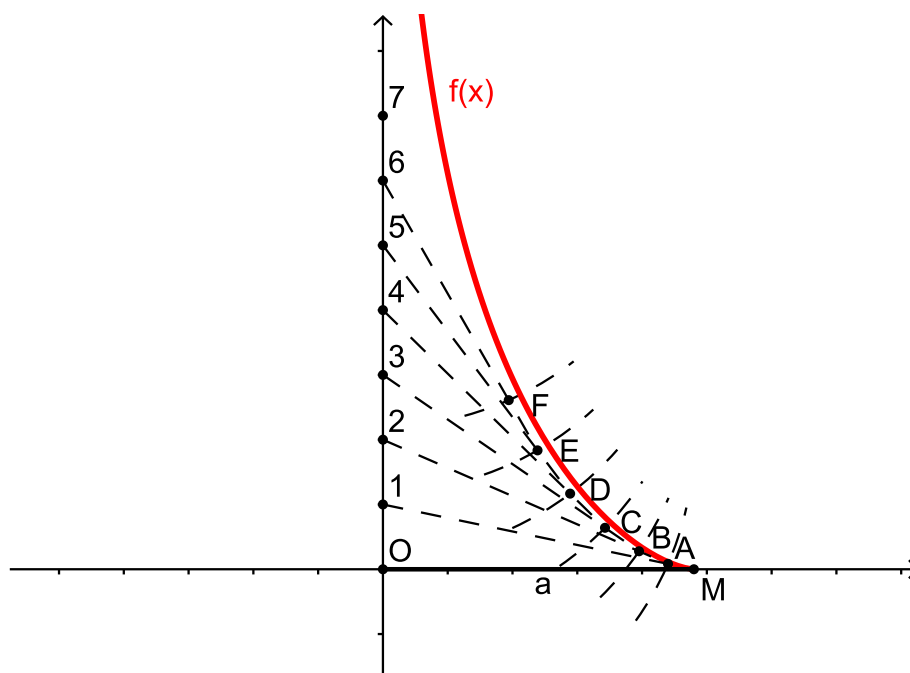
Geometrický tvar obecné rovnice traktrix 4.1 máme zobrazen na obrázku 4.3.



Obrázek 4.3: Grafické zobrazení výsledné funkce traktrix

4.2 Vybrané vlastnosti traktrix

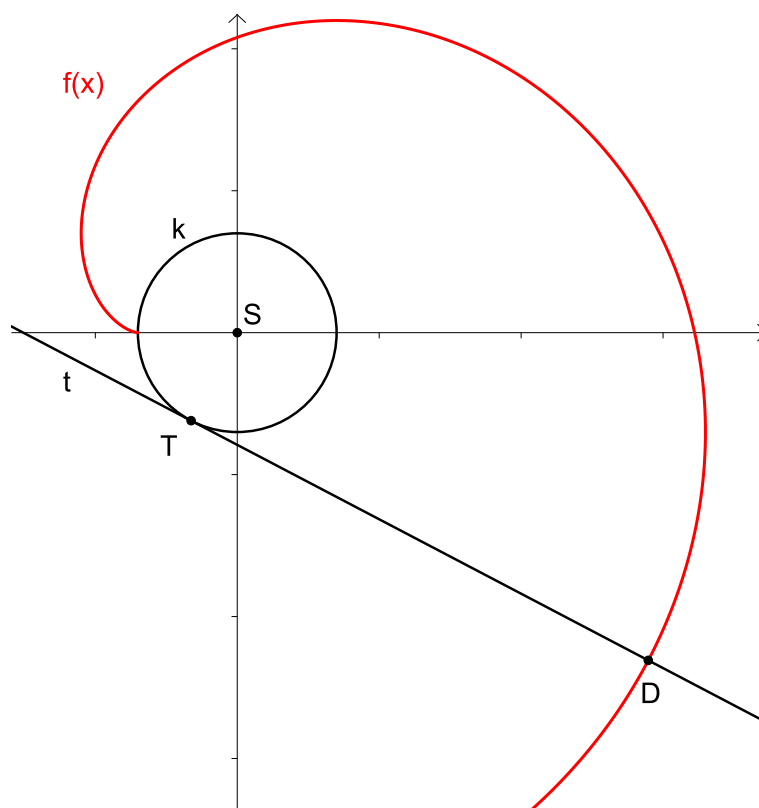
Všechny traktrix si jsou podobné. Liší se pouze v parametru a . Traktrix můžeme přibližně zkonstruovat pomocí následujícího postupu zobrazeného na obrázku 4.4. Nejprve si na osu y nanese body 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7. Na ose x musíme zkonstruovat bod M o souřadnicích $[a; 0]$, kde a je parametr křivosti traktrix. Spojíme body 1 a M . Z bodu 2 sestrojíme kružnici o poloměru a a dostaneme průsečík A s úsečkou $1M$. Pak spojíme bod 2 s bodem A a z bodu 3 sestrojíme kružnici opět o poloměru a . Takto získáme průsečík B . Opakováním výše popsaného postupu získáme průsečíky C , D , E a F . Sestrojíme-li křivku procházející body A , B , C , D , E a F dostaneme přibližný tvar traktrix. Na obrázku 4.4 vidíme, že body A , B , C , D , E a F přibližně kopírují tvar traktrix $f(x)$ ale neleží na ní. [6]



Obrázek 4.4: Konstrukce přibližného tvaru traktrix

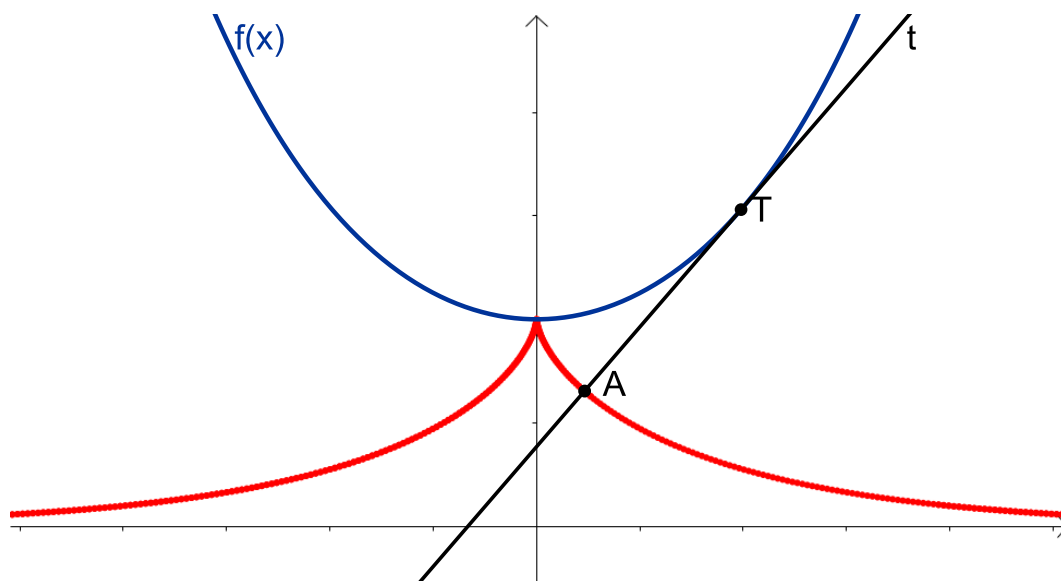
4.2.1 Evolventa traktrix

Evolventa je křivka vzniklá bodem ležícím na přímce, která se po původní křivce odvaluje. Jak toto odvalování bude vypadat a jaký tvar může evolventa mít nám demonstruje obrázek 4.5, kde máme evolventu $f(x)$ ke kružnici k . Evolventu nám vytvořil bod D ležící na tečně t ke kružnici k . Tečna t se po kružnici k odvaluje a tím se zkracuje vzdálenost úsečky TD , kde T je tečný bod kružnice k a bod D vykresluje evolventu $f(x)$. Zajímavou vlastností evolventy je, že je kolmá na všechny tečny k původní křivce. Tvaru evolventy se používá u ozubených kol. Díky její vlastnosti mají zuby u ozubených kol stálý úhel záběru i tlaku. [15] Model evolventy kružnice najdete na CD (složka MODEL, soubor 04_evolventa_kruznic_model.ggb). V modelu lze měnit polohu bodu T na kružnici k a tím odvalovat přímku t .



Obrázek 4.5: Evolventa kružnice

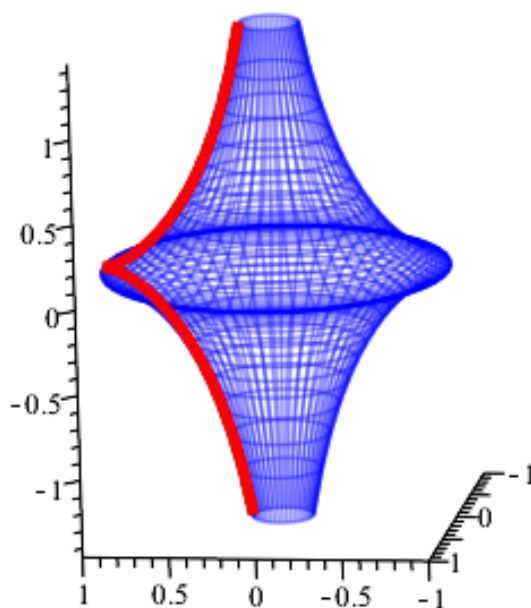
Po tom co jsme si ukázali vytvoření a konečný tvar evolventy u kružnice, se podíváme jakou evolventu má rovinná křivka řetězovka. Hledáme opět křivku, kterou tvoří trajektorie bodu ležícího na tečně k řetězovce. Tato tečna se po řetězovce odvaluje a tím se zkracuje vzdálenost bodu tvořícího evolventu a bodu tečného. V programu dynamické geometrie GeoGebra si můžeme výše zmíněný případ vymodelovat. Výsledek vidíme na obrázku 4.6. Jak je z obrázku patrné evolventou řetězovky je traktrix. Znamená to, že traktrix je kolmá na každou tečnu k řetězovce. Model této evolventy naleznete na CD (složka MODEL, soubor 04_evolventa_retezovky_model.ggb). V modelu můžete posouvat bod T a bude se vám vykreslovat evolventa. Po označení bodu T ho můžete posouvat i šipkami doleva a doprava.



Obrázek 4.6: Evolventa rovinné křivky řetězovky

4.2.2 Pseudosféra

Položme si otázku jaký geometrický objekt vznikne rotací traktrix z obrázku 4.1 kolem své asymptoty osy y ? Vzniklý geometrický objekt je na obrázku 4.7 a nazývá se pseudosféra. Na obrázku 4.7 je červeně vyznačena výchozí traktrix, z níž pseudosféra rotací kolem osy y vznikla. Pojmenování pseudosféra pochází z anglického pseudosphere neboli "nepravá koule". Zatímco koule má stejnou kladnou křivost ($\frac{1}{r}$, kde r je poloměr) v každém bodě na povrchu, pseudosféra má v každém svém bodě na povrchu stejnou zápornou křivost ($-\frac{1}{r}$, kde r je poloměr). Výsledkem toho má koule uzavřený povrch a konečný objem, zatímco pseudosféra má otevřenou plochu a nekonečný objem. Jedním z důsledků negativního zakřivení pseudosféry je, že trojúhelníky zkonstruované na jejím povrchu mohou mít součet vnitřních úhlů menší než 180° . Povrch pseudosféry je tedy jedním z povrchů, který je modelem neeukleidovské geometrie. [16] Na povrchu koule můžeme sestavit trojúhelník, jehož součet vnitřních úhlů bude větší než 180° , a na povrchu pseudosféry můžeme sestavit trojúhelník, jehož součet vnitřních úhlů bude menší než 180° . [17]



Obrázek 4.7: Pseudosféra

Eukleidovská geometrie musí splňovat pět postulátů:

1. Od kteréhokoliv bodu ke kterémukoliv bodu lze vésti přímku.
2. Přímku omezenou nepřetržitě lze rovně prodloužit.
3. Z jakéhokoliv středu a jakýmkoliv poloměrem lze narýsovat kružnici.
4. Všechny pravé úhly jsou si rovny.
5. Když přímka protíná dvě přímky a tvoří na téže straně vnitřní úhly menší dva pravé, pak ty dvě přímky prodloužené do nekonečna sbíhají se na té straně, kde jsou úhly menší než dva pravé. [18]

Poslední postulát se dnes formuluje také jako: K danému bodu, jenž neleží na dané přímce, existuje toliko jediná přímka, kterou danou přímku neprotíná. [19] Pokud

některá plocha nesplňuje pátý postulát je modelem neeukleidovské geometrie. Což je případ pseudosféry.

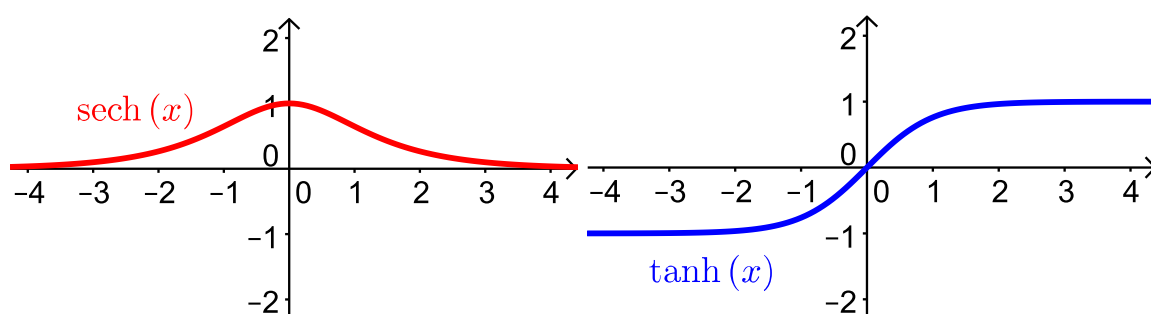
Matematicky můžeme pseudosféru vyjádřit pomocí parametrických rovnic:

$$x(u, v) = a \cdot \operatorname{sech}(u) \cdot \cos(v) \quad (4.5)$$

$$y(u, v) = a \cdot \operatorname{sech}(u) \cdot \sin(v) \quad (4.6)$$

$$z(u, v) = a \cdot (u - \tanh(u)), \quad (4.7)$$

kde sech je hyperbolický sekans a $\tanh$ je hyperbolický tangens. Grafy funkcí hyperbolický sekans a hyperbolický tangens máme zobrazeny na obrázku 4.8. [20]



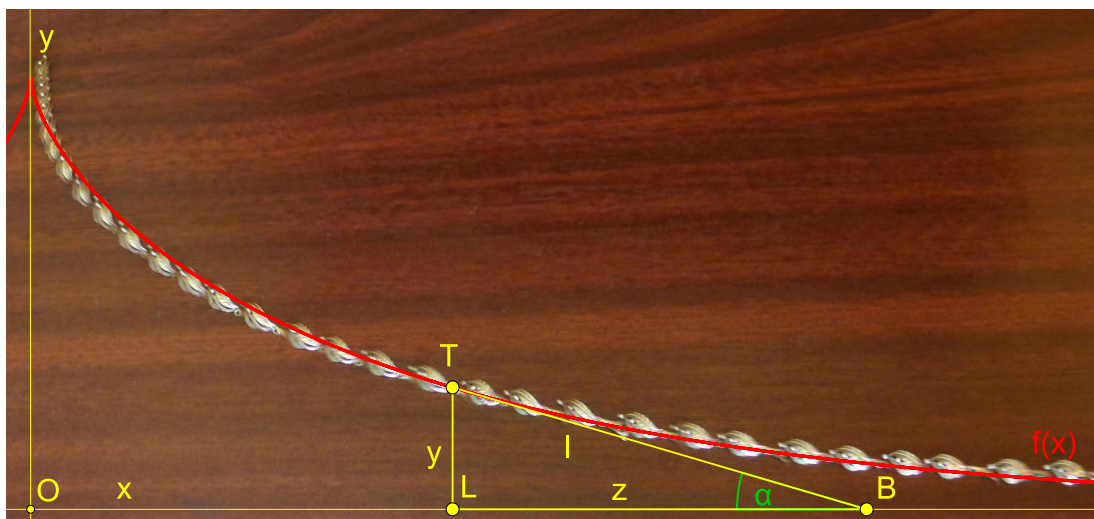
Obrázek 4.8: Graf funkcí hyperbolický sekans a hyperbolický tangens

4.3 Tažení řetízku

Zkusme vyřešit problém, který už v 17. století zaujal Gottfrieda Wilhelma Liibnitze. Ten se zajímal o to jakou křivku opíšou kapesní hodinky zavěšené na řetězu jestliže konec řetězu uchopíme a budeme s ním pohybovat po přímce. [14]

Pro řešení tohoto problému, v našem případě, nahradíme kapesní hodinky něčím, v naší době, daleko běžnějším. A to sice přívěskem na řetízku. K vyjádření křivky, kterou vytvoří trajektorie přívěsku nám pomůže obrázek 4.9. Obrázek 4.9 je vytvořen v programu Adobe Photoshop ze série fotografií zachycujících pohyb přívěsku taženého řetízkem, jehož pohyb je zapříčiněn posunem druhého konce řetízku po hraně stolu,

a následně v programu GeoGebra proložen trojúhelníkem a červenou křivkou. Na CD (složka MODEL, soubor 04_tazeni_retizku.gif) si můžete prohlédnout animaci tažení řetízku. Soubor otvírejte v některém internetovém prohlížeči (např.: Google Chrome, Mozilla Firefox, Internet Explorer, ...)



Obrázek 4.9: Trajektorie taženého přívěsku

Z obrázku 4.9 je patrné, že můžeme sestavit rovnice:

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{z} \quad (4.8)$$

$$z = \sqrt{l^2 - y^2}, \quad (4.9)$$

kde y je y -ová souřadnice bodu T , z je délka úsečky LB , kde L je průsečík osy x a kolmice z bodu T na osu x , a B je průsečík tečny t s osou x . Dále l je délka úsečky TB , která prezentuje délku řetízku.

Dosazením z rovnice 4.9 do rovnice 4.8 dostaneme rovnici:

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}} \quad (4.10)$$

Využijeme vztahu $\tan(\alpha) = k_t = f'(A)$, kde k_t je směrnice tečny t . Dále využijeme i vztahu $f'(A) = \frac{dy}{dx}$ a dostaneme diferenciální rovnici:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}} \quad (4.11)$$

Začneme ji řešit pomocí separace proměnných:

$$dx = \frac{\sqrt{l^2 - y^2}}{y} dy \quad (4.12)$$

Poté rovnici částečně zintegrujeme:

$$\int dx = \int \frac{\sqrt{l^2 - y^2}}{y} dy \quad (4.13)$$

$$x = \int \frac{\sqrt{l^2 - y^2}}{y} dy \quad (4.14)$$

Dále budeme řešit pomocí substituce $y = l \cdot \sin(\varphi)$, pak $dy = l \cdot \cos(\varphi) d\varphi = l \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\varphi)} d\varphi = \sqrt{l^2 - y^2} d\varphi$. [21]

Po substituci a využití vzorců pro počítání s goniometrickými funkcemi postupně dostaneme:

$$x = l \int \frac{\cos^2(\varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi \quad (4.15)$$

$$x = l \int \frac{1 - \sin^2(\varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi \quad (4.16)$$

$$x = l \left(\int \frac{1}{\sin(\varphi)} d\varphi - \int \sin(\varphi) d\varphi \right) \quad (4.17)$$

$$x = l \left(\int \frac{\sin(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} d\varphi - \int \sin(\varphi) d\varphi \right) \quad (4.18)$$

$$x = l \left(\int \frac{\sin(\varphi)}{1 - \cos^2(\varphi)} d\varphi - \int \sin(\varphi) d\varphi \right) \quad (4.19)$$

$$x = l \left(\frac{1}{2} \int \frac{\sin(\varphi)}{1 - \cos(\varphi)} d\varphi + \frac{1}{2} \int \frac{\sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} d\varphi - \int \sin(\varphi) d\varphi \right) \quad (4.20)$$

$$x = l \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} - \cos(\varphi) \right) + C \quad (4.21)$$

Po úpravě (rozšíření prvního výrazu členem $1 + \cos(\varphi)$) nám vznikne tvar:

$$x = l \left(\cos(\varphi) + \ln \frac{\sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} \right) + C \quad (4.22)$$

A po zpětném dosazení ze substituce:

$$x = l \left(-\sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}} - \ln \frac{\frac{y}{l}}{1 + \sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}}} \right) + C \quad (4.23)$$

jsme dostali rovnici traktrix.[21]

Křivka, kterou opíše přívěsek tažený na řetízku, je tedy nám známá rovinná křivka traktrix. U traktrix platí: Je-li $x = 0$ pak musí být $y = l$. Odsud dostaneme, že integrační konstanta $C = 0$. Rovnice bude mít výsledný tvar:

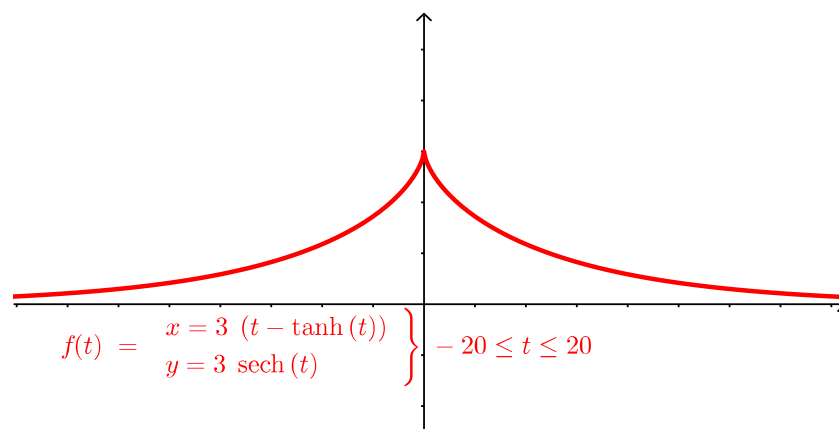
$$x = l \left(-\sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}} - \ln \frac{\frac{y}{l}}{1 + \sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}}} \right) \quad (4.24)$$

Traktrix jsme si již popsali dvěma rovnicemi. Rovnicí 4.1 a rovnicí 4.24. S rovnicí popisující křivku traktrix se můžeme setkat i v parametrickém tvaru:

$$x(t) = a \cdot (t - \tanh(t)) \quad (4.25)$$

$$y(t) = a \cdot \operatorname{sech}(t), \quad (4.26)$$

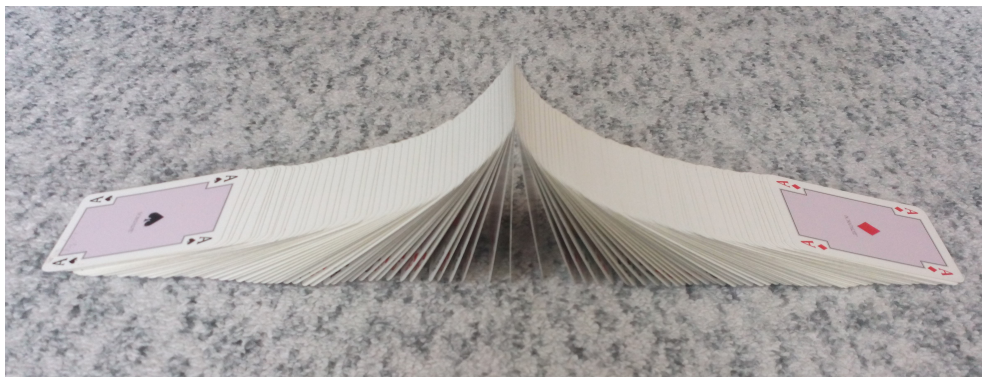
kde $\tanh$ je hyperbolický tangens, sech je hyperbolický sekans, a je poloměr křivosti a t je parametr. [22] Grafy funkcí hyperbolický tangens a hyperbolický sekans máme již na obrázku 4.8. V programu GeoGebra lze zadat rovnice křivek i parametricky, jak nám demonstruje obrázek 4.10, kde je pomocí parametrického zadání vykreslena traktrix.



Obrázek 4.10: Traktix vykreslená v programu GeoGebra pomocí parametrického zadání

4.4 Karetní trik

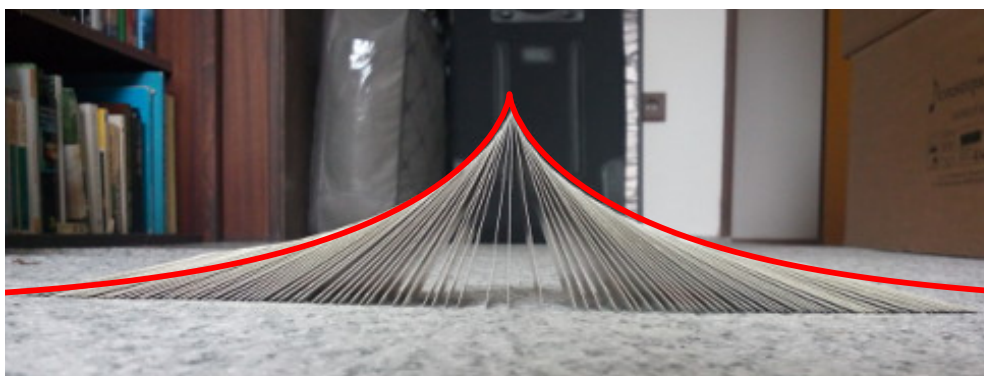
Podívejme se blíže na jeden karetní trik. Kouzelník v něm nejprve postupně rozloží karty do pásu a pak na straně, na které začínal pás rozvíjet, ho začne zvedat. Nakonec dostane karty do pozice jaká je na obrázku 4.11 a pak už jen pomocí jednoho prstu může posouvat "špičku" této stavby zleva do prava a karty nespádnou. [16]



Obrázek 4.11: Stavba z karet

Navíc horní hřbety karet vykreslují zajímavou křivku. Budeme-li takto vytvořenou křivku dále zkoumat, dojdeme k následujícím poznatkům. Nejprve si musíme uvědomit, že všechny karty mají stejnou výšku v . Dále, že každá karta je posunuta po horizontální

ose kousek dál od předešlé karty. Když si toto uvědomíme, zjistíme, že se jedná o stejný případ jako v podkapitole 4.3. Tam jsme táhli po horizontální ose řetízek o konstantní délce a pohybovali jsme tak přívěskem, který vykreslil řetězovku. Rovnici bychom odvodili obdobně jako v podkapitolách 4.1 (na straně 38) a 4.3 (na straně 46). Na obrázku 4.12 máme naši karetní stavbu proloženou červeně vyznačenou křivkou traktrix.



Obrázek 4.12: Stavba z karet proložená křivkou traktrix

5 Zrcadla

Zabýváme-li se geometrií v reálném prostředí, určitě by nám neměla uniknout pomůcka, kterou většina lidí využívá prakticky denně. Pomáhá nám při ranním vypravování. Využíváme ji, chceme-li spatřit něco, co je mimo náš zorný úhel nebo chceme-li vidět sami sebe. Jistě jste z popisu poznali, že je řeč o zrcadlech. Všechna zrcadla ovšem nejsou tvarově stejná. Například si můžete všimnout, že zpětná zrcátka v automobilech mají jiný tvar než zrcadlo, které máte v koupelně. Jsou vypuklá, zatímco zrcadlo v koupelně je rovinné. Jejich tvar vychází z vlastností, které po nich požadujeme.

Přenos světelných paprsků mezi předmětem a jeho obrazem zprostředkovává optická soustava. Tyto světelné paprsky a jejich geometrické vlastnosti při odrazech zkoumá geometrická optika. Geometrická optika je založena na předpokladu

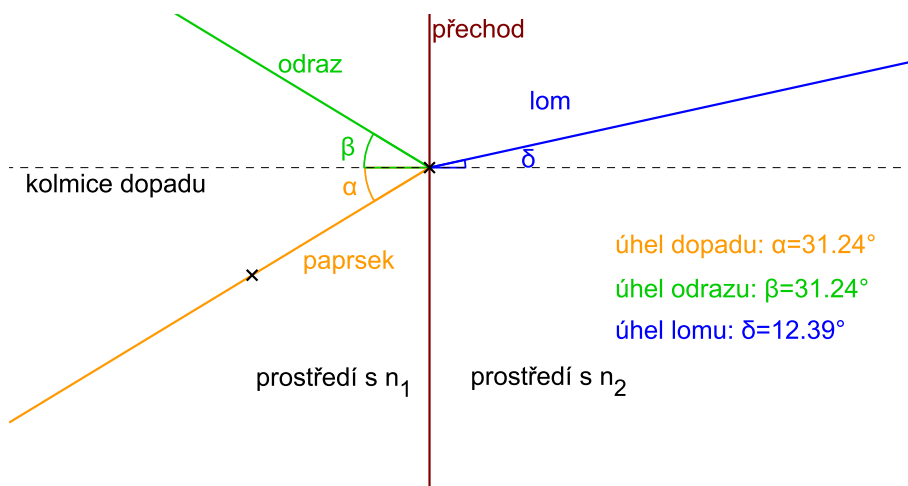
1) přímočarého šíření světla (světelné paprsky se šíří po přímce), 2) nezávislosti šíření jednotlivých paprsků (křížící se paprsky se navzájem neovlivňují) a 3) nezávislosti dráhy paprsků na smyslu, ve kterém paprsek sledujeme (dráha paprsků je stejná pohybují-li se jedním nebo opačným směrem). [23]

Na přechodu mezi dvěma prostředími (například mezi vzduchem a vodou) se paprsky chovají podle zákona odrazu a zákona lomu. To znamená, že pokud paprsek dopadne na přechod dvou různých prostředí, část paprsku se odrazí a část se láme. [23]

Uvažujeme-li v bodě na přechodu mezi dvěma optickými prostředími, do kterého dopadá paprsek, kolmici vzhledem k ploše přechodu, můžeme zavést úhel dopadu α , jenž svírá kolmice s paprskem. Bude-li β úhlem odrazu tak podle zákona odrazu platí $\alpha = \beta$. [24]

Úhel lomu je takový úhel δ , který svírá normála k přechodu s lámajícím se paprskem. Podle zákona lomu pro něj platí $n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\delta)$, kde n_1 je index lomu prostředí, z něž paprsek přichází, n_2 je index lomu prostředí do kterého se paprsek láme, α je úhel dopadu a δ je úhel lomu. Tomuto zákonu se také říká Snellův zákon. [25] Dopadající a odražený/lomený paprsek leží spolu s normálou v jedné rovině. Indexy lomu pro jednotlivá prostředí lze nalézt ve fyzikálních tabulkách.

Geometrické zobrazení zákona lomu a zákona odrazu je na obrázku 5.1. Na obrázku je prostředí s n_1 vzduch ($n_1 = 1,000293$) a prostředí s n_2 je diamant ($n_2 = 2,417$). [26] Bude-li paprsek přecházet z prostředí s nižším indexem lomu do prostředí s vyšším indexem lomu, bude se lámat k normále. V opačném případě se bude paprsek lámat od normály. [24] Na CD (složka MODELÝ, soubor 05_odraz_a_lom.ggb) můžete měnit úhel dopadající paprsku a indexy lomu n_1 a n_2 a pozorovat změny.



Obrázek 5.1: Odraz a lom paprsku

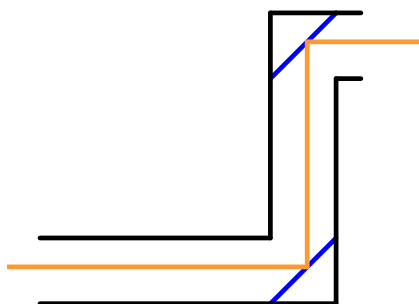
Popišme si tedy jednotlivé druhy zrcadel, jejich geometrické vlastnosti a jejich využití v našem okolí.

5.1 Rovinná zrcadla

Nejjednodušším typem zrcadla je zrcadlo rovinné. Jeho profil tvoří úsečka. Běžně v něm kontrolujeme svůj vzhled v predsíních či koupelnách našich domovů. Ve službách se s ním můžeme setkat například u kadeřníka. Své zastoupení má i v armádě, kde se využívá u zrcadlových periskopů v ponorkách. Anebo se s ním můžeme setkat při trávení volného času v posilovnách nebo tanečních studiích. [27]

Schéma principu zrcadlového periskopu vidíme na obrázku 5.2. Paprsek světla (na obrázku 5.2 žlutě) se odráží od dvou sklíček, která jsou v periskopu upevněna pod

úhlem 45° , a doputuje k oku pozorovatele. Periskopu se v armádě používá chceme-li ze svého úkrytu pozorovat okolí aniž bychom museli opustit svůj úkryt. Můžeme být schovaní například v zákopu a bez toho aniž bychom vystrčili hlavu, a vystavili se nebezpečí, pozorovat okolí. Zrcadlovým periskopem byly vybaveny i první modely známého sovětského tanku T-34. [28]



Obrázek 5.2: Schéma principu periskopu

5.1.1 Osová souměrnost

Zákon odrazu jsme si výše již vysvětlili. Jeho znění je: úhel odrazu se rovná úhlu dopadu. Abychom při zobrazování v rovinném zrcadle nemuseli neustále měřit dopadové úhly paprsků a následně konstruovat úhly stejných velikostí v opačné polorovině abychom vytvořili odražený paprsek, můžeme využít jiné vlastnosti. Paprsek dopadající na zrcadlo a paprsek od zrcadla se odrážející jsou osově souměrné podle kolmice dopadu.

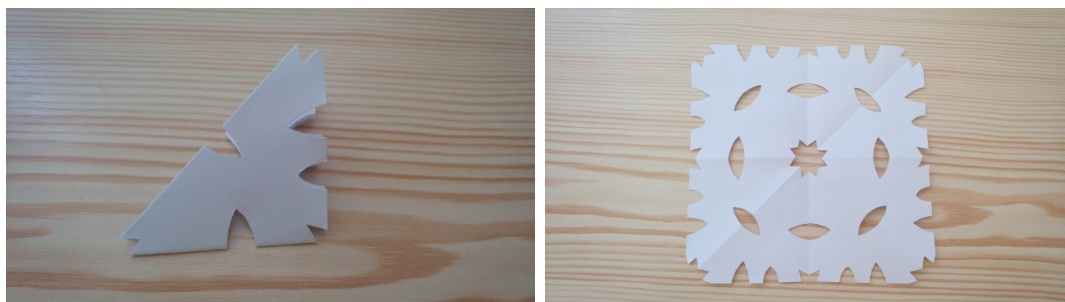
Seznamme se blíže s osovou souměrností. Pokud se díváme například na strom u potoka či jiné vodní plochy, stejně jako na obrázku 5.3, vidíme ve vodě odraz tohoto stromu. Skutečný strom nazýváme vzorem a odraz stromu nazýváme obrazem. Jistě si však všimneme, že obraz stromu je oproti svému vzoru převrácen. Vodní plocha nám strom vlastně zobrazuje. Takovému vztahu říkáme zobrazení. Pokud bychom popsáný jev vyfotografovali a fotografii přeložili v místě ohraničení vodní plochy, strom i jeho

obraz by se překryli. Navíc bychom díky tomuto postupu získali osu podle níž dochází k zobrazení. Tato osa by na fotografii byla znázorněna rýhou vzniklou přehnutím fotografie.

Vlastnosti osově souměrnosti využívají i děti na prvním stupni základní školy. Přijdou s ní do styku, například, při výrobě sněhových vloček z papíru. Nejprve papír několikrát přehnou a pak vystřihají do papíru různé vzory. Po rozložení papíru dostanou krásný pravidelný tvar. Tento postup je zachycen na obrázku 5.4

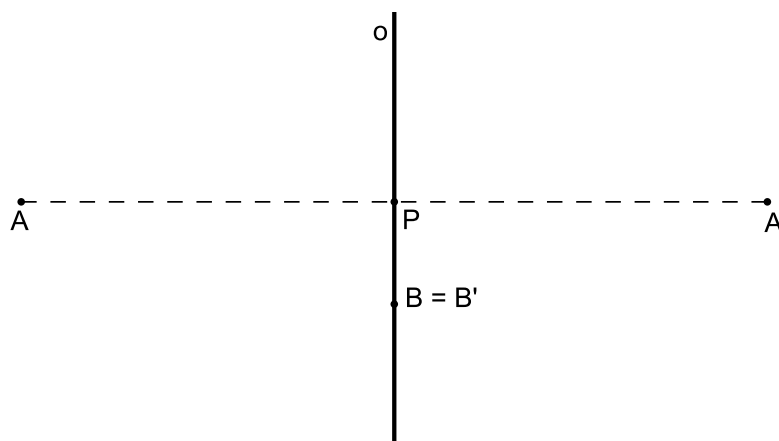


Obrázek 5.3: Odraz stromů ve vodní hladině



Obrázek 5.4: Výroba sněhové vločky z papíru

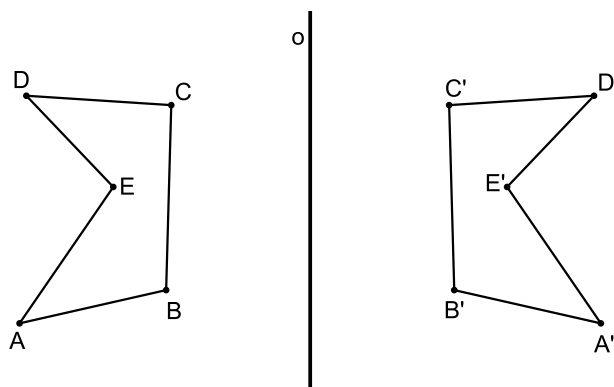
Dva body A , A' jsou osově souměrné podle osy o , jestliže oba leží na téže kolmici na osu souměrnosti. Osa souměrnosti dělí rovinu na dvě poloroviny. Pak body A , A' leží každý v jiné polorovině a jejich vzdálenost od osy o je stejná. Bod P (pata kolmice na osu souměrnosti) je tedy středem úsečky AA' . Obrazem bodu, který leží na ose souměrnosti je tento bod samotný. Takový bod nazýváme samodružný. [29] Bod A , jeho obraz A' , samodružný bod B a patu kolmice P máme zobrazeny na obrázku 5.5.



Obrázek 5.5: Zobrazení bodů A a B v osově souměrnosti

Osová souměrnost patří mezi shodná zobrazení v rovině. Což znamená, že obraz má stejné rozměry jako vzor. Na obrázku 5.5 jsme si ukázali zobrazení bodu v osově souměrnosti. Je tedy na čase abychom si ukázali i zobrazení geometricky složitějších tvarů a demonstrovali si další vlastnost osově souměrnosti.

Oním geometricky složitějším tvarem je na obrázku 5.6 nepravidelný pětiúhelník. Jak můžeme vidět, obraz je oproti svému vzoru překlopený. Je to důsledkem toho, že vzdálenost bodu od osy o je stejná. Vzdálenost bodu A od osy o je větší než vzdálenost bodu B proto i vzdálenost bodu A' od osy o je větší než vzdálenost bodu B' . Důsledkem toho je u vzoru bod A vlevo od bodu B a u obrazu je bod A' vpravo od bodu B' .

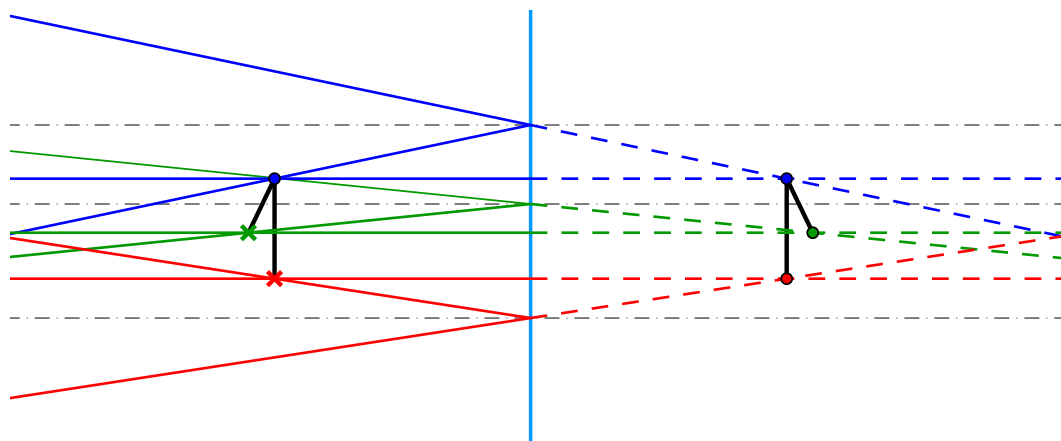


Obrázek 5.6: Zobrazení nepravidelného pětiúhelníku v osové souměrnosti

5.1.2 Zobrazení předmětů v rovinném zrcadle

Uvedeme si, jak vlastně rovinné zrcadlo zobrazuje předměty. Pomůže nám k tomu obrázek 5.7. Vidíme na něm číslici jedna. K zobrazení celé číslice jedna nám postačí zobrazit tři její body, jež ji tvoří. Jde o modrý, zelený a červený bod. K sestrojení obrazů těchto bodů musíme každým bodem zkonstruovat dva paprsky. Sestrojíme paprsek jdoucí bodem a končící na zrcadle. V bodě, kde se dotýká zrcadla, sestrojíme kolmici dopadu. Víme, že podle zákona odrazu se úhel odrazu rovná úhlu dopadu. Jedním z důsledků této věty je, že paprsek dopadající na zrcadlo je osově souměrný s paprskem odrážejícím se od zrcadla a osou souměrnosti je kolmice dopadu. Druhý paprsek můžeme sestrojit obdobně anebo si můžeme ulehčit práci. Sestrojíme-li kolmici z určitého bodu k zrcadlu, paprsek jdoucí po této kolmici se odrazí od zrcadla a zpátky bude procházet opět bodem, z něž jsme ho zkonstruovali. Nemusíme tak hledat úhel dopadu a úhel odrazu.

Obraz bodu dostaneme v průsečíku těchto dvou paprsků. Na obrázku 5.7 vidíme, že se nám paprsky protly za zrcadlem. I ve skutečnosti, pokud se díváme do zrcadla, se nám obraz jeví jako by byl za zrcadlem. Takový obraz nazýváme neskutečným nebo virtuálním. [25] Model zobrazení najdete na CD (složka MODELÝ, soubor 05_rovine_zrcadlo_zobrazeni.ggb).



Obrázek 5.7: Zobrazení rovinným zrcadlem

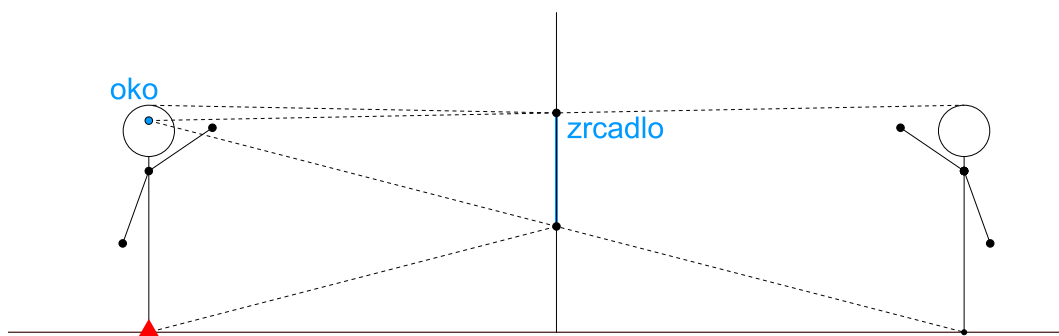
Na obrázku 5.7 si můžeme povšimnout, že obraz má od zrcadla stejnou vzdálenost jako vzor a navíc má i stejné rozměry. Jediná patrná změna při zobrazení rovinným zrcadlem je, že obraz je oproti vzoru překlopený. Stejně se chovají obraz a vzor při zobrazování v osové souměrnosti. Představíme-li si zrcadlo jako osu, zjistíme, že zobrazení v rovinném zrcadle lze interpretovat jako osovou souměrnost.

5.1.3 Problémová úloha se zrcadlem

Chceme si do předsíně koupit zrcadlo, v němž bychom se viděli celí. Zjistěte jak vysoké musí zrcadlo být, jestliže je naše výška v . Zjistěte také jak bude výška zrcadla h záviset na vzdálenosti l odkud do něj budeme koukat.

V zrcadle vidíme sami sebe. Zobrazení naší výšky v zrcadle probíhá tak, že paprsky vycházející z našeho temene a nohou se odraží od zrcadla a odrazí se do našeho oka. Víme, že zobrazení v rovinném zrcadle lze interpretovat jako osovou souměrnost, kde osa souměrnosti je právě hrana zrcadla. Stejně jako ve skutečnosti, se pak zdá, že

paprsky vycházející z temena a nohou mají svůj původ za zrcadlem. Je pak zřejmé, že zobrazené temeno, zobrazené nohy a naše oko tvoří trojúhelník. K vyřešení problému je dále nutné si uvědomit, že vzdálenosti a rozměry obrazů za zrcadlem jsou stejné jako vzdálenosti a rozměry vzorů před zrcadlem. Z toho nám plyne, že délku úsečky, kterou nám tvoří obraz temene a oko, a délku úsečky, jenž tvoří obraz nohou a oko, nám zrcadlo pólí. Díky těmto poznatkům sestrojíme obrázek 5.8.



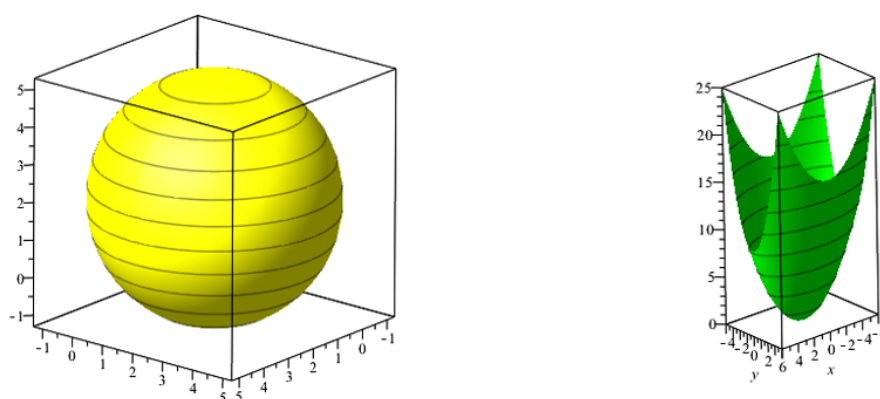
Obrázek 5.8: Zobrazení problémové úlohy

Úsečka, jejímiž krajními body jsou středy dvou stran trojúhelníku, se nazývá střední příčka trojúhelníku. A právě tyto vlastnosti má naše zrcadlo. Zrcadlo v našem případě je střední příčka trojúhelníku tvořeného zobrazeným temenem, zobrazenými nohami a okem. Poslední krok k vyřešení této problémové úlohy je obsažen ve znění věty o středních příčkách trojúhelníku. Každá střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s jeho protější stranou a její délka je rovna polovině délky této strany. [30]

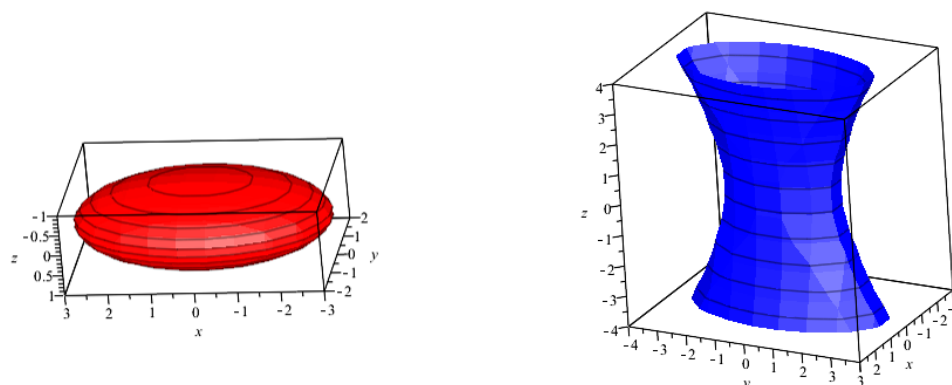
Jestliže je zrcadlo střední příčkou tak velikost zrcadla je rovna polovině naší výšky, neboli $h = \frac{v}{2}$. Pokud budeme měnit naší vzdálenost od zrcadla bude se měnit i vzdálenost obrazu od zrcadla a zrcadlo bude stále střední příčkou. Vzdálenost od zrcadla tedy nemá vliv na velikost zrcadla, v němž bychom se viděli celí. Na přiloženém CD je v programu GeoGebra vymodelovaná naše úloha (složka MODEL, soubor 05_problemova_uloha.ggb), kde je možné měnit vzdálenost od zrcadla a výšku zobrazeného člověka. I na tomto modelu můžete vidět, že při změně vzdálenosti se výška zrcadla nemění a stále je rovna jedné polovině výšky zobrazovaného člověka.

5.2 Sférická (kulová) a asférická zrcadla

Jak již název napovídá, sférické zrcadlo je vytvořeno na povrchu části kulové plochy a asférická zrcadla na površích asférických ploch. Asférická zrcadla se tvarem liší od kulové plochy. Jsou to plochy vůči optické ose rotačně symetrické. Mezi asférické plochy patří například kvadriky, neboli paraboloid, elipsoid a hyperboloid. Pro lepší představu tvaru těchto těles máme na obrázku 5.9 zobrazenou kouli a paraboloid a na obrázku 5.10 elipsoid a hyperboloid. Asférická zrcadla slouží ke korekcím vad zobrazování, které nejsou sférickými zrcadly odstranitelné vůbec, nebo je jich nutno použít velké množství. Podle toho zda je zrcadlící plocha zvenku či z vnitřku povrchu dělíme sférická a asférická zrcadla na vypuklá a dutá. Jak si ukážeme v následujících podkapitolách, je mezi nimi velký rozdíl ve vlastnostech zobrazeného obrazu. [24]



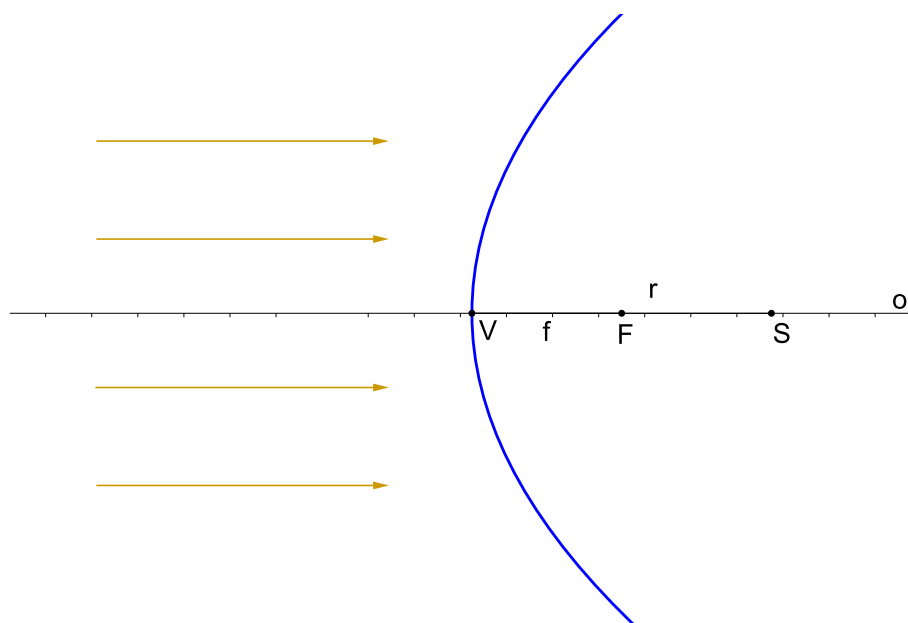
Obrázek 5.9: Koule (žlutá) a paraboloid (zelený)



Obrázek 5.10: elipsoid (červený) a hyperboloid (modrý)

5.2.1 Vypuklá zrcadla

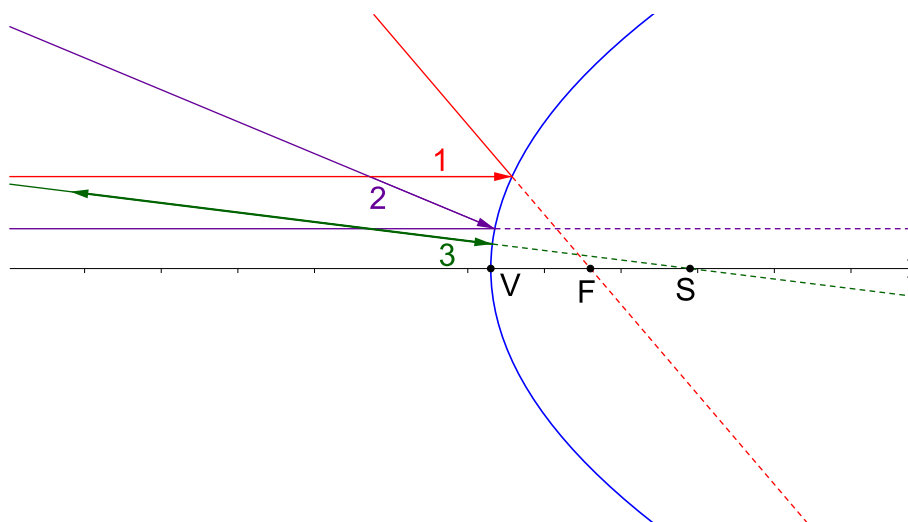
Vypuklé zrcadlo je vytvořeno na vnějším povrchu sférické nebo asférické plochy. Jeho řez máme na obrázku 5.11. Uvedeme si důležité pojmy, charakterizující vypuklé zrcadlo, vyznačené na obrázku. Optická osa se značí o . Podle optické osy jsou zrcadlo i paprsky na něj dopadající symetrické. Průsečík zrcadla s optickou osou se značí V a říká se mu vrchol zrcadla. Dalším důležitým bodem je ohnisko F . O jeho vlastnostech si povíme v podkapitole Zobrazení ve vypuklém zrcadle. S je střed křivosti zrcadla a poloměrem křivosti (vzdálenost středu S od vrcholu V) je r . Posledním důležitým pojmem je ohnisková vzdálenost f . Je to vzdálenost ohniska F od vrcholu V . U kulové plochy, která má, na rozdíl od asférických ploch, v každém bodě konstantní křivost, platí vzorec $r = 2 \cdot f$. U asférických ploch se poloha středu křivosti pro různé body mění. Bude to vždy průsečík optické osy a normála v bodě, pro nějž zjišťujeme poloměr křivosti. [31]



Obrázek 5.11: Vypuklé zrcadlo

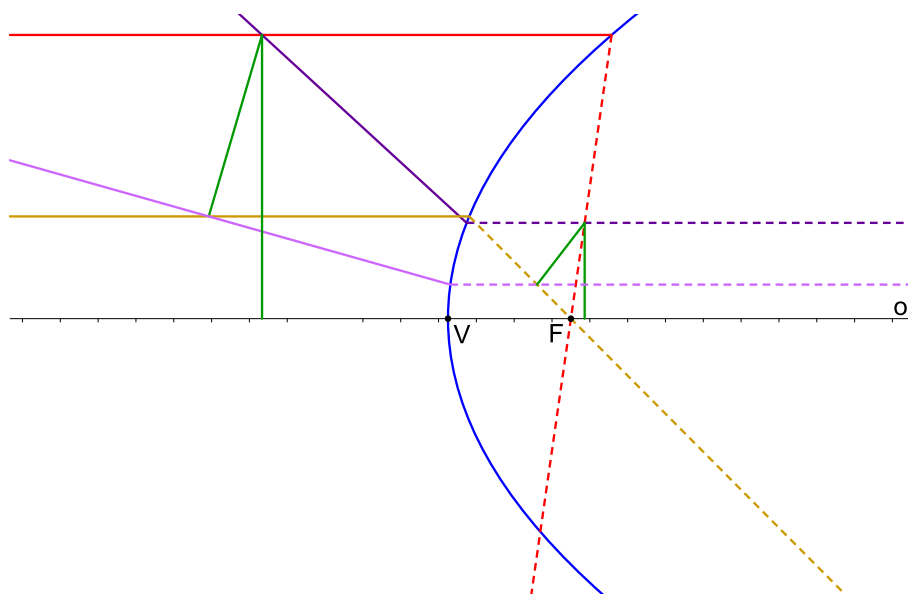
Zobrazení ve vypuklém zrcadle

Nejprve si uvedeme chování tří významných paprsků při odrazu ve vypuklém zrcadle, které nám při zobrazování velmi pomohou. Tyto paprsky jsou vyobrazeny na obrázku 5.12. Každý paprsek rovnoběžný s optickou osou (paprsek číslo 1) se od vypuklého zrcadla odrazí tak, že pokud bychom jeho trajektorii protáhli do opačného smyslu procházela by ohniskem F . Každý paprsek směřující do ohniska F (paprsek číslo 2) se od vypuklého zrcadla odrazí a jeho odraz je rovnoběžný s optickou osou. Posledním významným paprskem je paprsek směřující do středu křivosti S (paprsek číslo 3). Ten se od vypuklého zrcadla odrazí a putuje zpět po stejné dráze. [31]



Obrázek 5.12: Významné paprsky ve vypuklém zrcadle

Při zobrazování předmětů ve vypuklém zrcadle využijeme výše zmíněné paprsky. Při zobrazení jednotlivých bodů předmětu, jak vidíme na obrázku 5.13, nám budou stačit dva paprsky. Využijeme vlastností paprsků rovnoběžných s optickou osou a paprsků směřujících do ohniska zrcadla. Z každého bodu vyšleme paprsek rovnoběžný s optickou osou a paprsek směřující do ohniska. Oba paprsky se od vypuklého zrcadla odrazí a průsečík jejich odrazů je obrazem našeho původního bodu. Opakujeme-li tento postup pro každý bod (charakterizující tvar předmětu) dostaneme obraz celého předmětu. Jak si můžeme povšimnout na obrázku 5.13 je obraz předmětu virtuální, vzpřímený, zmenšený a zkresluje úhly. Model zobrazení ve vypuklém zrcadle si můžete otevřít na CD (složka MODELÝ, soubor 05_vypukle_zrcadlo_zobrazeni.ggb).



Obrázek 5.13: Zobrazení ve vypuklém zrcadle

Využití vypuklých zrcadel

Ve vypuklých zrcadlech, díky jejich tvaru, je zachycena daleko větší oblast, než jakou bychom zachytili rovinným zrcadlem. Využívají se proto tam, kde je potřeba vidět co největší prostor. To je například při výhledu z auta. Proto se využívají pro zpětná zrcátka v automobilech (obrázek 5.14) nebo v nepřehledných křižovatkách a zatáčkách jako dopravní zrcadla (obrázek 5.15). S vypuklými zrcadly se můžeme setkat i v obchodech. Jsou zde umístěny z důvodu kontroly jinak nepřehledných míst a odhalení případných krádeží. Vlastnosti vypuklého zrcadla mají i kulaté vánoční ozdoby, kterými se zdobí vánoční stromky. Mají lesklý povrch a můžeme v nich vidět celý prostor před nimi. Tedy od 0° do 180° .



Obrázek 5.14: Zpětná zrcátka automobilu

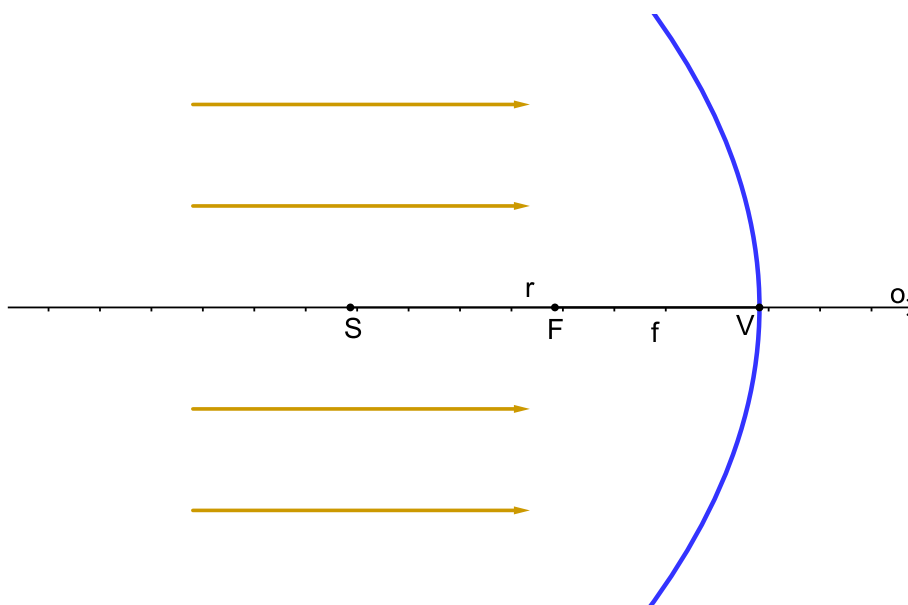


Obrázek 5.15: Dopravní zrcadlo

5.2.2 Dutá zrcadla

Dutá zrcadla jsou vytvořena na vnitřním povrchu sférické nebo asférické plochy. Řez dutého zrcadla je zobrazen na obrázku 5.16. Stejně jako u vypuklého zrcadla máme

u dutého zrcadla důležité body a vzdálenosti. Optická osa o půlí zrcadlo a zrcadlo i všechny paprsky jsou podle ní souměrné. Průsečíkem optické osy o a zrcadla je vrchol zrcadla, jenž se značí V . Ohnisko, jehož vlastnosti si uvedeme v podkapitole Zobrazení v dutém zrcadle, se značí F . Vzdálenost ohniska od vrcholu nazýváme ohniskovou vzdáleností a značíme ji f . Bod S je středem křivosti a r je poloměr křivosti. U kulových dutých zrcadel je středem křivosti všech bodů zrcadla stále tentýž bod a poloměr křivosti se proto pro žádný bod nemění. U asférických dutých zrcadel platí, že zrcadlo má v každém svém bodě v polorovině ohraničené optickou osou jiný poloměr křivosti. A proto má i každý bod v této polorovině jiný střed křivosti.

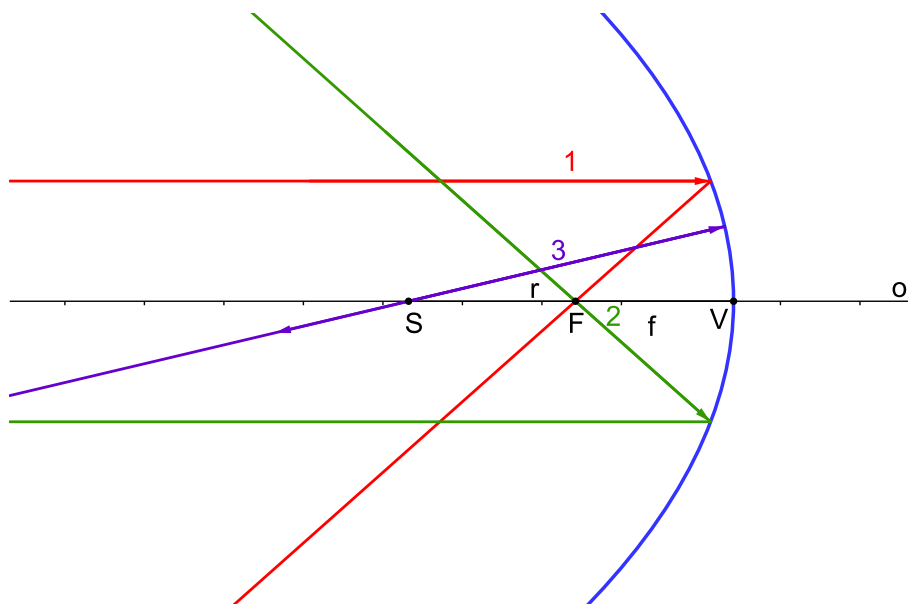


Obrázek 5.16: Duté zrcadlo

Zobrazení v dutém zrcadle

Obdobně, jako u vypuklého zrcadla, si nejdříve představíme chování tří významných paprsků při odrazu od dutého zrcadla. Všechny tři paprsky máme znázorněny na obrázku 5.17. Paprsek rovnoběžný s optickou osou o (paprsek číslo 1) se od dutého zrcadla odrazí tak, že jeho odraz bude probíhat ohniskem zrcadla F . Paprsek probíhající ohniskem zrcadla F (paprsek číslo 2) se od zrcadla odrazí a odražený paprsek bude

rovnoběžný s optickou osou o . Poslední významný paprsek (paprsek číslo 3) probíhá středem křivosti S . Od dutého zrcadla se odrazí a bude zpět pokračovat stejnou cestou. [31]

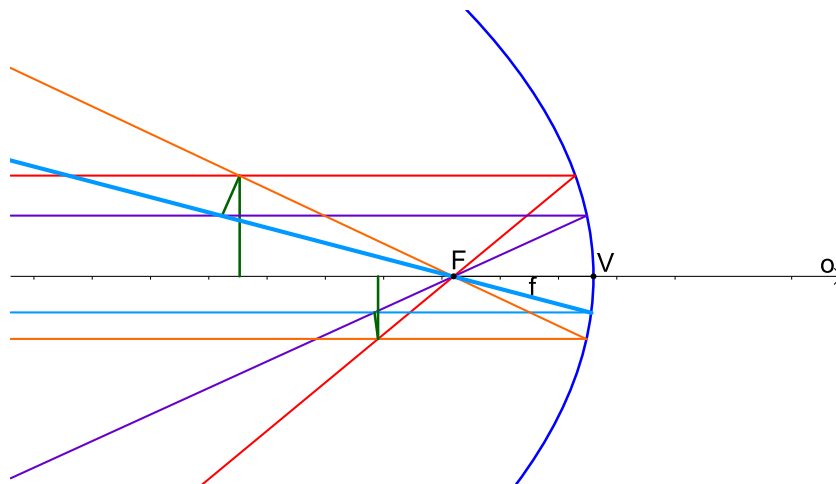


Obrázek 5.17: Významné paprsky v dutém zrcadle

Při zobrazování v dutém zrcadle využijeme výše zmíněné paprsky. Budou nám stačit dva. Protože střed křivosti je u asférických kulových zrcadel, a právě tím zobrazujeme na obrázku 5.18, pro různé body rozdílňý, využijeme papsky rovnoběžné s optickou osou a paprsky procházející ohniskem. Každým bodem, který chceme zobrazit, vedeme paprsek rovnoběžný s optickou osou a paprsek procházející ohniskem. Ty se odrazí podle výše zmíněných zákonitostí a průsečík jejich odrazu bude obraz zobrazovaného bodu. Provedeme-li tento postup u všech bodů charakterizujících tvar zobrazovaného předmětu, dostaneme jeho obraz. Duté zrcadlo je vyjimečné svými zobrazovacími vlastnosmi. Což si můžete vyzkoušet i na modelu zachycujícím zobrazování v dutém zrcadle (na CD soubor `dute_zrcadlo_zobrazeni_model.ggb`). Při zobrazování dutým zrcadlem rozlišujeme tři různé případy. Vše závisí na vzdálenosti vzoru od vrcholu zrcadla.

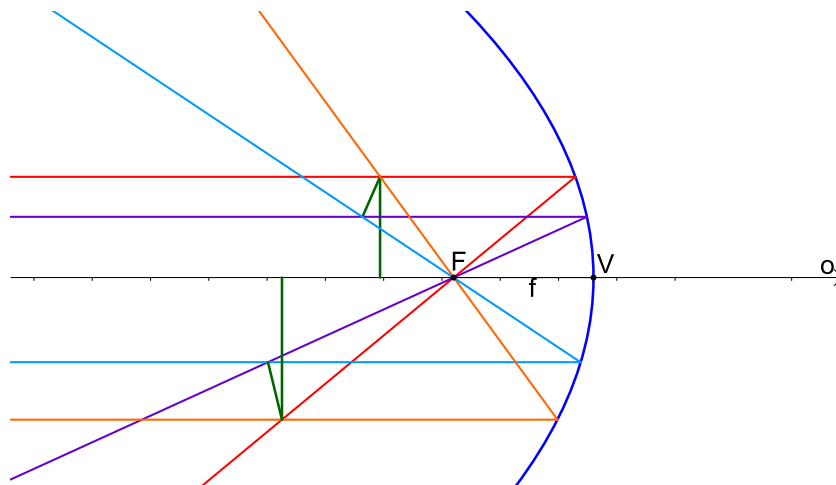
V prvním případě je vzor ve vzdálenosti větší než $2f$ od vrcholu zrcadla. Jak vidíme na obrázku 5.18 obraz je skutečný, převrácený a zmenšený. [32] Model zobrazení v du-

tém zrcadle najdete na CD (složka MODELÝ, soubor 05_dute_zrcadlo_zobrazeni.ggb).



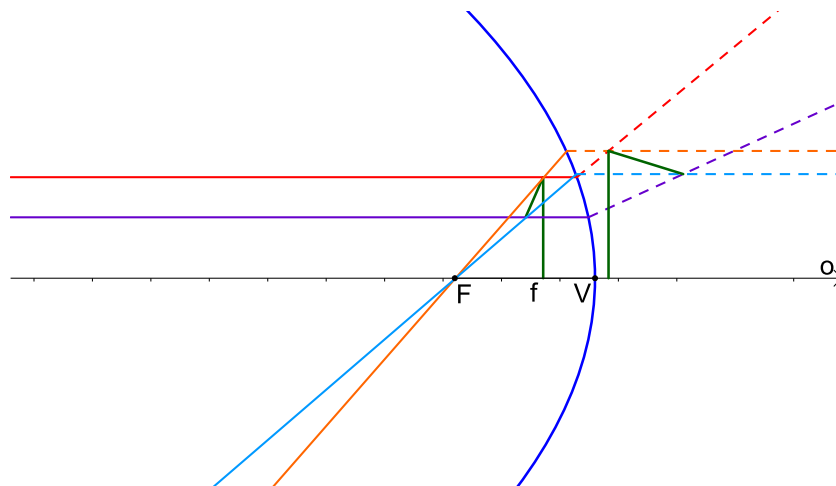
Obrázek 5.18: Zobrazení v dutém zrcadle při vzdálenosti obrazu větší než $2f$

V druhém případě je vzor umístěn mezi vzdálenosti $2f$ a f od vrcholu zrcadla. Pokud tak učiníme, dostaneme, stejně jako na obrázku 5.19, obraz skutečný, převrácený ale oproti prvnímu případu zvětšený. [32]



Obrázek 5.19: Zobrazení v dutém zrcadle při vzdálenosti obrazu mezi $2f$ a f

V posledním případě vzor umístíme do vzdálenosti menší než f od vrcholu zrcadla. Jak je zřejmé z obrázku 5.20 obraz je oproti prvním dvěma zobrazením virtuální a přímý. Dále je zvětšený. U všech tří případů dochází při zobrazí ke zkreslení úhlů. [32]



Obrázek 5.20: Zobrazení v dutém zrcadle při vzdálenosti obrazu menší než f

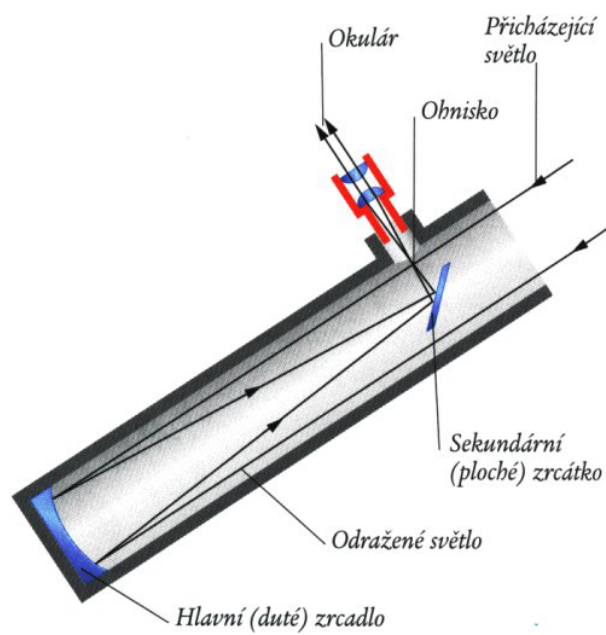
Využití dutých zrcadel

Dutá zrcadla jsou hojně využívána. Jednou z vlastností dutých zrcadel je, jak jsme uvedli výše, že paprsky rovnoběžné s optickou osou se odrážejí do ohniska zrcadla. Této vlastnosti využili stavitelé solární pece ve francouzském Odeillo. Tuto solární pec máme na obrázku 5.21. Před pecí je rozestaveno 63 heliostatů, které odraží sluneční paprsky směrem k peci tak aby byly rovnoběžné. Od dutého zrcadla tvaru paraboloidu (s rozměry 54 m x 40 m) se odrazí do ohniska, v němž se dosahuje teploty až 4000 °C. Těchto teplot se využívá ke zkoumání látek při extrémních teplotách. [33]

Stejně vlastnosti odrazu rovnoběžných paprsků směřujících na zrcadlo využívá Newtonův reflektivní dalekohled. Princip jeho zobrazování je zachycen na obrázku 5.22. Jak vidíme, paprsky přicházející do tubusu se v jeho spodní části odrážejí od dutého zrcadla. To je soustředí na ploché zrcátko, které je odráží pod úhlem 90° do okuláru k našemu zraku. [35]



Obrázek 5.21: Solární pec ve francouzském Odeillo, převzato z [34]



Obrázek 5.22: Schéma Newtonova reflektivního dalekohledu, převzato z [35]

Velké využití najdeme u osvětlovacích systémů a světlometů. Umístíme-li do ohniska zdroj světla, budou paprsky odražené od zrcadla rovnoběžné a tím budou lépe osvětlovat. Využíváme tedy opačný princip než u výše zmíněného Newtonova reflektčního dalekohledu nebo u solární pece. Toho se využívá u světlometů automobilů, které mají povětšinou tvar paraboloidu. Světlomety automobilu jsou zachyceny na obrázku 5.23. [24]



Obrázek 5.23: Světlomety automobilu

6 Nefroida

6.1 Křivka v hrnku

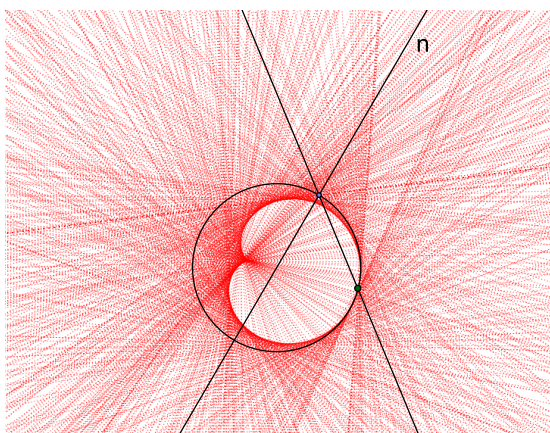
V dobře umytém hrnku či sklenici nebo na hladině nápoje v nich můžeme občas spatřit křivku podobnou srdci, tak jako na obrázku 6.1. Jak jste jistě uhádli pomocí názvu kapitoly, tato křivka bude mít něco společného s nefroidou. Jak můžeme zjistit například v [36], je to její polovina. Křivka vzniká jako obálka světelných paprsků odražených od vnitřní stěny nádoby. [37]

Na konečný tvar naší křivky v hrnku bude mít vliv zdroj světelných paprsků. Buď můžeme uvažovat, že se zdroj nachází v nekonečnu a paprsky jsou rovnoběžné nebo bude zdroj bodový a paprsky budou rozbíhavé. My si sestrojíme oba případy. Bodový zdroj ležící na okraji hrnku sestrojíme v programu GeoGebra a zdroj v nekonečnu s rovnoběžnými paprsky v programu Maple.

V programu GeoGebra nejprve sestrojíme kružnici, která znázorňuje okraj hrnečku. Poté sestrojíme dva body na kružnici a spojíme je přímkou. Jeden z bodů nám bude reprezentovat zdroj světelných paprsků. V druhém bodě přímkou sestrojíme normálu ke kružnici a podle ní sestrojíme obraz přímky v osově souměrnosti. Tento obraz je vlastně odraženým paprskem. Přímkou znázorňující odražený paprsek upravíme pomocí nástroje *vlastnosti* tak, aby byla její barva červená, styl byl tvořen tečkami a aby se zobrazovala její stopa. Nyní plynule posouváme druhý bod po kružnici a stopa obrazu přímky nám vymodeluje, stejně jako na obrázku 6.2, naší křivku nalezenou v hrnku s kávou. Tento model naleznete na CD (složka MODELÝ, soubor 06_nefroida_model.ggb).



Obrázek 6.1: Polovina nefroidy zachycená v hrnku kávy



Obrázek 6.2: Model křivky v hrnku v programu GeoGebra

Model křivky v hrnku získané odrazem rovnoběžných paprsků vmodelujeme v programu Maple pomocí následujícího zdrojového kódu. Nejprve musíme načíst knihovnu *geometry* a pak nastavíme parametr a a proměnnou n , na níž závisí počet zobrazených paprsků.

`restart; with(geometry) :`

`a := 1 :`

`n := 16 :`

Poté zkonstruujeme pomocí souřadnic body A , B a kružnici k , která oběma body

prochází a má střed S .

```
point(A, 0, 4 * a); point(B, 0, -4 * a) :  
circle(k, [A, B], centername = S) :
```

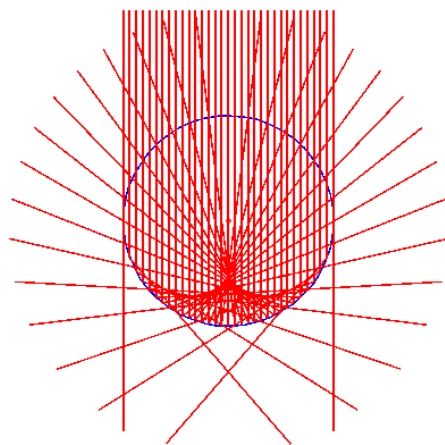
Dále nastavíme interval i a vytvoříme množiny bodů, úseček, dopadajících paprsků a odražených paprsků. Použijeme k tomu operátor $||$, který nám při použití $point(C||i)$ vygeneruje body $C_1, C_2, \dots$. Analogicky funguje tento operátor u úseček, přímk a dalších geometrických útvarů.

```
rays := NULL :  
for i from -n to n do  
    l := 4 * i * a / n;  
    point(C||i, l, 8 * a);  
    point(D||i, l, -sqrt((4 * a)2 - l2));  
    segment(ray||i, C||i, D||i);  
    line(rad||i, [S, D||i]);  
    reflection(refl||i, ray||i, rad||i);  
    rays := rays, ray||i, refl||i  
end do;
```

Nakonec použijeme příkaz pro vykreslení našeho zadání.

```
draw([rays(color = red), k(color = blue), S], axes = none);
```

Výsledkem výše uvedeného zdrojového kódu je obrázek 6.3. Což je opět model naší křivky nalezené v hrnku s kávou. Na první pohled je křivka na obrázku 6.3 svým tvarem více podobná naší křivce v hrnku než křivka z obrázku 6.2. Je to tím, že model vytvořený v programu Maple je svým zadáním (zdroj slunečných paprsků v nekonečnu a rovnoběžné paprsky) blíže reálné situaci.



Obrázek 6.3: Model křivky v hrnku v programu Maple

6.2 Odvození parametrických rovnic nefroidy

Polovinu nefroidy jsme již vymodelovali v programech GeoGebra a Maple. Nyní si odvodíme parametrické rovnice této křivky.

Uvažujeme rovinnou křivku danou implicitní rovnicí $F(x, y, \alpha) = 0$, kde α je parametr popisující jednotlivé křivky dané soustavy křivek. Necht' $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} \neq 0$, tj. tvořící křivka má s obalovou křivkou lokálně společný jen bod, tedy křivka se svým pohybem nereprodukuje. Pak souřadnice bodů obalové křivky jsou řešením soustavy:

$$F(x, y, \alpha) = 0 \quad (6.1)$$

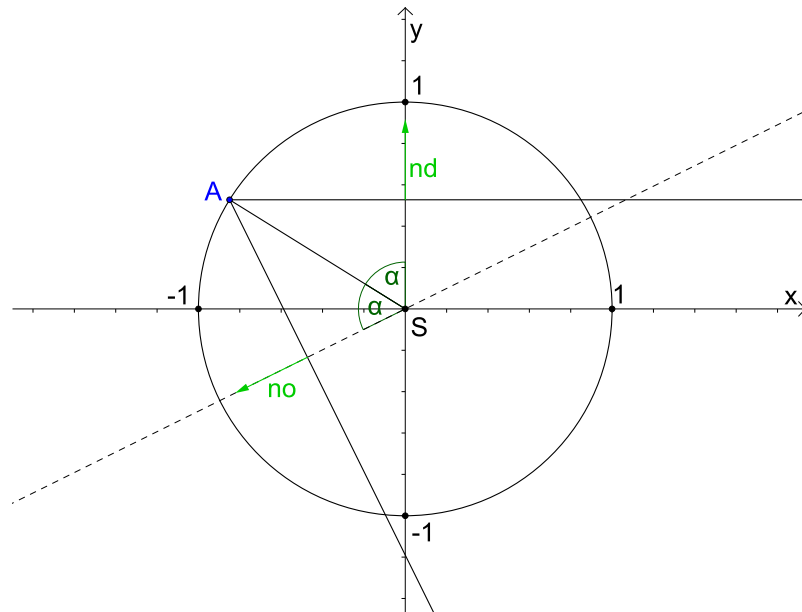
$$\frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad (6.2)$$

Uvažujeme-li α jako parametr, dostaneme obalovou křivku a α je její parametr. [38]

Parametrické rovnice naší křivky jsou řešením soustavy rovnic 6.1 a 6.2. Pro řešení této soustavy využijeme program Maple.

Nejprve zadáme souřadnice bodu dopadu A a normálových vektorů nd (normálový vektor dopadajícího paprsku) a no (normálový vektor odraženého paprsku). Dopadající

paprsek bude rovnoběžný s osou x proto bude jeho normálový vektor roven $(0,1)$. K odvození ostatních souřadnic nám pomůže obrázek 6.4. U nefroidy začínáme s bodem A v druhém kvadrantu. Kružnice na obrázku je jednotková. Proto budou souřadnice bodu v druhém kvadrantu $A = [\cos(\alpha), \sin(\alpha)]$. Chceme-li bod A posunout do prvního kvadrantu, posouváme úhel α o $\frac{\pi}{2}$. Proto bude mít bod A v prvním kvadrantu souřadnice $[\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}), \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})]$, neboli $A = [-\sin(\alpha), \cos(\alpha)]$. Z obrázku také vyplývá, že pokud bychom udělali totéž s normálovým vektorem no dostaneme obdobné souřadnice, pouze úhel by byl dvojnásobný. Tedy $no = (-\sin(2\alpha), \cos(2\alpha))$.



Obrázek 6.4: Odvození souřadnic bodu A a vektorů nd a no

$$A := [-\sin(\alpha), \cos(\alpha)]$$

$$nd := \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$no := [-\sin(2\alpha), \cos(2\alpha)]$$

Nyní definujeme dvě výše uvedené rovnice a řešíme jejich soustavu.

$$l(\alpha) := (x - A(1)) \cdot no(1) + (y - A(2)) \cdot no(2) :$$

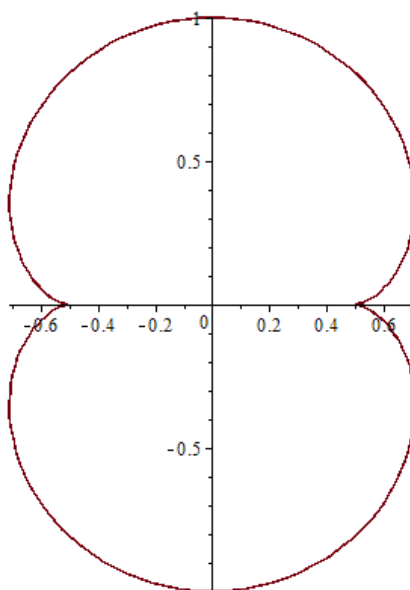
$$ld(\alpha) := \text{diff}(l(\alpha), \alpha) :$$

$$Krivka := \text{solve}([l(\alpha) = 0, ld(\alpha) = 0, [x, y]] :$$

Pokud bychom měli výsledek zobrazený byl by vcelku nepřehledný a komplikovaný. Použijeme proto funkci "simplify"s parametrem "trig", který nám za využití vzorců pro počítání s trigonometrickými funkcemi výsledek upraví na tvar:

$$nephroid := [[x = -1/2 (2 (\cos(\alpha))^2 + 1) \sin(\alpha), y = (\cos(\alpha))^3]]$$

Získané parametrické rovnice si zobrazíme graficky:



Obrázek 6.5: Grafické znázornění vypočítaných parametrických rovnic

V různých zdrojích můžete najít parametrické rovnice v jiném tvaru. Je to způsobeno odlišnou závěrečnou úpravou výsledku soustavy rovnic 6.1 a 6.2 pomocí vzorců

pro počítání s trigonometrickými funkcemi, které provádějí jednotlivé algebraické programy.

Pokud bychom umístili nad hrnek s kávou dva podobně výkonné zdroje světla (například dvě žárovky) může se nám podařit v hrnku vytvořit celou nefroidu. Výsledek tohoto pokusu je zachycen na obrázku 6.6.



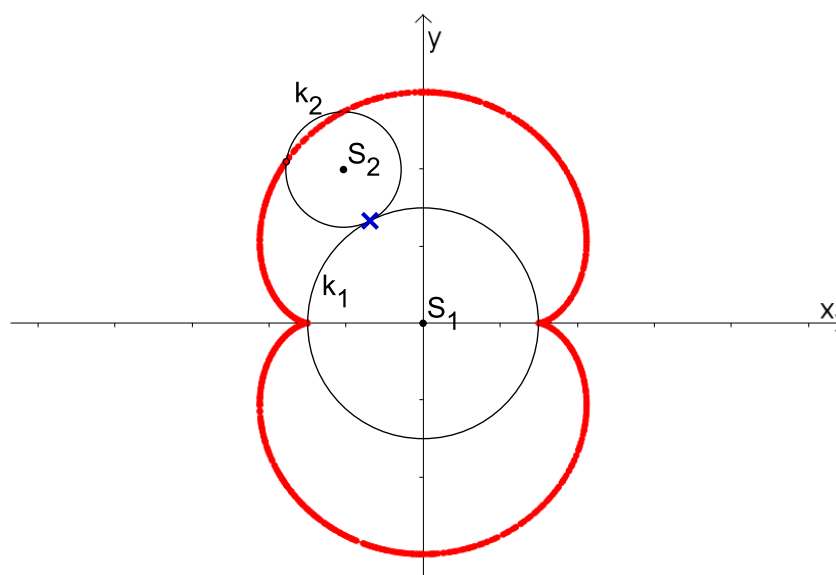
Obrázek 6.6: Nefroida zachycená v hrnku s kávou

6.3 Další možnosti konstrukce nefroidy

Ukázali jsme si, že nefroidu lze sestavit jako obálku světelných paprsků odražených od hrnku. To ovšem není jediný způsob, jak můžeme zkonstruovat nefroidu. Dále se budeme věnovat i jiným způsobům sestavení této zajímavé křivky. Jak se můžeme dočíst například v [39], nefroidu si lze vyložit i jako specifickou epicykloidu nebo jako obálku kružnic s danými vlastnostmi.

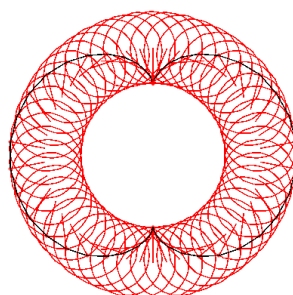
6.3.1 Nefroida jako epicykloida

Epicykloida je křivka, kterou vytváří bod pevně spojený s pohybující se kružnicí k_2 , jenž se odvaluje bez smyku z vnějšku po kružnici k_1 . [40] Pokud je r_2 poloměr k_2 a r_1 poloměr k_1 a platí $r_2 = \frac{r_1}{2}$, pak je epicykloidou nefroida. Ilustraci tohoto tvrzení máme na obrázku 6.7. Model jehož výsledkem je obrázek 6.7 je na CD (složka MODEL, soubor 06_nefroida_epicykloida.ggb)



Obrázek 6.7: Nefroida jako epicykloida

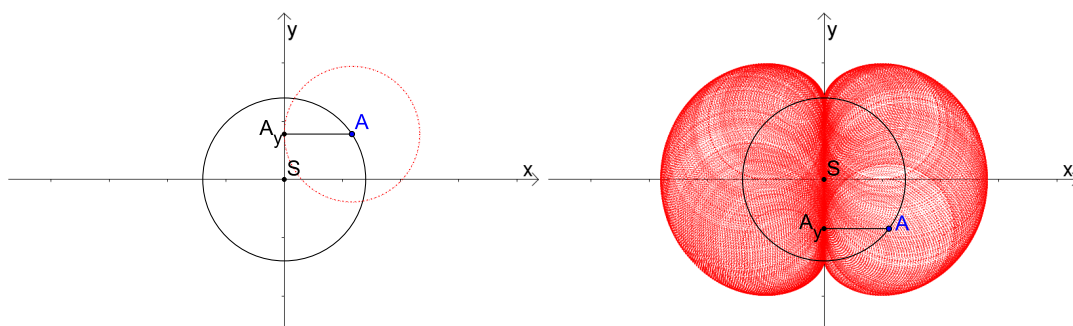
Stejnou situaci můžeme vymodelovat i v programu Maple. Výsledek vidíme na obrázku 6.8. Vidíme zde základní kružnici, po níž se odvaluje druhá kružnice. Ta je zde zachycena v mnoha svých polohách přičemž její pevný bod měnící odvalováním kružnice svou polohu vykresluje černou křivku. Jak vidíme z obrázku, touto křivkou je nefroida.



Obrázek 6.8: Model nefroidy jako epicykloidy v programu Maple

6.3.2 Nefroida jako obálka kružnic

Mějme kružnici k se středem S v počátku soustavy souřadnic. Sestrojíme bod A takový, že $A \in k$. Dále sestrojíme kružnici l se středem v bodě A a poloměrem $|AA_y|$, kde A_y je průsečík kolmice z bodu A na osu y . Pokud budeme bodem A plynule pohybovat po kružnici k , dostaneme množinu kružnic, jejichž obálkou je nefroida. Model tohoto jevu v programu GeoGebra je zachycen na obrázku 6.9 a v programu Maple na obrázku 6.10. Model vytvořený v programu GeoGebra najdete na CD (složka MODELKY, soubor 06_nefroida_obal_kruznic.ggb).



Obrázek 6.9: Model nefroidy jako obálky kružnic v programu GeoGebra

Na modelu vytvořeném v programu Maple opět vidíme modrou základní kružnici s vyznačeným zeleným průměrem. Dále je zde několik červených kružnic, jejichž obálkou je právě zmíněná nefroida. Obrázek 6.10 jsme v programu Maple vytvořili pomocí

následujícího zdrojového kódu. Nejprve si načteme knihovny *plots* a *geometry* a zvolíme parametr a .

```
restart; with(plots) : with(geometry) :
```

```
a := 1 :
```

Poté zkonstruujeme body A , B , kružnici k_1 a průměr AB .

```
point(A, 0, 2 * a) : point(B, 0, 2 * a) : circle(k_1, [A, B], centername = S) :
```

```
segment(prumer, A, B) :
```

V dalším kroku zvolíme úhel α a proměnou n .

```
alpha := 1.2 :
```

```
n := 40 :
```

Nakonec definujeme interval i , Množinu bodů P_i a množinu kružnic c_i .

```
circles := NULL :
```

```
for i to n - 1 do alpha := 2 * i * Pi/n;
```

```
  if alpha = Pi then next end if;
```

```
  point(P||i, 2 * a * sin(alpha), 2 * a * cos(alpha));
```

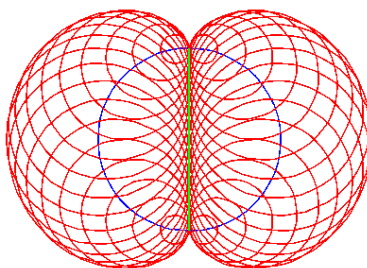
```
  circle(c||i, [P||i, abs(2 * a * sin(alpha))]);
```

```
  circles := circles, c||i
```

```
end do :
```

Po tomto zadání použijeme pro vykreslení obrázku 6.10 příkaz:

```
draw([k_1(color = blue), prumer(color = green), circles], axes = none);
```



Obrázek 6.10: Model nefroidy jako obálky kružnic v programu Maple

7 Závěr

V jednotlivých kapitolách jsem se snažil představit některé geometrické jevy, jenž jsou v našem světě vcelku běžné, ale ne všichni je vnímají. Kapitola představující program Phun je zaměřena na sestavení konkrétního modelu v tomto programu a podhaluje jen menší část vlastností tohoto zajímavého programu. Kapitoly Řetězovka, Traktrix a Nefroida představují stejnojmenné křivky. Jsou zde vyobrazeny jejich tvary, odvozeny jejich rovnice a uvedeny místa a situace, kde se s nimi můžeme setkat. Poslední kapitola věnovaná zrcadlům představuje jednotlivé typy zrcadel pomocí jejich vyobrazení, představení důležitých paprsků, názorné ukázky zobrazení v nich včetně vlastností zobrazení a v neposlední řadě vyobrazení míst, kde na ně můžeme narazit a kde se využívají.

V této práci jsem využíval pro tvorbu jednotlivých modelů programy GeoGebra 5.0 a Maple 17. Všechny obrázky vytvořené v programu GeoGebra 5.0 byly vyexportovány přímo v programu na formát .eps. V programu Maple 17 byl postup různorodější. Některé odvození rovnic v tomto programu byly vyexportovány přímo ve formátu .tex v němž byla sázena i tato práce, jiné zdrojové kódy jsem pro lepší přehlednost z programu pouze opsal do práce a obrázky byly zkopírovány a převedeny na formát .eps v programu GIMP 2.8. Posledním programem použitým pro vytvoření obrázků byl Adobe Photoshop CS5 a to u obrázku 4.9 na straně 47. Celá práce byla sázena ve formátu .tex pomocí programu WinEdt 6.0.

Součástí práce jsou pracovní listy, které jsou jako příloha práce. Mají za úkol představit různé možnosti, jak by se daly na školách představit geometrické jevy obsažené v této práci pomocí jejich souvislostí s reálným životem.

Literatura

- [1] ENCYKLOPEDIE FYZIKY. *Vrh šikmý* [online]. ©2006-2015 [cit. 2015-06-03]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/68-vrh-sikmy>
- [2] POLÁK, Zdeněk a Přemysl Šedivý. *Vrhy* [online studijní text]. [b.r.] [cit. 2015-06-03]. Dostupné z: fyzikalniolympiada.cz/texty/vrhy.pdf
- [3] LOUKOTA, L. *Phun - gravitace funguje*. In: *Plné hry.cz* [online]. 22. května 2008 [cit. 2015-06-12]. Dostupné z: http://plnehry.idnes.cz/phun-gravitace-funguje-07a-/Clanek.aspx?c=A080522_120146_bw-plneHry-arkady_bw
- [4] BEDNÁŘ, J. *Phun - představení programu a jeho možností*. Děčín, 2010/2011. Závěrečná práce. ZŠ a MŠ Máchovo náměstí Děčín. Dostupné z: <https://docs.google.com/file/d/0B7xCeMXnZYiTZGI3MWUxMWItYmNkMi00NWRkLWEwMjUtODNkZTUzMmNmZWY0/edit?hl=cs&pli=1>
- [5] JÍRŮ, J. *Hybnost a energie při vzájemném působení těles* [online studijní text]. [b.r.] [cit. 2015-06-03]. Dostupné z: fyzikalniolympiada.cz/texty/hybnost.pdf
- [6] ŠMEJKAL, Jaromír *Technické křivky geometrické v praxi*. Česká grafická unie. Praha, 1946.
- [7] MECHLOVÁ, Erika a Karel KOŠTÁL. *Výkladový slovník fyziky: pro základní vysokoškolský kurs*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 588 s. ISBN 80-7196-151-5.
- [8] SAMKOVÁ, K. *Základní pojmy* [online]. ©2005-2006 [cit. 2015-06-12]. Dostupné z: <http://geometrie.kma.zcu.cz/work/KS/pojmy.htm>
- [9] BARROW, John D. *Sto důležitých věcí, které nevíte (a ani nevíte, že je nevíte): matematika všedního dne*. 1. vyd. v českém jazyce. Praha: Dokořán, 2013, 301 s. ISBN 978-80-7363-348-6.

- [10] ZOUBEK, Tomáš. *Geometrie kolem nás*. České Budějovice, 2013. Bakalářská práce. JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH. Pedagogická fakulta. Vedoucí práce Roman Hašek.
- [11] BARROW, John D. Outer space: Bridging that gap. In: *Plus magazine* [online]. September 1, 2006 [cit. 2015-04-12]. Dostupné z: <http://plus.maths.org/content/outer-space-bridging-gap>
- [12] WAYMARKING. *Clifton Suspension Bridge* [online]. ©2015 [cit. 2015-04-12]. Dostupné z: <http://www.waymarking.com/gallery/image.aspx?f=1&guid=c0e0c821-426a-475e-8a87-61cf5fe24dfb>
- [13] MUSEUM OF MATHEMATICS. *Photo Gallery* [online]. [cit. 2015-04-13]. Dostupné z: <http://momath.org/gallery/>
- [14] GANDER, Walter a Jiří HŘEBÍČEK. *Solving problems in scientific computing using Maple and MATLAB*. 3rd, expanded and rev. ed. New York: Springer, c1997, xvii, 408 p. ISBN 3540617930.
- [15] BEČKA, Jan. *Základy kinematiky evolventního ozubení* [online prezentace]. 2012 [cit. 2015-04-21]. Dostupné z: <http://www1.fs.cvut.cz/cz/u12113/PERSONS/Becka>
- [16] WALSH, Daniel. Dan's geometrical curiosities. *Sudo make me a pseudosphere* [online]. December 11, 2010 [cit. 2015-04-19]. Dostupné z: <http://danielwalsh.tumblr.com/post/2173134224/sudo-make-me-a-pseudosphere>
- [17] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. *Relativistické modely*. ©2006-2015 [cit. 2015-06-10]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1169-relativisticke-modely>
- [18] SEKANINA, Milan, Leo BOČEK, Milan KOČANDRLE a Jaroslav ŠEDIVÝ. *Geometrie II*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988.

- [19] EUKLEIDÉS. *Základy*. 2. oprav. vyd. Nymburk: OPS, 2008, 154 s. Prameny evropské vzdělanosti, 1. sv. ISBN 978-80-903773-7-0
- [20] WOLFRAMALPHA - Computational knowledge engine. *Pseudosphere* [online]. ©2015 [cit. 2015-04-19]. Dostupné z: <https://www.wolframalpha.com/input?i=pseudosphere&lk=3>
- [21] JAREŠOVÁ, Miroslava a Ivo Volf. *Matematika křivek* [online studijní text]. 2012 [cit. 2015-04-22]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/studijni-texty>
- [22] WEISSTEIN, Eric W. Tractrix. In: *MathWorld* [online]. ©1999-2015 [cit. 2015-04-20]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/Tractrix.html>
- [23] BUMBÁLEK, Jaroslav. *Základy technické optiky*. Vyd. 3. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1995, 227 s. ISBN 80-01-01352-9.
- [24] SCHRÖDER, Gottfried. *Technická optika*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981, 158 s.
- [25] MALÝ, Petr. *Optika*. Vyd. 1. Praha: Karolinum, 2008, 361 s. ISBN 978-80-246-1342-0.
- [26] KOTLÍK, Bohumír. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro SŠ a nižší ročníky víceletých gymnázií*. 2. vyd. Praha: Fragment, 2011, 286 s. ISBN 978-80-253-1227-8.
- [27] HERRMANNOVÁ, Iva. *Využití zrcadel v praxi*. [online prezentace]. 2013 [cit. 2015-05-10]. Dostupné z: data.gymtan.cz/dumy/VY_32_INOVACE_IH_OPTIKA_10.pptx
- [28] DRABKIN, Artem a Oleg ŠEREMET. *T-34 v akci*. Vyd. 1. Praha: Baronet, 2007, 200 s., [4] s. obr. příl. Military (Baronet). ISBN 978-80-7384-050-1.
- [29] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6 pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2007, 2 sv. ISBN 978-80-7238-656-7.

- [30] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Dot. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1995, 608 s. ISBN 80-85849-78-X.
- [31] LEPIL, Oldřich. *Fyzika pro gymnázia: Optika*. 1.vyd. Praha: SPN, 1993, 167 s., [1] barev.fot.příl.na vol.listu. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-04-26092-6.
- [32] VÁVRA, Arnošt. *Zrcadla kulová*. [online prezentace]. 2014 [cit. 2015-05-18]. Dostupné z: <http://slideplayer.cz/slide/1969858/>
- [33] KUSALA, Jaroslav. *Solární energie* [online]. 2006 [cit. 2015-05-19]. Dostupné z: <https://www.cez.cz/edee/content/microsites/solarni/solar.htm>
- [34] NOVINKY.CZ. *Budovy se zrcadlovou fasádou rezignují na vlastní tvary*. 10. února 2011 [cit. 2015-05-20]. Dostupné z: <http://www.novinky.cz/bydleni/tipy-a-trendy/222718-budovy-se-zrcadlovou-fasadou-rezignuji-na-vlastni-tvary.html>
- [35] KATEDRA APLIKOVANÉ FYZIKY A TECHNIKY, PEDAGOGICKÁ FAKULTA, JIHOČESKÁ UNIVERZITA. *Newtonův reflektční dalekohled* [online]. KAFT, PF, JČU, ©2012-2015 [cit. 2015-05-19]. Dostupné z: http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/fyzika/prof/Tesar/diplomky/obr_dopl_optika/optika/dalekohledy/dalsi_typy/hvezd/new.htm
- [36] WEISSTEIN, Eric W. Circle Catacaustic. In: *MathWorld* [online]. ©1999-2015 [cit. 2015-06-10]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/CircleCatacaustic.html>
- [37] HAŠEK, Roman a Michaela Noruláková. Program wxMaxima ve výuce matematiky. In: *Sborník příspěvků 5. konference Užití počítačů ve výuce matematiky, 3.-5.11.2011*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Fakulta pedagogická, 2011, s. 108-121. ISBN 978-80-7394-324-0.
- [38] JEŽEK, František a Světlana Tomiczková. *Geometrie pro FST 2* [online pomocný učební text]. 28. srpna 2013 [cit. 2015-06-10]. Dostupné z: home.zcu.cz/~kslaba/GS2.pdf

- [39] LOCKWOOD, E. *A book of curves*. Cambridge [Eng.]: University Press, 1961, xi, s. 62-71.
- [40] ČERNÝ, Jaroslav a Milada KOČANDRLOVÁ. *Konstruktivní geometrie*. Vyd. 1. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1998, s. 110. ISBN 80-01-01815-6.

Přílohy

Příloha č. 1 - CD-ROM

Na přiloženém CD se nacházejí následující soubory v adresářové struktuře

- DIPLOMOVA_PRACE
 - Diplomova_prace_Zoubek_Tomas.pdf
- MODELKY
 - 02_GeoGebra_sikmy_vrh_model.ggb
 - 02_Phun_sikmy_vrh_model.phz
 - 03_ctvercove_kolo_model.ggb
 - 04_evolventa_kruznice_model.ggb
 - 04_evolventa_retezovky_model.ggb
 - 04_tazeni_retizku.ggb
 - 05_dute_zrcadlo_zobrazeni.ggb
 - 05_odraz_a_lom.ggb
 - 05_problemová_uloha.ggb
 - 05_rovinne_zrcadlo_zobrazeni.ggb
 - 05_vypukle_zrcadlo_zobrazeni.ggb
 - 06_nefroida_epicykloida.ggb
 - 06_nefroida_model.ggb
 - 06_nefroida_obal_kruznic.ggb
- PRACOVNI_LISTY
 - 02_pracovni_list_sikmy_vrh.pdf
 - 03_pracovni_list_retezovka.ggb
 - 03_pracovni_list_retezovka.pdf
 - 03_pracovni_list_rovnice_retezovky.pdf
 - 03_retez.jpg
 - 04_pracovni_list_karetni_trik.pdf
 - 04_pracovni_list_tazeni_retizku.pdf
 - 05_pracovni_list_dute_zrcadlo.pdf

05_pracovni_list_osova_soumernost.pdf

05_pracovni_list_rovinne_zrcadlo.pdf

05_pracovni_list_vypukle_zrcadlo.pdf

06_pracovni_list_spec_typ_epicykloidy.ggb

06_pracovni_list_specialni_typ_epicykloidy.pdf

Příloha č.2 - Pracovní listy

Pracovní list - šikmý vrh

1. Otevřete soubor 02_Geogebra_sikmy_vrh_model.ggb (na CD ve složce MODELÝ). Využijte možnosti měnit úhel α a zkuste odhadnout při jakém úhlu bude vzdálenost dopadu největší.

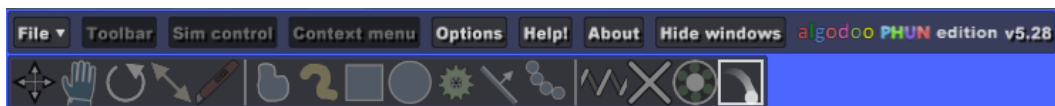
Váš odhad:

2. Otevřete soubor 02_Phun_sikmy_vrh_model.phz (opět na CD ve složce MODELÝ).

3. Pomocí nástroje *Obdélník* vyberte celý mechanismus děla a pomocí nástroje *Otáčení* můžete měnit úhel náklonu děla.



4. Přemístěte kouli do děla, umístěte na ní stopovku a teprve až potom vystřelte pomocí tlačítka *šipka dolu*. Vystřelte pod úhlem 30° a 60° a potom pod úhly 20° a 70° . Porovnejte dostřel u těchto dvojic úhlů.



30° a 60° :

20° a 70° :

5. Najdete ještě nějaké dvojice úhlů se stejnou vlastností? Pokud ano, jaké?

Vaše dvojice úhlů:

Pracovní list - rovnice řetězovky

1. Zkuste si představit jaký tvar vytvoří volně zavěšený řetízek a nakreslete ho.

2. V 17. století se matematici zabývali problémem s vyjádřením rovnice tvaru, který jste si představili a přibližně nakreslili. Tato křivka dostala název řetězovka právě podle toho, že vychází ze tvaru volně zavěšeného řetězu. Galileo Galilei tvrdil, že onou hledanou rovnicí je $f(x) = x^2$. Avšak matematici Gottfried Leibniz, Christiaan Huygens, David Gregory a Johann Bernoulli tvrdili, že správnou rovnicí je $f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$. Pojdme je rozsoudit.

3. Křivky, které jsou popsány rovnicemi, mezi nimiž budeme rozhodovat, najdete na následujících listech tohoto pracovního listu. Prohlédněte si je a napište váš odhad jaká je podle vás správná rovnice řetězovky.

Odhadovaná rovnice:

4. K dispozici máte řetízek a obrázky dvou křivek s rovnicemi. Vymyslete postup jakým by se dala, za pomoci obrázků a řetízku, správná rovnice řetězovky.

Váš postup::

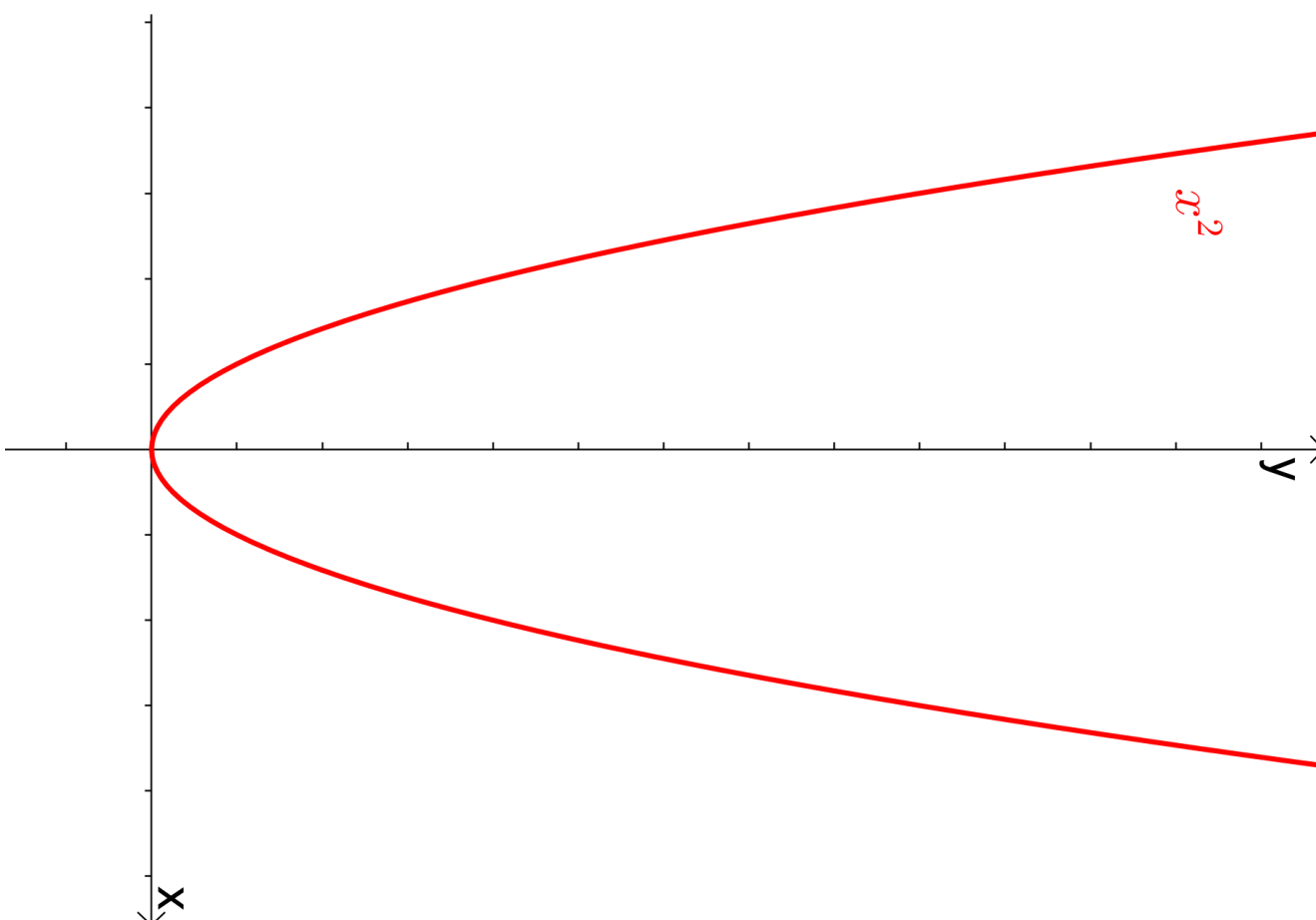
5. Svůj vymyšlený postup realizujte a napište vámi zjištěnou rovnici řetězovky a kdo měl ve sporu v 17. století pravdu:

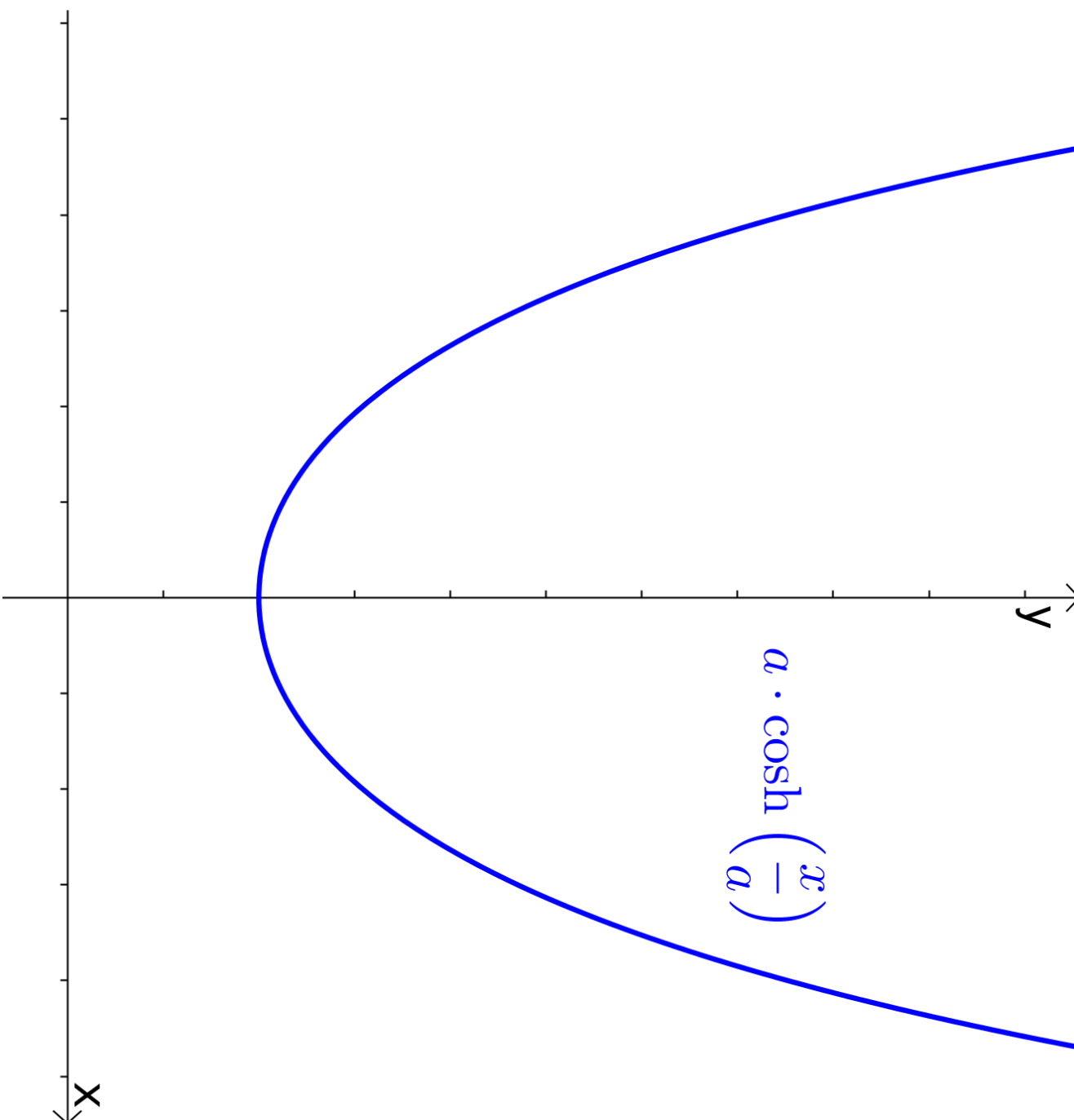
Zjištěná rovnice řetězovky:

Objevitel(-é) rovnice řetězovky:

6. Vyhledejte (v učebnicích pro vyšší ročníky nebo internet) název křivky, které patří druhá rovnice.

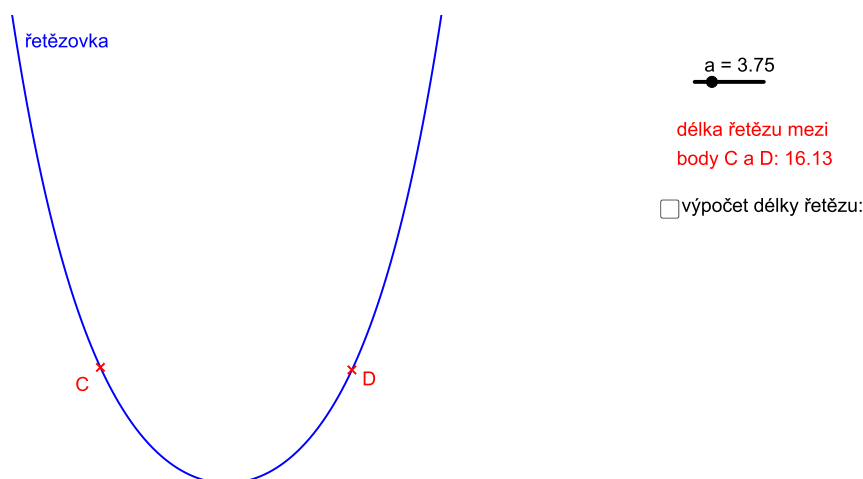
Druhou křivkou je:





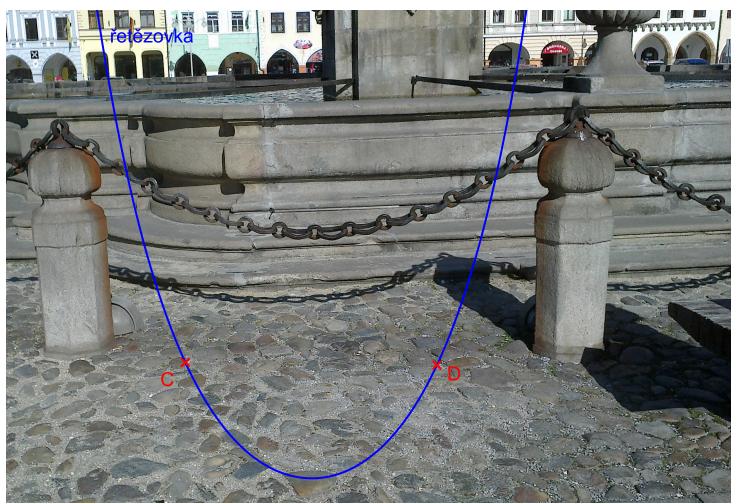
Pracovní list - Řetězovka

1. Otevřete si v programu GeoGebra soubor 03_pracovni_list_retezovka.ggb (na CD ve složce PRACOVNI_LISTY). Zobrazí se vám následující okno:



2. V pravém horním rohu vidíte parametr a . Měňte jeho hodnotu a všimněte si jak se mění tvar křivky. Dále můžete posouvat body C a D a sledovat změnu délky křivky mezi těmito body.

3. Vložte obrázek 03_retez.png (na CD ve složce PRACOVNI_LISTY). Šířka obrázku je dána jeho rohy, které leží na bodech A a B . Obrázek zmenšete pomocí přepsání souřadnic bodů A a B tak, že $A = (-20.81, -0.98)$ a $B = (19.19, -0.98)$. Nezapomeňte, že v programu GeoGebra se místo desetinné čárky píše tečka. Výsledný obrázek by měl vypadat takto:



4. Nastavte parametr a tak aby tvar řetězovky co možná nejpřesněji kopíroval tvar řetězu na obrázku a body A a B posuňte tak aby tvořily koncové body řetězu na obrázku. Zapište délku řetězu mezi body A a B .

Délka řetězu:

5. Nyní zkontrolujeme délku řetězu pomocí vzorce pro výpočet délky křivky. Zaškrtněte políčko délka řetězu pomocí prověšení. Objeví se nám políčka, kam zadáme délku prověšení řetězu a vzdálenost mezi body C a D , a délka řetězu se nám již sama spočítá.

6. Zjistěte prověšení řetězu a vzdálenost bodů C a D . Nejprve sestrojte úsečku CD . Velikost této úsečky zapíšeme do políčka *vzdálenost mezi body C a D*. Poté sestrojíme střed úsečky CD . Z tohoto středu veďte kolmici k úsečce CD . Dostaneme průsečík kolmice s řetězem. Prověšení je délka úsečky, jejíž krajními body jsou střed úsečky CD a průsečík kolmice s řetězem. Tuto hodnotu napište do políčka *prověšení řetězu*. Zapište spočítanou délku řetězu a porovnejte obě hodnoty délky řetězu.

Spočítaná délka řetězu:

Pracovní list - Tažení řetízku

1. Přiložte řetízek, který dostanete na prázdný papír (druhý list tohoto pracovního sešitu). Konec řetízku, na kterém není přívěšek, bude u delšího kraje papíru. Tímto koncem řetízku budete pohybovat po kraji papíru a postupně dělejte kroužek kolem pozice přívěsku.
2. Porovnejte váš obrázek s křivkami na třetí a čtvrté stránce.
3. Odhadněte pomocí podobnosti s obrázky křivek jakou bude mít vaše nakreslená křivka rovnici.

Váš odhad:

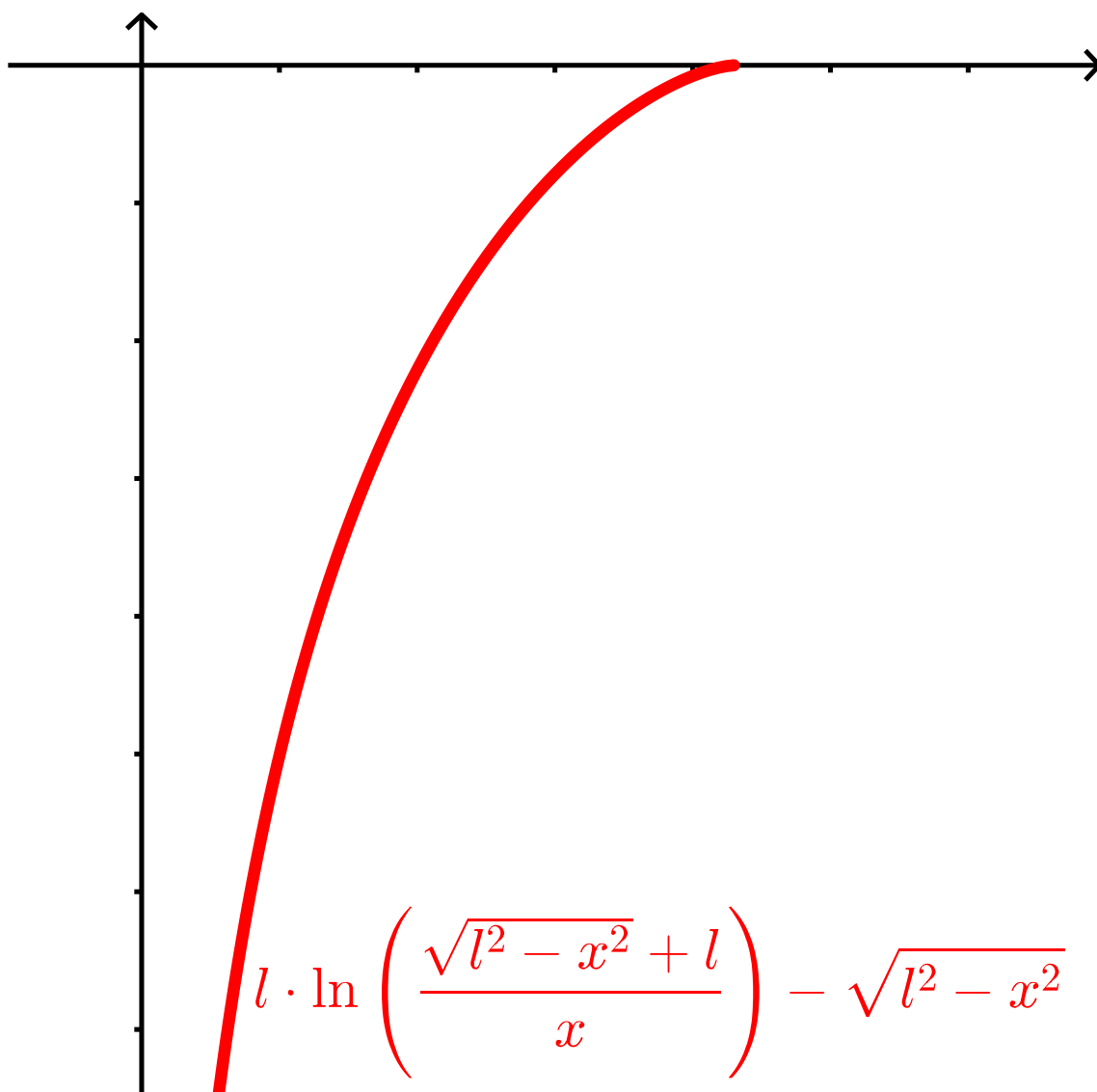
4. Vymyslete postup (pomocí obrázků křivek a řetízku) jak ověřit váš odhad.

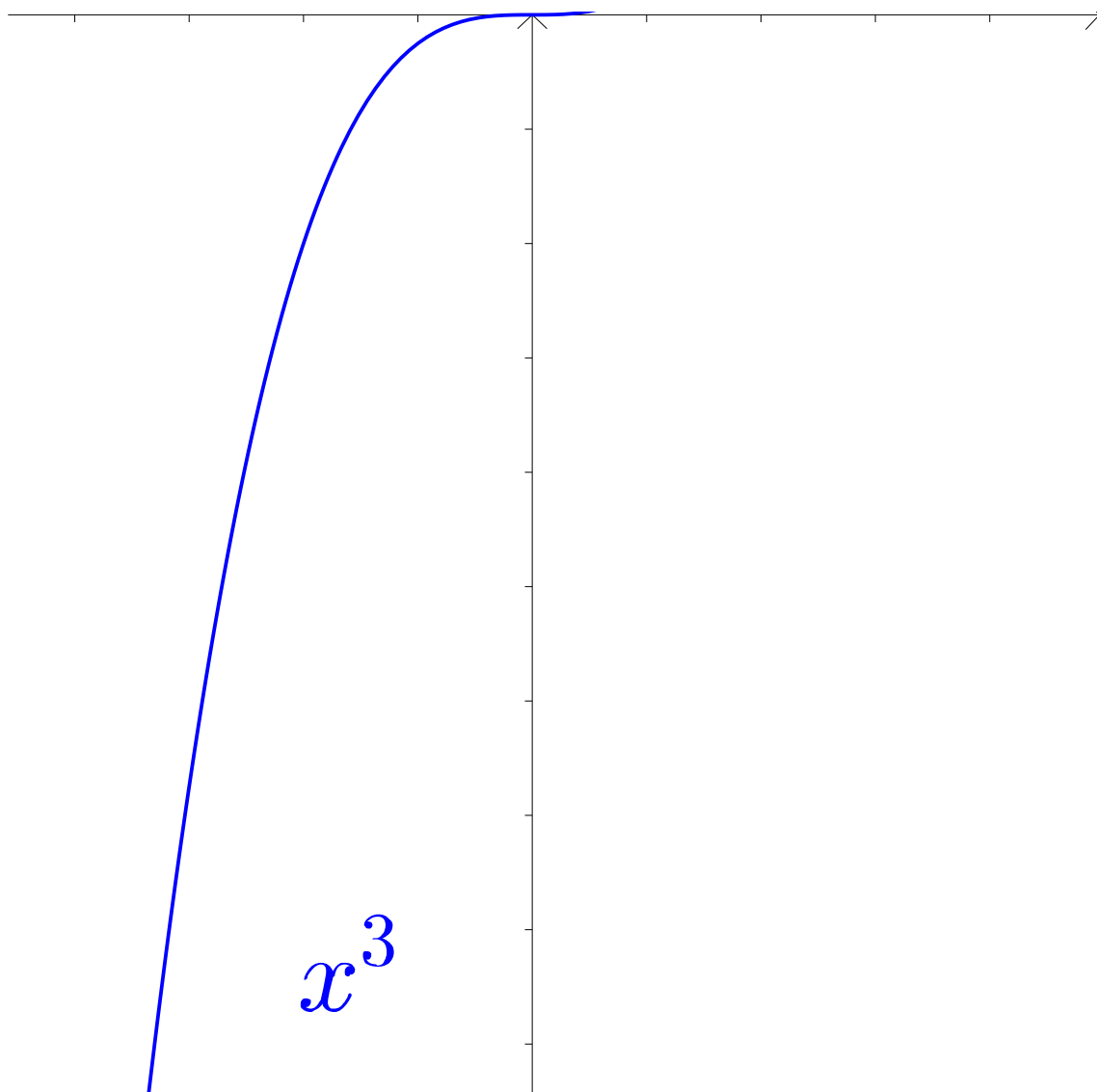
Postup:

5. Realizujte váš postup a запиšte zjištěnou rovnici vaší nakreslené křivky.

Zjištěná rovnice:

Stránka pro zachycení trajektorie řetízku



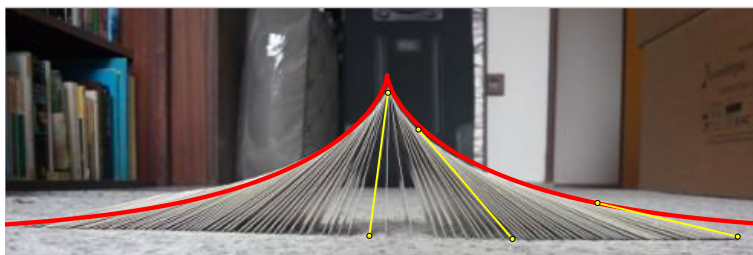


Pracovní list - Karetní trik

1. Sestavte z balíčku karet stavbu jako na obrázku. Návod: stačí balíček karet rozprostřít do pásu a pak na straně, kde začal pás rozvíjet, ho začněte zvedat. Nakonec dostanete karty do pozice jako je na obrázku.



2. Můžete si všimnout, že nám hřbety karet vykreslují zajímavou křivku, stejnou jako na dalším obrázku.



3. Zkuste popřemýlet a napište jak se budou lišit vzdálenosti jednotlivých žlutých úseček zobrazených na obrázku.

Váš názor:

4. Posouvejte vrchol křivky do stran a zapište jak se tvar křivky mění.

Změna křivky:

5. Vyhledejte definice následujících pojmů:

Řetězovka:

Exponenciální funkce:

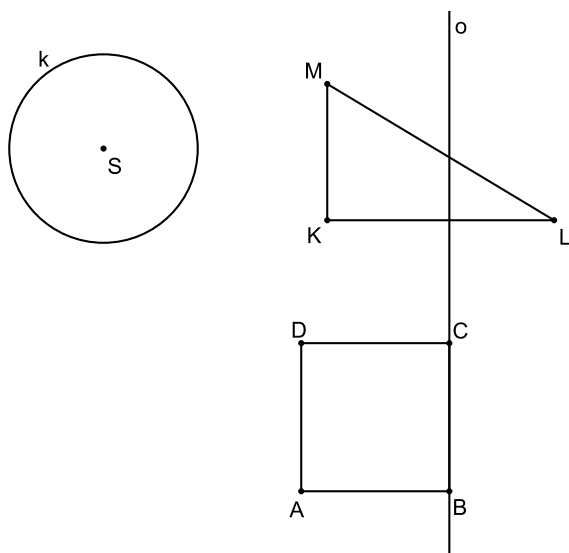
Traktrix:

6. Pomocí definic v úkolu 5. přiřaďte křivce, kterou tvoří hřbety karet, její název.

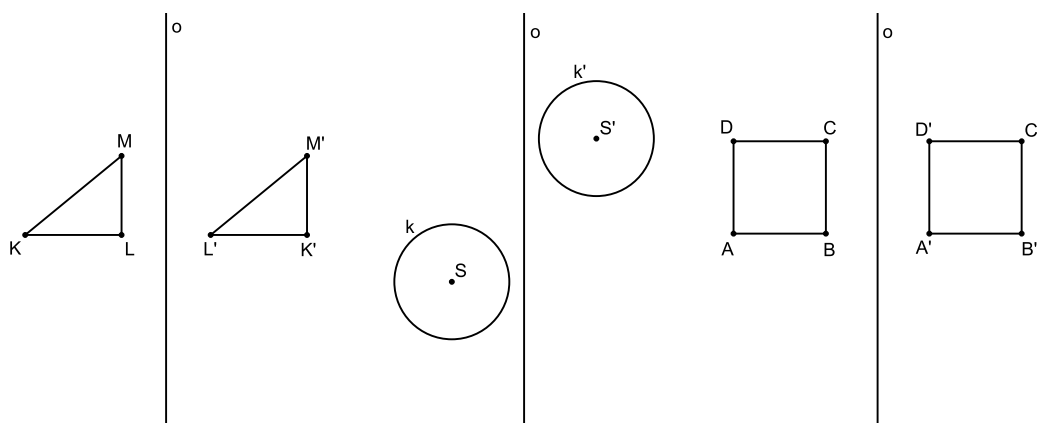
Název křivky:

Pracovní list - osová souměrnost

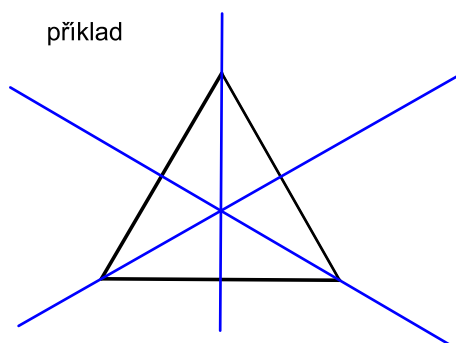
1. Zobrazte obrazy geometrických útvarů na obrázku v osově souměrnosti podle osy o .



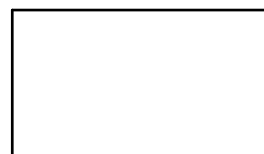
2. Rozhodněte zda jsou geometrické útvary na obrázku správně zobrazeny v osově souměrnosti podle osy o . Opravte případné chyby.



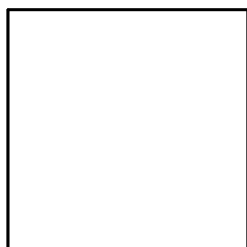
3. Vyznačte v geometrických útvarech na obrázku osy podle nichž jsou souměrné.



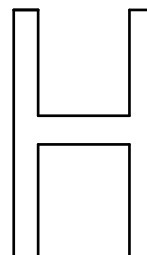
a)



b)



c)

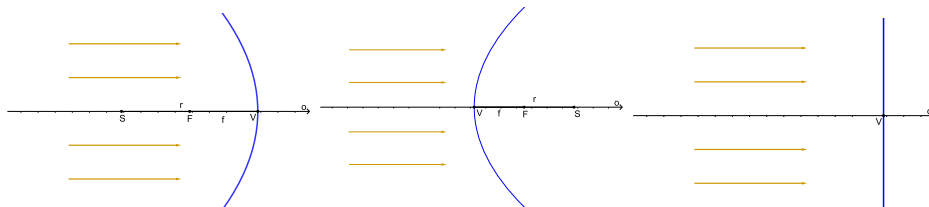


4. Na obrázku, kde vidíte odraz kůlu na vodní hladině, znázorněte osu podle níž se kůl ve vodní hladině zobrazuje.

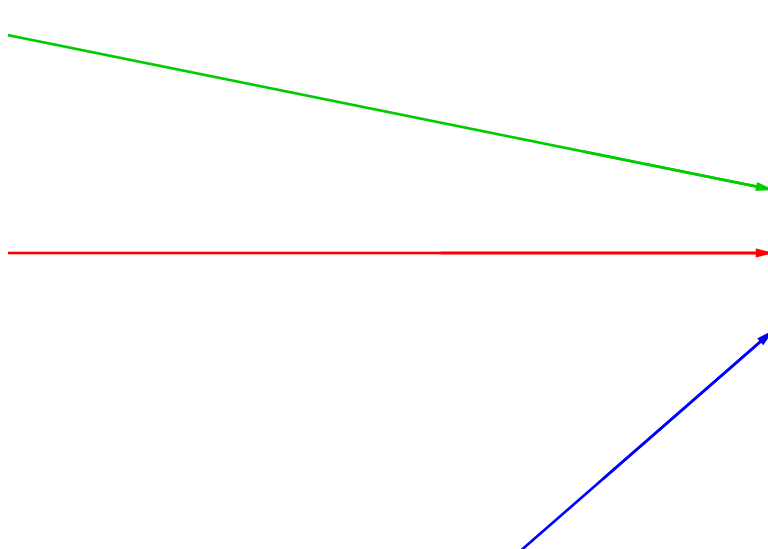


Pracovní list - Rovinné zrcadlo

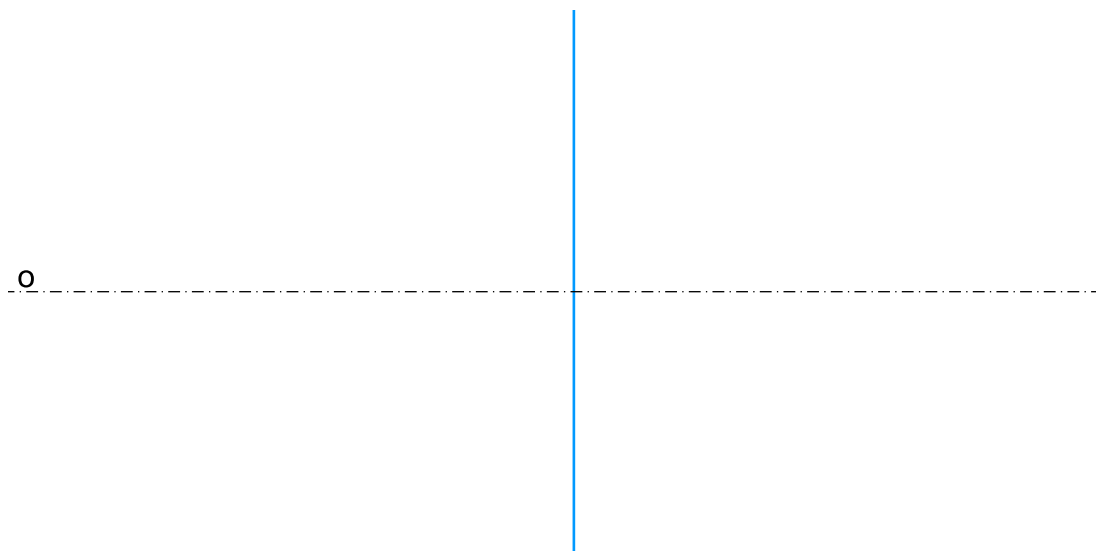
1. Zakrouškujte obrázek představující rovinné zrcadlo.



2. Dokreslete jak se budou paprsky na obrázku odrážet.



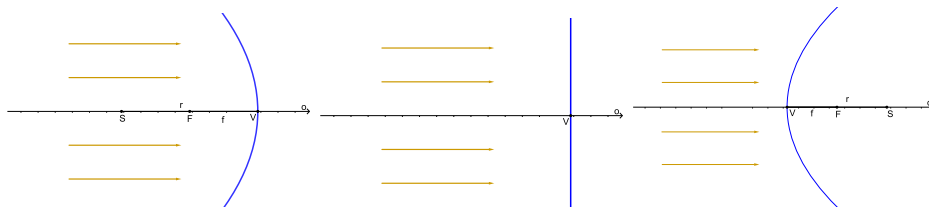
3. Nakreslete nějaký objekt a pak ho zobrazte podle daného zrcadla.



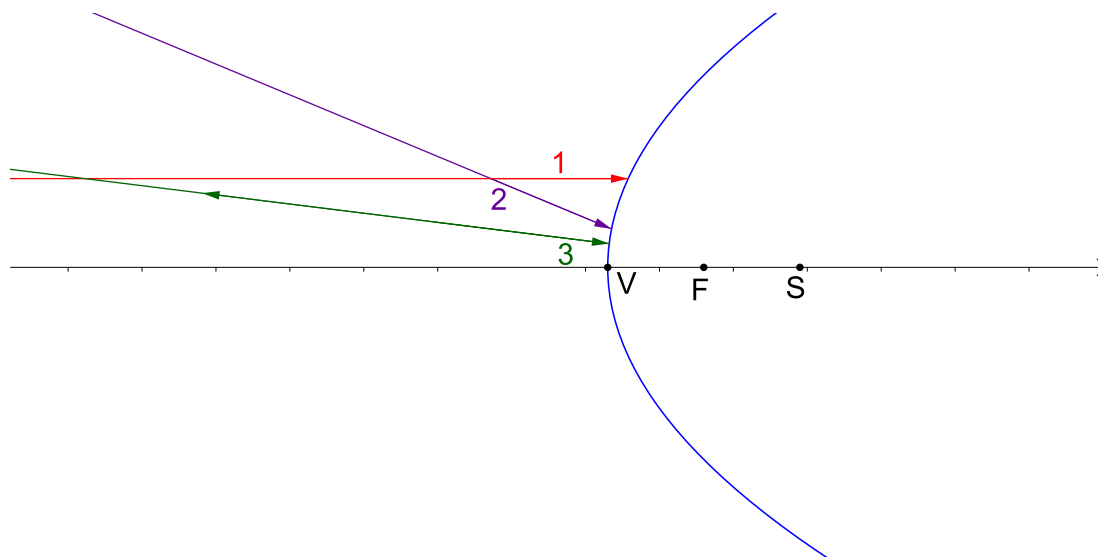
4. Napište, kde se můžeme setkat s rovinnými zrcadly. Proč si myslíte, že jsou na těchto místech využívána?

Pracovní list - Vypuklé zrcadlo

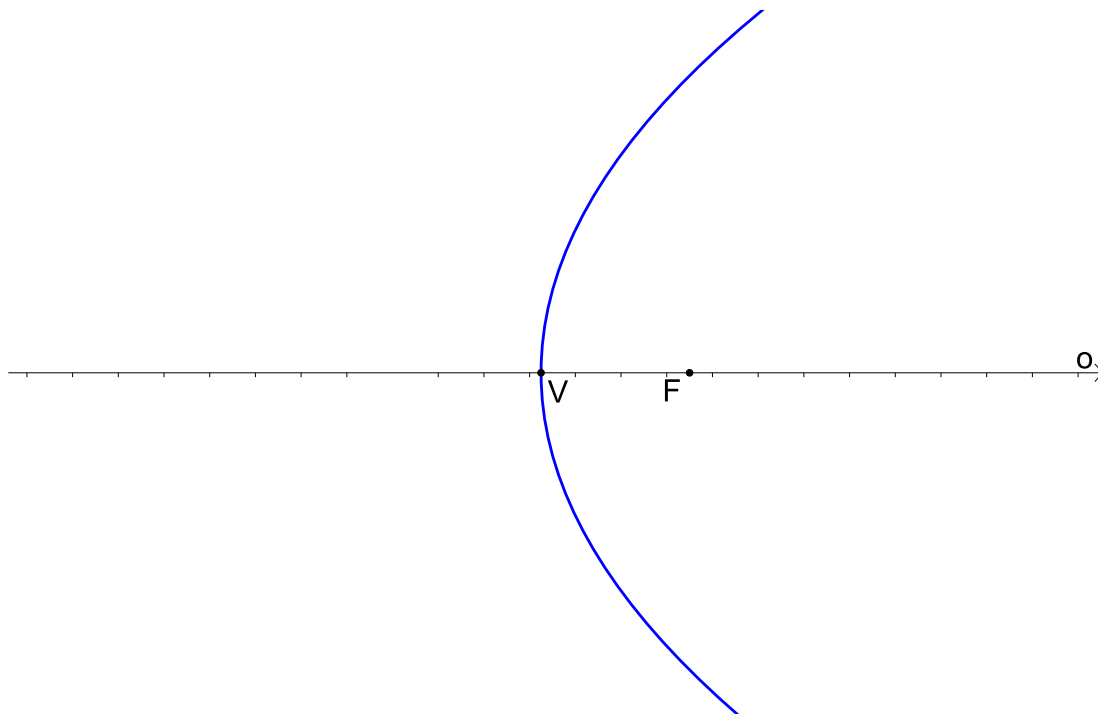
1. Zakrouškujte obrázek představující vypuklé zrcadlo.



2. Dokreslete jak se budou paprsky na obrázku odrážet.



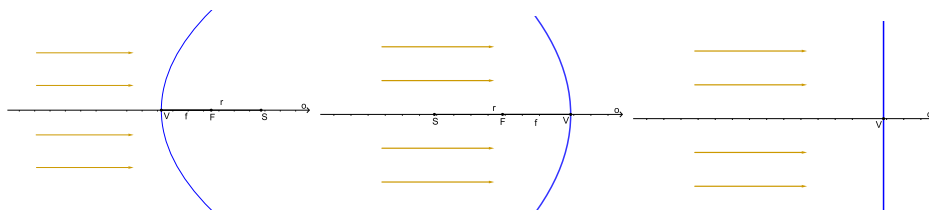
3. Nakreslete nějaký objekt a pak ho zobrazte podle daného zrcadla.



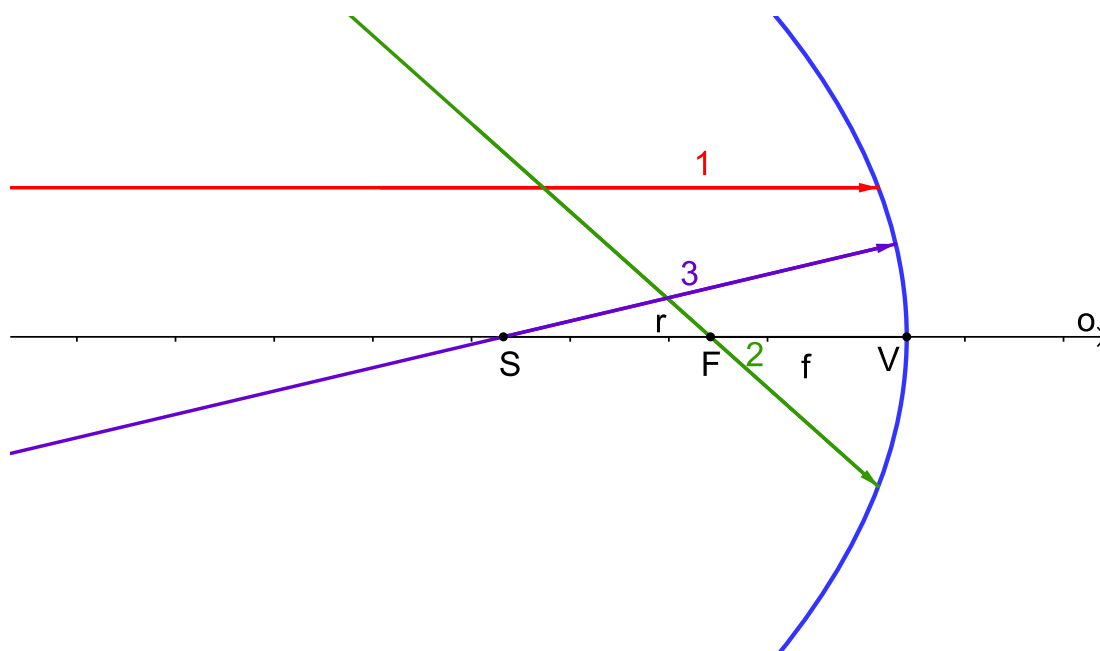
4. Napište, kde se můžeme setkat s vypuklými zrcadly. Proč si myslíte, že jsou na těchto místech využívána?

Pracovní list - Duté zrcadlo

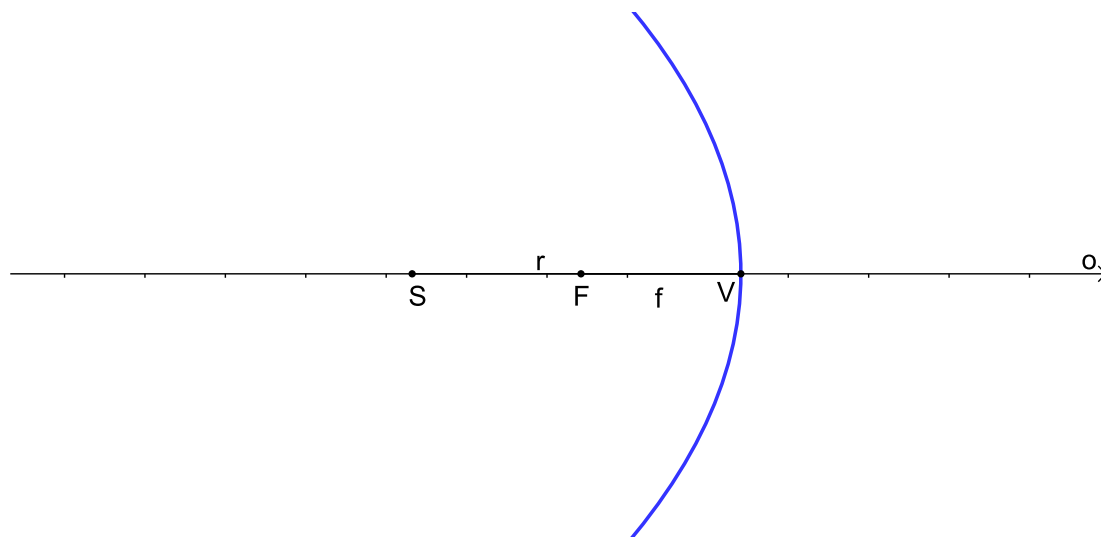
1. Zakrouškujte obrázek představující duté zrcadlo.



2. Dokreslete jak se budou paprsky na obrázku odrážet.



3. Nakreslete nějaký objekt a pak ho zobrazte podle daného zrcadla.



4. Napište, kde se můžeme setkat s dutými zrcadly. Proč si myslíte, že jsou na těchto místech využívána?

Pracovní list - Speciální typ epicykloidy

1. Vyhledejte a napište co je to epicykloida.

Epicykloida:

2. Otevřete soubor 06_pracovni_list_spec_typ_epicykloidy.ggb (na CD ve složce PRA-COVNILLISTY).

3. Zjistěte velikosti poloměrů r_1 a r_2 .

$$r_1 =$$

$$r_2 =$$

4. Zkuste pohybovat modrým křížkem po kružnici. Nakreslete tvar křivky, který jste dostali.

5. Vyhledejte na internetu obrázky následujících křivek a překleste je.

Deltoid

Řetězovka

Kardioida

Nefroida

6. Je některá z těchto křivek tou, kterou jste naktesliliv úkolu č. 4? Pokud ano, napište jaká.

7. Měňte poloměry r_1 a r_2 . Budeme dostávat pořád stejnou křivku? Pokud ne, napište při jaké podmínce ji budeme dostávat.

vaše závěry: