

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

**Analýza řešení úloh II. kola 55. ročníku MO
v Jihočeském kraji**

Diplomová práce

Renata KUČEROVÁ

České Budějovice, duben 2009

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

V Českých Budějovicích

20. 4. 2009

Anotace

Název: Analýza řešení úloh II. kola 55. ročníku MO v Jihočeském kraji
Vypracovala: Renata Kučerová
Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph. D.
Klíčová slova: Podobnost, nerovnost, Pythagorova věta, prvočísla, aritmetická posloupnost, kružnice opsaná

Práce si klade za cíl analyzovat řešení úloh II. kola 55. ročníku MO v Jihočeském kraji. Tato práce může sloužit jako příprava žáků na matematickou olympiádu nebo jako sbírka příkladů pro nadanější žáky.

Anotace

Title: The problems solution analysis of the second round of the 55th year of the Mathematical Olympiad in South Bohemian region

Author: Renata Kučerová

Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph. D.

Key words: Similarity, inequality, Pythagoras' theorem, prime numbers, arithmetic progression, circumscribed circle

The aim of this diploma work is to analyse problems solving of the second round of the 55th year of the Mathematical Olympiad in South Bohemian region and to serve as a study material for further Mathematical Olympiads or as a collection of problems for talented students.

Děkuji tímto RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph. D. za odborné vedení, trpělivost a pomoc při zpracování diplomové práce. Dále děkuji Pavlovi Duškovi za pomoc při konečných úpravách na své diplomové práci.

Obsah

1	ÚVOD.....	7
2	ROZBOR ŘEŠENÍ ÚLOH V KATEGORII C.....	9
2.1	ÚLOHA C-II-1	9
2.2	ÚLOHA C-II-2	21
2.3	ÚLOHA C-II-3	28
2.4	ÚLOHA C-II-4	39
2.5	STATISTIKA ÚSPĚŠNOSTI JEDNOTLIVÝCH ÚLOH C-II-1-4	46
3	ROZBOR ŘEŠENÍ ÚLOH V KATEGORII B.....	47
3.1	ÚLOHA B-II-1	47
3.2	ÚLOHA B-II-2	57
3.3	ÚLOHA B-II-3	65
3.4	ÚLOHA B-II-4	72
3.5	STATISTIKA ÚSPĚŠNOSTI JEDNOTLIVÝCH ÚLOH B-II-1-4	78
4	ZÁVĚR	79

1 Úvod

Matematická olympiáda má již dlouholetou tradici. Vznikla v roce 1951. V jejím čele stanul profesor Karlovy univerzity Dr. Eduard Čech. Odborným garantem matematické olympiády byla Jednota českých matematiků a fyziků spolu s Matematickým ústavem Akademie věd České republiky. Soutěž v té době byla založena pro studenty tzv. výběrových, dnešních středních škol, později se rozšířila i na žáky základních škol. Hlavním cílem mat. olympiády bylo získat studenty středních škol pro studium technických oborů, aby se stali příštími budovateli našeho, hlavně těžkého průmyslu. Bylo to vyjádřeno i graficky na diplomech pro vítěze celostátního kola MO, kde byl vyobrazen mladý matematik, jak na papíře něco počítá obklopen mohutně kouřícími komíny továren.

Úspěšní řešitelé MO se mohli zúčastňovat i mezinárodní matematické olympiády, která vznikla v roce 1959 na popud rumunských matematiků.

Matematickou olympiádu připravuje ústřední výbor MO. Jedná se o skupinu vědeckých pracovníků a učitelů matematiky základních, středních a vysokých škol. Prvním předsedou ústředního výboru MO byl prof. Dr. František Vyčichlo, později prof. Dr. Josef Novák, ředitel matematického ústavu ČSAV. Dalším předsedou byl docent Jan Vyšín, který je znám jako propagátor modernizace výuky a autor celé řady učebnic a příruček matematiky.

Matematická olympiáda za dobu své existence prodělala řadu změn. Ty se týkaly jak počtu příkladů, které museli žáci řešit, tak i jednotlivých kategorií, ve kterých mohli žáci soutěžit. V posledních letech se o výběr úloh starají dvě úlohové komise, jedna pro kategorii Z – základní školy, druhá pro kategorie A, B, C – střední škola. Vznik obou komisí inicioval doc. Dr. Jaromír Šimša z Brněnské pobočky Matematického ústavu AV, který vede druhou komisi. Obě komise pracují se slovenskými kolegy a výsledkem jsou stejné úlohy a stejné termíny jednotlivých kol MO v ČR i na Slovensku. Od roku 1986 existuje i nová kategorie P – programování.

S matematickou olympiádou je spojena celá řada akcí, které postupně vznikly za účelem podpory řešitelů MO a tím i ke zvýšení znalostí žáků a studentů v matematice

– semináře, celostátní i regionální, z nichž některé jsou korespondenční formou; soustředění úspěšných řešitelů MO, jež jsou zároveň jejich přípravou na další ročníky MO; konají se i semináře pro učitele, připravují se pro ně komentáře k úlohám prvního kola s návodnými úlohami apod.

Ve své práci se budu zabývat analýzou II. kola 55. ročníku MO v Jihočeském kraji. Mým úkolem je analyzovat řešení jednotlivých žáků, vypracovat statistiku řešitelnosti a také poukázat na chyby, kterých se žáci dopouštěli.

2 Rozbor řešení úloh v kategorii C

2.1 Úloha C- II – 1

Text úlohy

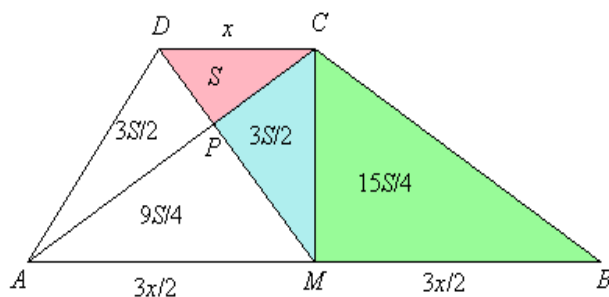
Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD . Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC . Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$.

Vzorové řešení (upraveno autorkou diplomové práce)

Výpočet je založen na dvou známých pravidlech, která žáci odvozují vyjadřováním obsahů trojúhelníků pomocí základen a výšek. Nyní si uvedme tato pravidla:

- 1) Jsou-li dva trojúhelníky podobné s koeficientem podobnosti k , je poměr jejich obsahů roven k^2 .
- 2) Leží-li nějaké tři body X, Y, Z v jedné přímce a bod V mimo ni, je poměr trojúhelníků XYV a YZV roven poměru $|XY|:|YZ|$.

$$S_{MBCP} = S_{MPC} + S_{MBC}$$



Obr. 1

Obsah čtyřúhelníku $MBCP$ je vypočítán jako součet obsahů trojúhelníka MPC a trojúhelníka MBC .

Ze shodnosti střídavých úhlů mezi rovnoběžkami AB a CD plyne, že trojúhelníky AMP a CDP jsou podle věty uu podobné, a to s koeficientem $\frac{|AM|}{|CD|} = \frac{3}{2}$. Označíme-li S obsah trojúhelníku CDP , je obsah trojúhelníku AMP roven $\left(\frac{3}{2}\right)^2 S = \frac{9}{4} S$ (plyne z pravidla číslo 1, zde je koeficientem podobnosti $k = \frac{3}{2}$). Z rovností $|AP| : |CP| = |MP| : |DP| = \frac{3}{2}$ plyne, že obsah každého z trojúhelníků APD a MPC je roven $\frac{3}{2}$ obsahu trojúhelníku CDP , tedy $\frac{3}{2} S$.

Obsahy trojúhelníků AMC a BMC jsou stejné (plyne z pravidla číslo 2), a rovnají se tedy $\frac{9}{4} S + \frac{3}{2} S = \frac{15}{4} S$. Odtud plyne, že obsah čtyřúhelníku $MBCP$ je $\frac{3}{2} S + \frac{15}{4} S = \frac{21}{4} S$, hledaný poměr je proto $4 : 21$.

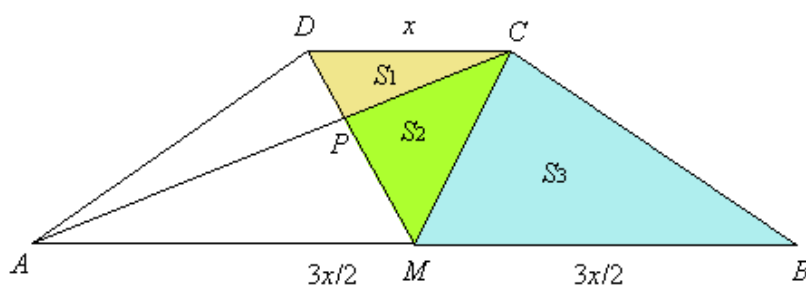
Kritéria hodnocení : Za úplné řešení se doporučovalo udělit 6 bodů, z toho 3 body za určení poměru obsahů trojúhelníků AMP a CDP . Výpočty obsahů se mohou lišit podle volby základního obsahu, pomocí něhož vyjadřujeme obsahy ostatních trojúhelníků v obrázku. (Pravidla uvedená v úvodu řešení, budou řešitelé pro konkrétní dvojice trojúhelníků odvozovat vyjadřováním jejich obsahů pomocí základu a výšky).

Analýza řešitelských postupů

Tato úloha poskytuje žákům jistou rozmanitost ve způsobu řešení. Ta spočívá zejména ve výpočtu obsahu čtyřúhelníka $MBCP$. Žáci přišli celkem na tři různé způsoby výpočtu obsahu čtyřúhelníka $MBCP$, která zde uvádíme v nepozměněné podobě.

Jako první uvedme řešení Kamila Stuchlíka z Gymnázia Jírovcova. Ten si vyjádřil obsah čtyřúhelníka $MBCP$ jako součet obsahů trojúhelníka MPC a MBC ($S_{MBCP} = S_{MPC} + S_{MBC}$). Kamil pracuje s poměry obsahů. Jeho postup je ojedinělý v tom, že pro výpočet obsahů nepoužil ani jediný vzorec. S obdobným způsobem řešení jsem se u dalších žáků nesetkala.

$$S_{MBCP} = S_{MPC} + S_{MBC}$$



Obr. 2

- S_1 obsah trojúhelníku DPC
- S_2 obsah trojúhelníku MPC
- S_3 obsah trojúhelníku MBC

$$|DC|:|AB|=1:3$$

$$|AM|=|MB|$$

$$|DC|:|AM|=2:3$$

Pomyslné díly:

$$|DP|=2$$

$$|PM|=3$$

$$S_1:S_2=2:3$$

Obsahy $S_1:S_2$ jsou v tomto poměru, protože $|DP|:|PM|=2:3$ ¹ a trojúhelník DCP a trojúhelník CMP mají společnou výšku v_1 z vrcholu C . $S_1+S_2:S_3=2:3$ protože $|DC|:|MB|=2:3$ a trojúhelník DCM a trojúhelník CMP mají stejnou výšku v_2 .

$$S_1+S_2=5 \text{ dílků}$$

$$1 \text{ dílek} = 2,5$$

$$S_1+S_2:S_3=2:3=5:7,5=10:15$$

10 rozdělíme v poměru $2:3=4:6$ odtud vyplývá:

$$S_1 = 4 \text{ imaginární}^2 \text{ díly}$$

$$S_2 = 6 \text{ imaginárních dílů}$$

$$S_3 = 15 \text{ imaginárních dílů}$$

$$S_2+S_3=21 \text{ imaginárních dílů}$$

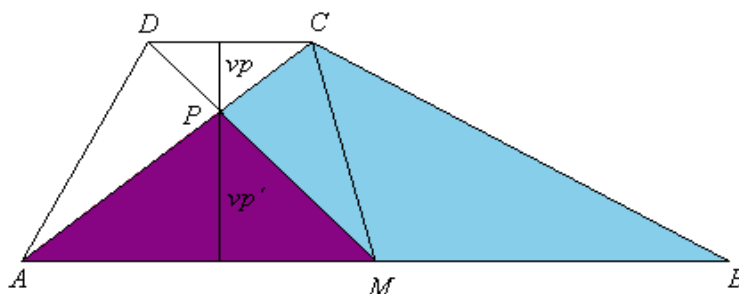
$$S_1:S_2+S_3=\underline{4:21}$$

¹ $DP:PM=2:3$. Tuto rovnost Kamil zjistil na základě podobnosti trojúhelníků.

² Termín „imaginární“ je zde nevhodný. Uvádíme však doslovnou citaci žákova řešení.

Dalším zajímavým způsobem, jak tuto úlohu vyřešit, bylo stanovit obsah čtyřúhelníka $MBCP$ jako rozdíl obsahů trojúhelníka ABC a trojúhelníka AMP ($S_{MBCP} = S_{ABC} - S_{AMP}$). Ze šesti úspěšných řešitelů, kteří za tento úkol získali plný počet bodů, si tuto strategii zvolili čtyři žáci. Vybrala jsem řešení jednoho z nich, a to Dana Kubů z Gymnázia Strakonice.

$$S_{MBCP} = S_{ABC} - S_{AMP}$$



Obr. 3

Dan se nejprve zabýval shodností úhlů:

$$\sphericalangle MAP = \sphericalangle DCP$$

$$\sphericalangle PDC = \sphericalangle AMP$$

$$\sphericalangle DPC = \sphericalangle APM$$

Odtud vyplývá, že trojúhelníky CDP a AMP jsou podobné.

$$|AB| = 3a$$

$$|DC| = a$$

$$v = 2 \text{ díly} + 3 \text{ díly} = 5 \text{ dílů}$$

$$v_p : v'_p = \frac{2}{5} : \frac{3}{5}$$

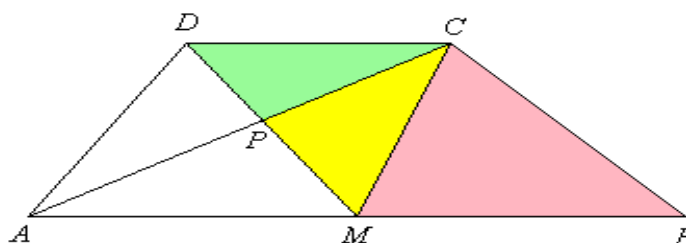
$$S_{MBCP} = S_{ABC} - S_{AMP} = \frac{3a \times v}{2} - \frac{1,5a \times \frac{3}{5}v}{2} = \frac{3a \times v - 1,5a \times 0,6v}{2}$$

$$S_{CDP} = \frac{a \times \frac{2}{5}v}{2}$$

$$S_{MBCP} : S_{CDP} = \frac{3av - 1,5a \times 0,6v}{2} : \frac{a \times 0,4v}{2} = \frac{3av - 0,9av}{2} \times \frac{2}{0,4av} = \frac{2,1av}{0,4av} = \frac{2,1}{0,4} = \underline{5,25}$$

Další způsob řešení našel Pavel Veselý z Gymnázia Strakonice. Pavel vyjádřil obsah čtyřúhelníku $MBCP$ jako součet obsahů trojúhelníka MBC a trojúhelníka CDM zmenšený o obsah trojúhelníka CDP ($S_{MBCP} = S_{MBC} + S_{CDM} - S_{CDP}$). Pavel při výpočtu obsahů postupoval obdobně jako Dan – obsahy trojúhelníků počítal podle vzorce. Stejně jako Dan si musel správně vyjádřit poměr výšek a pak už jen dosadil do vzorce na výpočet trojúhelníka.

$$S_{MBCP} = S_{MBC} + S_{CDM} - S_{CDP}$$



Obr. 4

Podobnost trojúhelníku CDP a trojúhelníku AMP byla vysvětlena na základě úhlů.

$$|CD| = c$$

$$|AB| = 3c$$

$$|AM| = |MB| = 1,5c$$

v - výška lichoběžníka – ta se také dělí v poměru 2:3

$$S_{MBC} = \frac{1,5c \times v}{2} = 0,75cv$$

$$S_{CDM} = \frac{c \times v}{2} = 0,5cv$$

$$S_{CDP} = \frac{c \times \frac{2}{5}v}{2} = \frac{1}{5}cv = 0,2cv$$

$$S_{MBCP} = S_{MBC} + S_{CDM} - S_{CDP}$$

$$S_{MBCP} = 0,75cv + 0,5cv - 0,2cv$$

$$S_{MBCP} = 1,05cv$$

$$S_{CDP} : S_{MBCP}$$

$$0,2 : 1,05$$

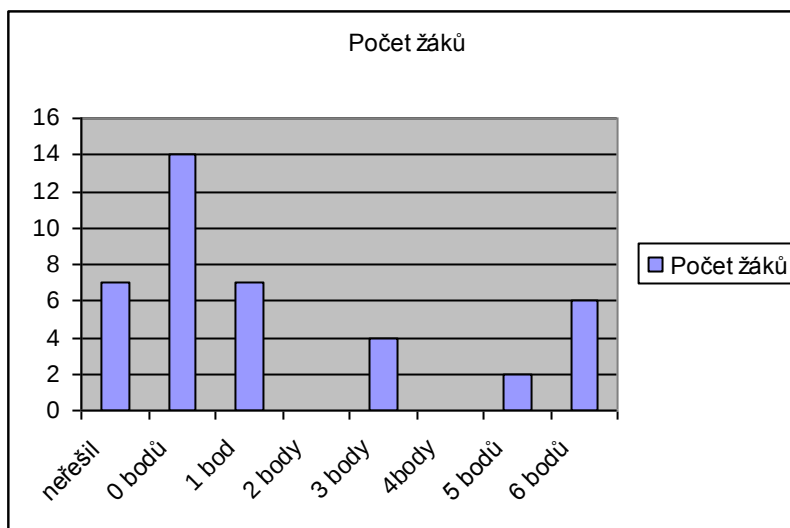
$$\underline{1 : 5,25}$$

Statistika úspěšnosti v řešení úlohy C- II - 1

Z tabulky 1 a grafu (Obr. 5) vidíme, že za tuto úlohu nedostalo ani jeden bod 21 řešitelů (52,5%). Plný počet bodů obdrželo pouze 6 žáků (15%). Pro správné řešení úlohy je nutná dobrá znalost trojúhelníků, jejich úhlů a vztahů mezi nimi. Pokud žák nepřijde na to, že trojúhelníky *CDP* a *AMP* jsou si podobné, je bez šance tuto úlohu vyřešit.

Ohodnocení	Počet žáků	Relativní četnost (%)
neřešil	7	17,50
0 bodů	14	35,00
1 bod	7	17,50
2 body	0	0,00
3 body	4	10,00
4body	0	0,00
5 bodů	2	5,00
6 bodů	6	15,00

Tabulka 1: Statistika úspěšnosti řešení úlohy C-II-1



Obr. 5: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze C-II-1

Rozebereme-li řešení šesti úspěšných žáků, zjistíme, že k této úloze přistupovali studenti odlišným způsobem. Tito žáci přišli na tři možné varianty řešení. Jedná se

o odlišný způsob výpočtu obsahu čtyřúhelníku *MBCP*. Zaneseme-li tyto údaje do tabulky, pak by vypadala takto:

Výpočet čtyřúhelníku S_{MBCP}	Počet žáků	Relativní četnost
$S_{MBCP} = S_{MPC} + S_{MBC}$	1	16,67%
$S_{MBCP} = S_{ABC} - S_{AMP}$	4	66,67%
$S_{MBCP} = S_{MBC} + S_{CDM} - S_{CDP}$	1	16,67%

Tabulka 2

Jak vidíme v tabulce 1, získali dva žáci (5% z počtu řešitelů) pět bodů. Jeden bod pravděpodobně ztratili kvůli nedostatečnému zdůvodnění podobnosti trojúhelníků. Můžeme tedy říci, že tuto úlohu v podstatě vyřešilo 8 žáků, což je 20% z celkového počtu. Dalších 10% řešitelů získalo tři body. Jedná se celkem o čtyři žáky. Jeden z těchto studentů řešil obsah konkrétního, jím zvoleného lichoběžníka. Dospěl ke správnému výsledku, ale obecný důkaz neprovedl. Další řešitel vyjadřoval jednotlivé obsahy trojúhelníků, ale nenalezl vztah mezi výškami a tudíž nemohl příklad dopočítat. Jeden bod získalo celkem 7 žáků, tedy 17,5%. U nich byl velký problém s výpočtem obsahů jednotlivých trojúhelníků. To byla nejčastější chyba, které se studenti dopustili. Další chybou bylo špatné vyjádření velikostí výšek. Jeden žák dokonce považoval čtyřúhelník *MBCP* za lichoběžník. Úlohu vůbec neřešilo nebo za ni získalo nula bodů celkem 21 žáků (52,5%).

Rozbor chyb

Nejdříve bych se zabývala řešiteli, kteří vyřešili příklad dobře, ale nebyli ohodnoceni plným počtem bodů. Jedná se o čtyři žáky. Dva z těchto řešitelů nedostatečně zdůvodnili podobnost trojúhelníků *CDP* a *AMP*. Další řešitel si zvolil délky stran lichoběžníka a pracoval s konkrétními čísly. Poměr mu sice vyšel dobře, ale už nedokázal, zda výsledek platí obecně. Poslední řešitel si rozdělil lichoběžník *ABCD* na trojúhelníky a lichoběžníky a pomocí celkového obsahu *S* vyjadřoval tyto obsahy. Neměl však uvedeny postupy a bylo mu vytknuto nedostatečné zdůvodnění a nepřehlednost, což se také odrazilo v jeho hodnocení.

Co se týče ostatních chyb, tak byly téměř stejného rázu. Řešitelé počítali obsahy jednotlivých trojúhelníků pomocí výšek. Nejčastější chybou bylo špatné vyjádření obsahu trojúhelníku, tudíž nemohli dojít ke správným výsledkům. Další méně častou chybou bylo, že studenti vyjádřili obsahy pomocí výšek sice dobře, ale pak už nedokázali najít vztah mezi výškami jednotlivých trojúhelníků a příklad tak nedopočítali.

Dvacet osm žáků nepřišlo na podobnost trojúhelníků *CDP* a *AMP*, čímž byli odsouzeni k nezdaru ihned na začátku. Někteří ani nebyli schopni pracovat s údajem, že strana *AB* je třikrát delší než strana *CD* a vyjádřit tento vztah: $AM = \frac{3}{2}x$ a $MB = \frac{3}{2}x$, kde proměnou *x* rozumíme délku strany *CD*.

Kuriozity

Při zpracování úkolu jsem narazila na řešení dvou žáků, kteří se pokoušeli vyřešit tuto úlohu pomocí rýsování a měření. Postup je sice nesprávný, přesto si myslím, že by byla škoda tato řešení neuvést.

První řešitel si narýsoval jeden z možných lichoběžníků, změřil si v něm potřebné rozměry a obsahy vypočítal. Ke svému řešení uvedl následující komentář:

Můj postup tedy určitě správný nebyl, protože jsem si lichoběžník narýsoval a změřil si potřebné výšky pro výpočty obsahů potřebných objektů. Poté jsem vypočítal poměr mezi obsahy a zkusmo zjišťoval, který poměr celých čísel se mému nejvíce podobá, protože měření vznikly odchylky. Došel jsem k názoru, že poměr čtyřúhelníka ku trojúhelníku je 17 : 3.

Druhý řešitel udělal základní chybu v rýsování lichoběžníka. Neví, co znamená slovo třikrát delší. Což je podle mého názoru ostuda na studenta 1. ročníku gymnázia. Žákovo řešení:

To se opravdu zdá být kruté. Zaráží mě zde, co přesně znamená „třikrát delší“. Máme-li 1 cm, tak ono zmíněné „třikrát delší“ je 3 nebo 4 cm? (jako třikrát delší, že násobím 3, nebo že násobím 3 a ještě přičtu ten základ, čili $3 \cdot 1 + 1 = 4$)??? Nejprve jsem stále uvažoval tu první možnost, rýsoval jsem si lichoběžníky podle zadání, měřil a porovnával trojúhelník CDP s čtyřúhelníkem MBCP a vycházelo mi (poměr) něco mezi 5 – 5, 25 čili poměr 1:5. Poté mě napadlo, že bych zkusil druhou možnost ($3 \cdot 1 + 1 = 4$), opět jsem si rýsoval (přesněji $|AB| = 12$ cm, $|CD| = 3$ cm, výška lichoběžníka = 10 cm). Čtyřúhelník MBCD jsem rozdělil na tři trojúhelníky (CDP, MCP, MBC), změřil jejich nejvhodnější stranu a k této straně výšku a vypočítal jejich obsahy. MCP a MBC obsahy poté sečtu a porovnáám s CDP. Když budu trochu předvídat vycházely mi tyto hodnoty:

$$\text{CDP}; |CD| = 3 \text{ cm}, \text{ výška} = 3,3333 \text{ cm} \quad - 5 \text{ cm}^2$$

$$\text{MCP}; |MC| = 10,2 \text{ cm}, \text{ výška} = 1,96 \text{ cm} \quad - 10 \text{ cm}^2$$

MBC, $|MB| = 6 \text{ cm}$, výška = 10 cm - 30 cm²

(samozřejmě, že to takhle přesně nemohu změřit, ale jak říkám předvídání).

Z toho vyplývá (a já usuzuji), že poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku MBCP je 1 : 8 · (30 + 10 : 5 = 8).

2.2 Úloha C- II – 2

Text úlohy

Splňují-li reálná čísla a, b, c, d rovnosti

$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1,$$

platí nerovnost

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \leq 3.$$

Dokažte a zjistěte, kdy přitom nastane rovnost.

Vzorové řešení

Z předpokladů plyne $c^2 = a^2$, $d^2 = b^2$, tedy $|c| = |a|$, $|d| = |b|$. Je-li $c = a$ a současně $d = b$, dostaneme postupně pro levou stranu L dokazované nerovnosti

$$\begin{aligned} L &= ab + ac + ad + bc + bd + cd = \\ &= ab + a^2 + ab + ab + b^2 + ab = 1 + 4ab \leq \\ &\leq 1 + 2(a^2 + b^2) = 3, \end{aligned}$$

neboť pro libovolná dvě čísla a, b je $2ab \leq a^2 + b^2$, což plyne ze zřejmé nerovnosti

$a - b^2 \geq 0$. Rovnost pak nastane pouze pro dvě čtveřice $a = b = c = d = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$, neboť

z podmínky $a = b$ a rovnosti $a^2 + b^2 = 1$ plyne $a^2 = \frac{1}{2}$, tj. $a = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Je-li $c = -a$, $d =$

b , je $L = -a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 = 1 < 3$. Podobně v případě $c = a$, $d = -b$ vyjde

$L = a^2 - b^2 \leq 1$, v případě $c = -a$, $d = -b$ dokonce $L = -a^2 - b^2 \leq 0$.

Jiné řešení

Hodnota součtu

$$S = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$$

je zřejmě nezáporná. Pro dvojnásobek levé strany L dokazované nerovnosti proto platí

$$2L = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - S \leq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 6,$$

odkud $L \leq 3$. Rovnost $L = 3$ pak nastane, právě když $S = 0$, tedy právě když čísla a, b, c, d mají tutéž hodnotu, která se ovšem musí rovnat $\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (viz původní řešení).

Kritéria hodnocení: Za úplné řešení žáci získali 6 bodů, 4 body za správné řešení základního případu $c = a, d = b$ (z toho 2 body za vyšetření rovnosti). Zbývající 2 body za vyšetření zbývajících případů $c = -a$ nebo $d = -b$.

Analýza řešitelských postupů

Úlohu správně vyřešila a plný počet bodů získala Helena Pučelíková z Gymnázia Milevsko. Helenino řešení:

$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1$$

$$a^2 = c^2 \qquad b^2 = d^2$$

$$a = \pm c \qquad b = \pm d$$

a) $a = c, b = d$

$$ab + a^2 + ab + ab + b^2 + ab \leq 3$$

$$a^2 + b^2 + 4ab \leq 3$$

$$4ab \leq 2$$

$$ab \leq \frac{1}{2}$$

$$a^2 b^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$b^2(1 - b^2) - \frac{1}{4} \leq 0$$

$$b^2 - b^4 - \frac{1}{4} \leq 0$$

$$4b^4 - 4b^2 + 1 \geq 0$$

$$(2b^2 - 1)^2 \geq 0$$

$$2b^2 = 1$$

$$b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) $a = c, b = -d$

$$ab + a^2 - ab + ab - b^2 - ab \leq 3$$

$$a^2 - b^2 \leq 3 \rightarrow b^2 \geq -1$$

nelze

c) $a = -c, b = d$

$$ab - a^2 + ab - ab + b^2 - ab \leq 3$$

nelze

$$-a^2 + b^2 \leq 3 \rightarrow b^2 \leq 2$$

$$d) \quad a = -c, b = -d$$

$$-a^2 - b^2 \leq 3$$

nelze

$$-(a^2 + b^2) \leq 3$$

Rovnost tedy nastane pouze v případě $a = b = c = d = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Statistika úspěšnosti v řešení úlohy C- II – 2

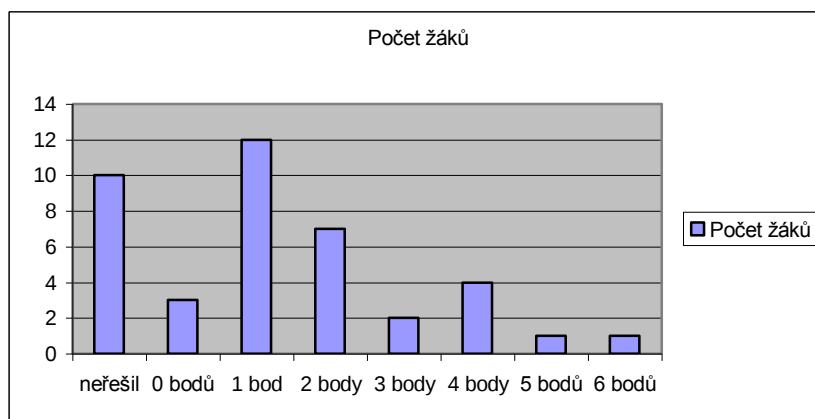
Plného počtu bodů dosáhl jediný řešitel (2,50%). Pět bodů obdržel jeden žák (2,50%).

Ten uvedl pouze řešení $a = b = c = d = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Čtyři body získali čtyři studenti (10%). Ti

správně vyřešili základní případ $c = a, d = b$. V rozmezí tří až jednoho bodu bylo ohodnoceno 21 žáků (52,50%). Nula bodů získalo 13 řešitelů (32,50%). Z toho 10 studentů (25%) tuto úlohu vůbec neřešilo.

Ohodnocení	Počet žáků	Relativní četnost (%)
neřešil	10	25,00
0 bodů	3	7,50
1 bod	12	30,00
2 body	7	17,50
3 body	2	5,00
4 body	4	10,00
5 bodů	1	2,50
6 bodů	1	2,50

Tabulka 3: Statistika úspěšnosti řešení úlohy C-II-2



Obr. 6: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze C-II-2

Rozbor chyb

Při řešení této úlohy se žáci dopouštěli stejných chyb:

1) Z rovnice $a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1$ vyjádřili vztahy $c^2 = a^2$, $d^2 = b^2$, odtud $a = c$, $b = d$. Žáci si neuvědomili, že platí $|c| = |a|$, $|d| = |b|$.

2) Studenti často vyjadřovali vztahy pro a , b , c , d . Například $b = \sqrt{1-a^2}$, $d = \sqrt{1-a^2}$.

Když poté dosadili do nerovnice, tak se jim nepovedlo ji vypočítat.

3) Žáci řešili nerovnici, kdy $a = c$, $b = d$. Pokud se dopracovali ke správnému výsledku, tak nevyšetřili ostatní tři případy:

a) $a = c$, $b = -d$

b) $a = -c$, $b = d$

c) $a = -c$, $b = -d$.

Kuriozity

Vyskytl se řešitel, který si s úkolem nevěděl rady. O své neschopnosti vyřešit úlohu píše „geniální“ úvahy. Podobné „perly“ můžeme najít u každého příkladu. Student napsal:

Opravdu hezký a velmi milý příklad, avšak v tuto chvíli nejsem dostatečně vědomostně vybaven, abych ho vyřešil. Ale jednou (třeba až mi dáte řešení a já si ho přečtu) mu dám jistě na frak a jistě i jeho kolegům podobným příkladům. Už mě nebudou zlobit, už se nad nimi nebudu hodiny trápit, jako teď tady. Prostě je budu chápat, budu jim rozumět, ale k tomu musím ještě trochu zapracovat...

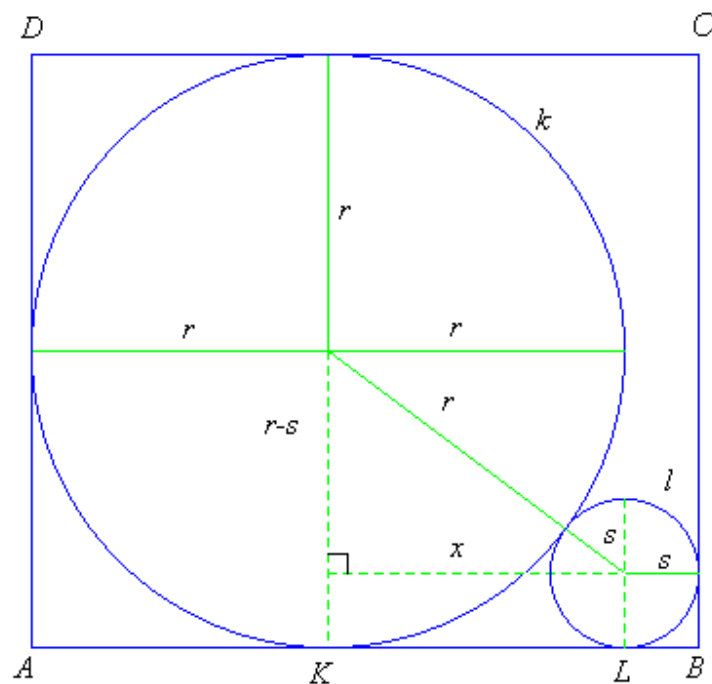
Až ta ona chvíle přijde, tak potom třeba budu taky sedět jako vy, tam za tím notebookem (nebo co to je) a budu sledovat, co já vím cca 50 studentů, jak se jim hulí (kouří) z hlavy.

...no počkám si na to, už se moc a moc těším.

2.3 Úloha C- II - 3

Text úlohy

Kružnice k , l s vnějším dotykem leží obě v obdélníku $ABCD$, jehož obsah je 72 cm^2 . Kružnice k se přitom dotýká stran CD , DA a AB , zatímco kružnice l se dotýká stran AB a BC . Určete poloměry kružnic k a l , jestliže poloměr kružnice k je v centimetrech vyjádřen celým číslem.



Obr. 7

Vzorové řešení (upraveno autorkou diplomové práce)

Označme r, s poloměry kružnic k, l (v centimetrech) a K, L jejich body dotyku se stranou AB (Obr. 7). Je pak $|AK|=r, |LB|=s$, a jak snadno spočteme z Pythagorovy věty, platí

$$|KL| = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2} = 2\sqrt{rs}.$$

Pro délky stran obdélníka $ABCD$ tedy platí:

$$\begin{aligned} |AD| &= 2r \\ |AB| &= r + 2\sqrt{rs} + s = (\sqrt{r} + \sqrt{s})^2. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do vzorce pro výpočet obsahu obdélníka $ABCD$, pak dostaneme

$$2r (\sqrt{r} + \sqrt{s})^2 = 72,$$

po zkrácení dvěma a odmocnění $r + \sqrt{rs} = 6$. Odtud plyne, že $r < 6$, a pro velikost poloměru s dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned} rs &= 6 - r^2 \\ s &= \frac{6 - r^2}{r}. \end{aligned}$$

Z podmínek úlohy dále plyne, že s nemůže být větší než r , protože jinak by kružnice l neležela v daném obdélníku, a protože i kružnice k musí ležet v daném obdélníku, musí být

$$|AB| \geq |AD| = 2r.$$

Sloučením nerovnosti $s \leq r$ a vztahu $s = \frac{6-r^2}{r}$ dostaneme podmínku:

$$36 - 12r + r^2 \leq r^2, \text{ tj. } r \geq 3.$$

Z nerovnosti $|AB| \geq 2r$ pak plyne $72 = |AB| \cdot |AD| \geq 4r^2$, nebo-li $r^2 \leq 18$, což pro celočíselné r znamená, že $r \leq 4$. Pro poloměr r nám tak vychází jen dvě možnosti, $r \in \{3, 4\}$, odpovídající hodnoty poloměru s vypočteme ze vztahu $s = \frac{6-r^2}{r}$. Úloha má právě dvě řešení:

$$r = s = 3 \text{ cm}$$

$$r = 4 \text{ cm}, s = 1 \text{ cm}.$$

Kritéria hodnocení: Za úplné řešení se doporučovalo udělit 6 bodů bez ohledu na to, zda řešitel vymezil jediné dvě možnosti výpočtem, nebo z pěti možností postupně vyloučil ty, které nevyhovují daným podmínkám. Za každé nesprávné řešení (třeba když žák uvede jako možný výsledek $r = 5, s = 1/5$) byl strhnut bod.

Moje řešení

Stejně jako v předchozím řešení jsem zjistila $r \cdot \sqrt{r} + \sqrt{s}^2 = 36$.

Nyní jsem za r, s volila čísla od 1 do 10 a zjišťovala, zda čísla doplněné za r, s splňují rovnici $r \cdot \sqrt{r} + \sqrt{s}^2 = 36$. Vše jsem zapsala do tabulky:

r	s	r	s	r	s	r	s
1	1	2	1	3	1	4	1
		2	2	3	2		
				3	3		

Tabulka 4

Dále v tabulce nemělo smysl pokračovat, protože poloměr kružnice r nemůže být nikdy menší než poloměr kružnice s . Všem podmínkám vyhovovaly jen dvě řešení: $r = 3$ cm, $s = 4$ cm a $r = s = 3$ cm.

Analýza řešitelských postupů

Nikdo nezískal plný počet bodů. Žáci sice měli dobře postup, ale uvedli pouze jedno ze dvou správných řešení. Této chyby se dopustil i Vojtěch Wagner z Gymnázia a Střední odborné školy ekonomické z Vimperku. Vojtovo řešení:

- 1) Zjistím rozměry obdélníka, jehož obsah je $S = 72 \text{ cm}^2$ (strany musí být v celých číslech, neboť poloměr k je vyjádřen celým číslem).³

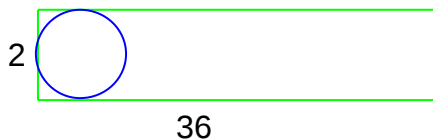
$$72 = 72 \cdot 1 = 9 \cdot 8 = 6 \cdot 12 = 2 \cdot 36 = 3 \cdot 24 = 18 \cdot 4$$

- 2) Obdélník může mít rozměry pouze takové, pro něž platí, že polovina kratší strany je celé číslo: $9 \cdot 8$, $6 \cdot 12$, $2 \cdot 36$, $18 \cdot 4$.

Možné varianty obdélníka:

- A) $2 \cdot 36$

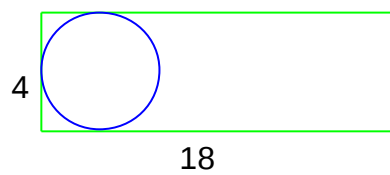
$r_k = 1$ nemůže být (kružnice l se nebude dotýkat pouze dvou stran a kružnice)



- B) $4 \cdot 18$

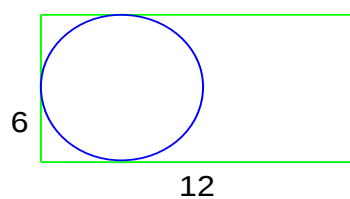
$r_k = 2$ nemůže být (kružnice l se nebude dotýkat pouze dvou stran a kružnice)

³ Zde žák udělal chybu. Strana delší teoreticky může být i zlomek, ale to nám pro daná čísla naštěstí nenastane, protože pro $b = 10$ bude $a = 7,2$ (menší než b). Ze zadání plyne, že pouze strana b je sudé číslo, neboť $b = 2r$ a $r \in \mathbb{N}$.



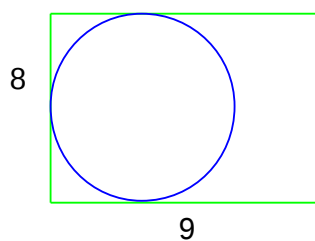
C) 6·12

$r_k = 3$ do obdélníka se vejdou přesně dvě stejné kružnice, nemůže být⁴



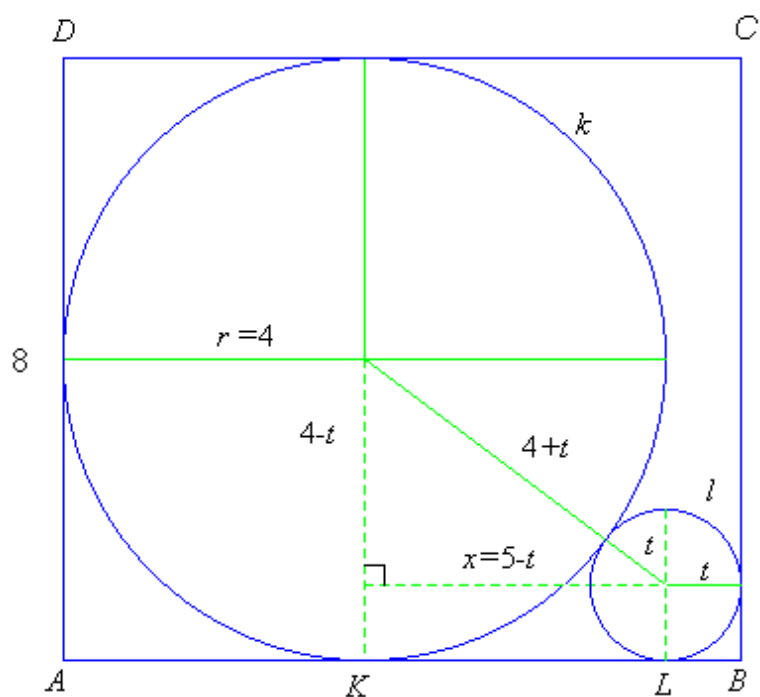
D) 8·9

$r_k = 4$ jediné možné řešení



⁴ Vojta se dopustil další chyby. Řešením mohou být dvě kružnice, mající shodné poloměry.

3) Zjistím poloměr kružnice l pomocí Pythagorovy věty



Obr. 8

$$r_l = t$$

$$4+t^2 = 4-t^2 + (5-t)^2$$

$$16+8t+t^2 = 16-8t+t^2 + 25-10t+t^2$$

$$t^2 - 26t + 25 = 0$$

$$t-25 \quad t-1 = 0$$

$$t = 1 \text{ cm}$$

Statistika úspěšnosti v řešení úlohy C- II – 3

V této úloze žáci získali tři body, jeden bod nebo nula bodů.

Žádný žák nedosáhl plného počtu bodů. Důvodem je, že žáci neuvedli obě správná řešení. Proto také dvacet dva žáků (55%) získalo za tuto úlohu 3 body. Téměř všichni z nich (až na dvě výjimky) uvedli jako správné řešení variantu $r = 4$ cm, $s = 1$ cm.

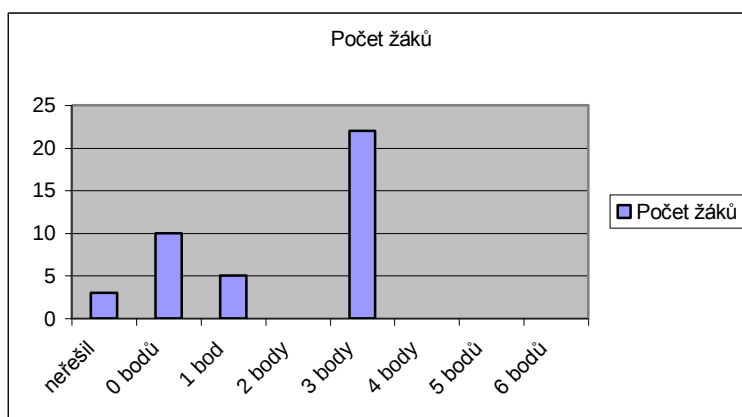
Žáky nenapadlo, že poloměry obou kružnic se mohou rovnat.

Jeden bod obdrželo pět žáků (12,5%). Získali ho například za to, že zjistili jeden poloměr kružnice, ten našli rozkladem čísla 72. Druhý poloměr už nedokázali dopočítat. Nenapadlo je použít Pythagorovu větu.

Nula body bylo ohodnoceno třináct žáků (32,5%). Z toho tři žáci (7,5%) tuto úlohu vůbec neřešili.

Ohodnocení	Počet žáků	Relativní četnost (%)
neřešil	3	7,50
0 bodů	10	25,00
1 bod	5	12,50
2 body	0	0,00
3 body	22	55,00
4 body	0	0,00
5 bodů	0	0,00
6 bodů	0	0,00

Tabulka 5: Statistika úspěšnosti řešení úlohy C-II-3



Obr. 9: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze C-II-3

Rozbor chyb

Jak vidíme z tabulky 5, nikdo nedosáhl více než tří bodů z možných šesti, avšak 55% studentů těchto tří bodů dosáhlo. Soutěžící většinou vůbec nedospěli k řešení dvou shodných kružnic v obdélníku o rozměrech 6 cm a 12 cm. Jakmile objevili první vyhovující situaci, tzn. $r = 4$ cm, $s = 1$ cm, přestali hledat další možné případy.

Tři žáky napadlo, že by se poloměry mohly rovnat. Dané řešení však zavrhl, protože si text „*kružnice l se dotýká stran AB a BC* “ vyložili ve smyslu, že se kružnice l nemůže dotýkat třetí strany. Jako příklad vezměme řešení Jana Matějky z Gymnázia Jírovcova. Je to jeden z žáků, který přišel na řešení $k = l = 3$ cm. Jan píše :

„ Zde je možné polemizovat, jestli můžeme připustit řešení, kde se l dotýká $|CD|$. To v zadání nebylo.“

Žákovské řešení lze podle zvolené metody rozdělit do dvou základních skupin:

a) početní přístup

Nejprve zjistili, která dvě čísla dají součin 72. Tím zjistili jeden poloměr, protože strana $|AD|$ obdélníka $ABCD$ je rovna dvojnásobku poloměru jedné z kružnic. Druhý poloměr pak dopočítávali pomocí Pythagorovy věty.

b) řešení rýsováním

Stejně jako u předešlého způsobu řešení zjišťovali, která čísla jim dávají v součinu číslo 72. Poloměr jedné z kružnic získali ze vztahu $|AD| = 2r$. Druhou kružnici pak zkoušeli dorýsovat tak, aby se daná kružnice dotýkala strany $|AB|$ a první kružnice.

Pět žáků si vypsal všechny možné kombinace, které dávají součin 72. Vypočítali poloměr jedné z kružnic, kde $r = \frac{|AD|}{2}$. Druhý poloměr už nezjistili – nedokázali uplatnit Pythagorovu větu. V náčrtku nebyl vyznačen pravý úhel, který mohl k výpočtu inspirovat.

Jeden student uvedl jeden ze správných výsledků ($k = 4$ cm, $l = 1$ cm). Bohužel však neuvedl postup řešení, čímž se připravil o značnou část bodů.

Kuriozity

Do Kuriozit jsem zařadila práci studenta, který počítal namísto poloměrů kružnic jejich poměry. Žák si úlohu řádně nepromyslel, protože jinak by nemusel uvažovat případy, kdy jeden z poloměrů není celé číslo. Studentovo řešení:

Jestliže poloměr kružnice k je vyjádřen celým číslem, tak i strana $|AD|$ bude mít hodnotu celého čísla (vlastně $|AD| =$ průměru k). Známe-li obsah obdélníka ABCD (72 cm^2), snadno dopočítáme i stranu AB. Za $|AD|$ budu postupně dosazovat celá čísla (1, 2, 3, 4, ..., 72) a ke každému z těchto čísel dopočtu druhé tak, aby jejich součin byl 72. Když dosadím (za $|AD|$) čísla 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72, tak velikost strany bude také celé číslo a z toho budu vycházet. Samozřejmě musím brát v úvahu i jiná čísla – např. 15 (dosadím za $|AD|$), při kterém bude $|AB| = 4,8$, ale teď to nechám stranou. Když zkusím naryšovat obdélník tak, aby strany AD i AB byly (měly hodnotu) celé číslo, zjistím, že jediná možnost, kde mi do takového obdélníka půjdou vepsat kružnice podle daných kritérií je $|AD|=8 \text{ cm}$ a $|AB|=9 \text{ cm}$. Jinou možnost nelze. Zkusím naryšovat...

Obdélník ABCD kdy $|AD|=8 \text{ cm}$ a $|AB|=9 \text{ cm}$, $k(S_1, r=4 \text{ cm})$ Když se teď podívám na obrázek a pořádně ho přeměřím, zjistím, že jediná možnost, jak vepsat kružnici l , aby splňovala daná kritéria, je když $l(S_2, r=1 \text{ cm})$ - prostě poloměr kružnice l musí být 1 cm (už za předpokladu, že mi tak krásně vyjde poměr poloměrů 4:1).

Ted' se ještě vrátím k těm možnostem s desetinnými čísly (např. 15 a 4,8), ale při žádné další možnosti není možno napsat kružnice podle zadání. A ještě je možnost $|AD|=7 \text{ cm}$, přičemž by velikost $|AB|$ byla na mnoho desetinných míst, což předpokládám, že byste mi sem nedali. A ještě si teď uvědomuji, že poloměr má být celé číslo, tudíž $|AD|=7 \text{ cm}$ nelze dosadit. Odpadá i možnost $|AD|=3 \text{ cm}$, $|AD|=9 \text{ cm}$ atd...průměr kružnice k musí být zkrátka sudý.

Z toho všeho usuzuji, že jediné možné řešení – a to právě to, které jsem narysoval

($|AD| = 8 \text{ cm}$, $|AB| = 9 \text{ cm}$)...*tedy poměr poloměrů kružnic k a l je 4:1.*

2.4 Úloha C- II – 4

Text úlohy

Najděte všechny dvojice prvočísel p a q , pro které platí

$$p + q^2 = q + 145p^2.$$

Vzorové řešení (upraveno autorkou diplomové práce)

Pro prvočísla p , q má platit: $q(q-1) = p(145p-1)$ - tento vztah dostaneme úpravou rovnice $p + q^2 = q + 145p^2$ - takže prvočíslu p dělí $q(q-1)$. Prvočíslu p nemůže dělit prvočíslu q , protože by to znamenalo $p = q$, a tedy $145p = p$, což nejde. Proto p dělí $q-1$, tj. $q-1 = kp$ pro nějaké k přirozené. Po dosazení do daného vztahu (za $q = kp+1$) dostaneme podmínku

$$p = \frac{k+1}{145-k^2}.$$

Vidíme, že jmenovatel zlomku na pravé straně je kladný jedině pro $k \leq 12$, zároveň však pro $k \leq 11$ je jeho číselník menší než jmenovatel: $k+1 \leq 12 < 24 \leq 145-k^2$. Pouze pro $k = 12$ tak vyjde p přirozené a prvočíslu, $p = 13$. Je pak $q = 157$, což je také prvočíslu. Úloha má jediné řešení.

Kritéria hodnocení: Za úplné řešení se doporučovalo udělit 6 bodů, z toho 4 body za úvahu o dělitelnosti, jež vede ke vztahu $q = kp+1$.

Analýza řešitelských postupů

Plným počtem bodů byl ohodnocen jediný žák – a to Jan Matějka z Gymnázia Jírovcova. Všichni ostatní žáci získali nula bodů. Jan při řešení vycházel z vlastnosti přirozených čísel.

Nejprve si Jan rovnici upravil

$$\begin{aligned}p^2 + q^2 &= q + 145p^2 \\q^2 - q &= 145p^2 - p \\q(q-1) &= p(145p-1).\end{aligned}$$

Poté se zabýval dělitelností. Došel ke dvěma závěrům:

$$\begin{aligned}q \mid p(145p-1) &\rightarrow q \mid 145p-1 \\p \mid q(q-1) &\rightarrow p \mid q-1.\end{aligned}$$

Dále pracoval se druhou rovnicí. Z ní je jednodušší si vyjádřit vztah mezi p a q . Z druhé rovnice tedy vyplývá : $q-1 = kp \rightarrow q = kp+1$.

Po dosazení do původní rovnice za $q = kp+1$ dostáváme:

$$\begin{aligned}(kp+1)kp &= p(145p-1) \quad | : p \\k^2p + k &= 145p-1 \\145p - k^2p &= k+1 \\p &= \frac{k+1}{145-k^2}.\end{aligned}$$

Dále Jan řeší 2 podmínky, které musí být splněny:

$$1) \forall k \in N$$

$$145 - k^2 > 0$$

$$k^2 - 145 < 0$$

$$k_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{580}}{2} \doteq 12,04$$

$$k < 12$$

$$2)$$

$$p \in N$$

$$\frac{k+1}{145-k^2} \geq 1$$

$$k+1 \geq 145-k^2$$

$$k^2 + k - 144 \geq 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+576}}{2}$$

$$k_1 \doteq -12,51$$

$$k_2 \doteq 11,51$$

$$k \geq 12$$

Obě podmínky budou platit, jestliže $k = 12$. Dále ze vztahu pro p Jan vypočítal jeho hodnotu. A to $p = 13$. Poté už bylo snadné určit druhé prvočíslo. Řešením jsou tedy prvočísla: $p = 13$, $q = 157$.

Moje řešení

Můj postup je ze začátku stejný jako ve vzorovém řešení. Stejnou cestou jsem získala

vztah pro p : $p = \frac{k+1}{145-k^2}$.

Aby byl jmenovatel kladný, tak musí být $k \leq 12$. Další postup spočíval v metodě pokusu a omylu. Do tabulky jsem vypsala čísla za q (čísla 1-12) a počítala hodnoty p .

k	p
1	NŘ
2	NŘ
3	NŘ
4	NŘ
5	NŘ
6	NŘ
7	NŘ
8	NŘ
9	NŘ
10	NŘ
11	NŘ
12	13

Tabulka 6

Jelikož znám hodnotu p , tak už snadno dopočtu hodnotu q . Řešením je jediná dvojice prvočísel a to: $p = 13$, $q = 157$.

Statistika úspěšnosti v řešení úlohy C- II – 4

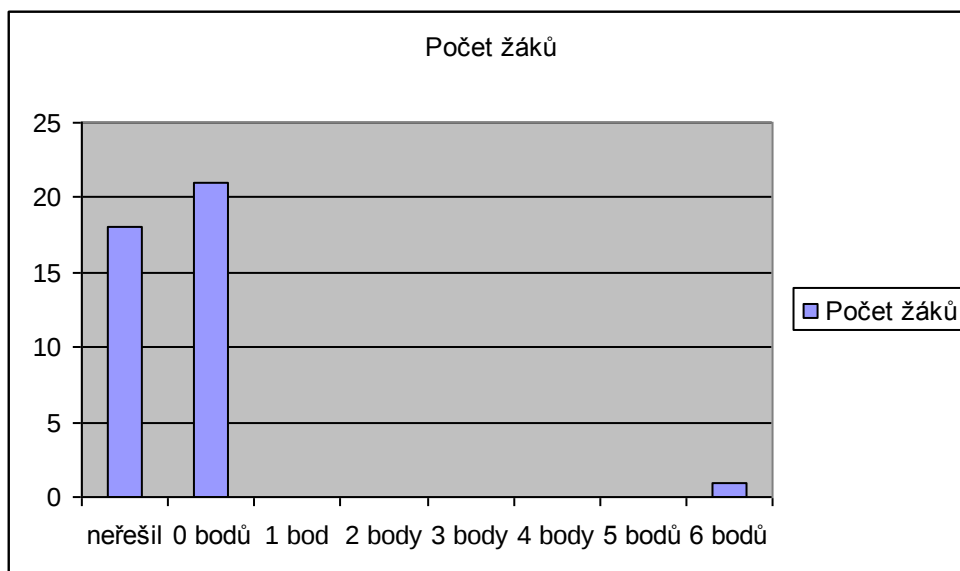
Ze čtyřiceti studentů pouze jediný získal plný počet bodů. Zbývajících 39 žáků (97,50%) získalo 0 bodů.

Domnívám se, že důvody neúspěchu mohou být dva:

1. Jednalo se o poslední úlohu a žáci nemuseli mít dostatek času na její řešení.
2. Neznalost prvočísel.

Ohodnocení	Počet žáků	Relativní četnost (%)
neřešil	18	45,00
0 bodů	21	52,50
1 bod	0	0,00
2 body	0	0,00
3 body	0	0,00
4 body	0	0,00
5 bodů	0	0,00
6 bodů	1	2,50

Tabulka 7: Statistika úspěšnosti řešení úlohy C-II-4



Obr. 10: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze C-II-4

Rozbor chyb

Chyby, kterých se žáci dopouštěly, byly strategické.

Tři žáci sice dobře upravili rovnici do tvaru $q(q-1) = p(145p-1)$, ale už nebyli schopni vyjádřit vztah mezi prvočísly p , q ($q = kp + 1$). Jeden z těchto žáků (Radek Dvořák) do této rovnice pravděpodobně dosazoval prvočísla a vyšlo mu řešení $p = 13$, $q = 157$. Za tento příklad však nezískal žádný bod. Radek odevzdal jen papír, ve kterém bylo napsáno konečné řešení. Chyběl list s pomocnými výsledky, kde bychom viděli Radkův postup. Navíc nedokázal, že neexistují další dvojice prvočísel, které by splňovaly dané podmínky.

Hodně žáků se pokoušelo řešit tento příklad dosazováním libovolných prvočísel do rovnice. To však byla zdlouhavá metoda a žáci velice brzy – po pár nevydařených pokusech od tohoto způsobu řešení upustili.

Jaromír Hoško dokonce napsal: „*Po dosazení několika náhodných prvočísel jsem dospěl k závěru, že taková dvojice prvočísel neexistuje.*“

Častým jevem byla i nevhodně upravená rovnice. Například student Martin provedl pěknou, ale k nalezení řešení nevhodnou úpravu

$$p + q^2 = q + 145p^2$$

$$p + q^2 = q + 144p^2 + p^2$$

$$q^2 - q = (12p)^2 + p^2 - p$$

$$(q-1)q = (12p^2) + p(p+1).^5$$

⁵ Podtržením zdůraznil, že se jedná o dvě, po sobě jdoucí čísla.

Kuriozity

Do této kolonky jsem se rozhodla zařadit práci jednoho z řešitelů. Zde můžeme sami vidět, jak nevhodný je způsob řešení dosazováním libovolných prvočísel do rovnice. Řešení uvádím v nezměněné podobě.

No tak u tohohle vám asi nic nepovím. Je mi líto, ale skutečně tohle nevyřeším. Jediné, co mě napadlo, bylo dosazovat si prvočísla za p (od 1 až ale do 61 nebo tak nějak) tímto způsobem:

$$p=1 \Rightarrow 1+q^2 = q+145$$

ted' se pokusím dosazovat za q takové prvočísla, aby platila nerovnost, ale žádné zde není. Za předpokladu, že q musí být prvočísla tahle rovnice nemá řešení...Zkouším za p dosadit 2 a stejným způsobem se snažím najít prvočísla, které dosadím za q , aby platila rovnost. Opět nic. Takhle to zkouším (jak už jsem říkal ale až do 61) a žádnou dvojici, která by splňovala kritéria jsem neobjevil. Možná, kdybych od 61 pokračoval dál, něco bych objevil, ale už na to nemám trpělivost. Také mě napadá, že by tento příklad neměl žádné řešení (tedy neexistují dvě prvočísla p a q , pro která by platilo $p+q^2 = q+145p^2$), ale to myslím, že nikoliv. Proč byste to sem dávali. Nějaké řešení jistě budou, ale bohužel já na ně v tuto chvíli nepřijdu. Jen mě ještě napadlo, že $p < q$ (záporná prvočísla neexistují). A to z toho důvodu, že když p násobím 145, tak aby platila rovnost, p musí být menší než q ($p < q$).

2.5 Statistika úspěšnosti jednotlivých úloh C-II-1-4

Jak vidíme z celkového přehledu výsledků (tabulka 8), byla úspěšnost studentů v geometrických úlohách C-II-1 a C-II-3 relativně dobrá. Výrazně nejhorší výsledky vidíme v úloze C-II-4, kde se žákům většinou nepodařilo ani sestavit příslušnou diofantovskou rovnici.

	1. úloha		2. úloha		3. úloha		4. úloha	
Ohodnocení	Absolutní četnost	Relativní četnost (%)	Absolutní četnost	Relativní četnost (%)	Absolutní četnost	Relativní četnost (%)	Absolutní četnost	Relativní četnost (%)
neřešil	7	17,50	10	25,00	3	7,50	18	45,00
0 bodů	14	35,00	3	7,50	10	25,00	21	52,50
1 bod	7	17,50	12	30,00	5	12,50	0	0,00
2 body	0	0,00	7	17,50	0	0,00	0	0,00
3 body	4	10,00	2	5,00	22	55,00	0	0,00
4 body	0	0,00	4	10,00	0	0,00	0	0,00
5 bodů	2	5,00	1	2,50	0	0,00	0	0,00
6 bodů	6	15,00	1	2,50	0	0,00	1	2,50

Tabulka 8 : Statistika úspěšnosti řešení úloh C-II-1-4

3 Rozbor řešení úloh v kategorii B

3.1 Úloha B-II-1

Text úlohy

Určete všechny dvojice prvočísel p a q , pro něž platí

$$p + q^2 = q + p^3.$$

Vzorové řešení

Danou rovnici upravíme na tvar

$$q(q-1) = p(p-1)(p+1).$$

Odtud plyne nerovnost $p < q$ (kdyby totiž bylo $p \geq q$, potom i $p-1 \geq q-1 > 0$, a protože $p+1 > 1$, bylo by $p(p-1)(p+1) > q(q-1)$) a také to, že q dělí součin $(p-1)(p+1)$.

Protože q je prvočíslo, musí platit alespoň jeden ze vztahů $q|p$, $q|(p-1)$, $q|(p+1)$.

Vzhledem k podmínkám $p < q$ a $q > 1$ nemůže q dělit p , ani $p-1$, a proto $q|p+1$.

Jediná dvě prvočísla lišící se o 1 jsou 2 a 3. Proto $p = 2$ a $q = 3$. Zkouškou ověříme, že skutečně platí: $2 + 3^2 = 3 + 2^2$.

Poznámka:

Nerovnost $p < q$ se dá dokázat i následující úvahou:

Zřejmě $p \neq q$. Prvočísla p a q jsou tedy nesoudělná, a protože $p \mid q(q-1)$, musí platit $p \mid (q-1)$ a odtud $p \leq q-1$.

Kritéria hodnocení: Za úplné řešení se doporučovalo udělit 6 bodů. Za zjištění $p < q$ 1 bod; 2 body za důkaz $q \mid p+1$ a další 2 body za $q = p+1$ z toho vyplývající $p = 2$, $q = 3$. Jeden bod za ověření, že dvojice $p = 2$, $q = 3$ je skutečně řešením.

Analýza řešitelských postupů

Dva žáci vyřešili tento příklad správně. Nebyli však ohodnoceni plným počtem bodů. Jeden bod jim byl pravděpodobně strhnut za to, že neověřili, zda dvojice $p = 2, q = 3$ je skutečně řešením.

První řešitelkou je Martina Vaváčková z Gymnázia Pierra de Coubertina v Táboře. Příklad rozdělila na dva případy – a) p je sudé prvočíslo, b) p, q jsou lichá prvočísla. Martina nejdříve rovnici upravila na tvar

$$q(q-1) = p(p-1)(p+1).$$

Odtud také plyne nerovnost $p < q$. V řešení Martina rozlišila dvě situace:

- a) Nejprve si za p zvolila 2 – jediné sudé prvočíslo a dosadila do rovnice

$$q(q-1) = p(p-1)(p+1)$$

$$q(q-1) = 2(2-1)(2+1) = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$$

Rovnice $q(q-1) = 6$ má jediné řešení $q = 3$. Dostáváme tedy první dvojici prvočísel $p = 2, q = 3$.

- b) Dále předpokládala, že p, q jsou lichá prvočísla.

Rovnici $q(q-1) = p(p-1)(p+1)$ vydělila výrazem $p(p-1)$ a dostala rovnici

$$\frac{q(q-1)}{p(p-1)} = p+1. \quad (q > p)$$

Odtud vyvodila následující vztahy:

$p-1, q-1$ jsou sudá čísla

p nedělí q

$p-1$ nedělí q .

Nutně tedy $p|q-1$ a $p-1|q-1$.

Po dělení nám na levé straně zůstane výraz qx , kde x je to, co "zbylo" z $q-1$.

Platí tedy $qx = p+1$. Protože $q > p$, musí $x = 1$. Kdyby $x > 1$, tak výraz na levé straně

rovnice $qx = p+1$ by byl mnohem větší než na pravé straně a rovnice by neplatila.

Z této úvahy tedy vyplývá že $q = p+1$. Neexistují žádná dvě po sobě jdoucí lichá prvočísla, která by se lišila o jedničku.

Existuje tedy jediná dvojice prvočísel, která splňuje dané předpoklady $p = 2, q = 3$.

Odlišnou strategii zvolil Miroslav Vacka z Gymnázia Jírovcova v Českých Budějovicích. S podobným postupem jsem se u žádného z řešitelů nesetkala. Jeho řešení uvádím v nezměněné podobě.

Miroslav nejprve vyzkoušel kombinaci prvočísel menších než 10 – vyšla mu jediná dvojice prvočísel $p = 2, q = 3$.

Poté převedl rovnici na tvar:

$$q^2 - q = p^3 - p \quad (q > p). \quad (1)$$

Uvědomil si, že všechna prvočísla větší než 10 musí končit čísly 1, 3, 7 nebo 9. Když tato prvočísla dosadíme do rovnice, tak se musí obě strany rovnat. A bude platit:

- a) jednotky u prvočísel budou stejné
- b) prvočísla se budou lišit jen na pozici desítek, stovek, tisícovek,....

Podle těchto dvou kritérií Miroslav zhotovil následující tabulku:

prvočísla (pozice jednotek)	$q^2 - q$ (pozice jednotek)	$p^3 - p$ (pozice jednotek)
...1	...0	...0
...3	...6	...4
...7	...2	...6
...9	...2	...0

Z tabulky vidíme, že rovnici by vyhovovala pouze tato prvočísla:

q (pozice jednotek)	p (pozice jednotek)
...3	...7
...1	...9
...1	...1

Dosadíme-li tato prvočísla do rovnice (1), tak zjistíme, že se nám pravá a levá strana nebudou rovnat.

Ukažme si to na příkladu. V souladu s tabulkou dosadíme za $q = 13, p = 17$. To jsou nejbližší dvě prvočísla a je zde šance, že by se nám obě strany rovnice mohly rovnat.

$$\begin{aligned}
 q^2 - q &= p^3 - p \\
 13^2 - 13 &= 17^3 - 17 \\
 156 &\neq 4896
 \end{aligned}$$

Vidíme, že prvočísla $q=13, p=17$ nejsou řešením. Řešením není ani žádná dvojice prvočísel větších než 10. Důvodem je, že rozdíly mezi prvočíslly budou tak velké, že se strany rovnice nebudou nikdy rovnat.

Jediným řešením je tedy dvojice prvočísel $p=2, q=3$.

Statistika úspěšnosti v řešení úlohy B-II-1

Žádný z řešitelů nebyl ohodnocen plným počtem bodů.

Celkem 18 žáků (52,90%) si s příkladem nevědělo rady a nezískalo ani jeden bod.

Velice dobře úlohu vyřešili 2 žáci (5,90%), kteří obdrželi 5 bodů.

Čtyřmi body byli ohodnoceni 3 žáci (8,80%). Například Pavel Šlechta z Gymnázia Česká v Českých Budějovicích ztratil body za to, že do řešení zahrnul možnost $p = q = 1$.

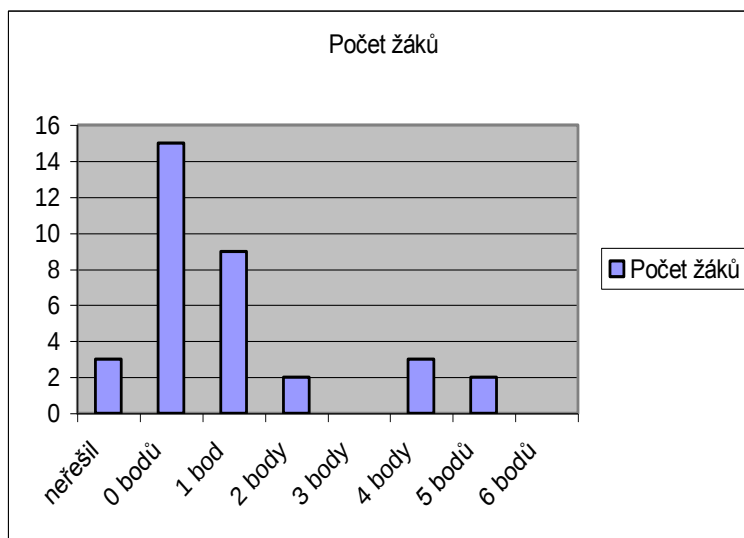
Dva body získali 2 žáci (5,90%). Oba uvedli jako řešení dvojice těchto prvočísel $p, q = 1, 1 = 2, 3$. Prvočísla získali tak, že dosadili do původní rovnice.

Jeden bod obdrželo 9 žáků (26,50%). Bod získali například za to, že zjistili $q > p$.

Příklad se neúspěšně pokusilo řešit 15 žáků (44,10%), získali 0 bodů.

Ohodnocení	Počet žáků	Relativní četnost (%)
neřešil	3	8,80
0 bodů	15	44,10
1 bod	9	26,50
2 body	2	5,90
3 body	0	0,00
4 body	3	8,80
5 bodů	2	5,90
6 bodů	0	0,00

Tabulka 9: Statistika úspěšnosti řešení úlohy B-II-1



Obr. 11: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze B-II-1

Rozbor chyb

Téměř každý žák přišel na řešení $p = 2$, $q = 3$, ale pouze dva žáci (ohodnocení pěti body) vyřešili tuto úlohu uspokojivě.

Žáci se dopouštěli stejných chyb. Jako největší problém se ukázala neznalost prvočísel. Mnoho žáků, kteří získali dva body a méně, jako možné řešení uvedli dvojici prvočísel $p = q = 1$. Jako příklad cituji Ondřeje Vlka z Gymnázia Jírovcova v Českých Budějovicích:

„Pokud vezmeme v potaz, že prvočísla mají maximálně dva přirozené dělitele, to znamená, že mohou mít i méně, potom lze uvažovat za řešení $p = q = 1$.“

Druhý důvod neúspěchu spočívá v tom, že žáci neumí využívat vlastností prvočísel v praxi. Při řešení si neuvědomili, že prvočísla p , q musí být nesoudělná, resp. nepřišli na to, že $p - 1$ nemůže být dělitelem q .

Přestože žáci uvedli jako řešení dvojici prvočísel $p = 2$, $q = 3$, dostali malý počet bodů. Na tato prvočísla přišli náhodou, zkoušeli dosazovat do původní rovnice. Tudíž nedokázali, že neexistuje žádná další dvojice prvočísel, která by rovnici splňovala. Jeden z žáků píše:

„Zkoušel jsem tuto rovnici upravit, abych podle toho mohl zjišťovat prvočísla p a q , ale nějak se mi to nepovedlo. Potom jsem (spíše zkusmo) našel jednu dvojici prvočísel, pro než by to platilo. Touto dvojicí prvočísel je $p = 2$, $q = 3$.“

Kuriozity

Při zpracování úkolu jsem narazila na dva žáky, jejichž špatná úvaha vyústila ve správný výsledek. Oba žáci chybovali v úvaze o dělitelnosti prvočísel.

Jan Hermann z Gymnázia v Českém Krumlově rovnici $p + q^2 = q + p^3$ upravil na tvar $(p+1)p(p-1) = q(q-1)$. Správně přišel na to, že $p|q-1$. Dále píše:

$$q|(p+1)(p-1)p \Rightarrow q|(p+1)(p-1) \Rightarrow q|p+1 \vee q|p-1$$

$$q > p \Rightarrow q \text{ nedělí } p+1 \text{ a } q \text{ nedělí } p-1, \text{ musí platit } \underline{q = p^2 - 1}.$$
⁶

Dosazením do rovnice $(p+1)p(p-1) = q(q-1)$ dostáváme

$$(p+1)p(p-1) = (p^2 - 1)(p^2 - 1 - 1)$$

$$(p+1)p(p-1) - (p^2 - 1)(p^2 - 2) = 0$$

$$(p^2 - 1)(p - p^2 + 2) = 0$$

$$(p^2 - 1)(p - 2)(p + 1) = 0$$

$$(p+1)^2(p-1)(p-2) = 0.$$

Řešením této rovnice je $p \in \{-1, 1, 2\}$. Jediné prvočíslo je tedy 2. Dosazením za $q = p^2 - 1$, dostáváme $q = 3$. Jediným řešením je tedy dvojice prvočísel $p = 2, q = 3$.

⁶ Zde se Jan dopouští chyby. Platí: $q > p \wedge q|p+1$.

Jakub Cvrkal z Gymnázia Jírovce V Českých Budějovicích rovnici $p + q^2 = q + p^3$ upravil na tvar $q(q-1) = p(p^2-1)$. Odtud vyvodil:

a) $q = p$ a zároveň $(q-1) = (p^2-1)$. Což platí jen pro $p = q = 1$. To nevyhovuje.

b) $(p^2-1) = q$ a zároveň $p = q-1$. Dosazením do rovnice dostáváme

$$p = (p^2 - 1) - 1$$

$$p^2 - p - 2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$p_1 = 2$$

$$p_2 = 1$$

Hodnotu q získal z rovnice $(q-1)^2 - 1 = q$.⁷ Za řešení zvolil dvojici prvočísel $p = 2$, $q = 3$.

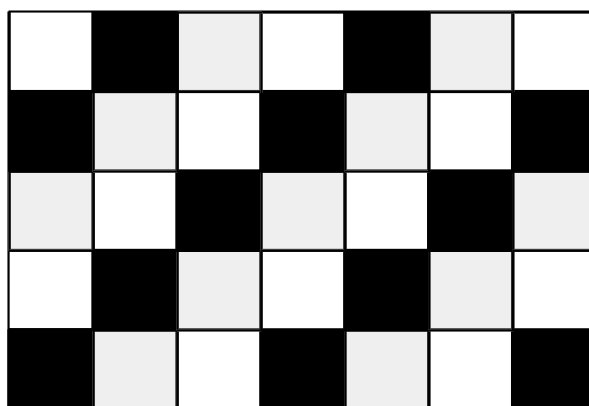
⁷ Jana nenapadlo dosadit do výrazu $p = q - 1$. Vyhnul by se tak počítání další kvadratické rovnice.

3.2 Úloha B-II-2

Text úlohy

Obdélník $ABCD$ se stranami délek $|AB|=2008$ a $|BC|=2006$ je rozdělen na 2008×2006 jednotkových čtverců a ty jsou střídavě obarveny červenou, šedou a bílou barvou podobně jako obdélník na obrázku.

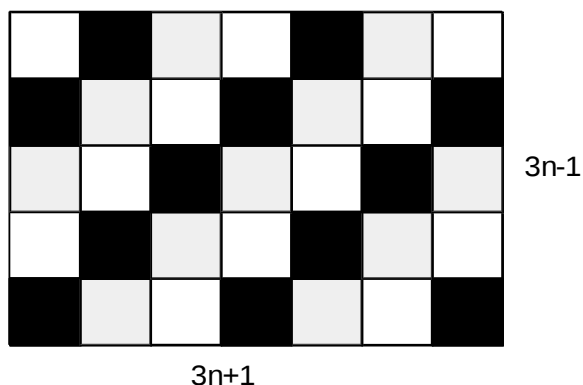
Čtverce při vrcholu A a B jsou černé, čtverce při vrcholech C a D jsou bílé. Určete obsah té části trojúhelníku ABC , která je šedá.



Obr. 12

Vzorové řešení

✓



Obr. 13

Šedá část obdélníku $ABCD$ se stranami délek $3n+1$ a $3n-1$, který má jednotkové čtverce při vrcholech obarveny černou barvou a jednotkové čtverce při dalších dvou vrcholech bílou barvou, je souměrná podle středu obdélníka (stačí si uvědomit souměrnou sdruženost šedých čtverců nejbližších souměrně sdruženým vrcholům A a C , resp. B a D , symetrie na celém obdélníku pak plyne z toho, že šedé čtverce se v každém řádku i sloupci opakují s periodou 3). Proto je šedá část trojúhelníku ABC shodná s šedou částí trojúhelníku CDA , a tedy obsah šedé části trojúhelníku ABC je roven polovině obsahu šedé části $ABCD$.

Obdélník $ABCD$ rozdělme na obdélník se stranami délek $3n$ a $3n-1$ a pás $3n-1$ jednotkových čtverců, v němž jeden koncový čtverec je černý a druhý bílý. V obdélníku $3n \times (3n-1)$ je počet černých, bílých i šedých jednotkových čtverců stejný, takže šedých je $n \times (3n-1)$. Kdybychom k pásu délky $3n-1$ přidali jeden šedý čtverec, byl by tam rovněž stejný počet n černých, bílých a šedých čtverců; v pásu délky $3n-1$ je tedy $n-1$ šedých čtverců. Šedých čtverců v obdélníku $ABCD$ je $n \times (3n-1) + n-1 = 3n^2 - 1$ a šedá část trojúhelníku ABC má obsah $S = \frac{1}{2}(3n^2 - 1)$; pro obdélník 2008×2006 je $n = 669$,

takže

$$S = \frac{1}{2}(3n^2 - 1) = \frac{1}{2}(3 \cdot 669^2 - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot 2007^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4028049}{3} - 1\right) = \frac{4028046}{6} = \underline{671341}$$

Poznámka

Obsah šedé části trojúhelníku ABC můžeme určit i tak, že po diagonálách postupně spočítáme šedé čtverce, jež jsou celé obsaženy v trojúhelníku ABC , a přičteme polovinu počtu čtverců v prostřední šedé diagonále obdélníka $ABCD$, která je souměrná podle středu obdélníka, takže její část ležící v trojúhelníku ABC je shodná s částí ležící v trojúhelníku CDA .

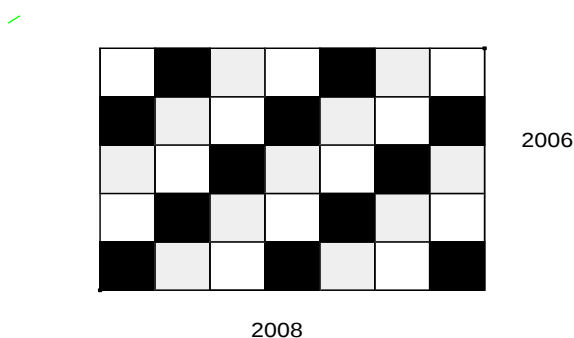
$$S = 3 + 6 + \dots\dots\dots 2004 + \frac{1}{2} \cdot 2006 = 334 \cdot 2007 + 1003 = \underline{671341}.$$

Kritéria hodnocení: Za úplné řešení se doporučovalo udělit 6 bodů, z toho 3 body za důkaz toho, že obsah šedé části trojúhelníku ABC je roven polovině obsahu šedé části obdélníku $ABCD$. Nestačí argumentovat shodností trojúhelníků ABC a CDA , například obsahy jejich bílých částí nejsou stejné. Další tři body byly uděleny za správný výpočet obsahu.

Analýza řešitelských postupů

Při zpracování této úlohy jsem se setkala se třemi správnými způsoby řešení.

Petr Petrouš z Gymnázia Jírovce v Českých Budějovicích přišel na řešení, které jsem u žádného z dalších řešitelů nezaznamenala. Jeho úvaha stojí na výpočtu obsahu obdélníka $ABCD$ a uvědomění si, že šedých čtverců je méně než černých a bílých. Petrovo řešení uvádím beze změny.



Obr. 14

- 1) Obdélník je o 2 čtverečky širší než jeho výška a jelikož v bodě A je černý a v bodě C je bílý čtvereček, po úhlopříčce (po celé délce) je rovnoměrně dělen jeden šikmý pruh šedých čtverců.
- 2) Čím větší část čtverečků (obsah) zůstává v trojúhelníku ABC u bodu A , tím menší zůstává u bodu $C \Rightarrow$ dělení celého obdélníka z hlediska šedých čtverečků je přesně na polovinu.
- 3) Obsah celého obdélníka je

$$S = 2006 \cdot 2008$$

$$S = 4028048.$$

Toto číslo však není dělitelné třemi a z rohových (nešedých) čtverečků je logické, že šedých bude o 1 méně než bílých a černých.

$$4) \frac{S}{3} = 1342682 \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{array}{l} 1\,342\,682 \text{ šedých} \\ 1\,342\,683 \text{ bílých} \\ 1\,342\,683 \text{ černých} \end{array}$$

5) Počet šedých čtverečků je číslo dělitelné dvěma a v prostředku se dělí čtverečky přesně napůl $\Rightarrow \frac{1342682}{2} = \underline{671341}$.

Obsah šedé části trojúhelníku ABC je 671341.

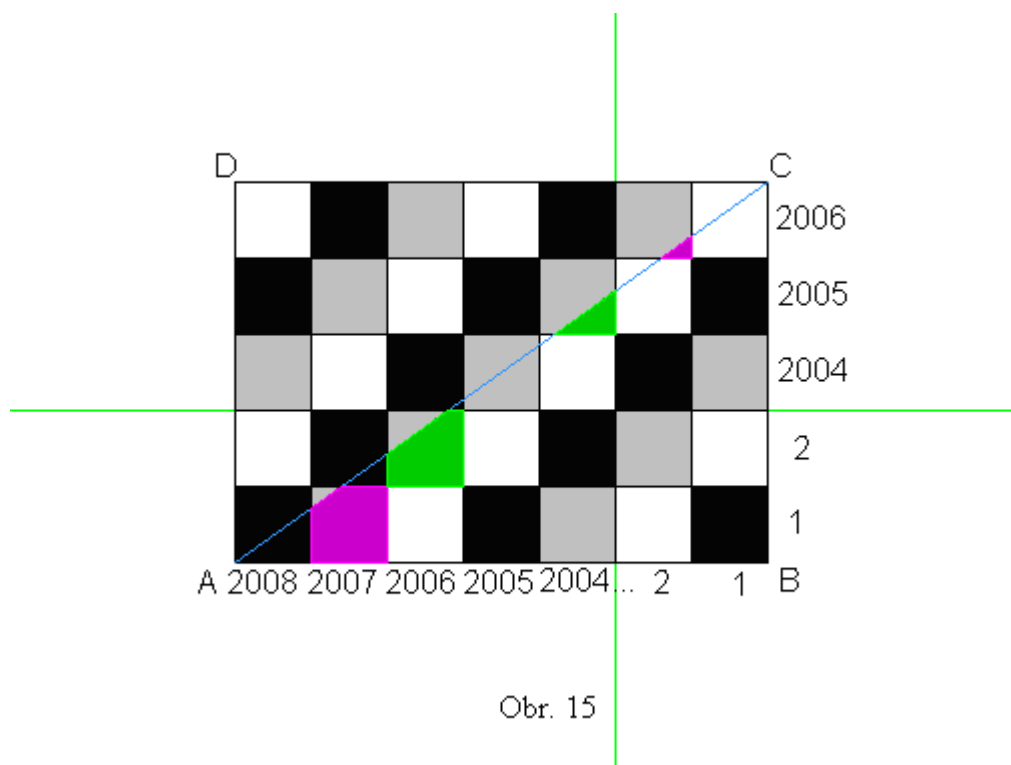
Libor Peltam z Gymnázia Česká v Českých Budějovicích řešil příklad tak, že si spočítal počet šedých čtverečků v každém řádku. Liborovo řešení:

Už z obrázku (Obr. 14) je patrné, že se šedivé čtverce vyskytují v šikmých sloupcích a vzhledem k systému obarvování je to pochopitelné. Protože je obdélník o 2 čtverce širší než vyšší, a zároveň nejdelší sloupec začíná na 2. místě zleva, musí nahoře končit na 2. místě zprava.

Protože šedý je každý třetí zprava i zleva, začínají nahoře menší sloupce symetricky jako dole, a tudíž je celá šedá část symetrická podle těžiště obdélníka. Proto i hledaná část je polovinou celkové šedé části obdélníka.

Počet šedých čtverečků v každém řádku je $\frac{2008}{3} = 669 \frac{1}{3}$. Přesněji řečeno v každém řádku je 669 šedých čtverečků a v každém třetím ještě jeden navíc. Celkový počet šedých čtverečků je tedy $669 \cdot 2006 + 668 = 1342682$. Polovina je 671341, což je hledaný výsledek.

Dalším možným způsobem, jak vypočítat obsah trojúhelníka ABC , byl výpočet přes diagonály. Tento způsob řešení si z osmi úspěšných řešitelů zvolilo pět žáků. Vybrala jsem řešení Matyáše Koppa z Gymnázia Jírovcova v Českých Budějovicích.



Z obrázku vidíme, že úhlopříčkou je protnuto 2006 šedých čtverců. Jejich plocha zasahující do trojúhelníku ABC , je $\frac{2006}{2}$ šedých čtverců.

Počet čtverců v trojúhelníku ABC , které nejsou protnuty úhlopříčkou:

$$2004 + 2001 + 1998 + \dots + 6 + 3 = 3(668 + 667 + \dots + 1) \Rightarrow \text{jedná se o aritmetickou}$$

$$\text{posloupnost} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 3 \cdot \frac{668(668+1)}{2}.$$

Obsah šedé části trojúhelníku je roven součtu

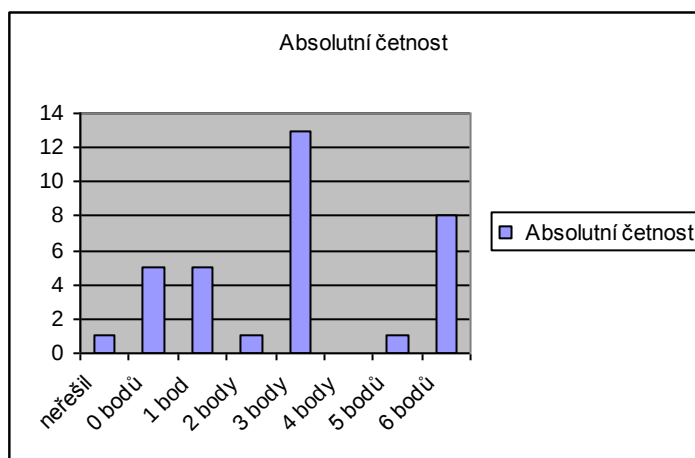
$$S = 3 \cdot \frac{668(668+1)}{2} + \frac{2006}{2} = \underline{671341} \text{ jednotkových čtverců.}$$

Statistika úspěšnosti v řešení úlohy B-II-2

Ze 34 žáků úlohu vyřešilo uspokojivě 9 studentů (26,40%). Celkem 13 žáků (38,20%) získalo tři body. Dalších 6 žáků (17,60%) se dopustilo závažných chyb a bylo ohodnoceno v rozmezí 1 – 2 bodů. Šest studentů (17,60%) získalo 0 bodů, nebo úlohu neřešilo.

Ohodnocení	Absolutní četnost	Relativní četnost (%)
neřešil	1	2,90
0 bodů	5	14,70
1 bod	5	14,70
2 body	1	2,90
3 body	13	38,20
4 body	0	0,00
5 bodů	1	2,90
6 bodů	8	23,50

Tabulka 10: Statistika úspěšnosti řešení úlohy B-II-2



Obr. 16: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze B-II-2

Rozbor chyb

Celkem 21 žáků (61,80%) se dopracovalo ke správnému výsledku. Ale jen 8 žáků (23,50%) získalo maximální počet bodů.

Žák, který získal 5 bodů, měl vše dobře až na to, že mu chyběl výsledek. Důvodem, proč nedopočítal příklad může být neznalost vzorce aritmetické posloupnosti. Ten je zde důležitý pro výpočet obsahu šedých čtverců, které nejsou protnuty úhlopříčkou.

Celkem 13 žáků získalo 3 body. Dvanáct žáků se dopracovalo ke správnému výsledku, ale nedostatečně zdůvodnili, že obsah šedé části trojúhelníka ABC je roven polovině obsahu šedé části obdélníka $ABCD$. Třináctý student naopak správně odůvodnil, proč je obsah trojúhelníku ABC roven polovině obsahu obdélníka $ABCD$, ale dopracoval se ke špatnému výsledku.

Ostatní žáci, kteří získali 2 body a méně, dělali podobné chyby. Především se jednalo o nedostatečné zdůvodnění tvrzení $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$. Také se vyskytli dva žáci, kteří měli správně výsledek, ale na papíře jim chyběl postup řešení. To se odrazilo i v jejich hodnocení.

Někteří žáci začali správně, ale pak udělali chybu, která zásadně ovlivnila jejich další postup a znemožnila jim dosažení správného výsledku. Příkladem je řešení Jana Cvrkala z Gymnázia Jírovcova v Českých Budějovicích. Jan udělal chybu, když počítal, kolik šedých čtverců se nachází v prvním řádku $= 2008 : 3 = 669 + \frac{1}{3}$. Toto číslo zaokrouhlil na 700 a počítal s ním dále. Další kroky jeho úvahy jsou sice v pořádku, ale výsledek je kvůli zaokrouhlení špatný.

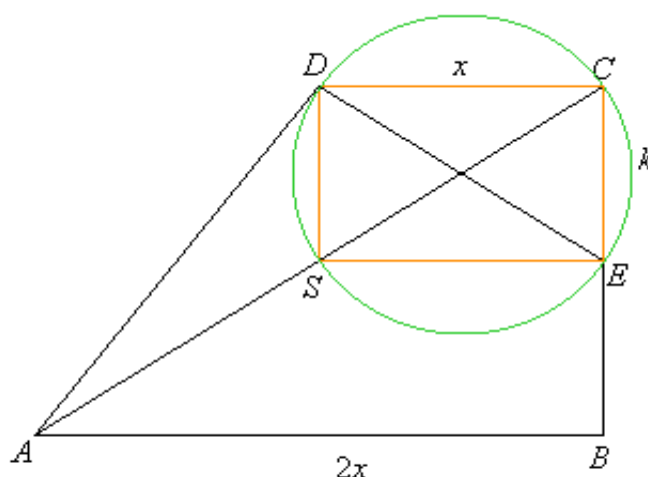
Aleš Růžička z Gymnázia Pierra de Coubertina v Táboře začal správně, ale příklad nedokázal dotáhnout do zdárného konce. Vypočítal obsah trojúhelníka ABC a z něho obsah šedých (ale i černých a bílých) čtverečků – tj. $671341, \bar{3}$. Od tohoto bodu už má příklad špatně. Nenapadlo ho, že černých a bílých čtverečků je víc.

3.3 Úloha B-II-3

Text úlohy

V lichoběžníku $ABCD$, jehož základna AB má dvakrát větší délku než základna CD , označme E střed ramene BC . Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází středem úhlopříčky AC , právě když strany AB a BC jsou navzájem kolmé.

Vzorové řešení



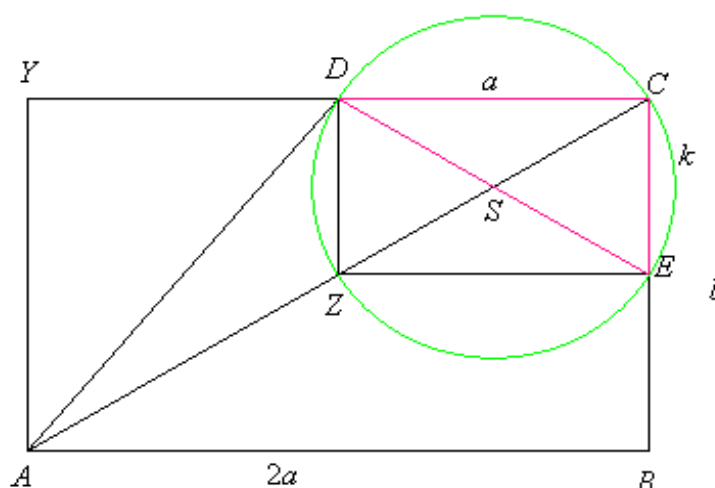
Obr. 17

Označme S střed úhlopříčky AC . Úsečka SE je střední příčka trojúhelníku ABC , takže $|SE| = \frac{1}{2}|AB| = |DC|$. Navíc $SE \parallel AB \parallel DC$. Úsečky SE a DC jsou rovnoběžné a shodné, proto je $SECD$ rovnoběžník. Kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází bodem S právě tehdy, je-li rovnoběžník $SECD$ tětiový. Čtyřúhelník je tětiový, právě když je součet velikostí jeho protilehlých úhlů 180° . V rovnoběžníku jsou ale protilehlé úhly shodné, takže je tětiový, právě když je to pravoúhelník, neboli když úhel ECD , a tedy i úhel ABC je pravý.

Kritéria hodnocení: Za úplné řešení se doporučovalo udělit 6 bodů, 3 body za důkaz toho, že $SECD$ je rovnoběžník a další 3 body za důkaz kolmosti.

Analýza řešitelských postupů

Žádný z žáků nezískal plný počet bodů. Úlohu téměř správně vyřešil Martin Pecka z Gymnázia V. Nováka z Jindřichova Hradce. Studentovo řešení uvádím v nezměněné podobě, na jeho chyby bude upozorněno v podobě poznámek pod čarou. Martinovo řešení se neopírá o vlastnosti tětivového čtyřúhelníka, proto důkaz musí provést oběma směry:



Obr. 18

1) Pro základny lichoběžníka $ABCD$ platí obecně $AB \parallel CD$. Kolmice na jednu základnu bude tedy kolmicí i na základnu druhou ($|\sphericalangle BCD| = 90^\circ$). Trojúhelník ECD je pravoúhlý, proto kružnici jemu opsanou mohu nazvat Thaletovou. Z jejích vlastností plyne, že její střed S bude ležet na přeponě DE a bude ji půlit ($|DE| = |SE|$).

Bod Z přenesu ve středové souměrnosti podle bodu S , obrazem je bod C . Jelikož S i C leží na AC , leží na ní i bod Z . Vzniklý útvar $ZECD$ je obdélník (úhlopříčky ZC a DE mají stejnou velikost a půlí se navzájem). Zvolím bod Y tak, že leží na polopřímce CD a jeho vzdálenost od bodu A je $|BC|$, vznikne obdélník $ABCY$. Porovnáme délky úhlopříček obdélníků:

obdélník $ABCY$: $u_1^2 = 4a^2 + b^2$ $u_1 = \sqrt{4a^2 + b^2}$	obdélník $ZECD$: $u_2^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$ $u_2 = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2}$
$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{\frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2}} = 2:1$	

Vidím, že $|AC| = 2|ZC|$, tedy bod Z (náleží opsané kružnici) půlí AC .

2) Důkaz provedu i opačným směrem. Vytvořím kružnici k se středem S , která je opsaná trojúhelníku ECD . Bod Z vznikne průnikem kružnice k s $|AC|$. Ze zadání a směru důkazu plyne, že ($|AZ| = |CZ|$). Z toho plyne, že bod Z půlí AC a E půlí BC . Odtud vyplývá, že ZE je střední příčka trojúhelníka ABC , je tedy rovnoběžná s AB a tím i s CD . $ZECD$ je lichoběžník.⁸ Jelikož $|ZE| = |CD|$ je $ZECD$ tedy kosodélník.⁹

Pokud bod S půlí jeho úhlopříčky DE a ZC (ano; je střed kružnice, na které body těchto úhlopříček leží), je jejich průsečíkem. $|ZS| = |ES| = |CS| = |DS|$, tedy ZC a DE se zároveň půlí navzájem, $ZECD$ je obdélník $\Rightarrow |\sphericalangle ECD| = 90^\circ$.¹⁰

⁸ Zde Martin udělal první chybu. $ZECD$ je lichoběžník nebo rovnoběžník.

⁹ Další chyba. Jelikož $|ZE| = |CD|$ je $ZECD$ rovnoběžník.

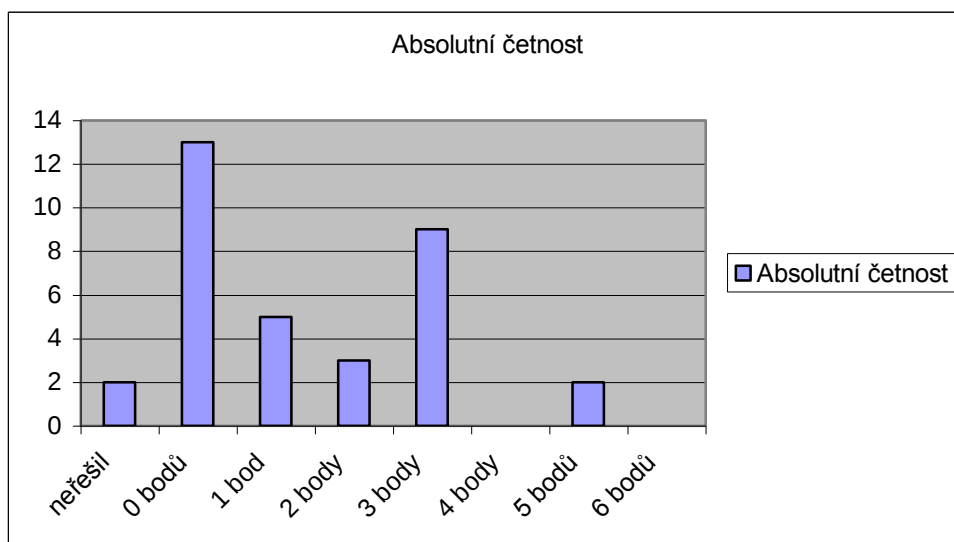
¹⁰ Martin usuzuje, že rovnoběžník je obdélník, jestliže se jeho úhlopříčky půlí. To není pravda. Úhlopříčky se půlí u každého rovnoběžníka. Měl napsat: čtyřúhelník $ZECD$ je rovnoběžník se stejně dlouhými úhlopříčkami a proto je pravouhelník.

Statistika úspěšnosti v řešení úlohy B-II-3

V podstatě správný důkaz ekvivalence provedli jen dva žáci, to je necelých 6% z celkového počtu. Zbývajících 94% pravděpodobně neví, že ekvivalence se má dokazovat ve dvou směrech. Přitom důkaz věty v jednom směru zvládlo 9 studentů, což je 26,50%. Dalších osm žáků (23,50%) se dopustilo tak závažných chyb, že byli ohodnoceni v rozmezí 1-2 body. Čtyřicet čtyři procent ze všech žáků získalo 0 bodů, nebo úlohu nevyřešilo.

Ohodnocení	Absolutní četnost	Relativní četnost (%)
neřešil	2	5,90
0 bodů	13	38,20
1 bod	5	14,70
2 body	3	8,80
3 body	9	26,50
4 body	0	0,00
5 bodů	2	5,90
6 bodů	0	0,00

Tabulka 11: Statistika úspěšnosti řešení úlohy B-II-3



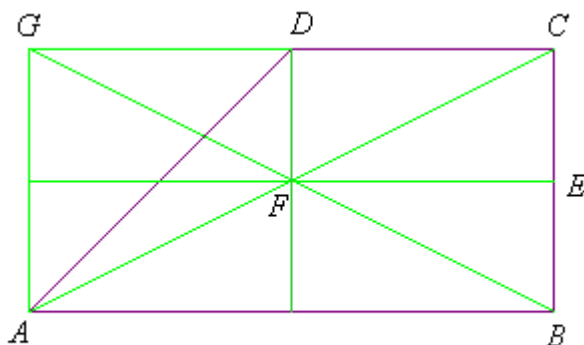
. 19: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze B-II-3

Rozbor chyb

Žáci se dopouštěli těchto chyb:

- nedokončili důkaz
- nedostatečně zdůvodnili, že $SECD$ je rovnoběžník
- špatné užívání terminologie – např. jeden žák použil termín nesečnový čtyřúhelník
- pokoušeli se tvrzení dokázat narýsováním.

Někteří žáci doplnili lichoběžník na obdélník. Při řešení využívali podobnosti. Tento způsob zvolil i Kamil Pekárek z Gymnázia V. Nováka z Jindřichova Hradce. Kamil však zapomněl provést důkaz i druhým směrem. Kamilovo řešení:



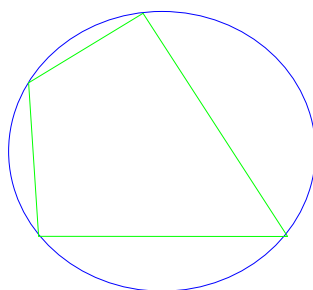
Obr. 20

Doplníme-li si lichoběžník $ABCD$ na obdélník $ABCG$ (bod G je dán průsečíkem polopřímky CD s kolmicí na stranu AB v bodě A). Bod $F \in (GB \cap AC)$. Jelikož se úhlopříčky v obdélníku půlí, platí $2|CF| = |AC|$. Obdélník $ABCG$ a $CDFE$ jsou podobné. Obdélník $CDFE$ má příslušné strany dvakrát menší (je čtvrtinový) $\Rightarrow$ úhlopříčky jsou poloviční. Kružnice opsaná obdélníku $CDEF$ (jenž obsahuje trojúhelník CDE) musí procházet všemi vrcholy. Proto prochází jak středem úhlopříčky AC , tak i vrcholy trojúhelníku CDE .

Kuriozity

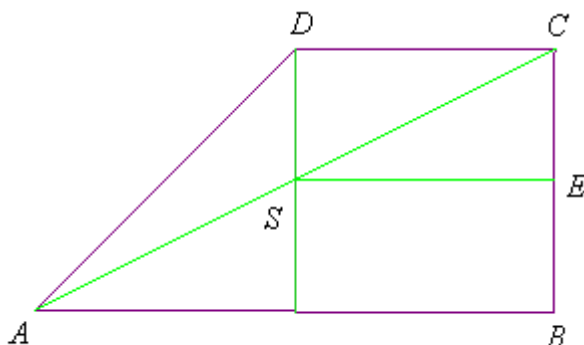
Každý z žáků se pokusil vysvětlit, proč kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází středem úhlopříčky AC , když strany AB a BC jsou navzájem kolmé. Některé odpovědi byly zajímavé. Například Pavel Šlechta (Gymnázium Česká, České Budějovice) podal následující vysvětlení: „Kružnici můžeme opsat pouze čtyřúhelníkům, jejichž úhlopříčky jsou stejně dlouhé a protínají se ve svých polovinách.”

Což samozřejmě není pravda. Jeho tvrzení můžeme vyvrátit například tímto obrázkem:



Obr. 21

Další žák vychází z předpokladu, že $DCES$ je čtverec. Poté se snaží dokázat tvrzení přes obsahy:



Obr. 22

„Nazveme S střed úhlopříčky AC . Pak $DCES$ je čtverec o straně $\frac{a}{2}$ pokud $a = |AB|$

(díky kružnici opsané). Spočteme-li obsah lichoběžníku: $S = \frac{(a+c) \cdot v}{2} = 0,75a \cdot v$ a nyní

jinak

$$S = S_{DCBX} + S_{ADX} = \frac{a}{2} \cdot v + \frac{\frac{a}{2} \cdot v}{2} = 1,5 \cdot \frac{a}{2} \cdot v = 0,75a \cdot v .''$$

„Závěrem píše: Obsahy jsou stejné, čímž jsme (ne) dokázali pravdivost tvrzení. ''

3.4 Úloha B-II-4

S opravou této úlohy byly problémy. V našem i jiných krajích totiž byli opravující příliš tolerantní a hodnotili i několika body takové postupy, které ve skutečnosti zasloužily nulové hodnocení. Předseda ÚK MO, doc. Jaromír Šimša si po soutěži vyžádal žákovské protokoly z jednotlivých krajů a provedl důkladnou analýzu řešení i způsobem opravování v článku [4]. Zároveň všechna řešení přehodnotil tak, jak měla být správně hodnocena. To se však stalo až po vyhlášení výsledků, a tak přehodnocení sloužilo jen pro interní potřebu krajských výborů MO. Vzhledem k této okolnosti a po konzultaci s vedoucím mé diplomové práce jsem se rozhodla neprovádět analýzu řešitelských postupů u této úlohy. Do práce jsem zařadila jen vzorové řešení úlohy a tabulku úspěšnosti tak, jak by měla vypadat po výše zmíněném přehodnocení. Článek [4], který obsahuje podrobnou analýzu v rámci celé republiky nalezne čtenář v příloze na CD.

Text úlohy

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ platí

$$1 \leq a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1-a)(1-b)(1-c) \leq 9.$$

Vzorové řešení

V celém textu předpokládáme, že $a, b, c \in \langle 0, 1 \rangle$. Označme

$V = a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1-a)(1-b)(1-c)$ a nejprve místo nerovnosti $V \geq 1$ dokažme silnější nerovnost $a + b + c + (1-a)(1-b)(1-c) \geq 1$.

Roznásobíme a úpravou levé strany dostaneme

$$(a + b + c) + (1-a)(1-b)(1-c) = 1 + ab + ac + bc - abc = 1 + ab(1-c) + ac + bc \geq 1,$$

protože v posledním součtu za jedničkou následují vesměs nezáporné sčítance. K důkazu nerovnosti $V \leq 9$ stačí vzhledem k tomu, že $2(ab + ac + bc) \leq 6$ ověřit nerovnost

$$a + b + c + 3(1-a)(1-b)(1-c) \leq 3.$$

Uděláme to tak, že zřejmé nerovnosti

$$(1-a)(1-b) \leq 1, (1-a)(1-c) \leq 1, (1-b)(1-c) \leq 1$$

vynásobíme po řadě (nezápornými) čísla $1-c$, $1-b$, $1-a$; po sečtení všech tří získaných nerovností obdržíme $3(1-a)(1-b)(1-c) \leq (1-a) + (1-b) + (1-c)$ odkud již snadnou úpravou plyne kýžená nerovnost.

Jiné řešení

Zameňme písmena a, b, c obvyklejšími písmeny x, y, z k označení proměnných (v našem případě z intervalu $\langle 0,1 \rangle$). Daný výraz $V = V(x, y, z)$ je při pevných hodnotách y, z lineární funkcí $Ax + B$ proměnné x s koeficienty

$$A = 1 + 2(y + z) - 3(1 - y)(1 - z),$$

$$B = y + z + 2yz + 3(1 - y)(1 - z).$$

Protože grafem každé lineární funkce na uzavřeném intervalu je úsečka, budou nerovnosti

$1 \leq V(x, y, z) \leq 9$ platit pro každé $x \in \langle 0,1 \rangle$, právě když budou platit pro obě krajní hodnoty $x = 0$ a $x = 1$, neboli $1 \leq V(0, y, z) \leq 9$ a $1 \leq V(1, y, z) \leq 9$. Protože pro libovolné $y, z \in \langle 0,1 \rangle$ máme

$$V(0, y, z) = y + z + 2yz + 3(1 - y)(1 - z) \leq 1 + 1 + 2 + 3$$

$$V(1, y, z) = 1 + y + z + 2(y + z + yz) \leq 1 + 1 + 1 + 2 \cdot 3,$$

jsou nerovnosti $V(0, y, z) \leq 9$ a $1 \leq V(1, y, z) \leq 9$ zřejmé. K důkazu zbylé nerovnosti $V(0, y, z) \geq 1$ si opět povšimneme, že při pevném z je výraz $V(0, y, z)$ lineární funkcí $Cx + D$ proměnné y . Stačí proto pouze ověřit, že $V(0, 0, z) \geq 1$ a zároveň $V(0, 1, z) \geq 1$.

To je ale zřejmé, neboť pro $z \in \langle 0,1 \rangle$ platí

$$V(0, 0, z) = 3 - 2z \geq 1 \text{ a } V(0, 1, z) = 1 + 3z \geq 1.$$

Tím je úloha vyřešena. Dodejme ještě, že zmíněné linearitu výrazu V v každé z proměnných x, y, z vyplývá, že jak největší, tak i nejmenší hodnota V na množině všech trojic (x, y, z) čísel z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ musí být rovna jednomu z osmi čísel

$$V(0, 0, 0), V(0, 0, 1), V(0, 1, 0), V(0, 1, 1),$$

$$V(1, 0, 0), V(1, 0, 1), V(1, 1, 0), V(1, 1, 1);$$

s ohledem na symetrii výrazu V stačí vyčíslit pouze hodnoty $V(0,0,0) = 3$, $V(0,0,1) = 1$, $V(0,1,1) = 4$ a $V(1,1,1) = 9$.

Další řešení

Představme si krychli $1 \times 1 \times 1$ a tři navzájem kolmé roviny (rovnoběžné se stěnami krychle), které rozdělují hrany vycházející z každého vrcholu krychle na dvojici úseček délký a a $1-a$, b a $1-b$, resp. c a $1-c$. Vidíme, že celou krychli lze pokrýt soustavou čtyř kvádrů o rozměrech $a \times 1 \times 1$, $1 \times b \times 1$, $1 \times 1 \times c$, $(1-a) \times (1-b) \times (1-c)$, což vyjádřeno jejich objemy dává geometrický důkaz nerovnosti $a \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot b \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot c + (1-a)(1-b)(1-c) \geq 1$, ze které jsme odvodili závěr $V \geq 1$ v prvním řešení. K druhému závěru $V \leq 9$ nás tam přivedla nerovnost

$a \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot b \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot c + 3(1-a)(1-b)(1-c) \leq 3$, která má rovněž jasné „objemové“ zdůvodnění: v součtu na levé straně je každá část objemu celé krychle započítána nejvýše třikrát. Tím je celé geometrické řešení úlohy hotovo.

K předchozímu dojdeme, že pokud přidáme k uvedeným čtyřem kvádrům ještě dva exempláře čtvrtého z nich a po dvou exemplářích každého ze tří kvádrů $a \times b \times 1$, $a \times 1 \times c$, $1 \times b \times c$, bude hodnota V součtem objemů těchto 12 kvádrů, kterými lze „několikanásobně“ zaplnit celou krychli. Přitom každá z osmi částí krychle (rozdělené zmíněnými třemi rovinami) je součástí devíti, tří, čtyř nebo jednoho z 12 uložených kvádrů. Přesněji to zapíšeme rovností

$$V = 9abc + 3(1-a)(1-b)(1-c) + 4ab(1-c) + 4ac(1-b) + 4bc(1-a) + a(1-b)(1-c) + b(1-a)(1-c) + c(1-a)(1-b).$$

Vzhledem k počtu použitých částí tak pro objem V nutně platí $1 \leq V \leq 9$.

Kritéria hodnocení: Za úplné řešení se doporučovalo udělit 6 bodů. Za důkaz nerovnosti $V \geq 1$ žáci získali 2 body, za důkaz nerovnosti $V \leq 9$ obdrželi 4 body.

Statistika úspěšnosti v řešení úlohy B-II-4

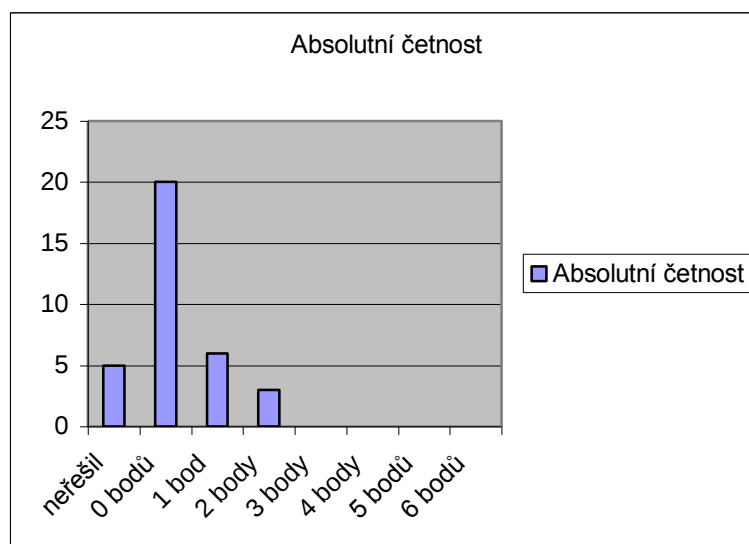
V této úloze žáci dosáhli nejvýše dvou bodů. Jedná se o 3 řešitele (8,80%).

Jeden bod získalo 6 žáků (17,60%).

Nula bodů bylo ohodnoceno 25 žáků (73,50%). Z toho 5 žáků (14,70%) se tuto úlohu nepokusilo řešit.

Ohodnocení	Absolutní četnost	Relativní četnost (%)
neřešil	5	14,70
0 bodů	20	58,80
1 bod	6	17,60
2 body	3	8,80
3 body	0	0,00
4 body	0	0,00
5 bodů	0	0,00
6 bodů	0	0,00

Tabulka 12: Statistika úspěšnosti řešení úlohy B-II-4



Obr. 23: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze B-II-4

3.5 Statistika úspěšnosti jednotlivých úloh B-II-1-4

Jak vidíme z celkového přehledu výsledků (tabulka 13), byla úspěšnost studentů v geometrických úlohách B-II-2 a B-II-3 relativně dobrá. Nejhorších výsledků žáci dosáhli v úloze B-II-4. Tato úloha byla nejtěžší ze všech příkladů, které se vyskytly v kategorii B a C.

	1. úloha		2. úloha		3. úloha		4. úloha	
Ohodno- cení	Absolutní četnost	Relativní četnost (%)	Absolutní četnost	Relativní četnost (%)	Absolutní četnost	Relativní četnost (%)	Absolutní četnost	Relativní četnost (%)
neřešil	3	8,80	1	2,90	2	5,90	5	14,70
0 bodů	15	44,10	5	14,70	13	38,20	20	58,80
1 bod	9	26,50	5	14,70	5	14,70	6	17,60
2 body	2	5,90	1	2,90	3	8,80	3	8,80
3 body	0	0,00	13	38,20	9	26,50	0	0,00
4 body	3	8,80	0	0,00	0	0,00	0	0,00
5 bodů	2	5,90	1	2,90	2	5,90	0	0,00
6 bodů	0	0,00	8	23,50	0	0,00	0	0,00

Tabulka 13: Statistika úspěšnosti řešení úloh B-II-1-4

4 Závěr

V diplomové práci jsem analyzovala řešení úloh II. kola 55. ročníku MO v Jihočeském kraji. Jednalo se o dvě kategorie – B a C. V každé kategorii byly čtyři příklady, z toho dva geometrického charakteru. Řešiteli těchto úloh byli studenti středních škol. Mým cílem bylo ukázat, jakými způsoby žáci řešili zadané úlohy. U některých příkladů studenti volili rozdílné strategie, které vedly ke správnému výsledku. Dále jsem se snažila poukázat na chyby, kterých se žáci nejčastěji dopouštěli.

Práce má sloužit jako informační materiál zejména pro učitele matematiky a osoby, které připravují studenty na matematické soutěže. Má práce by mohla sloužit jako zpětná vazba žákům, kteří se této olympiády zúčastnili. Může být použita jako materiál při práci v matematickém kroužku, sbírka úloh pro nadané žáky, nebo jako příprava pro žáky, kteří se připravují na matematickou olympiádu.

Seznam literatury

- [1] Benda P., Moravčík J., Vyšín J., Zítek F.: *20 let matematické olympiády v ČSSR*, Ústřední výbor matematické olympiády v Praze, Praha, 1971
- [2] Boček L., Horák K.: *Padesát let matematické olympiády*, Matematicko-fyzikální Fakulta Univerzity Karlovy v Praze, Praha, 2001
- [3] Hejný M., Michalcová A.: *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*, Metodické centrum v Bratislavě, Bratislava, 2001
- [4] Šimša J.: *Nad žákovskými protokoly jedné úlohy MO*, In Ani jeden matematický talent nazmar, sborník příspěvků 3. ročníku konference učitelů matematiky a přírodních oborů na základních, středních a vysokých školách, str. 26-42, Hradec Králové: UK Praha, Pedagogická fakulta, 2007