



Pedagogická  
fakulta  
Faculty  
of Education

Jihočeská univerzita  
v Českých Budějovicích  
University of South Bohemia  
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích  
Pedagogická fakulta  
Katedra matematiky

Bakalářská práce

# Geometrie kolem nás

Vypracoval: Tomáš Zoubek  
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2013

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Geometrie kolem nás jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, dne 25.6.2013

.....

Zoubek Tomáš

## Anotace

V technické praxi i v běžném životě se setkáváme s rozličnými geometrickými tvary, stejně jako s projevy či aplikacemi různých geometrických vlastností. Poznání a pochopení těchto jevů může sehrát důležitou roli při studiu matematiky a geometrie, ukazuje tyto disciplíny v jejich úzkém vztahu k reálnému světu. Cílem bakalářské práce je vytvořit soubor materiálů, které budou věnovány takovýmto jevům. Tak, aby bylo možné je využít při výuce matematiky a geometrie.

## Poděkování

Děkuji Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D., který vedl mou bakalářskou práci, za podnětné rady, připomínky a za čas, jenž mi věnoval. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a mé přítelkyni za jejich podporu.

Zoubek Tomáš



# Obsah

|          |                                                               |           |
|----------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Úvod</b>                                                   | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Prokládání křivek na fotografii v programu GeoGebra</b>    | <b>4</b>  |
| 2.1      | Vkládání obrázků . . . . .                                    | 4         |
| 2.2      | Vlastnosti obrázku . . . . .                                  | 6         |
| 2.3      | Vkládání parametrů a křivky . . . . .                         | 7         |
| <b>3</b> | <b>Řetězovka</b>                                              | <b>12</b> |
| 3.1      | Řetězovka v příkladu . . . . .                                | 16        |
| 3.2      | Řetězovka nebo parabola? . . . . .                            | 18        |
| 3.3      | Řetězovka kolem nás . . . . .                                 | 20        |
| <b>4</b> | <b>Logaritmická spirála</b>                                   | <b>22</b> |
| 4.1      | Logaritmická spirála - zlatý trojúhelník a obdélník . . . . . | 25        |
| 4.2      | Logaritmická spirála kolem nás . . . . .                      | 27        |
| <b>5</b> | <b>Sinusoida</b>                                              | <b>32</b> |
| 5.1      | Definice sinu pomocí jednotkové kružnice . . . . .            | 34        |
| 5.2      | Sinusoida kolem nás . . . . .                                 | 36        |
| <b>6</b> | <b>Platónova tělesa</b>                                       | <b>39</b> |
| 6.1      | Dualita Platónových těles . . . . .                           | 43        |
| 6.2      | Výpočet obsahu a objemu Platónových těles . . . . .           | 45        |
| 6.3      | Pravidelný čtyřstěn . . . . .                                 | 46        |
| 6.4      | Pravidelný šestistěn (krychle) . . . . .                      | 50        |

|          |                                        |           |
|----------|----------------------------------------|-----------|
| 6.5      | Pravidelný osmistěn . . . . .          | 52        |
| 6.6      | Pravidelný dvanáctistěn . . . . .      | 54        |
| 6.7      | Pravidelný dvacetistěn . . . . .       | 60        |
| 6.8      | Platónská tělesa kolem nás . . . . .   | 63        |
| 6.8.1    | Pravidelný čtyřstěn . . . . .          | 63        |
| 6.8.2    | Pravidelný šestistěn . . . . .         | 64        |
| 6.8.3    | Pravidelný osmistěn . . . . .          | 65        |
| 6.8.4    | Pravidelný dvanáctistěn . . . . .      | 67        |
| 6.8.5    | Pravidelný dvacetistěn . . . . .       | 68        |
| <b>7</b> | <b>Archimédova tělesa</b>              | <b>70</b> |
| 7.1      | Archimédova tělesa kolem nás . . . . . | 76        |
| <b>8</b> | <b>Závěr</b>                           | <b>78</b> |

# Kapitola 1

## Úvod

Geometrie nás provází celým naším životem. Je doslova všude okolo nás. Už od počátků našich dějin lidé objevovali, že některé geometrické tvary jsou pro ně výhodné. Například jeskyní lidé pochopili, že se jim bude zvěř lépe lovit s klackem seříznutým do hrotu. Dalším typickým příkladem výhodnosti některých geometrických tvarů je jeden z nejdůležitějších vynálezů, vynález kola. Geometrii nevnímáme pouze naším zrakem ale i naším hmatem. Hmatem dokážeme dokonce zjistit nerovnosti na ploše, které pouhým okem nezaznamenejeme. Geometrie je důležitou součástí našeho světa. Pro stavebnictví a strojírenství je přímo nepostradatelná. Geometrických tvarů je nepřeberné množství. Ať už se jedná o tvary, jež známe ze základní či střední školy, nebo mnohem složitější křivky, tělesa a plochy. V této práci jsou představeny vybrané křivky a tělesa, které můžeme z našeho okolí znát. Jsou u nich uvedeny jejich vlastnosti, modely a fotografie z prostředí, které nás obklopuje a kde se s nimi můžeme setkat. Jedna kapitola je věnována prokládáním křivky na fotografii v programu GeoGebra. Na takto upravených fotografiích můžeme vidět zvýrazněné křivky v prostředí, v kterém se běžně pohybujeme a možná jsme si jich ani nevšimli nebo o nich takto nepřemýšleli. Fotografie s proloženými křivkami jsou velmi vděčnými a názornými pomocníky při výuce matematiky a geometrie.

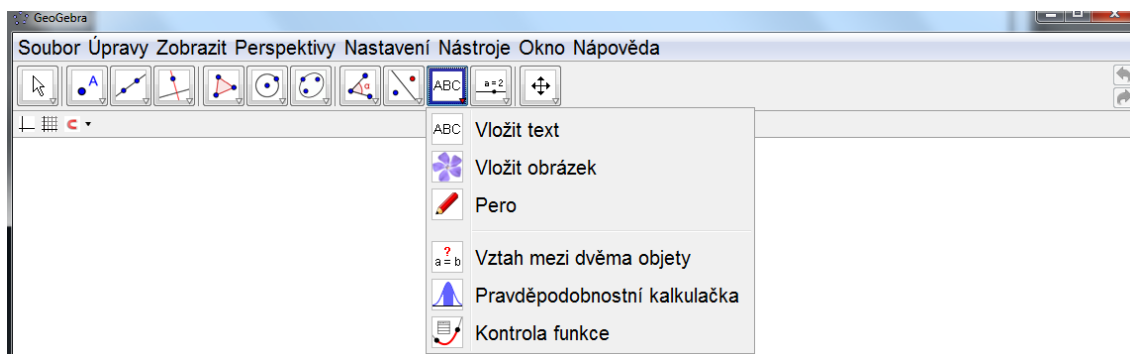
## Kapitola 2

# Prokládání křivek na fotografii v programu GeoGebra

V této práci je často využívána metoda prokládání křivek na fotografii v programu GeoGebra. Prokládání křivek na fotografii se hojně využívá díky své názornosti. Čtenář si nemusí křivku představovat ani ji na obrázku hledat protože křivka je mu na obrázku názorně prezentována. Popíšeme si proto postup jak tuto metodu zvládnout. Pro lepší orientaci v programu je ke každému kroku připojen i obrázek, z něhož je patrné přesné umístění požadovaných ikon nebo měnících se parametrů.

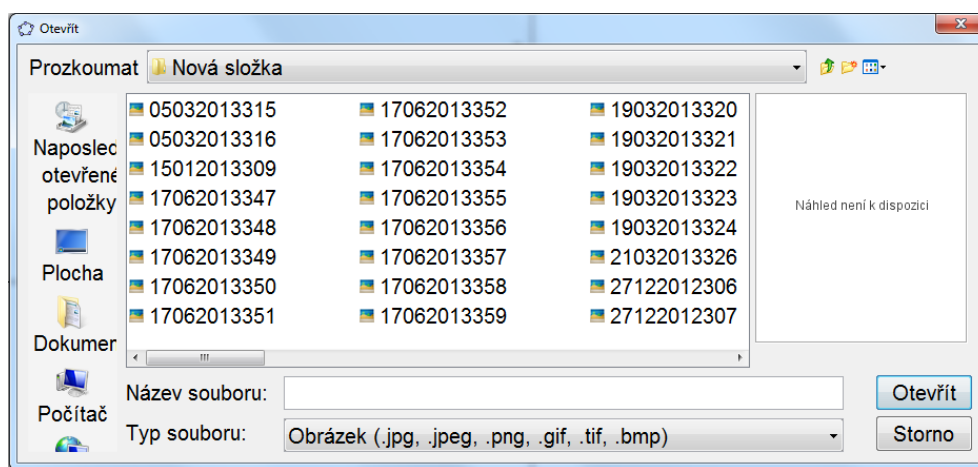
### 2.1 Vkládání obrázků

Prvním krokem je vložení obrázku. Jak je zřejmé z obr. 2.1, na panelu nástrojů klikneme na šipku v pravém dolním rohu ikony *Vložení textu* (na ikoně je ABC), čímž se nám rozbálí nabídka pod touto ikonou. Z nabídky vybereme *Vložit obrázek*.



Obrázek 2.1: Vložení obrázku

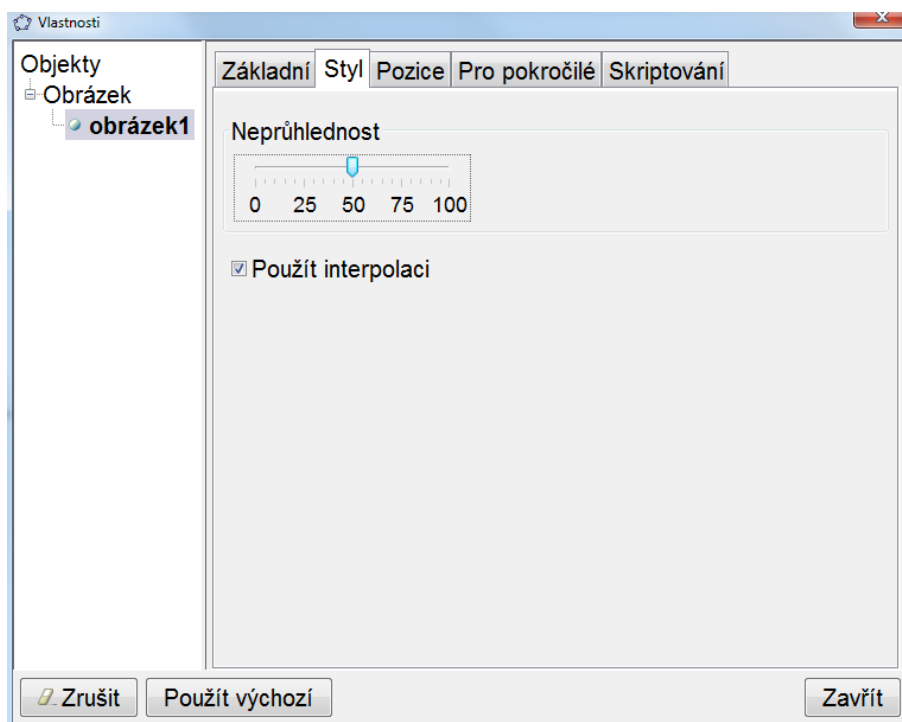
Poté klikneme na nákresnu, kde chceme obrázek vložit. Objeví se nám tabulka obdobná té na obr. 2.2. Vybereme z ní obrázek, který chceme do programu GeoGebra vložit. Po výběru obrázku potvrdíme ikonou otevřít (v pravém dolním rohu tabulky) nebo dvojklikem na vybraný obrázek.



Obrázek 2.2: Výběr obrázku k vložení

## 2.2 Vlastnosti obrázku

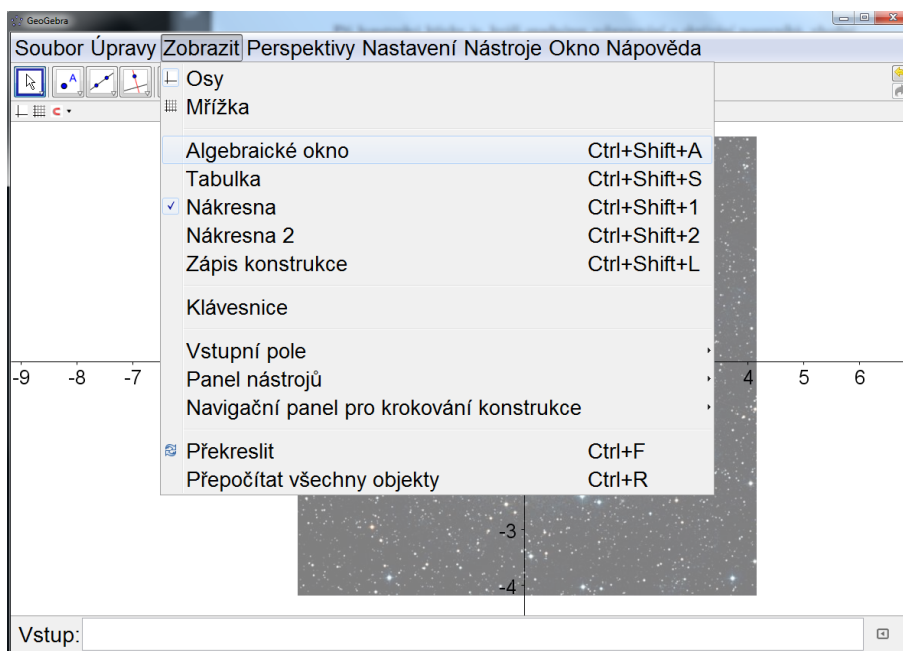
Jak napovídá název kapitoly, uvedeme si zde, kde můžeme měnit jednotlivé vlastnosti vloženého obrázku. Na vložený obrázek klikneme pravým tlačítkem myši a v zobrazené tabulce zvolíme možnost *Vlastnosti*. Na obr. 2.3 vidíme tabulku, v níž můžeme měnit vlastnosti obrázku. Při prokládání obrázku křivkou nás bude prioritně zajímat vlastnost *Neprůhlednost* pod záložkou *Styl*. *Neprůhlednost* snížíme na 50%, čímž posléze dosáhneme lepší viditelnost prokládané křivky, při měnění jejích parametrů a snahy dosáhnout co nejlepšího překrytí prokládané křivky s křivkou na vloženém obrázku, a snáze umístíme například střed křivky na obrázku do středu souřadného systému (pomocí nástroje *Ukazovátko*).



Obrázek 2.3: Vlastnosti obrázku

## 2.3 Vkládání parametrů a křivky

Při konstrukci křivky je, kvůli snadnému zobrazování a skrývání posuvníků, vhodné mít zobrazené Algebraické okno. Pokud máte Algebraické okno skryté lze ho jednoduše zobrazit. Kliknete na hlavním panelu na nabídku *Zobrazit* a vyberete *Algebraické okno*. Přesné umístění nabídky *Zobrazit* vidíme na obr. 2.4. Druhou možností je zobrazení pomocí klávesové zkratky Ctrl+Shift+A.



Obrázek 2.4: Zobrazení Algebraického okna

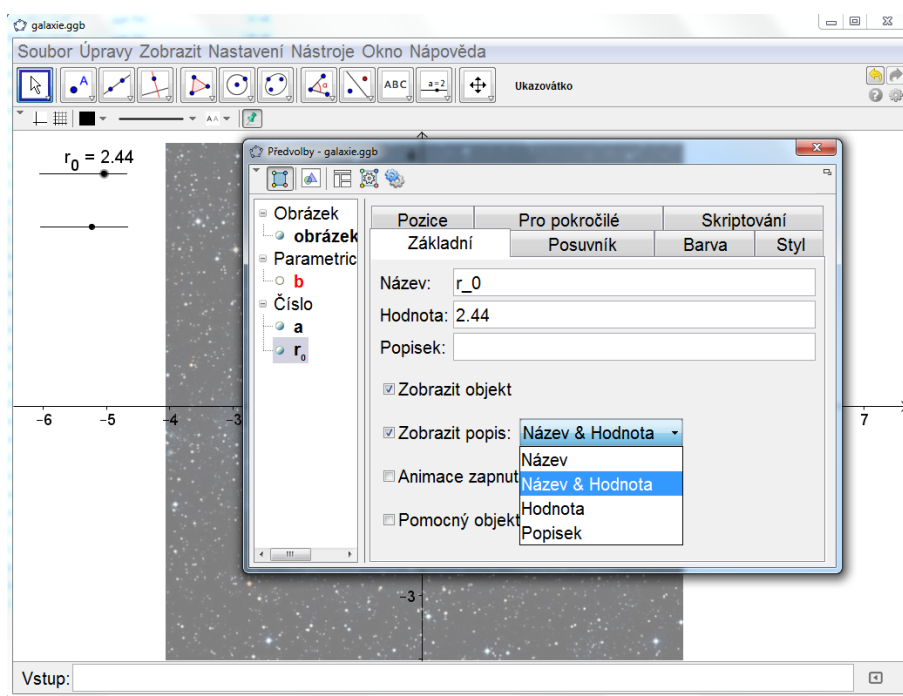
Tvar křivky můžeme měnit pomocí parametrů. Proto nejprve při konstrukci křivky zadáme parametry. V našem příkladu použijeme logaritmickou spirálu, která má obecnou rovnici:

$$r(\varphi) = ae^{b\varphi}, \quad (2.1)$$

kde  $a, b \in \mathbb{R}$  jsou parametry ovlivňující tvar logaritmické spirály. V první řadě zadáme parametry  $a$  a  $b$ . Zadávání parametrů je jednoduché. Do *Vstupu* (řádek u spodního okraje) zadáme " $a =$ " a námi zvolenou hodnotu. Analogicky postupujeme při zadávání

parametru  $b$ . Chtěl bych upozornit, že při zadávání desetinných míst v programu GeoGebra nepíšeme desetinou čárku ale desetinou tečku. Do Vstupu proto píšeme například  $d = 1.3$ .

Námi zadané parametry jsou nyní nezobrazené. Zobrazíme je kliknutím na prázdné kolečko vedle jejich hodnot v Algebraickém oknu. Nyní se nám zobrazily jako posuvník, neboť to jsou volné objekty a jejich hodnotu můžeme libovolně měnit. Pro lepší názornost a práci s posuvníkem si upravíme některé jeho vlastnosti. Pro zobrazení vlastností posuvníku postupujeme stejně jako při zobrazení vlastností obrázku v oddílu 2.2 na straně 6. Ze základních vlastností na obr. 2.5 vybereme *Zobrazit popis* a nastavíme ho na *Název & Hodnota*. V záložce *Posuvník* můžeme upravit interval posuvníku a délku jednotlivého posunu. V našem případě je hodnota *Kroku* 0.1.

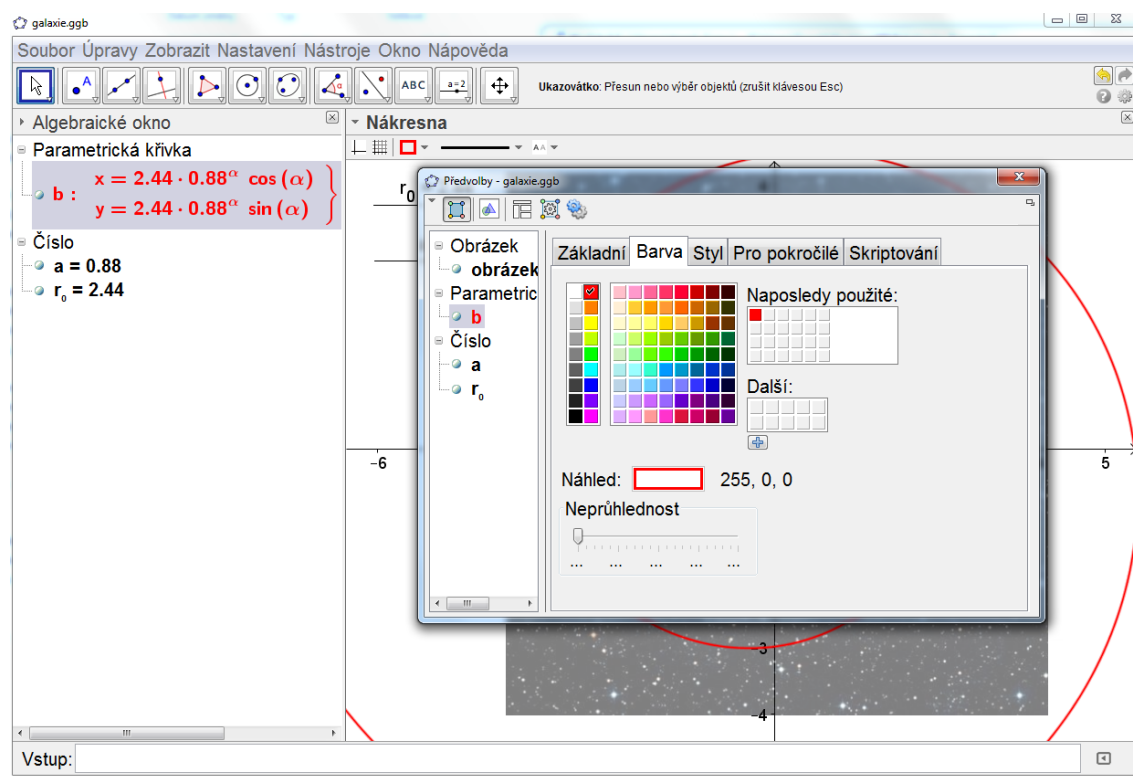


Obrázek 2.5: Vlastnosti posuvníku

Parametry již máme zadány a proto můžeme přikročit k zadání rovnice křivky. Tu opět napíšeme do *Vstupu*. V našem konkrétním případě je to trochu komplikovanější. Obecná rovnice logaritmické spirály (2.1) je v polárních souřadnicích, v kterých pro-

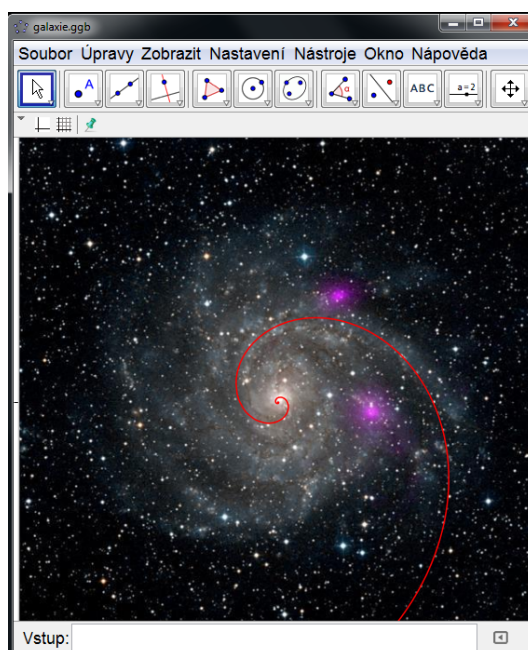


gram GeoGebra nepracuje. Proto do *Vstupu* zadáme příkaz:  
 $Krivka[b * a^\alpha \cos(\alpha), b * a^\alpha \sin(\alpha), \alpha, -50, 50]$ . Po potvrzení příkazu se zobrazí námi požadovaná křivka. Pro lepší přehlednost si můžeme křivku barevně odlišit. Zobrazíme si tabulku vlastností křivky stejným postupem jako tabulku vlastností obrázku v oddílu 2.2 na straně 6. Jak vidíme na obr. 2.6, v záložce *Barva* máme velký výběr barev. My jsme v našem příkladu zvolili barvu červenou.



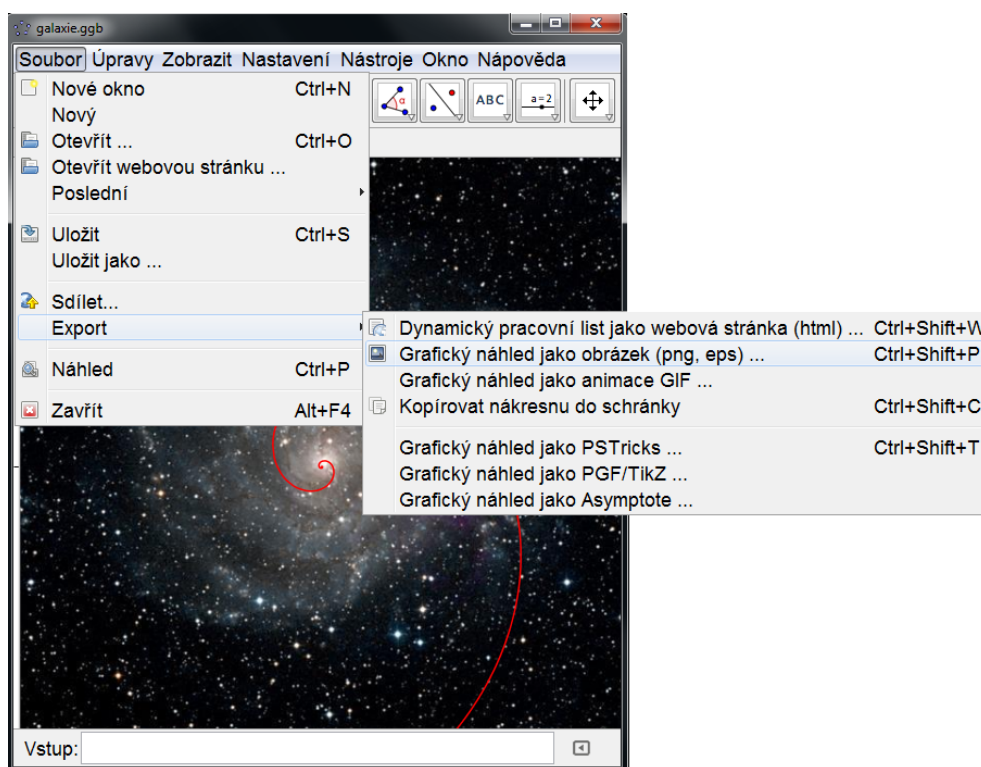
Obrázek 2.6: Výběr barvy v tabulce vlastností křivky

Dostali jsme se do fáze kdy máme již vložený obrázek i křivku. Dalším postupem je nalezení vhodné kombinace hodnot parametrů tak, abychom naší křivkou co možná nejpřesněji překryli křivku na obrázku. Parametry měníme posunem bodu po posuvníku, který danému parametru náleží. Po nalezení vhodné kombinace hodnot parametrů, upravíme obrázek. Nejprve skryjeme posuvníky (kliknutím na plné kolečko vedle jejich hodnot v Algebraickém okně), upravíme neprůhlednost obrázku na 100% a skryjeme Algebraické okno. Následně přizpůsobíme velikost okna programu GeoGebra velikosti námi vloženého obrázku. Výsledná podoba by měla odpovídat obr. 2.7.



Obrázek 2.7: Konečná podoba

Pro další práci s tímto, námi vytvořeným, obrázkem je výhodné ho exportovat do formátu eps. Obrázek ve formátu eps můžeme dále využívat například v textových editorech, v prezentacích atd. Proto si na závěr této kapitoly popíšeme jak naši výslednou práci v programu GeoGebra exportujeme do formátu eps. Postup je jednoduchý, jak můžeme vidět na obr. 2.8. Na hlavní liště rozbalíme nabídku *Soubor*, najedeme na *Export* a z nabídky vybereme *Dynamický náhled jako obrázek (png, eps)*. Objeví se nám tabulka, v níž můžeme upravit měřítko a případně vybrat jiný z nabízených formátů (png, pdf, svg nebo emf). Pro dokončení zvolíme *Uložit* a v následné tabulce vybrat umístění kam chceme uložit obrázek ve formátu eps.



Obrázek 2.8: Export do formátu eps

# Kapitola 3

## Řetězovka

Řetězovka je křivka tvaru ohebného vlákna po svém obvodě rovnoměrně zatíženého, zavěšeného ve dvou bodech, které nemusí být ve stejné výši [1].

Obecná rovnice řetězovky je:

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}), \quad (3.1)$$

kde  $a$  je poloměr křivosti pro vrchol řetězovky.

V některých zdrojích se můžeme setkat také s rovnicí ve tvaru  $y = a \cdot \cosh(\frac{x}{a})$ , kde  $a$  je poloměr křivosti. Ukážeme si vztah mezi těmito dvěma rovnicemi. Hyperbolický cosinus je definován vzorcem (3.2).

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (3.2)$$

Na první pohled je zřejmá podobnost mezi tímto vzorcem (3.2) a obecnou rovnicí řetězovky (3.1). Substitucí nahradíme ve vzorci (3.2)  $x$  za  $\frac{x}{a}$  a dostaneme (3.3)

$$\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) \quad (3.3)$$

Z obecné rovnice (3.1) můžeme vyjádřit:

$$(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = y \cdot \frac{2}{a} \quad (3.4)$$

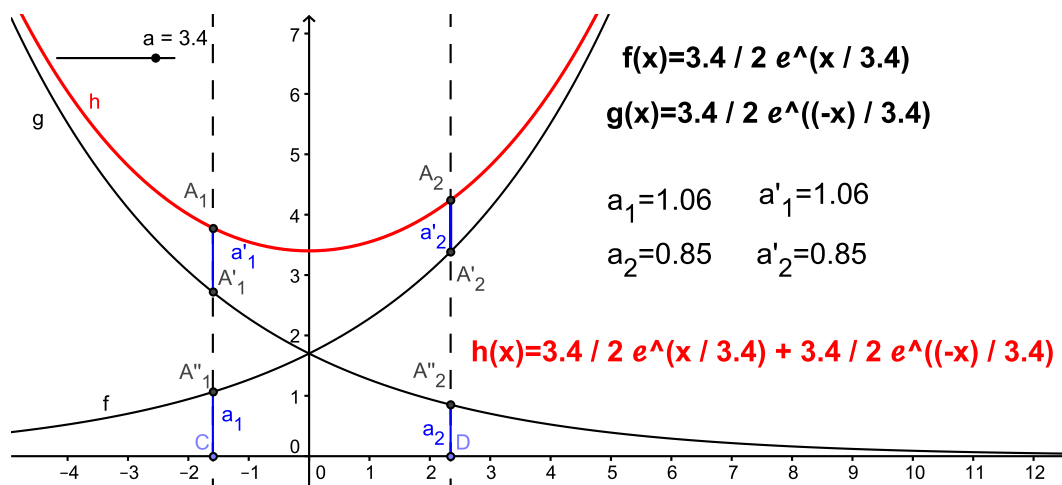
Pomocí substituce dosadíme do (3.3) a dostaneme rovnici:

$$\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{2}{a} \quad (3.5)$$

Nakonec zkrátíme zlomky na pravé straně rovnice (3.5) a celou rovnici vynásobíme  $a$ . Po těchto úpravách dostaneme konečný tvar

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (3.6)$$

Z obecné rovnice řetězovky (3.1) můžeme řetězovku interpretovat jako aritmetický průměr  $y$ -ových souřadnic exponenciály stoupající a klesající, jež se liší pouze ve znaménku v exponentu. Tento jev si předvedeme názorně:



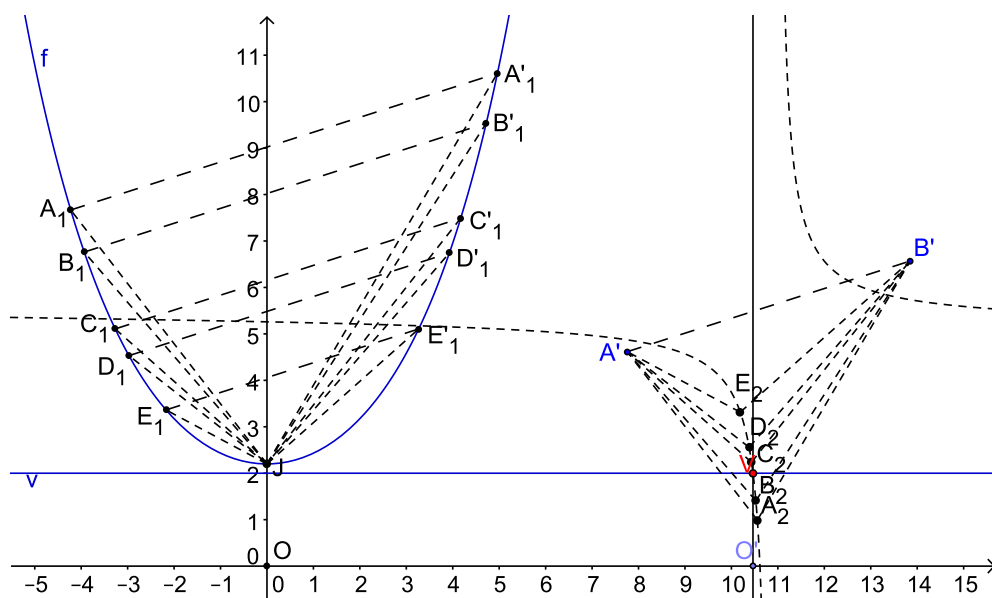
Obrázek 3.1: Řetězovka jako aritmetický průměr exponenciály

Pro lepší přehlednost jsou exponenciály na obr. 3.1 již vyděleny dvěma. Tudíž pro získání jejich aritmetického průměru  $y$ -ových souřadnic je stačí pouze sečíst. Na obrázku vidíme dvě kolmice na osu  $x$  a průsečíky těchto kolmic s exponenciálami a osou  $x$ . Průsečíky s exponenciálami jsou body  $A'_1$ ,  $A''_1$ ,  $A'_2$  a  $A''_2$  a průsečíky s osou  $x$  jsou body  $C$  a  $D$ . Pro potvrzení tvrzení, že řetězovka jde sestavit jako aritmetický průměr  $y$ -ových souřadnic exponenciály klesající a rostoucí můžeme postupovat několika způsoby. Jedním ze způsobů je sečtení délek úseček  $|CA'_1|$  a  $|CA''_1|$ . Takto vznikne bod  $A_1$ , který dále zkoumáme zda leží na řetězovce  $h$ . Dalším způsobem, který je znázorněn na

obr. 3.1, je porovnání délek úseček  $|CA'_1|$  a  $|A'_1A_1|$  kde bod  $A_1$  je průsečíkem kolmice na osu  $x$  a řetězovky. Pokud je tvrzení, že řetězovka je aritmetickým průměrem  $y$ -ových souřadnic exponenciály rostoucí a klesající pravdivé, musí se délky těchto dvou úseček rovnat. Pro kontrolu je zde znázorněna druhá kolmice na osu  $x$ , pro níž platí totéž. Pro sestrojení obr. 3.1 byl použit program dynamické geometrie GeoGebra, kde lze měnit parametr  $a$  a posouvat kolmice na osu  $x$  a tím měnit i souřadnice průsečíků.

Řetězovka je souměrná podle osy  $y$ . Vrchol ležící na ose  $y$  je nejhlubším bodem řetězovky a osa  $x$  leží níže o parametr  $a$ , jenž je poloměrem křivosti pro vrchol řetězovky. Řetězovka je určena parametrem nebo dvěma body (závěsy) a vrcholovou tečnou (hloubkou prohnutí, hloubka nejnižšího bodu) [1].

Na základě podobnosti řetězovek můžeme najít vrchol jedné řetězovky pomocí jiné řetězovky:



Obrázek 3.2: Zjištění vrcholu pomocí podobnosti řetězovek

Dále musíme zjistit parametr  $a$ . Pro lepší přehlednost si tuto konstrukci ukážeme samostatně na obr. 3.3. Spojíme jeden ze závěsných bodů s nalezeným vrcholem  $V$ , v našem případě je to bod  $A'$ . Sestrojíme rovnoběžku se spojnicí  $A'V$  procházející vrcholem zadané řetězovky  $J$ . Průsečík rovnoběžky a řetězovky nazveme bodem  $A$ . Bod  $A$  spojíme s počátkem souřadného systému  $O$ . Sestrojíme rovnoběžku s úsečkou  $|AO|$  procházející bodem  $A'$ . Tato rovnoběžka vytne na ose  $y$  parametr  $a$ .

### 3.1 Řetězovka v příkladu

Řetězovka může mít uplatnění i při početních úlohách. Pro názornost si jednu uvedeme:

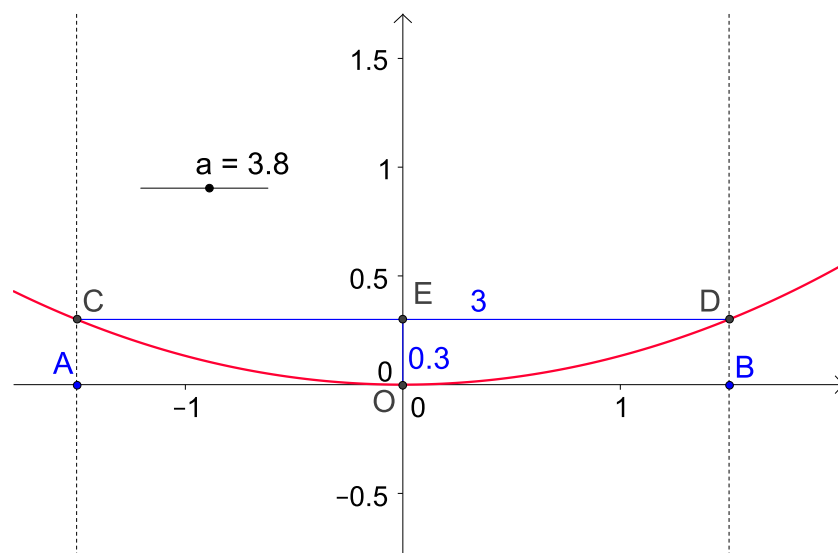
**Příklad 1.** *Spočítejte délku řetězu zavěšeného na dvou sloupcích ve stejné výšce ve vzdálenosti 3 m a prověšeného o 0,3 m.*

*Řešení:* Vzorec pro výpočet délky křivky je:

$$l = \int_m^n \sqrt{1 + (f'(x))^2}, \quad (3.7)$$

kde  $m$ ,  $n$  jsou dolní a horní mez určitého integrálu a  $f(x)$  je rovnice charakterizující křivku.

Do vzorce (3.7) musíme dosadit rovnici řetězovky. V našem případě tedy počítáme  $l = \int_m^n \sqrt{1 + ((\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}))')^2}$  To znamená, že v první řadě musíme zjistit parametr  $a$ . Parametr  $a$  můžeme zjistit například pomocí programu dynamické geometrie GeoGebra.



Obrázek 3.4: Zjištění parametru  $a$  pomocí programu GeoGebra



Nejprve sestrojíme kolmice na osu  $x$  procházející body  $A = [-1.5; 0]$  a  $B = [1.5; 0]$ . Vzdálenost mezi body  $A$  a  $B$  prezentuje vzdálenost mezi sloupky, na nichž je zavěšen řetěz. Zvolíme náhodně parametr  $a$ . Například  $a = 1$ . Rovnici  $f(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$  zadáme do příkazového řádku a tím sestrojíme řetězovku. Sestrojíme body  $C$  a  $D$ , což jsou průsečíky řetězovky a kolmic na osu  $x$ . Získáme bod  $E$ ,  $E \in |CD| \wedge E \in y$ , a tím nám vznikne úsečka  $OE$ , kde  $O$  je počátkem souřadnicového systému. U úsečky  $OE$  si zapneme zobrazení popisu pomocí hodnoty, které nám zobrazuje délku úsečky  $OE$ . Pomocí nástroje posuvník nyní můžeme postupně měnit parametr  $a$  a sledovat jak se mění délka úsečky  $OE$ , která nám prezentuje prověšení řetězu. Parametr  $a$  měníme dokud nedosáhneme požadované hodnoty prověšení  $0,3m$ . Výsledný parametr  $a$  dosadíme do rovnice (3.1) a výslednou funkci do rovnice (3.7).

Po zjištění parametru  $a$  už lehce dopočítáme délku  $l$  řetězu. Pro samotný výpočet můžeme použít algebraický počítačový program. Například program Maple.

```
> restart;
```

Parametr  $a$

```
> a:=3.8;
```

$$a := 3.8$$

Rovnice naší konkrétní řetězovky

```
> Retezovka:=a/2*(exp(x/a)+exp(-x/a));
```

$$Retezovka := 1.900000000 e^{(0.2631578947 x)} + 1.900000000 e^{(-0.2631578947 x)}$$

Výpočet délky řetězu

```
> Delka:=Int(sqrt(1+diff(Retezovka,x)^2),x=-1.5..1.5);
```

$$Delka := \int_{-1.5}^{1.5} \sqrt{1 + (0.4999999999 e^{(0.2631578947 x)} - 0.4999999999 e^{(-0.2631578947 x)})^2} dx$$

```
> value(Delka);
```

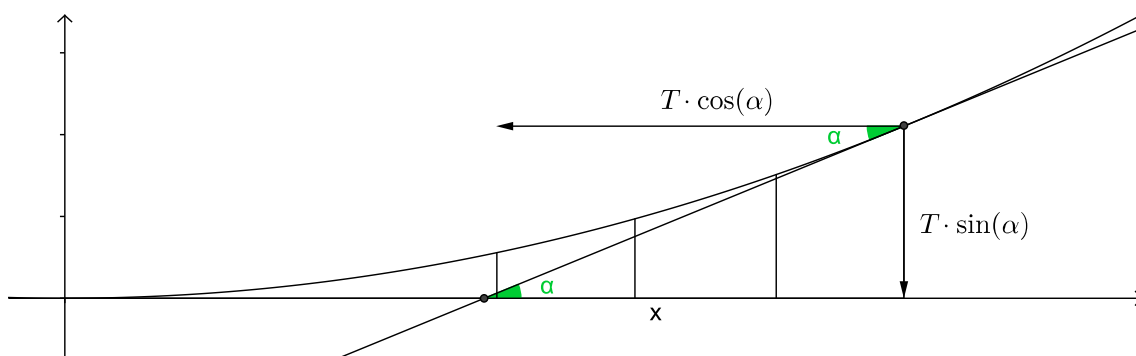
$$3.078517819$$

**Délka řetězu je přibližně 3,08 m.**

## 3.2 Řetězovka nebo parabola?

Jedním z největších stavitelských úspěchů jsou bezesporu visuté mosty. O některých se po právu mluví jako o novodobých divích světa. Na první pohled by se mohlo zdát, že jejich lana mají tvar řetězovky. Je tomu ovšem tak?

U visutých mostů lana nenesou pouze svoji váhu ale je na ně přenášeno i zatížení ze samotné mostovky. Hmotnost každé sekce mostovky je podporována napětím lana nad ním [8]. Na obr. 3.5 vidíme vymodelovanou část visutého mostu a budeme zjišťovat rovnici závěsného lana pomocí směrnice jeho tečny.



Obrázek 3.5: Model části visutého mostu

V obr. 3.5 můžeme nálezt dvě rovnice:

$$T \cdot \sin(\alpha) = h \cdot x \quad (3.8)$$

$$T \cdot \cos(\alpha) = c, \quad (3.9)$$

kde  $h$  je délková hustota závěsného lana a  $c$  je konstanta. Rovnice (3.8) a (3.9) spojíme do jedné rovnice pomocí funkce  $\tan$ , protože  $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ . Výsledná rovnice bude mít tvar:

$$T \cdot \tan(\alpha) = \frac{h}{c} \cdot x \quad (3.10)$$

Následně ji upravíme do tvaru:

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{c \cdot T} \cdot x \quad (3.11)$$

Rovnice směrnice tečny je, jak je známo, derivací rovnice křivky podle  $x$ . Platí tedy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{c \cdot T} \cdot x \quad (3.12)$$

posledním krokem je integrace rovnice (3.12). Konečná rovnice křivky závěsného lana nám vyjde:

$$y = \frac{h}{c \cdot T} \cdot x^2 \quad (3.13)$$

U visutých mostů mají tedy závěsná lana tvar paraboly. Jeden z visutých mostů se zvýrazněnou parabolickou křivkou a zobrazenou rovnicí křivky vidíme na obr. 3.6.



Obrázek 3.6: Bosporský most v Istambulu, převzato z [13]

### 3.3 Řetězovka kolem nás

Řetězovka je v našem okolí značně zastoupena. Jedná se o jakékoliv ohebné vlákno nebo řetěz zavěšený ve dvou bodech. V praxi to můžou být dekorativní řetězy, na obr. 3.7 řetěz před Pedagogickou fakultou Jihočeské univerzity a na obr. 3.8 řetěz kolem Samsonovy kašny na náměstí Přemysla Otakara II. v Českých Budějovicích. Za řetězovku můžeme pokládat i prádelní šňůru na obr. 3.9. Nejrozšířenějším příkladem řetězovky jsou dráty vysokého napětí na obr. 3.10.



Obrázek 3.7: Řetěz u Pedagogické fakulty JČU



Obrázek 3.8: Řetěz u Samsonovy kašny v Českých Budějovicích



Obrázek 3.9: Prádelní šňůra

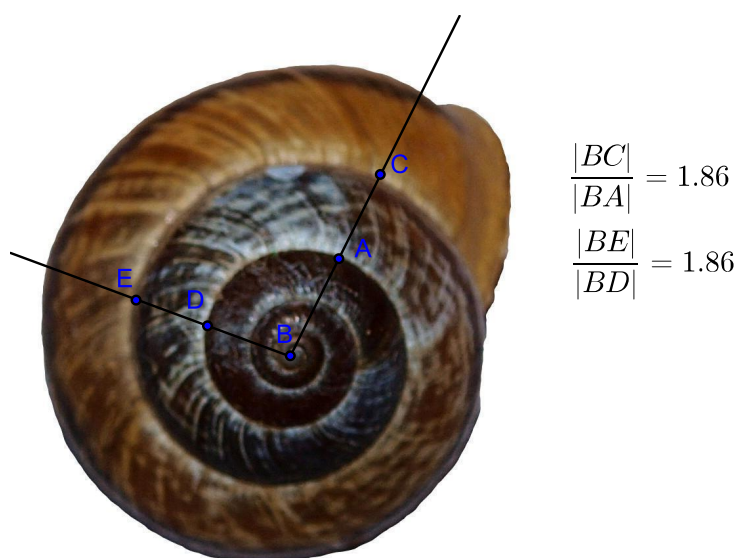


Obrázek 3.10: Dráty vysokého napětí

## Kapitola 4

### Logaritmická spirála

Logaritmická spirála je tvořena bodem otáčejícím se rovnoměrně kolem pólu a vzdalujícím se tak, že průvodiče pro stejné přírůstky úhlu otočení se zvětšují ve stejném poměru [1]. Poměr dvou průvodičů svírající stejné úhly je stálý. Tuto vlastnost můžeme vidět na obr. 4.1.



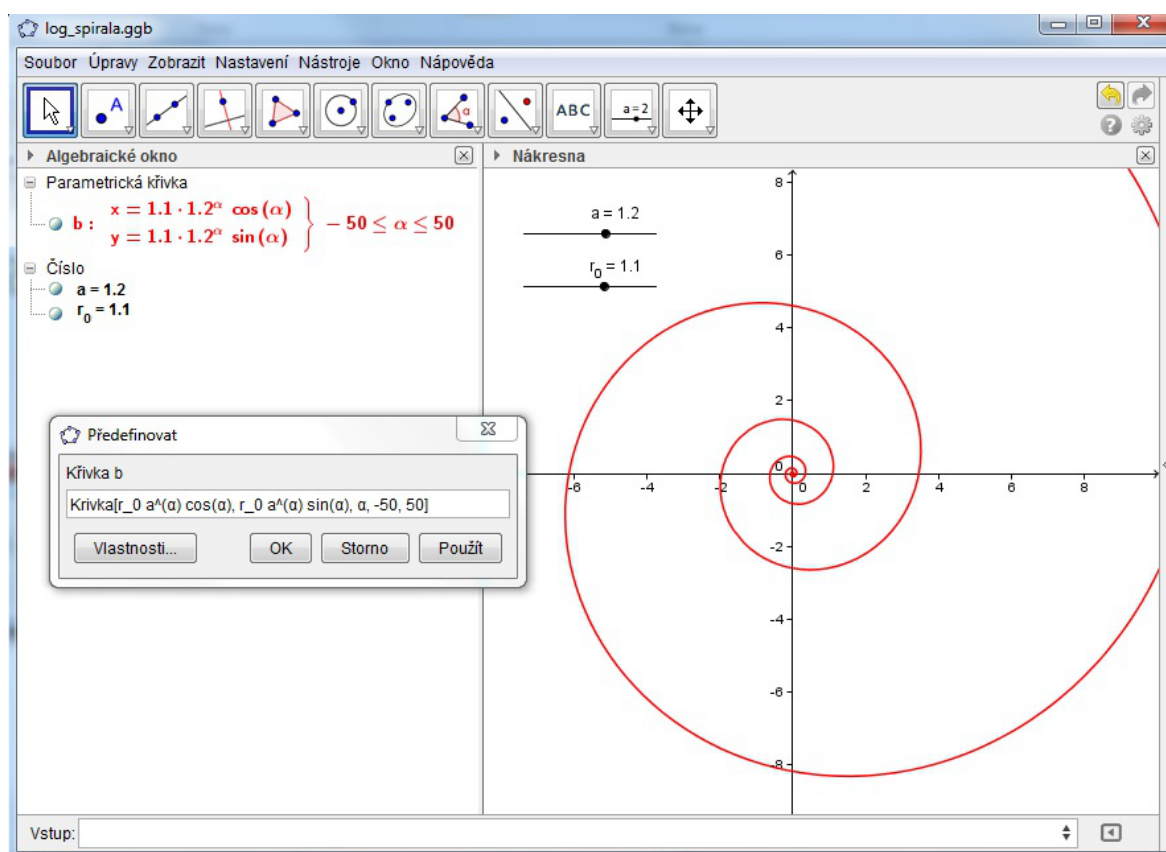
Obrázek 4.1: Poměr průvodičů

Logaritmická spirála může být zadána obecnou rovnicí v polárních souřadnicích:

$$r(\varphi) = ae^{b\varphi}, \quad (4.1)$$

kde  $a, b \in \mathbb{R}$  jsou parametry ovlivňující spirálu.

Pro zhotovení následujících obrázků jsem použil program GeoGebra, který nepodporuje zadávání křivek v polárních souřadnicích. K vytvoření logaritmické spirály v programu GeoGebra je nutné nejprve zadat dvě nezávislé proměnné. Například  $a$  a  $r_0$ . Druhým krokem je zadání příkazu "Krivka" a jeho parametrů do příkazového řádku. Přesnou formu zápisu vidíme na obr. 4.2



Obrázek 4.2: Sestrojení logaritmické spirály v programu Geogebra

Pomocí posuvníků  $a$  a  $r_0$  můžeme ovlivňovat logaritmickou spirálu. Parametrem  $r_0$  můžeme spirálu zvětšovat či zmenšovat a pomocí parametru  $a$  ovlivňujeme směr rotace spirály. Pokud  $a \in (0; 1)$  je logaritmická spirála pravotočivá, je-li  $a \in (1; 2)$  je levotočivá, při  $a = 1$  z logaritmické spirály vznikne kružnice a při  $a > 2$  se již nejedná o logaritmickou spirálu.

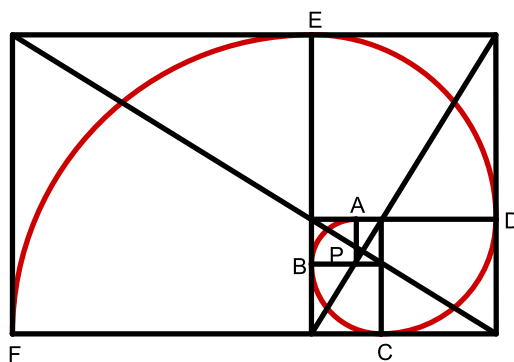
Logaritmická spirála má jedinou větev. Pro kladný smysl otáčení se přibližuje do nekonečna a pro záporný smysl otáčení k pólu, jenž je jejím asymptotickým bodem. Spirála jej dosáhne po nekonečném násobném otočení. Logaritmická spirála nemá osu souměrnosti [1]. Logaritmická spirála je ekviangulární (rovnoúhlá). Každou přímkou procházející pólem protíná pod stejnými úhly [2].



## 4.1 Logaritmická spirála - zlatý trojúhelník a obdélník

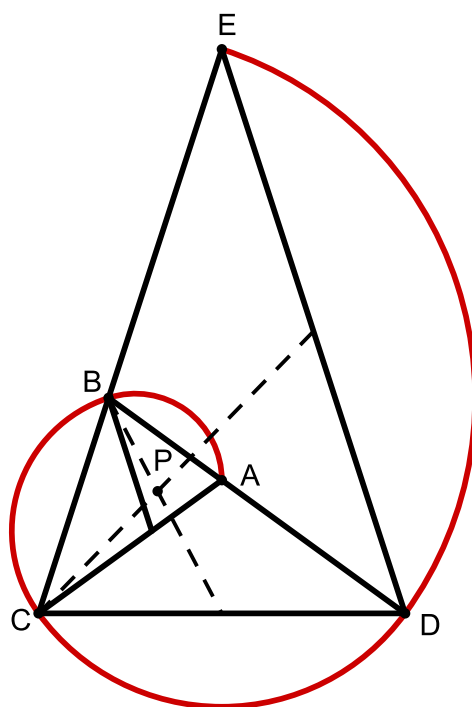
S logaritmickou spirálou se můžeme setkat i u jevů jako jsou zlatý obdélník a zlatý trojúhelník.

Zlatý obdélník je definován tak, že pro jeho strany  $a, b$  platí:  $\frac{a}{b} = \varphi$ , kde  $\varphi$  je nazýván zlatým číslem a je rovno  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Oddělíme-li od tohoto obdélníku čtverec o straně  $b$  vznikne opět zlatý obdélník. Jak můžeme vidět na obr. 4.3, čtverce můžeme oddělovat dále. Takto získáme body  $A, B, C, D, E, F$ , kterými můžeme proložit logaritmickou spirálu. Její pól  $P$  je průsečíkem uhlopříčky původního obdélníku s uhlopříčkou menšího obdélníku [3].



Obrázek 4.3: Logaritmická spirála proložená zlatými obdélníky

Zlatý trojúhelník je rovnoramenný trojúhelník, kde úhly při základně trojúhelníku mají velikost  $72^\circ$  a úhel při vrcholu je roven  $36^\circ$ . Zlatému číslu je roven poměr délky ramene ku délce základny. Od tohoto trojúhelníku můžeme oddělovat stále menší tak, že délka ramene nového trojúhelníku je rovna délce základny původního trojúhelníku. Získanými krajními body základů trojúhelníků  $A, B, C, D, E$  můžeme proložit logaritmickou spirálou. Pólem  $P$  je průsečík těžnice prvního trojúhelníku s těžnicí druhého trojúhelníku [3]. Vše můžeme vidět na obr. 4.4.

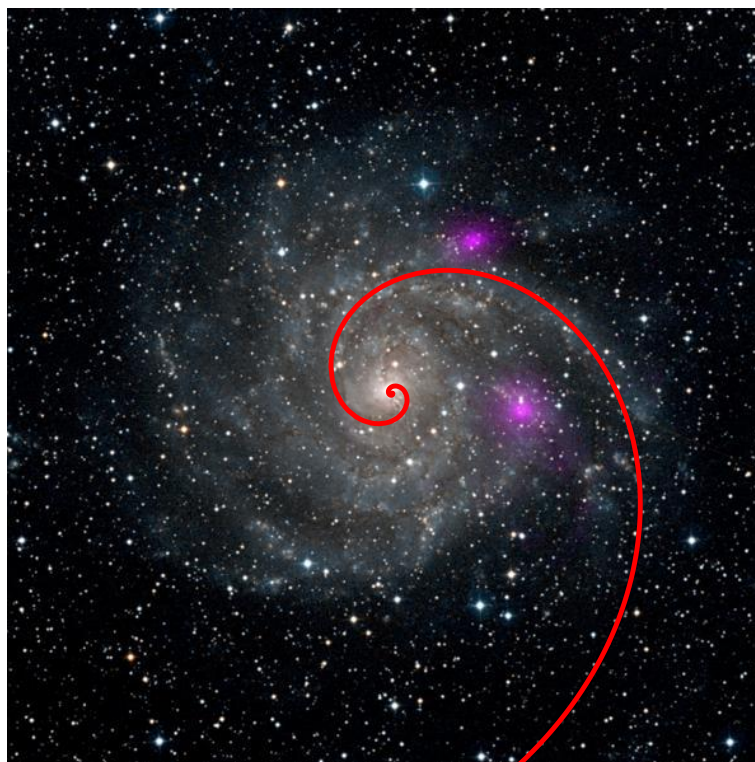


Obrázek 4.4: Logaritmická spirála proložená zlatými trojúhelníky

## 4.2 Logaritmická spirála kolem nás

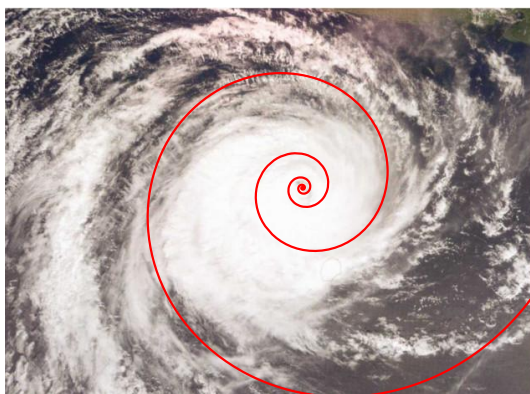
Logaritmická spirála má ve světě okolo nás četné zastoupení. Ať už se jedná o jevy, které nemůžeme okem zachytit, jako například růst počtu bakterií, nebo jevy nám známé. Na následujících obrázcích jsou tyto jevy zachyceny spolu s červeně zvýrazněnou logaritmickou spirálou pro lepší přehlednost.

Jedním z těchto jevů je spirální galaxie, kterou můžeme vidět na obr. 4.5.

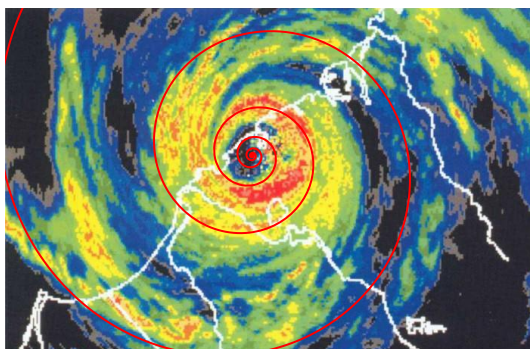


Obrázek 4.5: Spirální galaxie (převzato z internetových stránek NASA [14])

Tropická bouře se vytváří nad teplým tropickým oceánem. Vzduch se točí z okraje do středu bouře a postupně zrychluje rotaci i pohyb celého systému. Ze stoupajícího vlhkého vyduchu vzniká srážková oblačnost, která obklopuje oko bouře [9]. Na obr. 4.6 díky oblačnosti můžeme pozorovat zrychlování rotace větru a tím vznikající tvar logaritmické spirály. Více znatelný je tento jev na radarovém snímku obr. 4.7.



Obrázek 4.6: Tropická bouře Dina z roku 2002 (převzato z publikace [9], s.135)



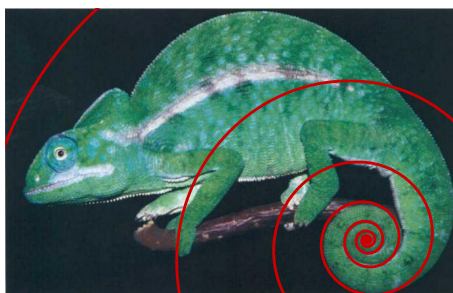
Obrázek 4.7: Radarový obraz počítačově položený na družicový snímek hurikánu Hugo (převzato z publikace [9], s.187)

Tlaková níže se vyvíjí v případě setkání dvou mas vzduchu o různých teplotách v oblasti vzniku okluzní fronty. Studený vzduch postupně vytlačuje teplý vzduch a vzniká oblast nízkého tlaku. Vlivem Coriolisovy síly vzduch v oblasti nízkého tlaku vze-  
stupně rotuje [9]. Tlaková níže patří mezi další jevy, u nichž za pomoci oblačnosti můžeme pozorovat spirálovitý tvar obr. 4.8.



Obrázek 4.8: Oblačný vír spojený s hlubokou tlakovou níží (převzato z publikace [9], s.40)

Tvar logaritmické spirály se objevuje i v živočišné říši. Na obr. 4.9 vidíme chameleona a jeho chápavý ocas, který mu slouží jako "pátá končetina" a jenž je v klidové poloze a ve spánku stočen do spirály [10]. Na obr. 4.10 je detail ocasu chameleona.



Obrázek 4.9: Chameleon (převzato z publikace [10], s. 172)



Obrázek 4.10: Ocas chameleona (převzato z publikace [10], s. 25)

Jedním z nejzřetelnějších jevů, kde můžeme vidět logaritmickou spirálu, je ulita hlemýždě obr. 4.11. Na jejím tvaru je pěkně zaznamenán exponenciální růst. Díky hlemýžd'ově ulitě se s logaritmickou spirálou setkalo, alespoň jednou, velké množství lidí.



Obrázek 4.11: Ulita



Zástupcem rostlinné říše ve tvaru logaritmické spirály jsou bezesporu kapradiny. V mládí jsou listy kapradin, na obr. 4.12, spirálovitě stočené a postupně se rozvíjejí [12].



Obrázek 4.12: Rozvíjející se list kapradiny (převzato z publikace [11], s.383)

# Kapitola 5

## Sinusoida

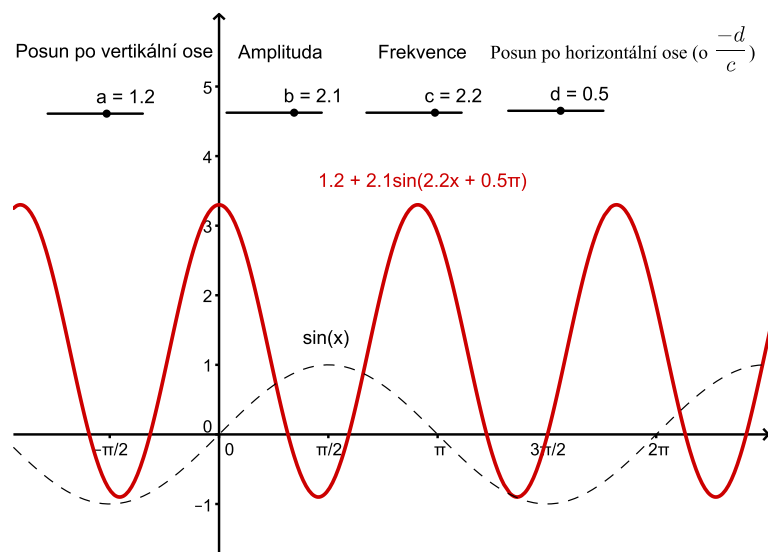
Sinusoida je grafické vyjádření průběhu goniometrické funkce  $\sin$ , který je v pravoúhlém trojúhelníku definován jako poměr délky protilehlé odvěsny a délky přepony, pro proměnlivý úhel. Sinusoidou lze rovněž vyjádřit časové rozvinutí pohybu harmonického osilátoru. Sinusoida je také zobecněna pro celou množinu  $\mathbb{R}$  prostřednictvím jednotkové kružnice. To si ukážeme níže.

Obecná rovnice sinusoidy je

$$a + b \cdot \sin(cx + d\pi), \quad (5.1)$$

kde  $a$  je posun po vertikální ose,  $b$  je amplituda,  $c$  je frekvence a  $d$  je posun po horizontální ose o hodnotu  $\frac{-d}{c}$ . Jak se může sinusoida pomocí změny parametrů  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a  $d$  změnit od původního grafu funkce  $\sin(x)$  můžeme vidět na obr. 5.1. Na obrázku vidíme původní funkci  $\sin(x)$  čárkovaně a výchozí funkci, pozměněnou o výše zmíněné parametry, červeně.





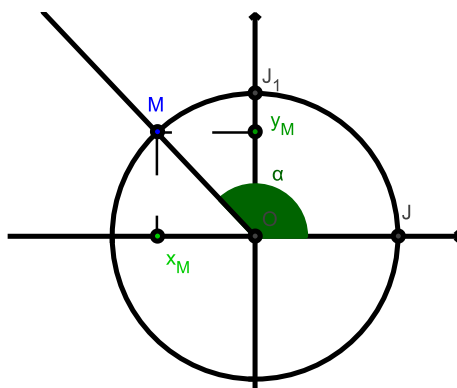
Obrázek 5.1: Průběh sinusoidy změněný pomocí parametrů  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a  $d$ .

Jak jsme již uvedli sinusoida vychází z funkce sinus. Funkce sinus je funkce lichá, omezená shora i zdola a periodická s periodou  $2k\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ . Má definiční obor  $D_f = \mathbb{R}$  a obor hodnot  $H_f = \langle -1; 1 \rangle$ . Dále je rostoucí v každém intervalu  $(-\frac{1}{2}\pi + 2k\pi; \frac{1}{2}\pi + 2k\pi)$  a klesající v každém intervalu  $(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ . Maximum je v bodech  $\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$  a má hodnotu 1, minimum má hodnotu  $-1$  a nalezneme jej v bodech  $-\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ .

Podobné vlastnosti bude mít i sinusoida zadaná rovnicí (5.1). Sinusoida je omezená shora i zdola, je periodická s periodou  $2\frac{k}{c}\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$  a  $c$  je perioda sinusoidy. Má definiční obor  $D_f = \mathbb{R}$  a obor hodnot  $H_f = \langle a - b; a + b \rangle$ , kde  $a$  je posun po vertikální ose a  $b$  je amplituda. Sinusoida je rostoucí na každém intervalu  $(\frac{-\frac{1}{2}-d+2k}{c}\pi; \frac{\frac{1}{2}-d+2k}{c}\pi)$  a klesající na každém intervalu  $(\frac{\frac{1}{2}-d+2k}{c}\pi; \frac{\frac{3}{2}-d+2k}{c}\pi)$  kde  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $d$  je posun po horizontální ose a  $c$  je frekvence. Maximum je v bodech  $\frac{\frac{1}{2}-d+2k}{c}\pi$  a minimum je v bodech  $\frac{-\frac{1}{2}-d+2k}{c}\pi$ .

## 5.1 Definice sinu pomocí jednotkové kružnice

Sinus můžeme definovat také pomocí jednotkové kružnice. Jednotková kružnice je kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic, poloměrem  $r = 1$  a plný úhel je  $2\pi$ . Na obr. 5.2 máme jednotkovou kružnici. Body  $J$ ,  $J_1$  a  $M$  leží na jednotkové kružnici a mají souřadnice  $J = [1; 0]$ ,  $J_1 = [0; 1]$  a  $M = [x_M; y_M]$ .



Obrázek 5.2: Jednotková kružnice

Dále si definujeme zobrazení  $U$ , které každému reálnému číslu přiřadí právě jeden orientovaný úhel  $JOM$ . Zobrazení  $U$  popíšeme následně:

**Definice 1.** 1. Každému reálnému číslu  $x_0 \in \langle 0; 2\pi \rangle$  přiřadíme bod  $M \in k$ , kde  $k$  je jednotková kružnice, Pro něž platí:

a) Pro  $x_0 \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$  je úhel  $JOM$  částí úhlu  $JOJ_1$ , pro  $x_0 \in \langle \frac{\pi}{2}; 2\pi \rangle$  obsahuje úhel  $JOM$  úhel  $JOJ_1$  jako svou část.

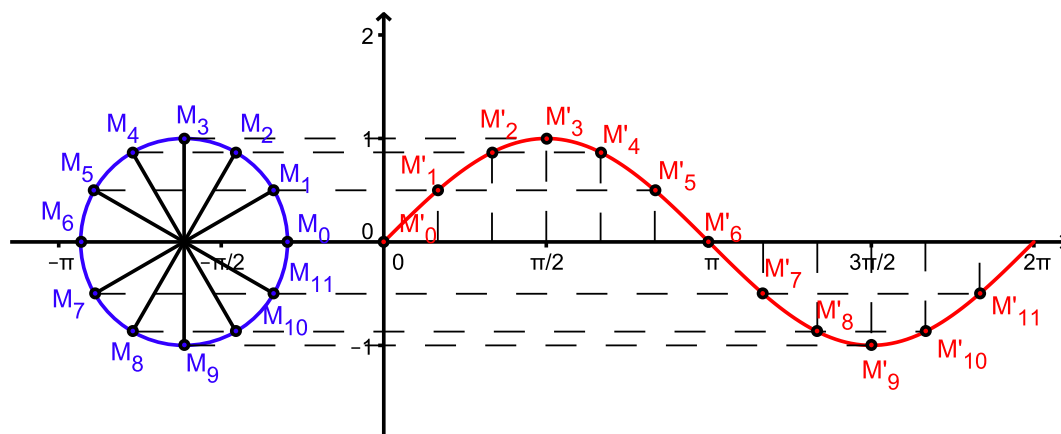
b) Délka oblouku  $JM$  je rovna  $x_0$ . Vzhledem k tomu, že  $k$  je jednotková kružnice, je  $x_0$  zároveň číselnou hodnotou velikosti úhlu  $JOM$  v obloukové míře.

2. Je-li  $x_0 \in R - \langle 0; 2\pi \rangle$ , určíme nejdříve takové číslo  $x_0 \in \langle 0; 2\pi \rangle$  a takové číslo  $k \in Z$ , aby platilo  $x = x_0 + k \cdot 2\pi$ . Potom přiřadíme číslu  $x$  stejný bod  $M$  jako je přiřazen číslu  $x_0$ . [4]

**Věta 5.1.1.** Necht'  $x$  je libovolné reálné číslo a  $M[x_M; y_M]$  bod jednotkové kružnice sestrojené v kartézské soustavě souřadnic, který je přiřazen číslu  $x$  v zobrazení  $U$ .

Funkcí sinus se nazývá funkce, ve kterém je každému  $x \in R$  přiřazeno  $y_M$ . [4]

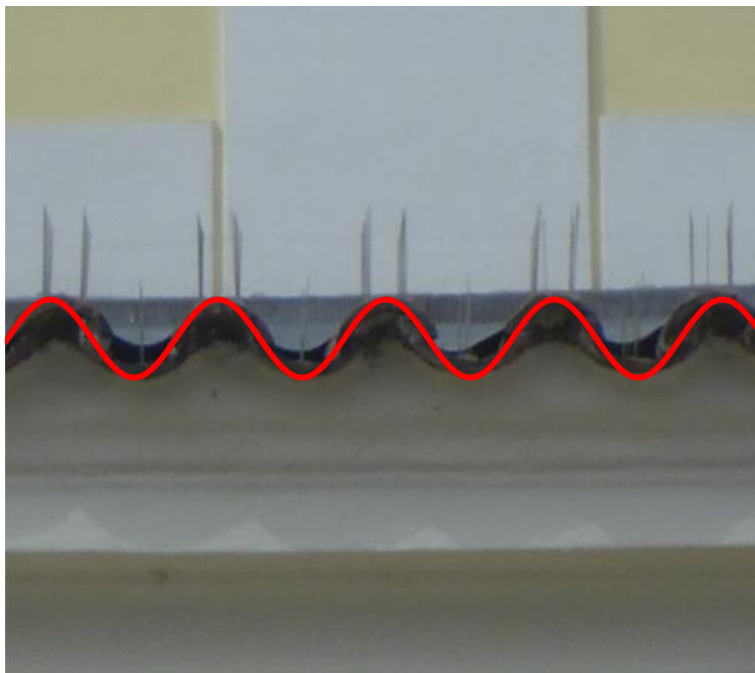
Na obr. 5.3 je věta 5.1.1 názorně zobrazena. Z obrázku je patrná cyklicita funkce sinus a zobrazování množiny reálných čísel na jednotkovou kružnici.



Obrázek 5.3: Jednotková kružnice a funkce sinus

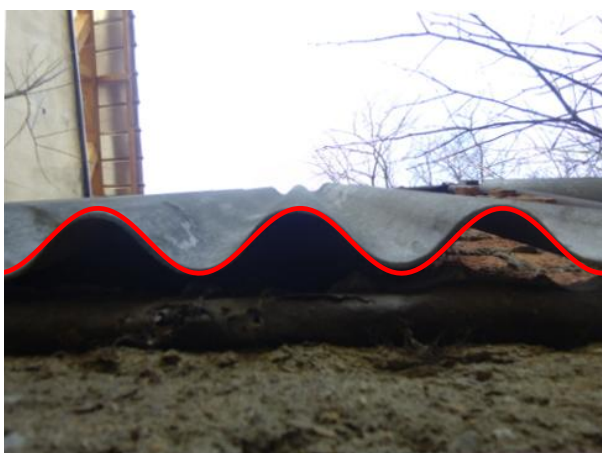
## 5.2 Sinusoida kolem nás

Možná si to ani neuvědomujeme ale na sinusoidu ve světě kolem nás můžeme relativně často "narazit", ať už "jen" jako popis harmonického kmitavého pohybu nebo jevů, v kterých můžeme sinusoidu pozorovat i bez časové závislosti. Díky svému líbivému tvaru se může například využívat k dekorativním tvarům. Jako na obr. 5.4, kde můžeme vidět dekorativní prvek tvaru sinusoidy na štítu domu v centru města.



Obrázek 5.4: Štít domu

Plech nebo drát zvlněný do sinusoidy jsou odolnější vůči nárazům a méně se prohýbají. Proto se využívá plechových plotů s sinusoidálním profilem obr. 5.5. Zvlněné dráty se do sebe lépe zaplétají a vyrábějí se z nich také ploty na obr. 5.6.

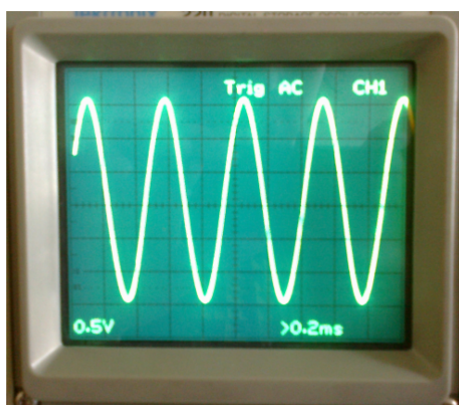


Obrázek 5.5: Profil vlněného plotu



Obrázek 5.6: Plot z vlněných drátů

Jeden z nejvýznamnějších jevů kde se vyskytuje sinusoida je průběh střídavého proudu. Ten můžeme vidět na osciloskopu na obr. 5.7.



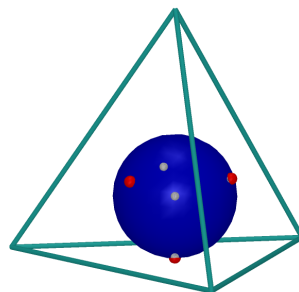
Obrázek 5.7: Průběh střídavého proudu na osciloskopu

# Kapitola 6

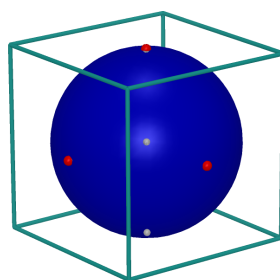
## Platónova tělesa

Platónova tělesa jsou také známa pod názvem pravidelné mnohostěny. Stěny pravidelných mnohostěnů tvoří shodné pravidelné mnohoúhelníky a ve všech vrcholech se stýká stejné množství hran (vrcholy jsou stejného typu). Platónova tělesa mají další zajímavou vlastnost. Je možné jim vepsat i opsat kulovou plochu. Vepsaná kulová plocha se dotýká všech stěn v jejich těžištích a opsaná kulová plocha prochází všemi vrcholy Platónova tělesa. Vepsaná i opsaná kulová plocha mají stejný střed, jímž je těžiště Platónova tělesa [3].

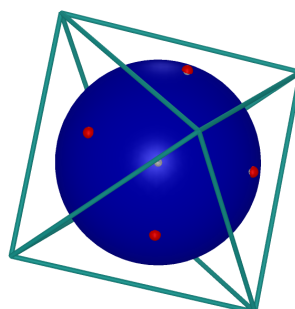
Vepsané kulové plochy jsou níže na obrázcích. Postupně to jsou: kulová plocha vepsaná pravidelnému čtyřstěnu, na obr. 6.1, pravidelnému šestistěnu, na obr. 6.2, pravidelnému osmistěnu, na obr. 6.3, pravidelnému dvanáctistěnu, na obr. 6.4 a pravidelnému dvacetistěnu, na obr. 6.5. Červené body jsou středy stěn Platónových těles.



Obrázek 6.1: Kulová plocha vepsaná pravidelnému čtyřstěnu

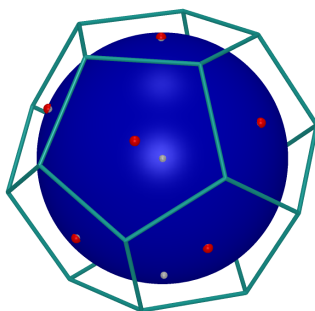


Obrázek 6.2: Kulová plocha vepsaná pravidelnému šestistěnu

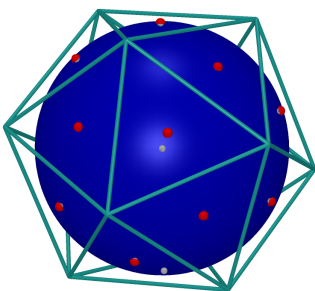


Obrázek 6.3: Kulová plocha vepsaná pravidelnému osmistěnu





Obrázek 6.4: Kulová plocha vepsaná pravidelnému dvanáctistěnu



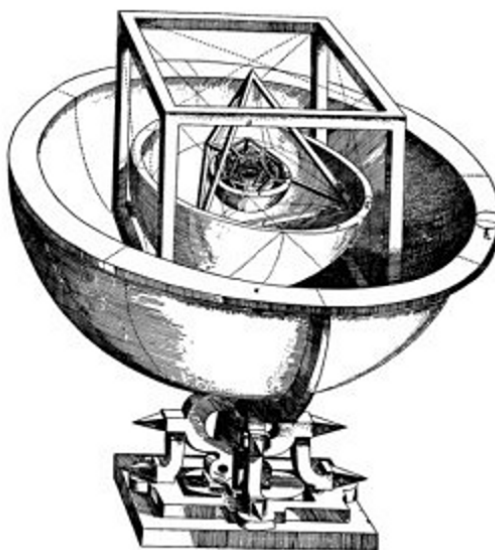
Obrázek 6.5: Kulová plocha vepsaná pravidelnému dvacetistěnu

V 18. století švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler formuloval vztah mezi počtem vrcholů  $v$ , hran  $h$  a stěn  $s$  konvexního mnohostěnu.

$$v - h + s = 2 \quad (6.1)$$

tento vzorec se nazývá Eulerovým vztahem. Níže si ukážeme, že u jednotlivých Platónových těles platí.

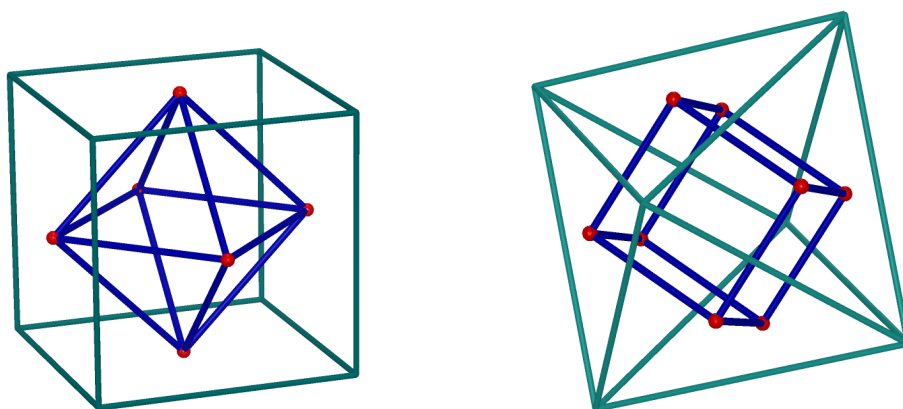
Platónových těles je pět. Jsou to čtyřstěn, šestistěn (krychle), osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn. V antickém Řecku měla tato tělesa svoji symboliku. Podle filosofova Platóna je čtyřstěn symbolem ohně, krychle symbolem země, osmistěn symbolem vzduchu, dvacetistěn symbolem vody a dvanáctistěn představoval jsoucnost. Pravidelnými mnohostěny se nechal inspirovat také matematik a astronom Johannes Kepler, který je v 16. století použil ve svém planetárním modelu. Keplerův planetární model je na obr. 6.6.



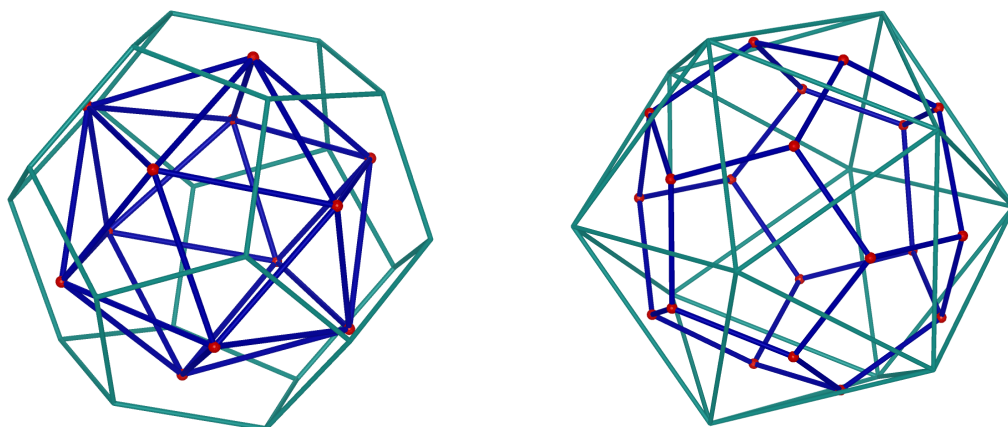
Obrázek 6.6: Keplerův planetární model, převzato z [15]

## 6.1 Dualita Platónových těles

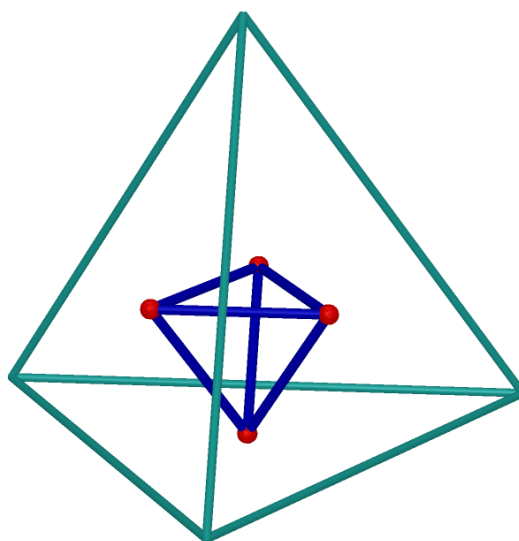
U Platónových těles se můžeme setkat s tzv. dualitou těles. O dualitě dvou těles mluvíme, lze-li dvě tělesa do sebe vepsat, přičemž vrcholy vepsaného tělesa leží ve středech stěn druhého tělesa. Je tedy nutné aby počet vrcholů vepsaného tělesa a počet stěn druhého tělesa byly rovny. Počty vrcholů a stěn jednotlivých Platónových těles jsou uvedeny níže. Můžeme shrnout, že z Platónových těles jsou duální šestistěn s osmistěnem, na obr. 6.7, dvanáctistěn s dvacetistěnem, na obr. 6.8 a speciální případ je čtyřstěn, jenž je duální sám se sebou, na obr. 6.9 [3].



Obrázek 6.7: Dualita pravidelného šestistěnu a osmistěnu



Obrázek 6.8: Dualita pravidelného dvanáctistěnu a dvacetistěnu



Obrázek 6.9: Dualita pravidelného čtyřstěnu se sebou samým

## 6.2 Výpočet obsahu a objemu Platónových těles

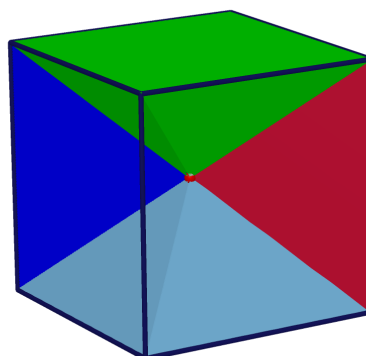
Popíšeme si vzorce pro výpočet objemu a obsahu Platónových těles. Konkrétní vzorce si uvedeme níže u jednotlivých těles. Nyní si uvedeme obecné vzorce na výpočet obsahu a objemu Platónských těles. Nejprve si definujeme jednotlivé proměnné:  $n$  je počet stěn tělesa,  $s$  je délka hrany stěny tělesa,  $S_n$  je celková plocha tělesa,  $V_n$  je objem tělesa,  $r$  je vzdálenost ze středu mnohostěnu do vrcholu mnohostěnu a  $a$  je vzdálenost ze středu mnohostěnu do středu stěny mnohostěnu. Dále si definujeme  $A_k(s)$  jako obsah pravidelného mnohoúhelníku s  $k$  stranami a délkou hrany  $s$  [6].

Pak je vzorec pro obsah Platónského tělesa:

$$S_n = n \cdot A_k(s) \quad (6.2)$$

Obsah pravidelného mnohostěnu můžeme spočítat tak, že ho rozdělíme na shodné trojúhelníky. Analogicky můžeme postupovat i v trojdimenzionálním prostoru u výpočtu objemu Platónských těles. Můžeme proto zjistit jejich objem tím, že si je rozdělíme na  $n$  shodných pyramid, kde každá stěna mnohostěnu je základnou jedné pyramidy a hrany pyramid jsou úsečky ze středu mnohostěnu k vrcholům příslušné stěny. Objem mnohostěnu je součet objemů jeho základních pyramid [6]. Tyto pyramidy můžeme vidět na obr. 6.10. Objem jednotlivých pyramid s výškou  $h$  a obsahem podstavy  $A$  je  $\frac{h \cdot A}{3}$ . Při bližším zkoumání objevíme, že  $h = a$  a  $A = A_k$ , poté můžeme vzorec pro objem Platónských zapsat následujícím způsobem:

$$V_n = \frac{n \cdot a \cdot A_k(s)}{3} = \frac{a \cdot S_n}{3} \quad (6.3)$$



Obrázek 6.10: Rozdělení Pravidelného šestistěnu na shodné pyramidy

## 6.3 Pravidelný čtyřstěn

Jak už napovídá název, stejně jako u ostatních Platónových těles, má pravidelný čtyřstěn, který vidíme na obr. 6.11, čtyři stěny. Z tab. 6.1 můžeme vyčíst i další údaje. Stěna pravidelného čtyřúhelníku má tři hrany, což znamená, že jednotlivé stěny čtyřúhelníku jsou tvořeny rovnostranným trojúhelníkem. Dále v tabulce vidíme, že pravidelný čtyřstěn má šest hran a čtyři vrcholy. Můžeme si tedy ověřit, zda platí Eulerův vztah (6.1). Pro pravidelný čtyřstěn tedy platí:  $v = 4$ ,  $h = 6$  a  $s = 4$

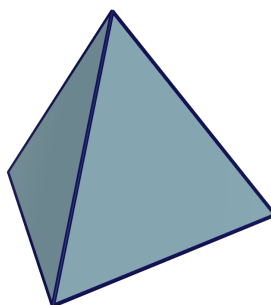
$$4 - 6 + 4 = 2 \quad (6.4)$$

$$2 = 2 \quad (6.5)$$

Tímto je Eulerův vztah ověřen.

|                                            |   |
|--------------------------------------------|---|
| počet stěn tělesa                          | 4 |
| počet vrcholů tělesa                       | 4 |
| počet hran tělesa                          | 6 |
| počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu | 3 |
| počet hran jedné stěny                     | 3 |

Tabulka 6.1: Vlastnosti čtyřstěnu



Obrázek 6.11: Model čtyřstěnu v programu Cabri3D

Výpočet obsahu u pravidelného čtyřstěnu je dán vzorcem (6.2), do kterého dosadíme proměnné pro pravidelný čtyřstěn a dostaneme:

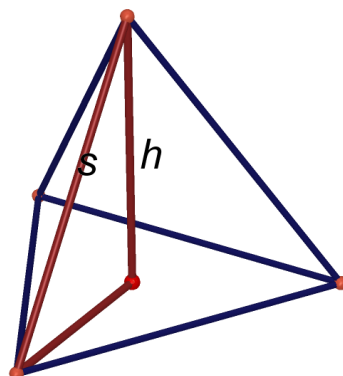
$$S_4 = 4 \cdot A_3(s) = s^2 \cdot \sqrt{3} \quad (6.6)$$

Jak si můžeme všimnout na obr. 6.12 výšku pravidelného čtyřúhelníku můžeme spočítat pomocí Pythagorovy věty:

$$s^2 = h^2 + \left( \frac{s}{\sqrt{3}} \right)^2, \quad (6.7)$$

po úpravě vyjde:

$$h = s \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (6.8)$$



Obrázek 6.12: Výška čtyřstěnu jako odvěsna pravoúhlého trojúhelníku

U pravidelného čtyřúhelníku můžeme vypočítat objem více způsoby. Prvním způsobem je dosazení do obecného vzorce (6.3). Dostaneme následující tvar:

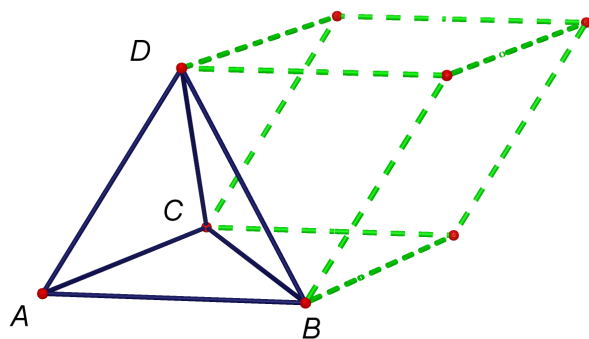
$$V_4 = \frac{h \cdot A_3(s)}{3} = \frac{s^3}{6\sqrt{2}} \quad (6.9)$$

Druhým způsobem, který si uvedeme, je výpočet objemu pravidelného čtyřstěnu pomocí objemu rovnoběžnostěnu. Na obr. 6.13 máme ukázáno, že pravidelný čtyřstěn je součástí rovnoběžnostěnu. Rovnoběžnostěn, stejně jako pravidelný čtyřstěn, máme zadaný body  $A, B, C$  a  $D$  nebo vektory  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ , jejichž hodnota je  $\vec{u} = B - A, \vec{v} = C - A, \vec{w} = D - A$ . Objem rovnoběžnostěnu spočítáme jako determinant vektorů  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ . Dále si musíme uvědomit spojitost mezi objemem rovnoběžnostěnu a objemu pravidelného čtyřstěnu. Jak vidíme na obr. 6.14, šestistěn můžeme rozřezat na šest čtyřstěnů stejného objemu [7].

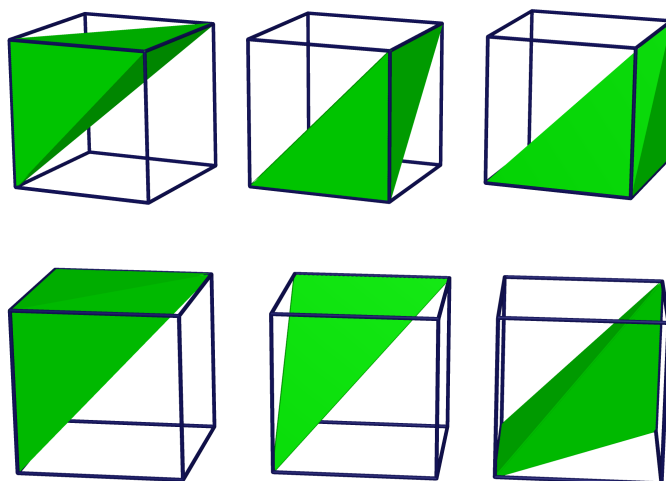
Vzorec pro objem pravidelného čtyřstěnu můžeme proto zapsat i následujícím způsobem:

$$V_4 = \frac{1}{6} |\vec{u}\vec{v}\vec{w}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (6.10)$$





Obrázek 6.13: Pravidelný čtyřstěn jako součást rovnoběžnostěnu



Obrázek 6.14: Rozřezání krychle na shodné čtyřstěny

## 6.4 Pravidelný šestistěn (krychle)

Pravidelný šestistěn z obr. 6.15 neboli krychle má šest stěn. V tab. 6.2 vidíme i ostatní vlastnosti. Stěna šestistěnu má čtyři hrany, což znamená, že stěnu šestistěnu tvoří čtverec. Z dalších údajů vyčteme, že počet hran je dvanáct a má osm vrcholů. Můžeme přejít k ověření Eulerova vztahu (6.1). Pro pravidelný šestistěn platí:  $v = 8$ ,  $h = 12$  a  $s = 6$ .

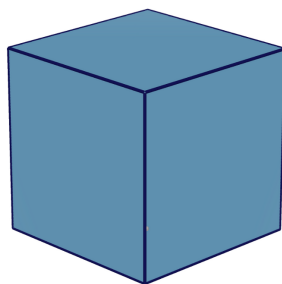
$$8 - 12 + 6 = 2 \quad (6.11)$$

$$2 = 2 \quad (6.12)$$

Tímto je Eulerův vztah ověřen.

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| počet stěn tělesa                          | 6  |
| počet vrcholů tělesa                       | 8  |
| počet hran tělesa                          | 12 |
| počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu | 3  |
| počet hran jedné stěny                     | 4  |

Tabulka 6.2: Vlastnosti šestistěnu



Obrázek 6.15: Model šestistěnu v programu Cabri3D

Přejdeme k výpočtu obsahu a objemu pravidelného šestistěnu. Pro pravidelný šestistěn platí:

$$S_6 = 6 \cdot s^2 \quad (6.13)$$

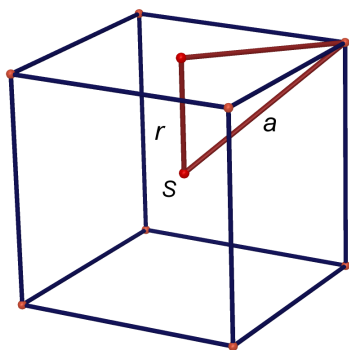
$$V_6 = s^3 \quad (6.14)$$

Dále  $a = \frac{s}{2}$  a  $r$ , jak můžeme vidět na obr. 6.16, spočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad (6.15)$$

po úpravě vyjde:

$$r = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{2} \quad (6.16)$$



Obrázek 6.16: Vzdálenost od středu pravidelného šestistěnu ke středu jeho stěny jako odvěsna pravoúhlého trojúhelníku

## 6.5 Pravidelný osmistěn

Jak můžeme vidět v tab. 6.3 pravidelný osmistěn, na obr. 6.17, má osm stěn, šest vrcholů a dvanáct hran. Jeho stěna má tři hrany. Z toho vyplývá, že jeho stěnu tvoří rovnostranný trojúhelník. Nyní ověříme Eulerův vztah (6.1). Pro pravidelný osmistěn platí:  $v = 6$ ,  $h = 12$  a  $s = 8$ .

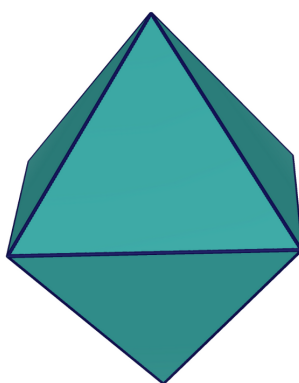
$$6 - 12 + 8 = 2 \quad (6.17)$$

$$2 = 2 \quad (6.18)$$

Tímto je Eulerův vztah ověřen.

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| počet stěn tělesa                          | 8  |
| počet vrcholů tělesa                       | 6  |
| počet hran tělesa                          | 12 |
| počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu | 4  |
| počet hran jedné stěny                     | 3  |

Tabulka 6.3: Vlastnosti osmistěnu



Obrázek 6.17: Model osmistěnu v programu Cabri3D

Pro výpočet obsahu pravidelného osmistěnu dosadíme do vzorce (6.2) a dostaneme tvar:

$$S_8 = 8 \cdot A_3(s) = s^2 \cdot 2\sqrt{3} \quad (6.19)$$

Pro výpočet objemu pravidelného osmistěnu můžeme uvažovat o tomto tělese jako o dvou shodných pyramidách se společnou základnou [6]. Demonstrace této vlastnosti je na obr. 6.18. Výška  $h$  těchto pyramid se spočítá pomocí Pythagorova vzorce:

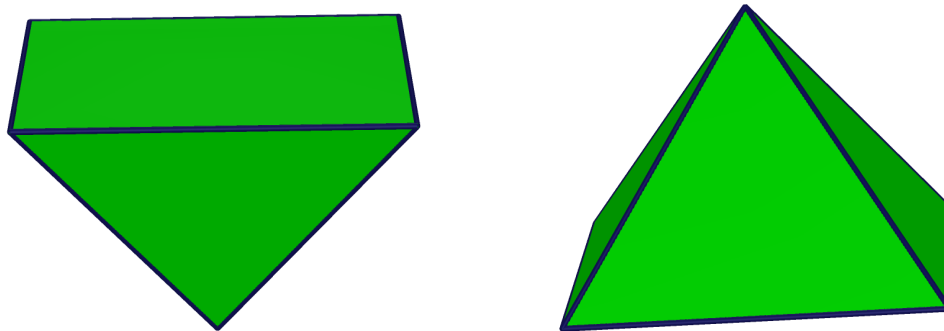
$$s^2 = h^2 + \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad (6.20)$$

po úpravě dostaneme:

$$h = \frac{s}{\sqrt{2}} \quad (6.21)$$

Vzorec pro výpočet objemu pravidelného osmistěnu má potom tento tvar:

$$V_8 = \frac{2 \cdot h \cdot A_4(s)}{3} = s^3 \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (6.22)$$



Obrázek 6.18: Osmistěn rozdělený na dvě shodné pyramidy o stejné podstavě

## 6.6 Pravidelný dvanáctistěn

Pravidelný dvanáctistěn z obr. 6.19 má, jak můžeme vidět v tab. 6.4, dvanáct stěn, dvacet vrcholů a třicet hran. Jeho stěna obsahuje pět hran, tudíž jeho stěny jsou tvořeny pravidelnými pětiúhelníky. S těmito informacemi můžeme ověřit Eulerův vztah (6.1). Pro pravidelný dvanáctistěn platí:  $v = 20$ ,  $h = 30$  a  $s = 12$ .

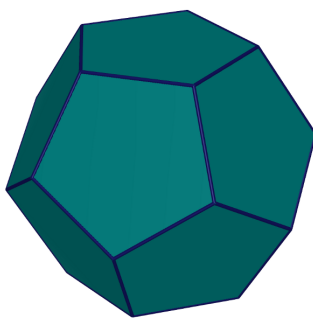
$$20 - 30 + 12 = 2 \quad (6.23)$$

$$2 = 2 \quad (6.24)$$

Tímto je Eulerův vztah ověřen.

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| počet stěn tělesa                          | 12 |
| počet vrcholů tělesa                       | 20 |
| počet hran tělesa                          | 30 |
| počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu | 3  |
| počet hran jedné stěny                     | 5  |

Tabulka 6.4: Vlastnosti dvanáctistěnu



Obrázek 6.19: Model dvanáctistěnu v programu Cabri3D

Jak jsme si výše uvedli, stěny pravidelného dvanáctistěnu jsou tvořeny pravidelnými pětiúhelníky. Uvedeme si proto jak můžeme pravidelný pětiúhelník sestavit.

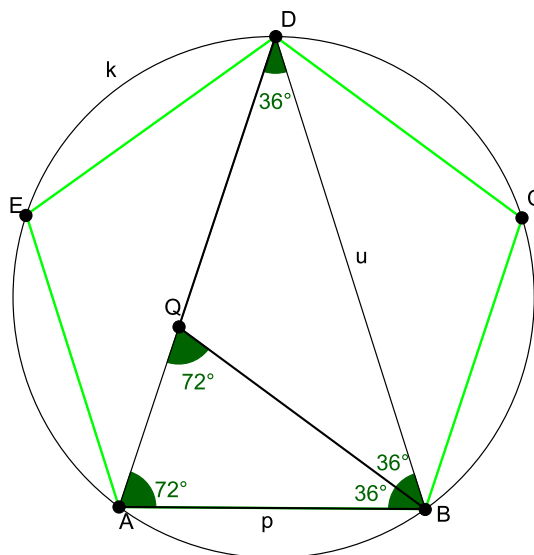
Zajímavostí, která nám pomůže při konstrukci pravidelného pětistěnu, je poměr délky strany a uhlopříčky v pravidelném pětistěnu. Na obr. 6.20 vidíme pravidelný pětiúhelník  $ABCDE$  vepsaný kružnici  $k$  a jeho uhlopříčky  $AD$  a  $BD$ . Platí v něm, že  $|AB| = |BQ| = |QD| = p$ . Podle věty (uu) platí  $\triangle ABD \sim \triangle ABQ$  [5]. Platí tedy:

$$p : u = (u - p) : p \quad (6.25)$$

neboli

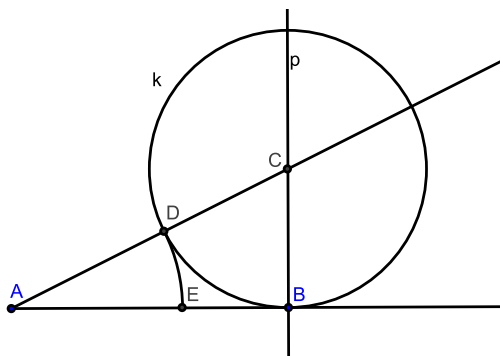
$$p^2 = u(u - p) \quad (6.26)$$

Protože  $|AQ| < |AB|$  můžeme poměr (6.25) vyjádřit slovně následujícím způsobem. Bod  $Q$  dělí uhlopříčku pravidelného pětiúhelníku na dva díly tak, že délka menšího dílu se má ku délce většího dílu stejně jako délka většího dílu ku délce celé uhlopříčky. Toto dělení se nazývá dělením v poměru zlatého řezu [5].



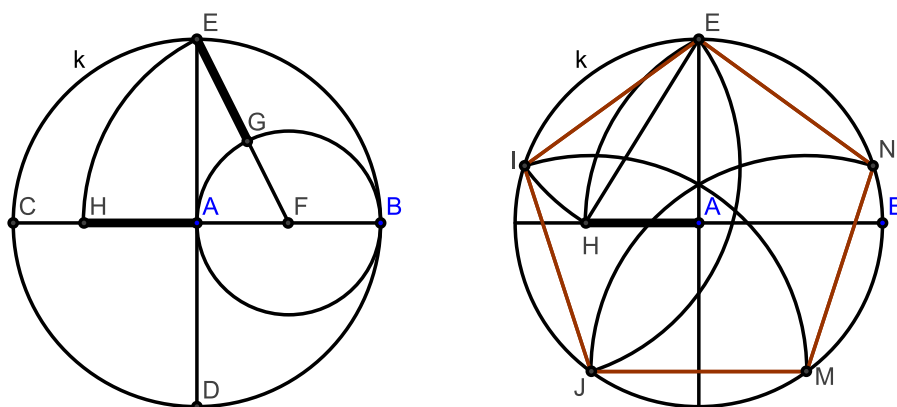
Obrázek 6.20: Poměr délky strany a úsečky pravidelného pětiúhelníku

Dále se naučíme rozdělit úsečku délky  $a$  v poměru zlatého řezu. Řešení máme na obr. 6.21. Díky větě o mocnosti bodu ke kružnici  $k\left(C; \frac{AB}{2}\right)$ . Odtud vyplývá konstrukce bodu  $E$ , který nám dělí úsečku  $AB$  v poměru zlatého řezu. [5]



Obrázek 6.21: Rozdělení úsečky  $AB$  v poměru zlatého čísla

Toto rozdělení můžeme využít při konstrukci strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného kružnici  $k(S; r)$  jako většího dílu poloměru této kružnice, jenž je rozdělen poměrem zlatého řezu. Tuto konstrukci vidíme na obr. 6.22 společně s následnou konstrukcí samotného pravidelného pětiúhelníku.

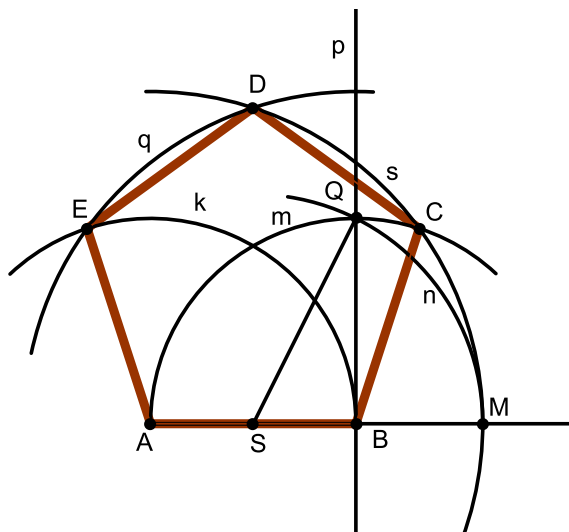


Obrázek 6.22: Konstrukce strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného kružnici a konstrukce pravidelného pětiúhelníku vepsaného kružnici



Nakonec si ukážeme konstrukci pravidelného pětiúhelníku zadaného délkou jeho strany  $p$ . Konstrukci vidíme na obr. 6.23. Pro lepší orientaci si uvedeme zápis konstrukce.

1.  $k; k(A; p)$
2.  $m; m(B; p)$
3.  $S; |SA| = |SB|$
4.  $Q; Q \in m, QB \perp AB$
5.  $n; n(S; |SQ|)$
6.  $M; M \in n \cap AB$  7.  $q; q(S; |AM|)$
8.  $s; s(A; |AM|)$
9.  $C, D, E; C \in m \cap s, D \in q \cap n, E \in k \cap q$
10.  $ABCDE$

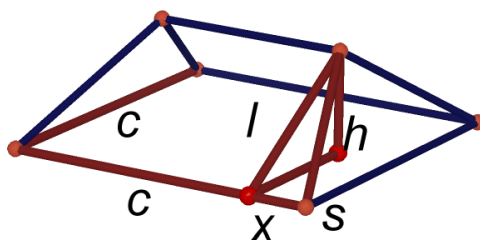


Obrázek 6.23: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku zadaného stranou  $p$

Vzorec pro výpočet obsahu pravidelného dvanáctistěnu dostaneme dosazením do vzorce (6.2) a získáme následující tvar:

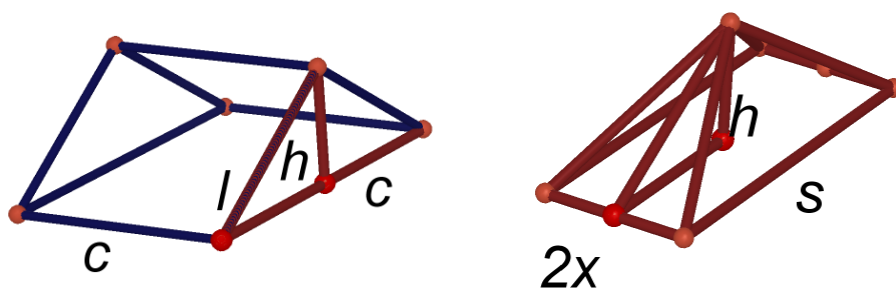
$$S_{12} = 12 \cdot A_5(s) = 3s^2 \cdot \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})} \quad (6.27)$$

Při hledání objemu pravidelného dvanáctistěnu je potřeba větší vynalézavosti. Pravidelný dvanáctistěn rozřežeme na krychli o délce hrany  $c = \frac{s(1+\sqrt{5})}{2}$  a šest pyramid, které vidíme na obr. 6.24 [6].



Obrázek 6.24: Pyramida vzniklá rozřezáním pravidelného dvanáctistěnu

Tyto pyramidy můžeme dále rozřezat na trojboký hranol a zbylé konce spojit do skutečné pyramidy, jak je znázorněno na obr. 6.25.



Obrázek 6.25: Trojboký hranol a pyramida

Nejprve potřebujeme dva vztahy zahrnující výšku  $l$  lichoběžníkové stěny a výšku  $h$  pyramidového tělesa. Jak si můžeme všimnout z obr. 6.24 a obr. 6.25, pomocí Pythagorovy věty dostaneme tyto dva vztahy:

$$s^2 = l^2 + \left(\frac{c-s}{2}\right)^2 \quad (6.28)$$

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \quad (6.29)$$

Rovnice (6.28) a (6.29) spojíme a získáme rovnici:

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{c-s}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \quad (6.30)$$

Dále vyjádříme  $h$ :

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{c-s}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4} \quad (6.31)$$

neboli  $h = \frac{s}{2}$ . Objem šesti původních oříznutých pyramid tedy bude:

$$V_p = \frac{c \cdot h \cdot s}{2} + \frac{c \cdot h(c-s)}{3} = s^3 \cdot \frac{7+3\sqrt{5}}{24} \quad (6.32)$$

Pak můžeme odvodit vzorec pro výpočet objemu pravidelného dvanáctistěnu:

$$V_{12} = \left(s \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + 6s^3 \cdot \frac{7+3\sqrt{5}}{24} = s^3 \cdot \frac{15+7\sqrt{5}}{4} \quad (6.33)$$

## 6.7 Pravidelný dvacetistěn

Posledním z Platónských těles je pravidelný dvacetistěn, na obr. 6.26, který má podle tab. 6.5 dvacet stěn, dvanáct vrcholů a třicet hran. Stěna pravidelného dvacetistěnu má tři hrany, což znamená, že je tvořena rovnostranným trojúhelníkem. Zbývá nám ověřit Eulerův vztah (6.1) i pro poslední Platónovo těleso. Pro pravidelný dvacetistěn platí:  $v = 12$ ,  $h = 30$  a  $s = 20$ .

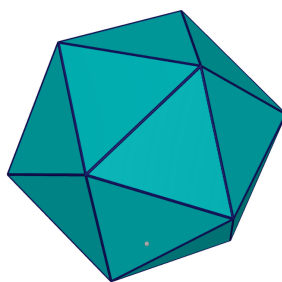
$$12 - 32 + 20 = 2 \quad (6.34)$$

$$2 = 2 \quad (6.35)$$

Tímto je Eulerův vztah ověřen.

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| počet stěn tělesa                          | 20 |
| počet vrcholů tělesa                       | 12 |
| počet hran tělesa                          | 30 |
| počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu | 5  |
| počet hran jedné stěny                     | 3  |

Tabulka 6.5: Vlastnosti dvacetistěnu

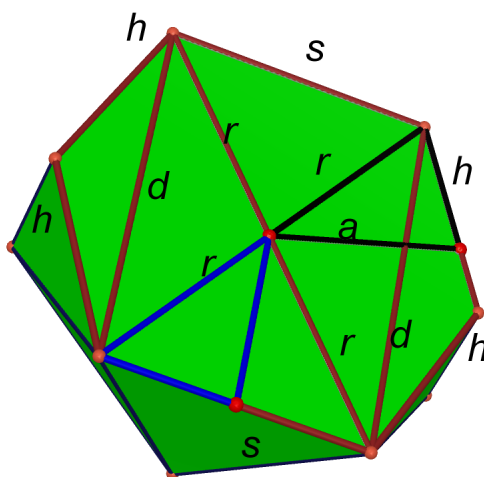


Obrázek 6.26: Model dvacetistěnu v programu Cabri3D

Nyní se podíváme na vzorce pro výpočet obsahu a objemu pravidelného dvacetistěnu. Vzorec pro výpočet obsahu pravidelného dvacetistěnu vychází z obecného vzorce (6.2) a má tvar:

$$S_{20} = 20 \cdot A_3(s) = s^3 \cdot 5\sqrt{3} \quad (6.36)$$

Pro spočítání objemu pravidelného dvacetistěnu musíme určit proměnnou  $a$ . Na obr. 6.27 je příčný řez pravidelným dvacetistěnem, kde  $s$  je délka hran pravidelného dvacetistěnu, které společně s uhlopříčkami dvou pravidelných pětiúhelníků (o délce  $d$ ) tvoří obdélník. Tyto pětiúhelníky mají délku stran  $s$  a můžeme je vidět jako část pravidelného dvacetistěnu po oříznutí jednoho z vrcholů rovinou procházející pěti body, z nichž se hrany sbíhají v oříznutém vrcholu. Čtyři úsečky o délce  $h$  jsou výšky trojúhelníkových stěn pravidelného dvacetistěnu [6].



Obrázek 6.27: Řez pravidelným dvacetistěnem

Z obr. 6.27 je patrné, že můžeme použít Pythagorovu větu pro získání dvou rovnic:

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad (6.37)$$

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{2h}{3}\right)^2, \quad (6.38)$$

kde  $d = \frac{s(1+\sqrt{5})}{2}$  a  $h = \frac{s\sqrt{3}}{2}$ . Nyní se nám vyloučí  $r$  a dostaneme pro  $a$  řešení:

$$a = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{2h}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}s \cdot \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} = s \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} \quad (6.39)$$

Pak dostaneme vzorec pro výpočet objemu pravidelného dvacetistěnu:

$$V_{20} = \frac{a \cdot S_{20}}{3} = s^3 \cdot \frac{5(3+\sqrt{5})}{12} \quad (6.40)$$

## 6.8 Platónská tělesa kolem nás

S Platónskými tělesy se můžeme setkat při hraní deskových her ve formě hracích kostek nebo v přírodě jako s krystaly některých minerálů. Jaké to konkrétně jsou uvádím níže u jednotlivých těles. Díky jejich estetice se můžeme s jejich tvary setkat také u tvarů některých šperků.

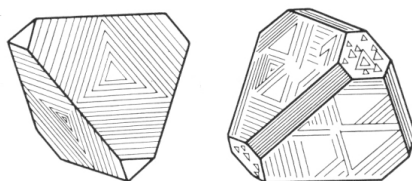
### 6.8.1 Pravidelný čtyřstěn

Pro svoji pravidelnost se stejně jako ostatní Platónská tělesa stal jeho tvar předlohou pro vytvoření hracích kostek používaných k některým deskovým hrám. Čtyřstěnou hrací kostku vidíme na obr. 6.28.



Obrázek 6.28: Čtyřstěnná kostka

S pravidelným čtyřlístkem se můžeme setkat i v přírodě. Konkrétně u krystalů sfaleritu na obr. 6.29.



Obrázek 6.29: Krystaly sfaleritu, převzato z [16]

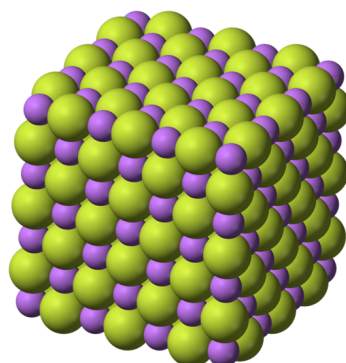
### 6.8.2 Pravidelný šestistěn

Tvar šestistěnu je ve světě okolo nás celkem častý. Ať už se jedná o hrací kostky na obr. 6.30, dlažební kostky, kartonové krabice, svíčky, krystaly fluoritu na obr. 6.31 a soli kamenné na obr. 6.32.

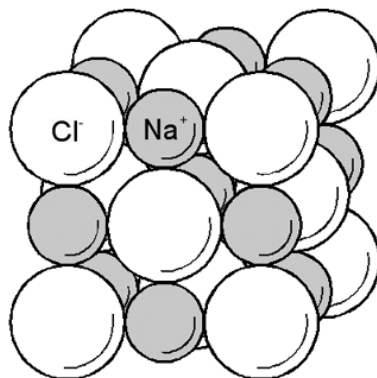


Obrázek 6.30: Šestistěnná hrací kostka





Obrázek 6.31: Krystaly fluoritu, převzato z [17]



Obrázek 6.32: Krystaly soli kamenné, převzato z [18]

### 6.8.3 Pravidelný osmistěn

S pravidelným osmistěnem se ve světě kolem nás můžeme setkat například jako s hrací kostkou na obr. 6.33 nebo jako s krystaly některých minerálů. Jsou to například na obr. 6.34 krystaly kupritu a na obr. 6.35 krystaly magnetitu.



Obrázek 6.33: Osmistěnná hrací kostka



Obrázek 6.34: Krystaly kupritu, převzato z [19]



Obrázek 6.35: Krystaly magnetitu, převzato z [20]

#### 6.8.4 Pravidelný dvanáctistěn

Na obr. 6.36 vidíme křišťálový přívěšek ve tvaru pravidelného dvanáctistěnu. Pro potřebu deskových her se vyrábí i dvanáctistěnná hrací kostka, na obr. 6.37. Každý zřejmě zná posvětnou Rubikovu kostku. Málokdo ovšem ví, že existuje i její dvanáctistěnná verze, jejíž podoba je na obr. 6.38. Ve tvaru pravidelného dvanáctistěnu můžeme narazit i na opravdu neobvyklé věci, např. na reproduktory na obr. 6.39.



Obrázek 6.36: Křišťálový přívěšek ve tvaru pravidelného dvanáctistěnu, převzato z [21]



Obrázek 6.37: Model dvanáctistěnu v programu Cabri3D



Obrázek 6.38: Hlavolam ve tvaru dvanáctistěnu, převzato z [22]



Obrázek 6.39: Reproduktor ve tvaru dvanáctistěnu, převzato z [23]

### 6.8.5 Pravidelný dvacetistěn

Pravidelný dvacetistěn v našem okolí můžeme zaznamenat například při hraní deskových her ve formě dvacetistěnné hrací kostky, která je zachycena na obr. 6.40. Díky estetickému tvaru pravidelného dvacetistěnu, můžeme jeho tvar nalézt i u některých šperků. Ukázka takového šperku je na obr. 6.41, kde vidíme křišťálový přívěšek ve tvaru pravidelného dvacetistěnu.



Obrázek 6.40: Dvacetistěnná hrací kostka



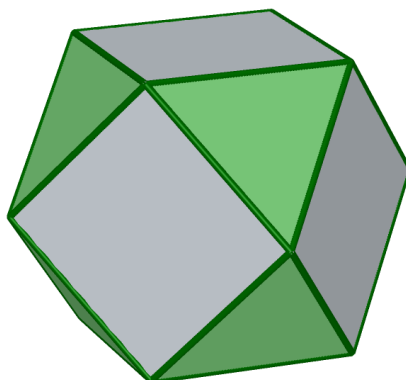
Obrázek 6.41: Šperk ve tvaru pravidelného dvacetistěnu, převzato z [21]

# Kapitola 7

## Archimédova tělesa

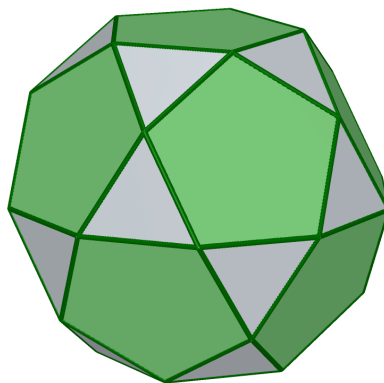
Poloprávidelné mnohostěny jsou taková konvexní tělesa, jejichž stěny jsou tvořeny více typy pravidelných mnohoúhelníků a v jejichž vrcholech se stýkají tytéž stěny. Archimédova tělesa jsou poloprávidelné mnohostěny, které vznikají vhodným ořezáním hran nebo vrcholů Platónových těles. Archimédových těles je třináct. Až na výjimky se do češtiny názvy Archimédových těles nepřekládají nebo se nepoužívají proto je ve své práci nebudu uvádět. Níže jsou uvedeny jednotlivé Archimédova tělesa. V závorce jsou u nich uvedeny jeho základní vlastnosti  $(s, h, v, t_x + t_y)$ , kde  $s$  je počet stěn,  $h$  počet hran,  $v$  počet vrcholů a součet  $t_x + t_y$  značí jaké počet a typ mnohoúhelníků tvořící Archimédovo těleso. Například  $8_3 + 6_4$  udává, že je těleso tvořeno osmi trojúhelníky a šesti čtverci. [3]

Nyní si řekneme jak sestavit některá Archimédova tělesa. Cuboctahedron, na obr.7.1, lze sestavit hned ze dvou Platónových těles. Z pravidelného osmistěnu a pravidelného šestistěnu. Postup konstrukce je v obou případech totožný. Sestavíme střední příčky (spojíme středy všech sousedních hran v mnohostěnu) a tyto střední příčky jsou hranami Cuboctahedranu. Lze si představit rovinu, která je tvořena dvěma příčkami, jenž vedou ze stejného bodu. Ve skutečnosti bude tato rovina obsahovat i třetí příčku spojující druhé vrcholy příček tvořících rovinu. Touto rovinou ořízneme vrchol pravidelného mnohostěnu. Po opakování tohoto kroku u všech vrcholů získáme Cuboctahedron.



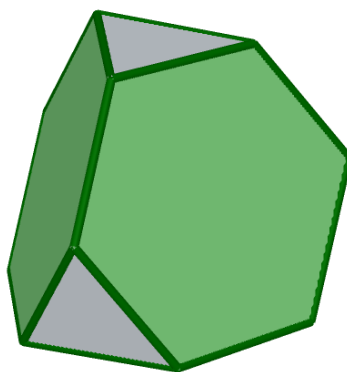
Obrázek 7.1: Model Cuboctahedronu  $(14, 24, 12, 8_3 + 6_4)$  v programu Cabri3D

Stejným způsobem jako Cuboctahedron lze z pravidelného dvanáctistěnu nebo z pravidelného dvacetistěnu sestavit Icosidodecahedron. Sestrojený Icosidodecahedron je na obr. 7.2.

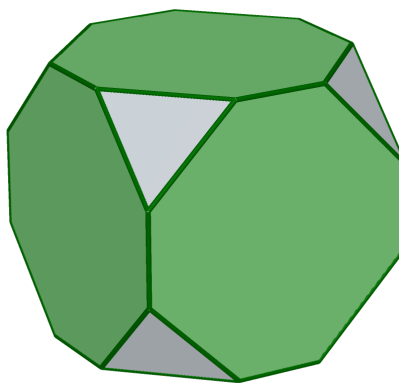


Obrázek 7.2: Model Icosidodecahedronu  $(32, 60, 30, 20_3 + 12_5)$  v programu Cabri3D

Dalším způsobem konstrukce je ořezávat vrcholy Platónových těles v  $\frac{1}{3}$  délek hran sbíhajících se ve vrcholech. Tímto způsobem lze sestavit Truncated tetrahedron (z pravidelného čtyřstěnu) na obr. 7.3, Truncated hexahedron (z pravidelného šestistěnu) na obr. 7.4, Truncated octahedron (z pravidelného osmistěnu) na obr. 7.5, Truncated icosahedron (z pravidelného dvanáctistěnu) na obr. 7.6, a Truncated dodecahedron (z pravidelného dvacetistěnu) na obr. 7.7.

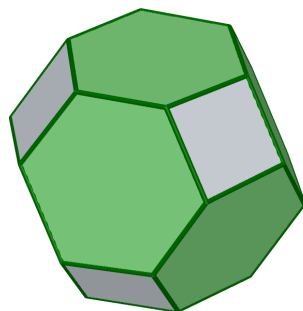


Obrázek 7.3: Model Truncated tetrahedronu  $(8, 18, 12, 4_3 + 4_6)$  v programu Cabri3D

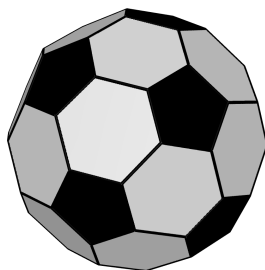


Obrázek 7.4: Model Truncated hexahedronu  $(14, 36, 24, 8_3 + 6_8)$  v programu Cabri3D

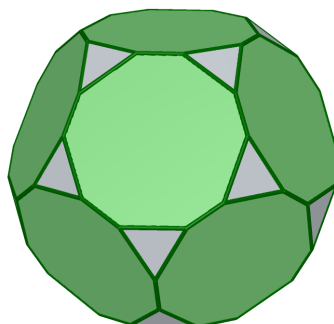




Obrázek 7.5: Model Truncated octahedronu  $(14, 36, 24, 6_4 + 8_6)$  v programu Cabri3D

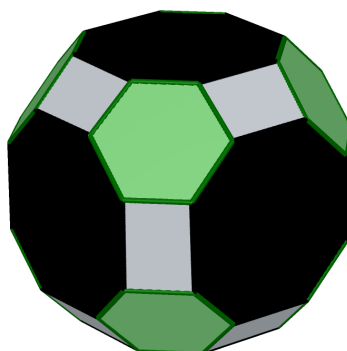


Obrázek 7.6: Model Truncated icosahedronu  $(32, 90, 60, 12_5 + 20_6)$  v programu Cabri3D

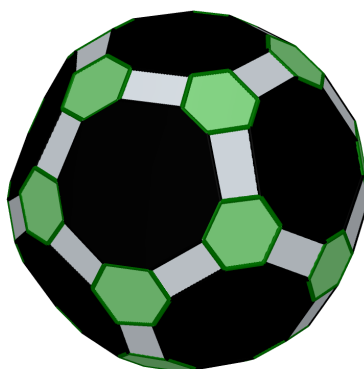


Obrázek 7.7: Model Truncated dodecahedronu  $(32, 90, 60, 20_3 + 12_{10})$  v programu Cabri3D

Kombinací výše uvedených způsobů sestojíme Truncated cuboctahedron a Truncated icosidodecahedron. Nejprve sestojíme pomocí první metody Cuboctahedron respektive Icosidodecahedron a následně podle druhé metody ořežeme nově vzniklé vrcholy v  $\frac{1}{3}$  délek hran sbíhajících se v těchto vrcholech. Po aplikaci druhé metody nám vzniknou zmiňované Truncated cuboctahedron na obr. 7.8 respektive Truncated icosidodecahedron na obr. 7.9.



Obrázek 7.8: Model Truncated cuboctahedronu ( $26, 72, 48, 12_4 + 8_6 + 6_8$ ) v programu Cabri3D

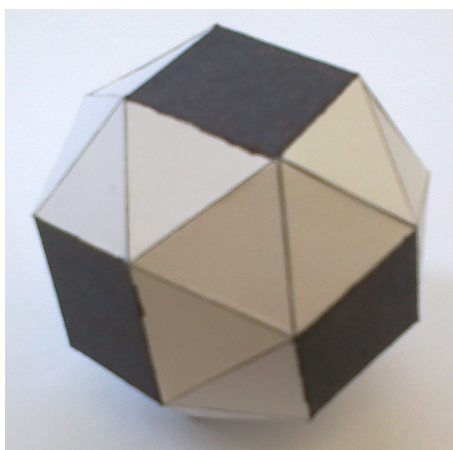


Obrázek 7.9: Model Truncated icosidodecahedronu ( $62, 180, 120, 30_4 + 20_6 + 12_{10}$ ) v programu Cabri3D

Ještě složitější postup konstrukce je u posledních čtyř Archimédových těles. Jsou to Rhombicuboctahedron na obr. 7.10, Snub hexahedron na obr. 7.11, Rhombicosidodecahedron na obr. 7.12 a Snub dodecahedron na obr. 7.13.



Obrázek 7.10: Model Rhombicuboctahedronu ( $26, 48, 24, 8_3 + 18_4$ )



Obrázek 7.11: Model Snub hexahedronu ( $38, 60, 24, 32_3 + 6_4$ )



Obrázek 7.12: Model Rhombicosidodekahedronu  $(62, 120, 60, 20_3 + 30_4 + 12_5)$



Obrázek 7.13: Model Snub dodekahedronu  $(92, 150, 60, 80_3 + 12_5)$

## 7.1 Archimédova tělesa kolem nás

Archimédova tělesa nejsou kolem nás tak časté jako ostatní křivky a tělesa představené v této práci. Většinou se používají jako dekorativní prvky ve stavebnictví. Jako například na obr. 7.14, kde vidíme Cuboctahedron ve stanici metra Lužiny v Praze.



Obrázek 7.14: Cuboctahedron ve stanici metra Lužiny v Praze, převzato z [24]

Bezesporu nejznámějším Archimédovým tělesem je Truncated icosahedron. Tvar tohoto tělesa vytvořeného oříznutím vrcholů pravidelného dvanáctistěnu v  $\frac{1}{3}$  délek hran sbíhajících se ve vrcholu slouží jako vzor pro fotbalový míč na obr. 7.15.



Obrázek 7.15: Fotbalový míč a model Truncated icosahedronu

# Kapitola 8

## Závěr

Touto prací jsem chtěl představit některé možná méně známé křivky či tělesa, se kterými se můžeme každý den dostat do kontaktu. Aniž si to někdy uvědomujeme, je kolem nás nepřeberné množství křivek, ploch a těles a jejich pochopení nám může pomoci při studiu matematiky a geometrie. V práci jsem používal programy dynamické geometrie GeoGebra a Cabri3D. Tyto programy jsou z velké části intuitivní a dobře se s nimi pracuje. Navíc modely v nich vytvořené tvoří nejen podstatnou část mé práce ale také přehledné a názorné materiály, jenž mohou být využity při výuce matematiky a geometrie prakticky na všech typech a stupních škol.

V každé kapitole byla představena jiná křivka či těleso. Byl u nich uveden popis, vlastnosti a výskyt v našem okolí. Vše bylo, kvůli přehlednosti a názornosti, doplněno o obrázky ve výše zmíněných programech dynamické geometrie.

# Literatura

- [1] Šmejkal, J. *Technické křivky geometrické v praxi*. Česká grafická unie. Praha, 1946.
- [2] Hašek, R. *Systémy počítačové algebry a dynamické geometrie jako nástroje poznání*. In Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2010. Sborník příspěvků. 1. vydání. Plzeň: Vydavatelský servis, Republikánská 28, Plzeň, 2010. s. 103-108. ISBN 978-80-86843-29-2.
- [3] Voráčková, Š a kol. *Atlas geometrie: geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia, 2012, 252 s. Atlas (Academia). ISBN 978-80-200-1575-4.
- [4] Kubešová, N. a Cibulková, E. *Matematika: přehled středoškolského učiva*. 1. vyd. Třebíč: Petra Velanová, 2006, 239 s. Maturita (Petra Velanová). ISBN 80-868-7303-X.
- [5] Kuřina, F. *Deset pohledů na geometrii*. Praha: Matematický ústav AV ČR. ISBN 80-85823-21-7.
- [6] <http://www.math.rutgers.edu/~erowland/polyhedra.html>
- [7] <http://home.pf.jcu.cz/~hasek/LAG/Pr14/VzdalenostPodprostoru.pdf>
- [8] <http://plus.maths.org/content/outer-space-bridging-gap>
- [9] Buckley, B., Hopkins, E. J. a Whitaker, R. *Počasi: velký obrazový průvodce*. Čestlice: Rebo, 2006, 303 s. ISBN 978-80-7234-552-62007.
- [10] Nečas, P. *Chameleoni*. Pávov: Madagaskar, 2003. ISBN 80-86068-30-7.

- [11] Studnička, M. *Kapradiny: atlas domácích a exotických druhů*. Praha: Academia, 2009, 452 s. Atlas. ISBN 978-802-0017-161.
- [12] Kubát, K. a kol. *Botanika*. 2. vyd. Praha: Scientia, 2003, 231 s., [12] s. barev. obr. příl. ISBN 80-718-3266-9.
- [13] <http://sk.wikipedia.org/wiki/S%C3%BAbor:Pont-bosphore.jpg>
- [14] [http://www.nasa.gov/images/content/717547main\\_pia16605-full\\_full.jpg](http://www.nasa.gov/images/content/717547main_pia16605-full_full.jpg)
- [15] <http://www.converter.cz/fyzici/kepler.htm>
- [16] [is.muni.cz/do/1499/el/estud/prif/ps09/9045979/web/kapitola7/img74\\_5.html](http://is.muni.cz/do/1499/el/estud/prif/ps09/9045979/web/kapitola7/img74_5.html)
- [17] <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Lithium-fluoride-3D-ionic.png>
- [18] [http://web.natur.cuni.cz/ugmnz/mineral/mineral/gifv/halit\\_3.gif](http://web.natur.cuni.cz/ugmnz/mineral/mineral/gifv/halit_3.gif)
- [19] [http://mineraly.sci.muni.cz/oxidy/kuprit\\_103.html](http://mineraly.sci.muni.cz/oxidy/kuprit_103.html)
- [20] <http://geologie.vsb.cz/loziska/loziska/rudy/magnetit.html>
- [21] <http://http://www.posvatna-geometrie.cz>
- [22] <http://www.china-toys-and-hobbies.com>
- [23] <http://www.ubergizmo.com/2005/03>
- [24] <http://prahamhd.vhd.cz/Metro/luziny.htm>