

JIHOČESKÁ UNIVERZITA
V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATIKY

Stochastické grafy a jejich aplikace

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.

Rastislav Vovčko

Finanční matematika

České Budějovice, 2010

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

V Českých Budějovicích, dne

.....

Rastislav Vovčko

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě - v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných pedagogickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích, dne

.....

Rastislav Vovčko

Poděkování

Děkuji vedoucímu závěrečné práce, prof. RNDr. Pavlu Tlustému, CSc. za odbornou pomoc, teoretické i praktické rady, při zpracování této bakalářské práce.

.....

Rastislav Vovčko

Anotace

V této bakalářské práci se zabývám stochastickými grafy a jejich aplikacemi ve hrách. Téma zaujme každého, kdo se dosud setkal s pravděpodobností a alespoň trochu ho zaujala. Práce každému čtenáři ukáže, jak si zahrát jednoduché hry s ohledem na pravděpodobnost. Získá základní poznatky o stochastických grafech od těch nejjednodušších až po ty složitější.

Annotation

In this work deals with stochastic graphs and their applications in games. Topic deliver anyone who has met probability and at least somewhat interested in him. Work shows readers how to play simple games with regard to probability. Gain basic knowledge of stochastic charts from the simplest to the most complex.

Obsah:

1	Stochastický graf	- 8 -
2	Stochastická matice	- 9 -
3	Složitost stochastického grafu a její eliminace	- 14 -
4	Penneyovy hry	- 27 -
5	Spravedlivé a nespravedlivé hry	- 35 -
6	Markovské řetězce	- 40 -
7	Bloudění	- 44 -
8	Závěr	- 46 -
9	Zdroje	- 47 -

Úvod:

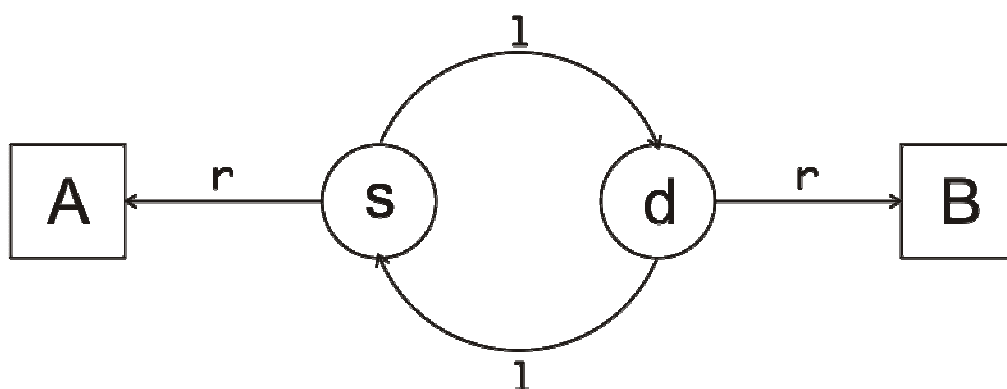
Název práce “Stochastické grafy a jejich aplikace” jen v málokom vzbudí zájem o toto téma. Já si ale myslím, že je to tím, že toho o tom moc nevědí, ba dokonce ani netuší o co jde. Ani mě toto téma podle názvu nezaujalo. Nevěděl jsem o co jde a název nezní zrovna jednoduše. Jenomže hned jak jsem zjistil, co téma zahrnuje, byl jsem nadšený. Lepší výběr tématu své bakalářské práce jsem si ani nemohl přát. Tato práce je zaměřená na hry, které se dají řešit pomocí stochastických grafů. Všechno se tedy točí okolo her a pravděpodobnost. Víc vám ale zatím neprozradím. Přečtěte si tuto práci a naučte se, jak přelstít své protivníky.

Cíl práce: Cílem práce je naučit čtenáře zbytečně neprohrávat, najít nejlepší možné řešení a racionálním rozhodováním ovlivňovat velikost výhry.

1 - Stochastický graf

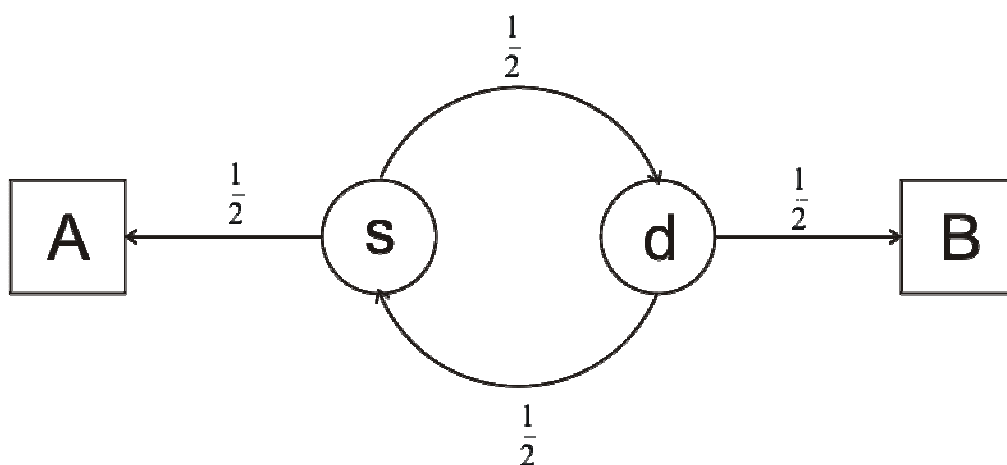
Na stochastický graf se můžeme dívat jako na hrací plátno. Tento graf se skládá z bodů, neboli uzlů a orientovaných čar, neboli hran. Graf vždy musí mít počáteční uzel. **(s)** Do uzlů jsou vepsána písmena, která označují stavy hry. Ke všem hranám jsou přiděleny výsledky hodu, popřípadě losu apod.

Následující obrázek zobrazuje hrací plátno pro hru dvou hráčů, kde vyhrává ten, který jako první hodí rub. Začíná hráč A.



Body A a B jsou cíle. Začíná hráč A v bodě. **(s)** Jeho cílem je dostat se do bodu A. K tomu potřebuje hodit rub. Pokud hodí líc, hází hráč B. Jeho cíl je bod B. I on musí hodit rub, aby se dostal do bodu B a tím pádem zvítězil.

Budeme-li chtít spočítat pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů, bude pro nás lepší nahradit výsledky hodů (l nebo r) danými pravděpodobnostmi.



2 - Stochastická matice

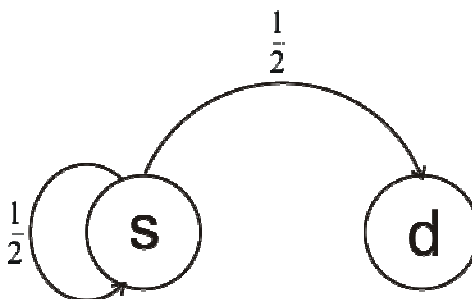
Stochastická matice je každá čtvercová matice, kde součet hodnot v každém řádku je roven 1 a všechny hodnoty jsou nezáporné.

Stochastický graf lze zapsat pomocí stochastické matice. Samozřejmě to jde i obráceně, tedy stochastickou matici můžeme proměnit v graf.

$$Q_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} s & d \end{array} \\ \begin{array}{c} s \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Řádkový vektor si můžeme představit jako místo odkud vyráží šipky. Jsou tam zobrazeny pravděpodobnosti, které míří do cílů. Cíle jsou zobrazeny sloupcovými vektory. Budeme-li sledovat řádek s , zjistíme, že pravděpodobnost na pozici v matici a_{11} míří do s . Dále vidíme, že druhá hodnota, která se nachází na pozici a_{12} míří do bodu d . Zaměříme se na druhý řádek a zjistíme, že z bodu d nepůjdou žádné šipky, jelikož se na pozici a_{21} jedná o jev nemožný a na pozici a_{22} o jev jistý.

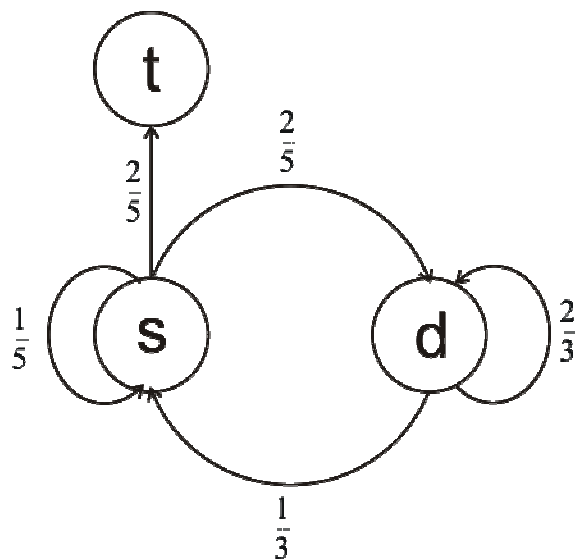
Q_1 :



$$Q_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} s & d & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} s \\ d \\ t \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

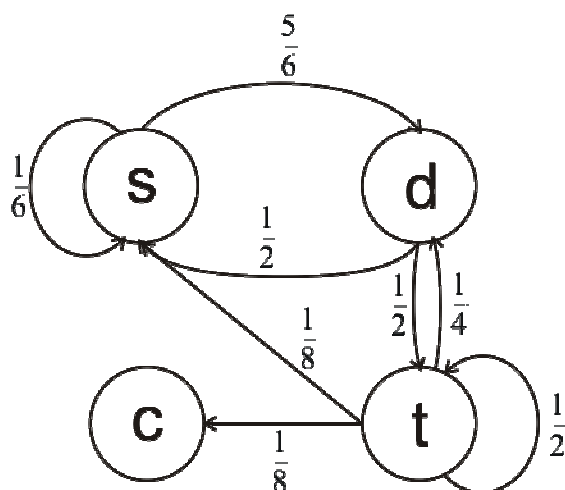
V prvním řádku opět vidíme, jaké hodnoty budou mít šipky vycházející z bodu s. Jejich cíle jsou podle sloupcového vektoru. První sloupec ukazuje, jaké hodnoty budou mít šipky, které budou mít cíl v bodě s.

Q_2 :

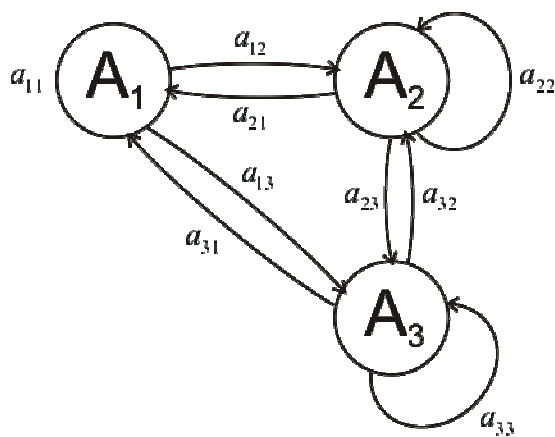


$$Q_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} s & d & t & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} s \\ d \\ t \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

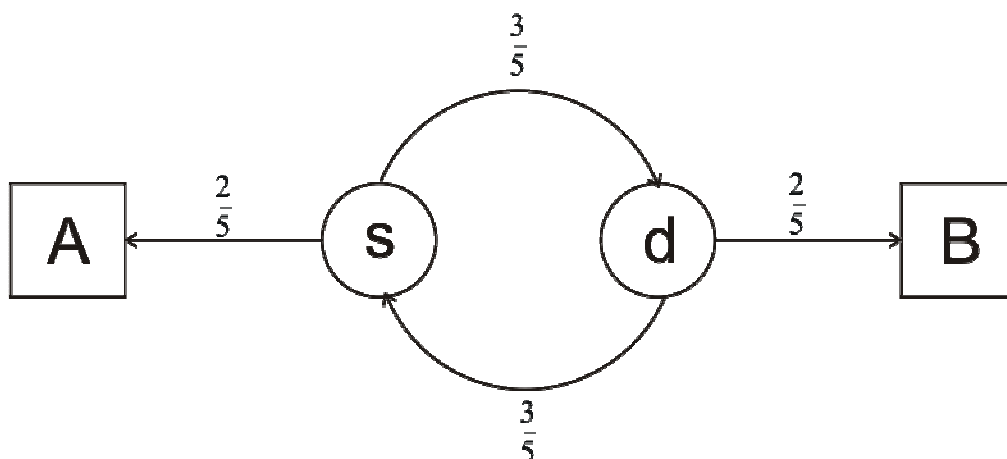
Q_3 :



Obecně tedy: $Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$



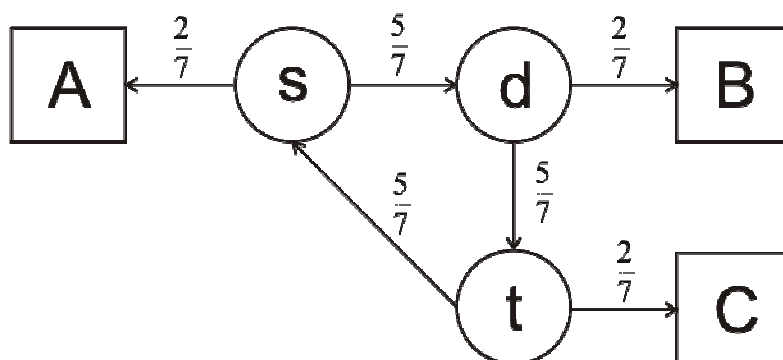
Př.: Dva hráči střídavě losují z urny, kde je pět koulí. Tři jsou červené a dvě bílé. Vyhrává ten, který jako první vylosuje bílou kouli. Pokud vylosuje červenou, vrátí ji zpět a pokračuje druhý hráč. Sestrojte stochastický graf a stochastickou matici popisující tuto hru.



$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matice může mít více podob. V tomto případě je v prvním řádku zobrazen los prvního hráče, ve druhém řádku los druhého hráče, ve třetím výhra prvního hráče a ve čtvrtém řádku je zobrazena výhra druhého hráče.

Př.: Tři hráči střídavě losují z urny, kde je sedm koulí. Pět je jich červených a dvě bílé. Vyhrává ten, který jako první vylosuje bílou kouli. Pokud vylosuje červenou, vrátí ji zpět a pokračuje další hráč v pořadí. Sestrojte stochastický graf a stochastickou matici popisující tuto hru.



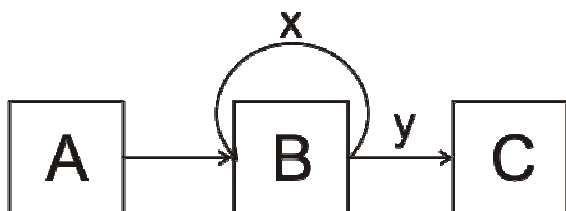
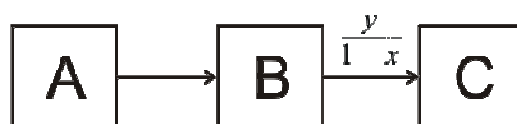
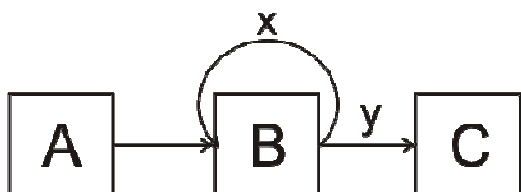
$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{7} & 0 & \frac{2}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{5}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 - Složitost stochastického grafu a její eliminace

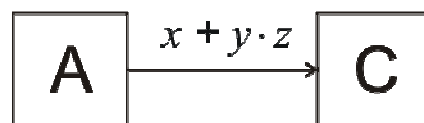
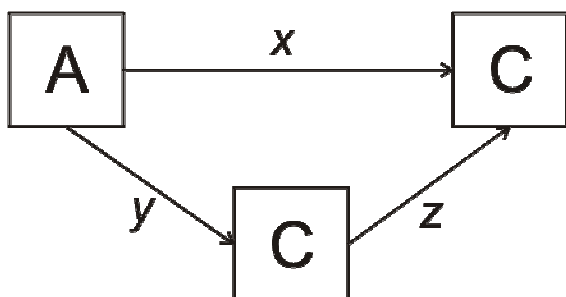
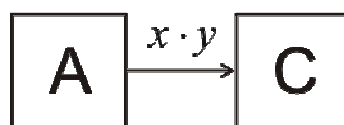
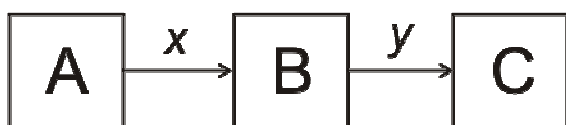
Stochastické grafy někdy můžou být velmi složité. Nyní si ukážeme, jak je můžeme zjednodušit. Úplným zjednodušením grafu jsme schopni spočítat pravděpodobnost výhry jednotlivých hráčů.

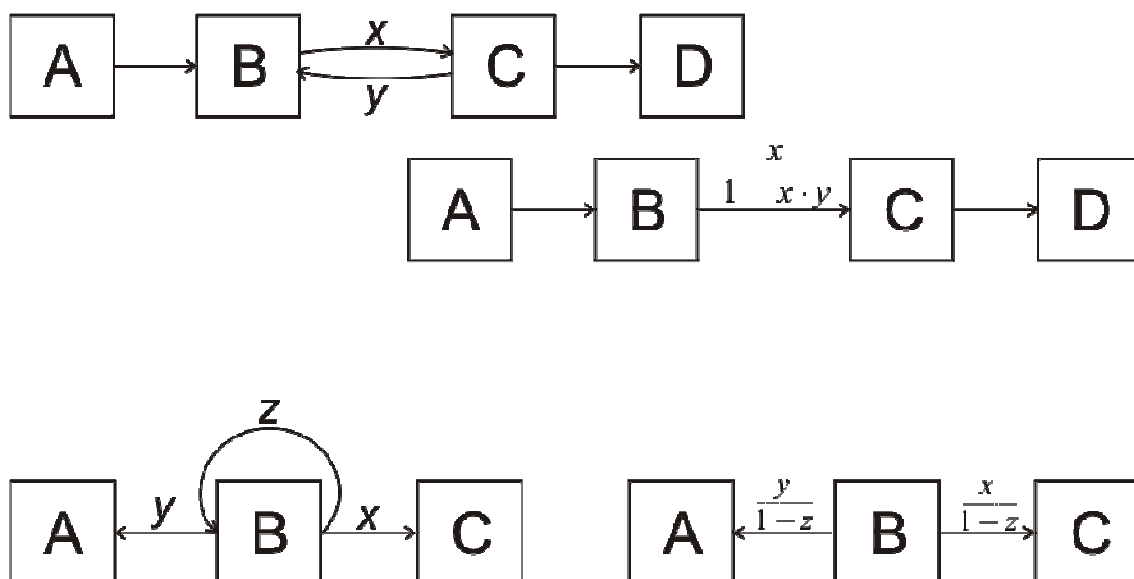
původní graf

zjednodušený graf

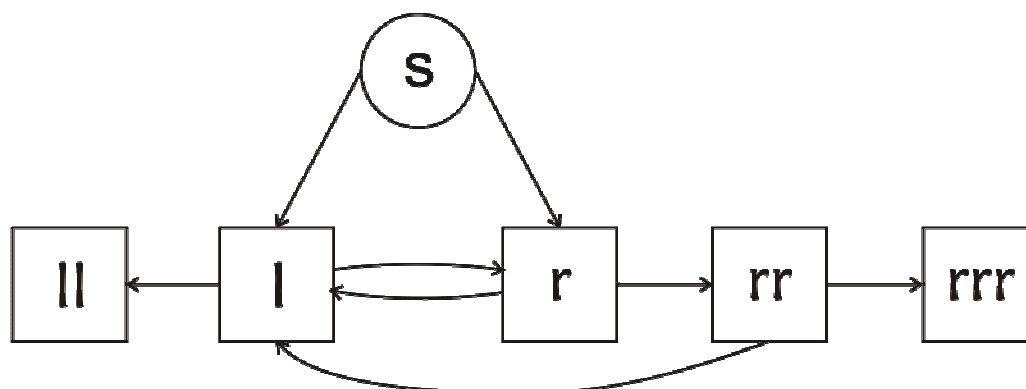


když $x + y = 1$

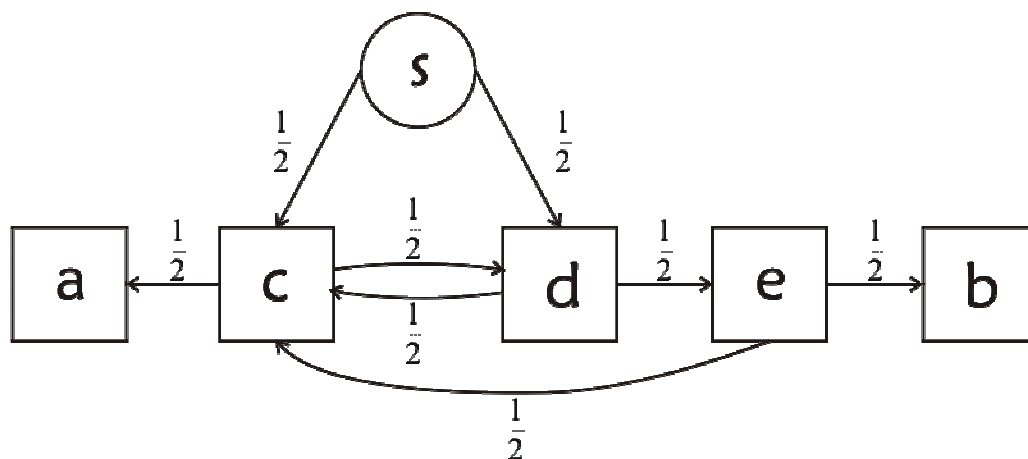




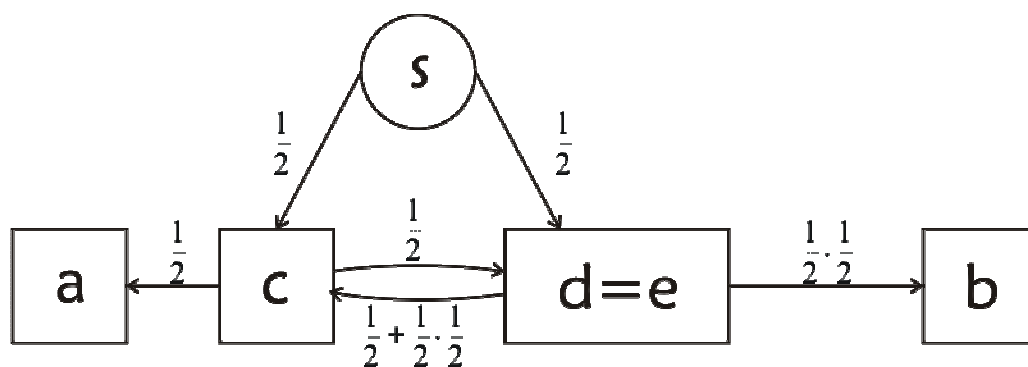
Př.: Házíme mincí. Hráč A vyhraje pokud v sérii hodů padne dvakrát za sebou líc.
Hráč B vyhraje, pokud padne třikrát za sebou rub.



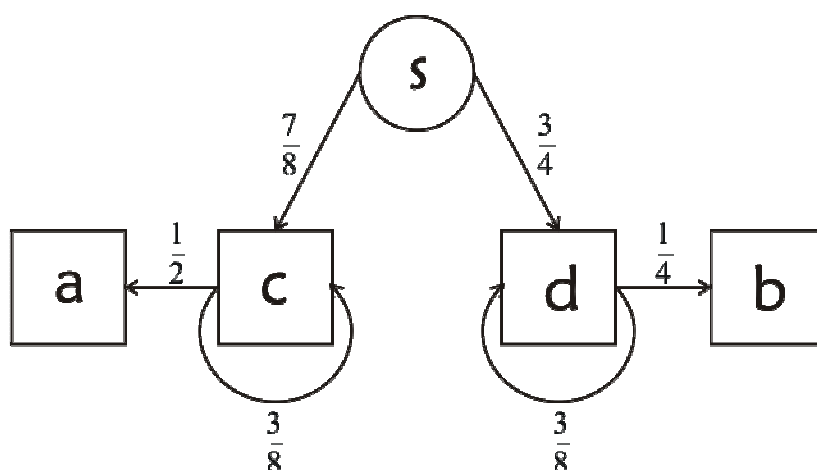
1. V prvním kroku si do obrázku vepíšeme pravděpodobnosti přesunu po hracím plátně a zároveň si body označíme obecně, aby nás zbytečně nemátlo jejich pozdější odstraňování.



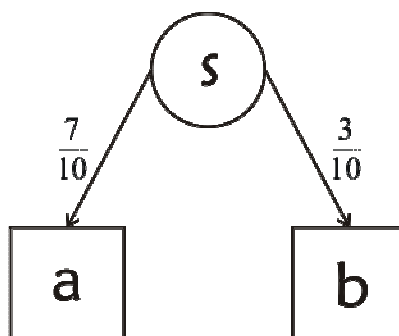
2. V dalším kroku spojíme uzly d a e v jeden. Cesta mezi d a b se zkrátí a mezi e a c se také zkrátí. Musíme si dát ale pozor na správné přepočítání pravděpodobností.



3. S pravděpodobností $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}$ se vrátíme do výchozího bodu. Výsledných $\frac{7}{8}$ jsme vypočítali následovně. Cesta z s do c , to je $\frac{1}{2}$, k tomu přičteme cestu $s \rightarrow d \rightarrow c$, to je $\frac{3}{8}$. Takže $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$. Výsledné $\frac{3}{4}$ vypočítáme součtem cest $s \rightarrow d$ (tj. $\frac{1}{2}$) a $s \rightarrow c \rightarrow d$ (tj. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$). Takže $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

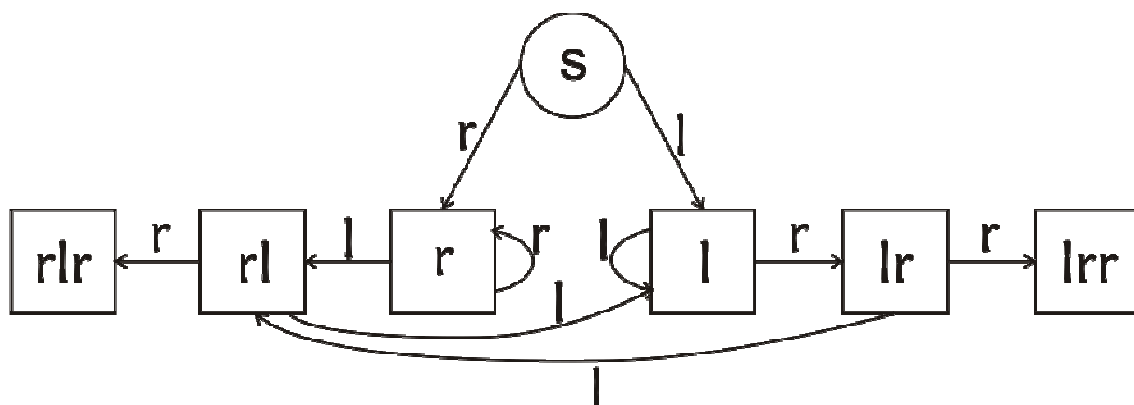


4. Nyní nás od úplného zjednodušení dělí poslední krok. Tímto krokem zjistíme pravděpodobnosti výher jednotlivých hráčů. Chceme se zbavit smyčky. V předchozí části práce jsem si ukázali jak na to. $\left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{4}{5} \right)$, $\left(\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{2}{5} \right)$ Výsledné pravděpodobnosti tedy budou $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{10}$ a $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$.

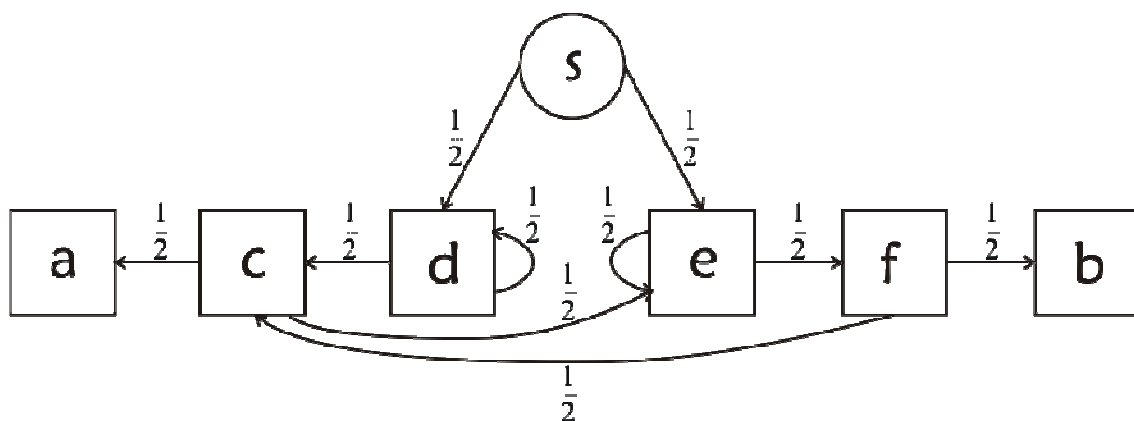


Př.: Hod mincí bude opakován tak dlouho, až po rubu padne líc a následně zase rub (... *rlr*) – vyhrává hráč *A*, nebo když po líci padne dvakrát rub (... *lrr*) tehdy zvítězí hráč *B*. Vypočítejte pravděpodobnosti vítězství obou hráčů pomocí zjednodušení stochastického grafu.

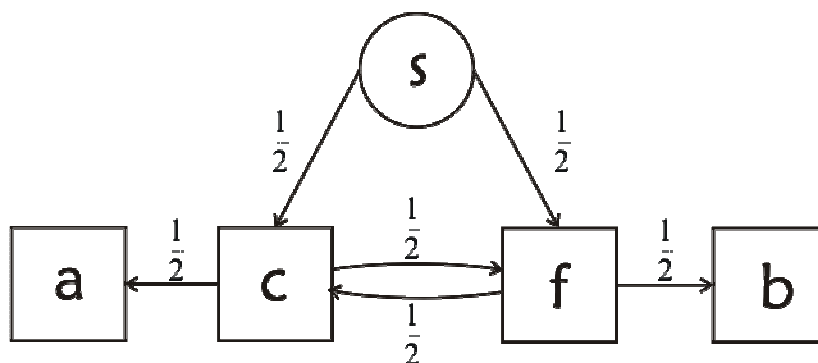
1.



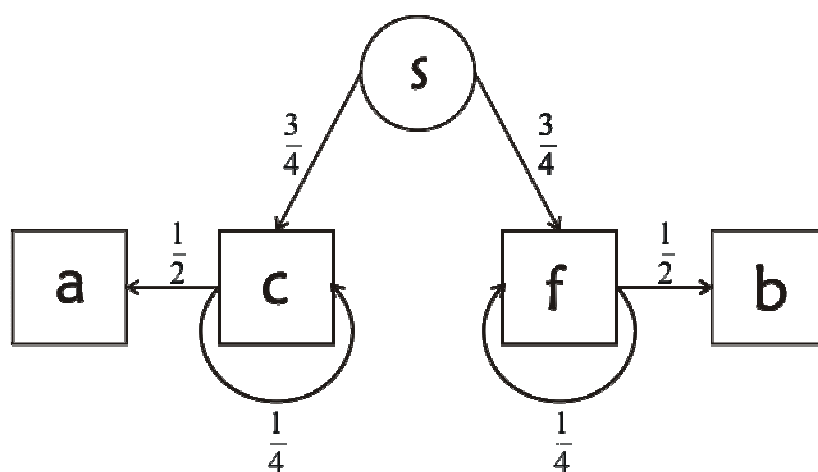
2.



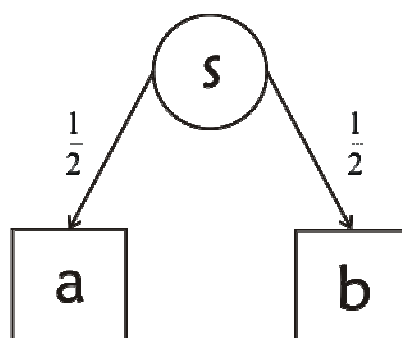
3.



4.



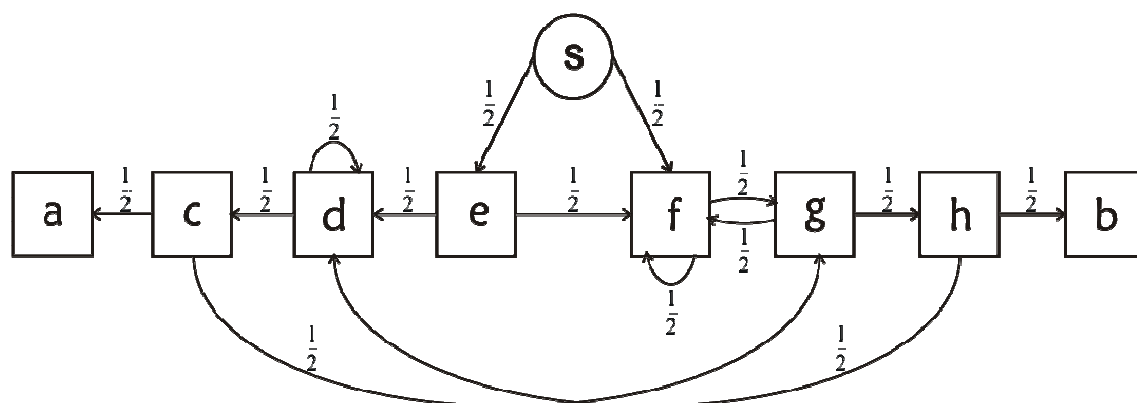
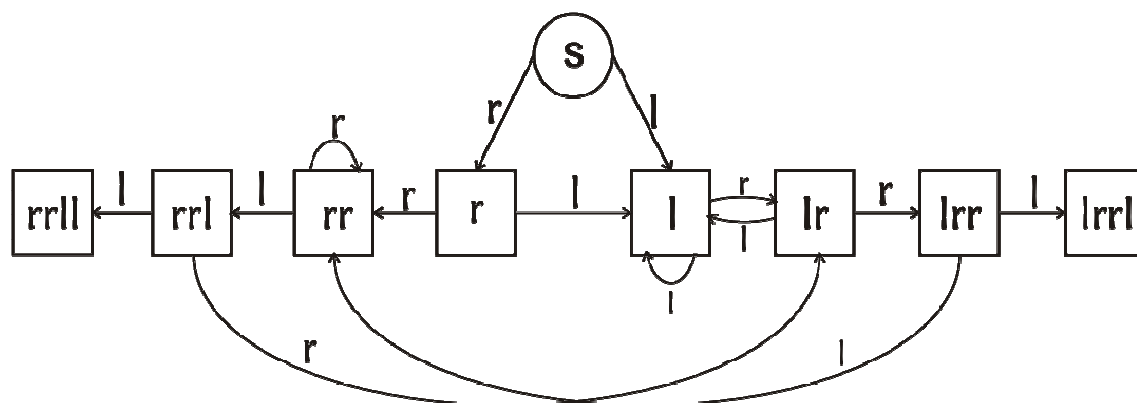
5.



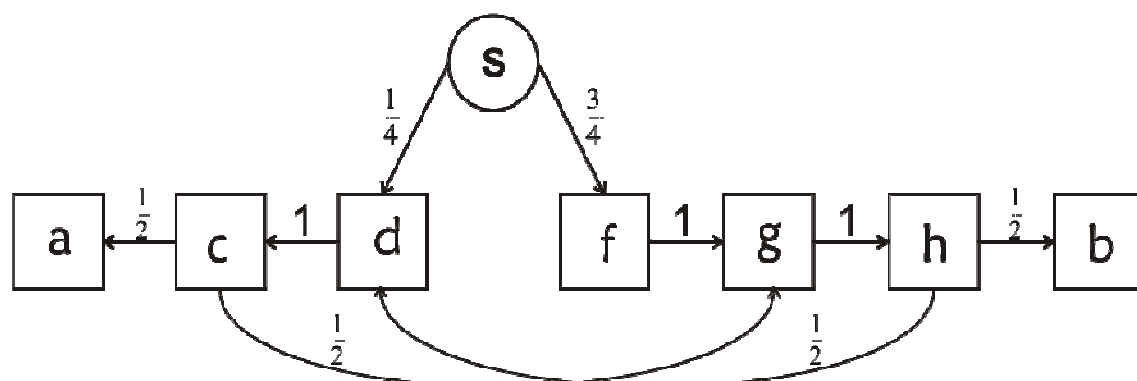
Zjednodušením stochastického grafu jsme zjistili, že mají oba hráči stejnou pravděpodobnost vítězství, takže je hra spravedlivá.

Př.: Hod mincí bude opakován tak dlouho, dokud za sebou nepadne série *rrll*, tedy vyhraje hráč A, nebo série *lrll* a vyhraje hráč B. Vypočítejte pravděpodobnost výhry jednotlivých hráčů postupným zjednodušením stochastického grafu.

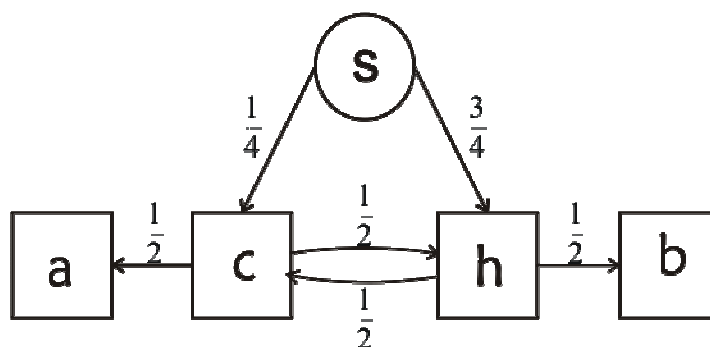
1.-2.



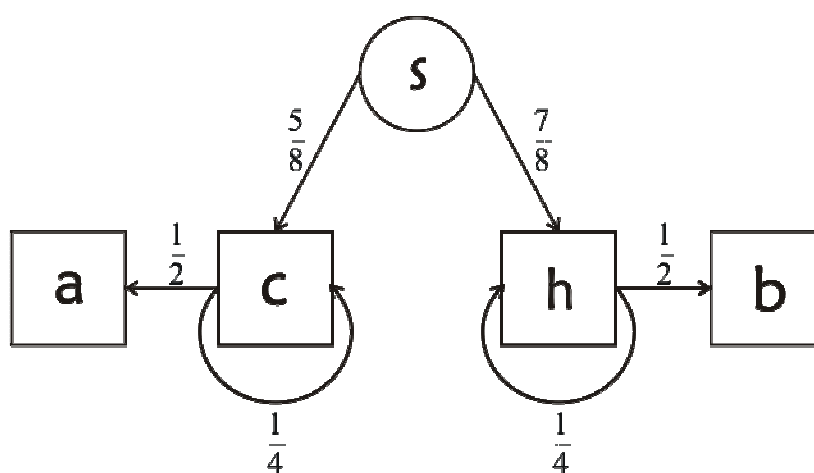
3.



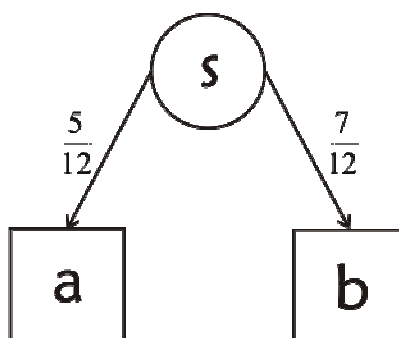
4.



5.



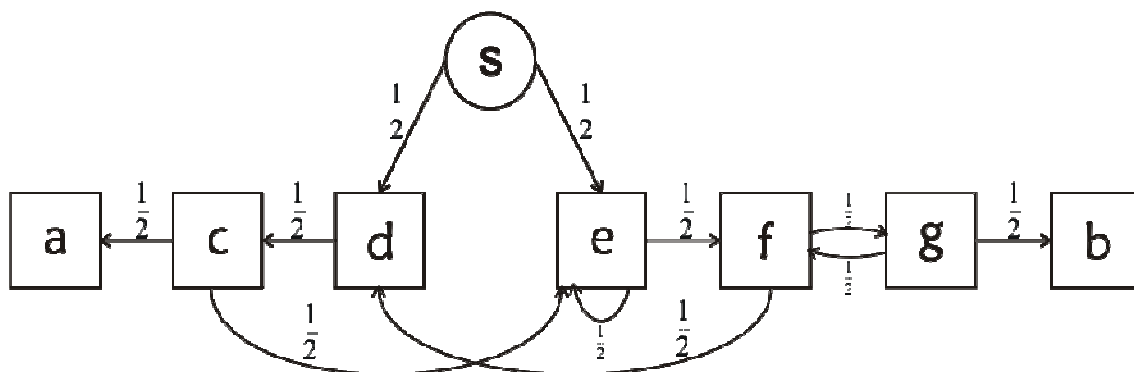
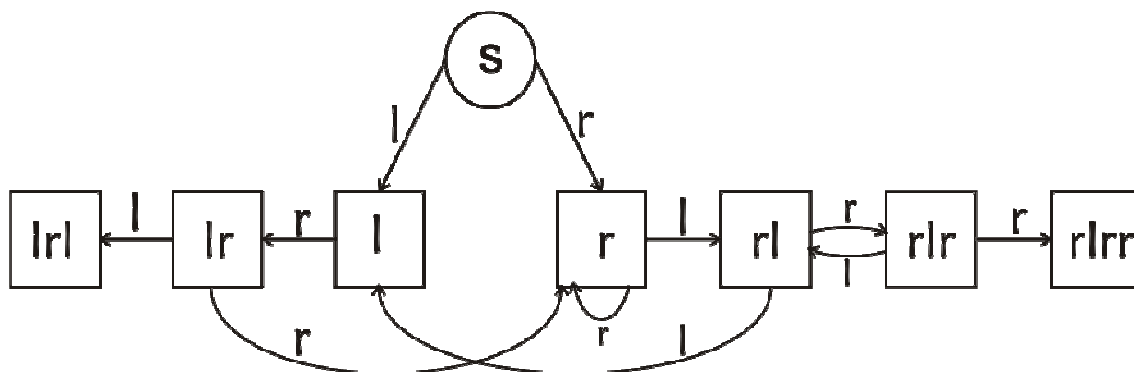
6.



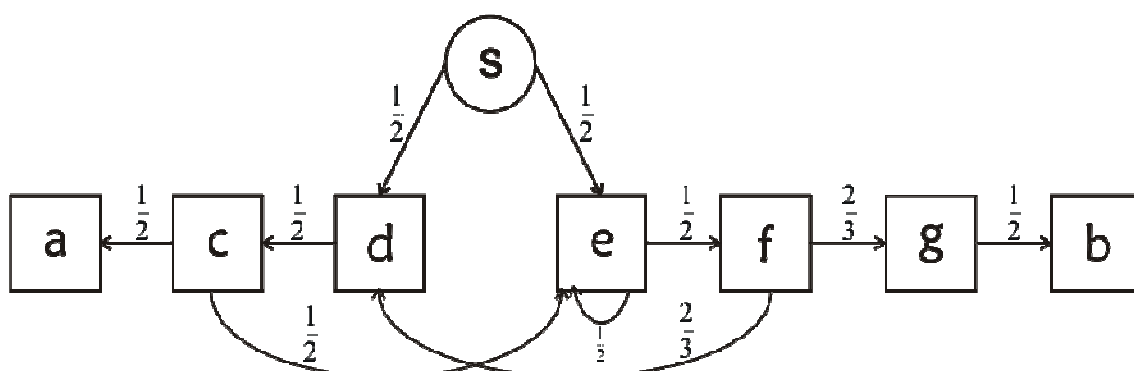
Hrát tuto hru je výhodnější pro hráče B . Ten zvítězí s pravděpodobností $\frac{7}{12}$. Hráč A vyhraje s pravděpodobností $\frac{5}{12}$.

Př.: Hod mincí bude opakován tak dlouho, dokud za sebou nepadne série *lrl*, tedy vyhraje hráč A, nebo série *rlrr* a vyhraje hráč B. Vypočítejte pravděpodobnost výhry jednotlivých hráčů postupným zjednodušením stochastického grafu.

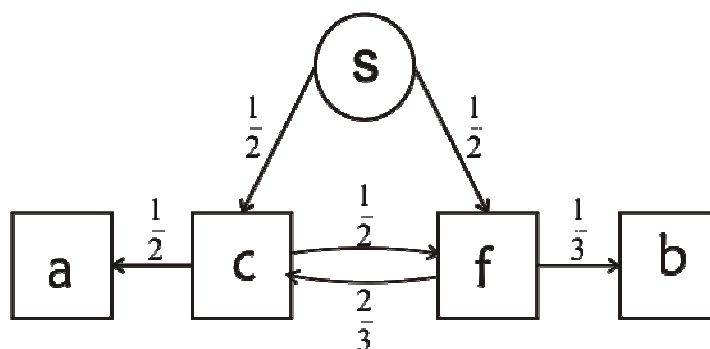
1.-2.



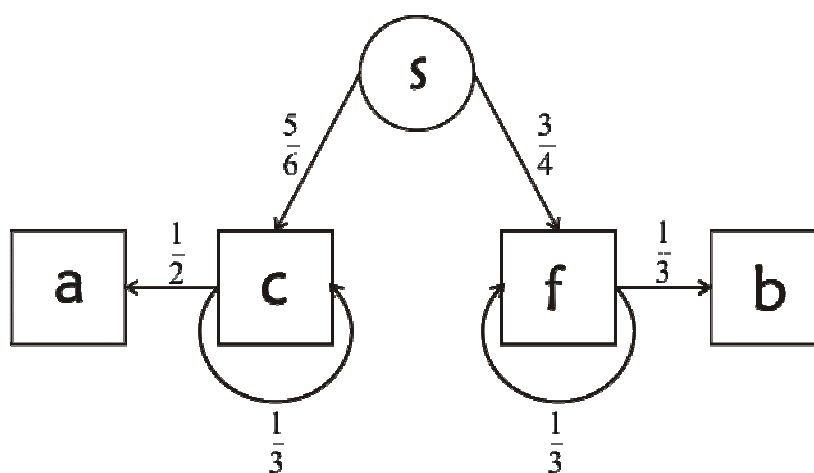
3.



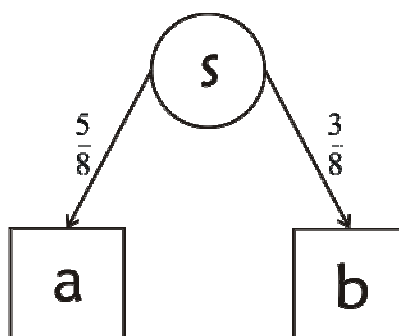
4.



5.



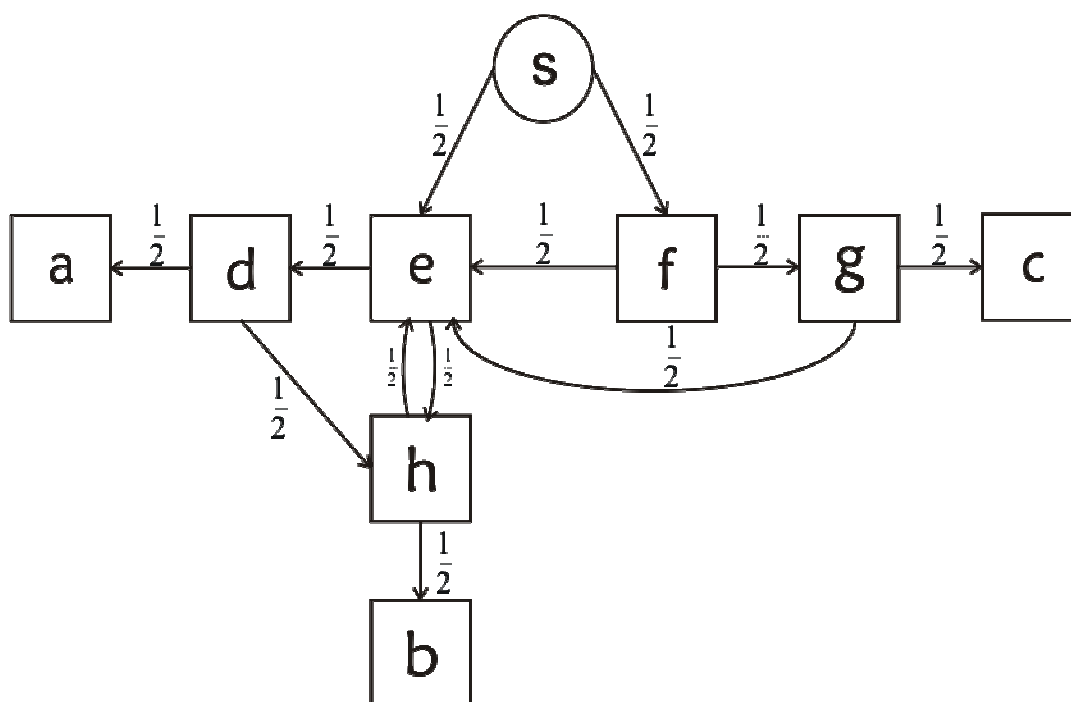
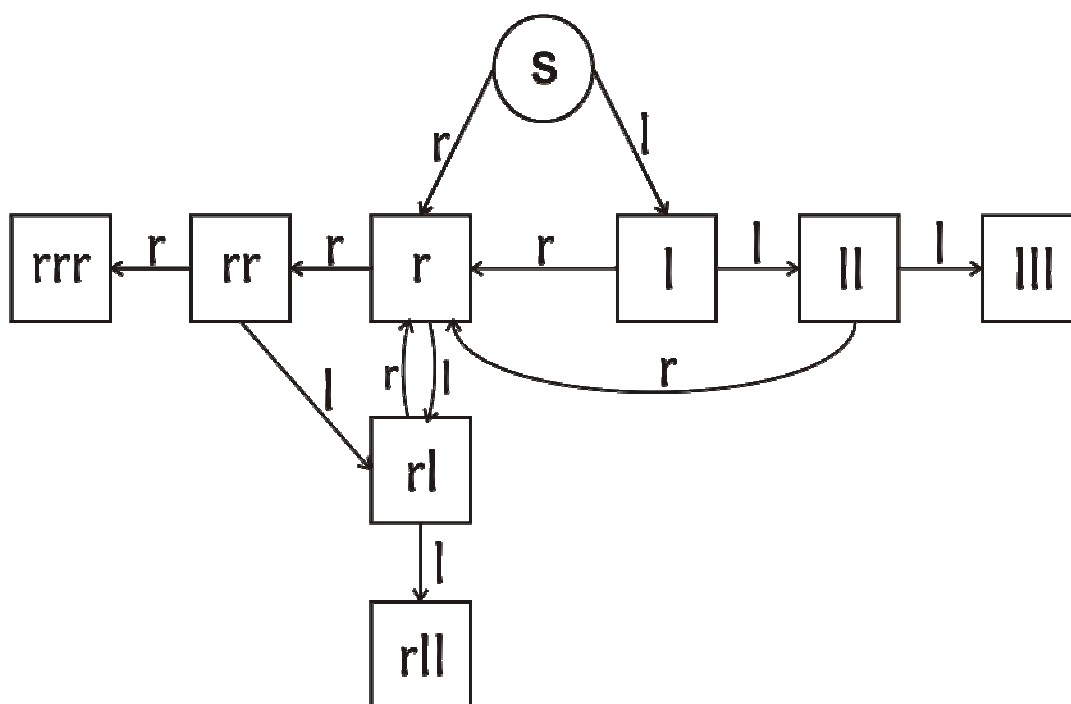
6.



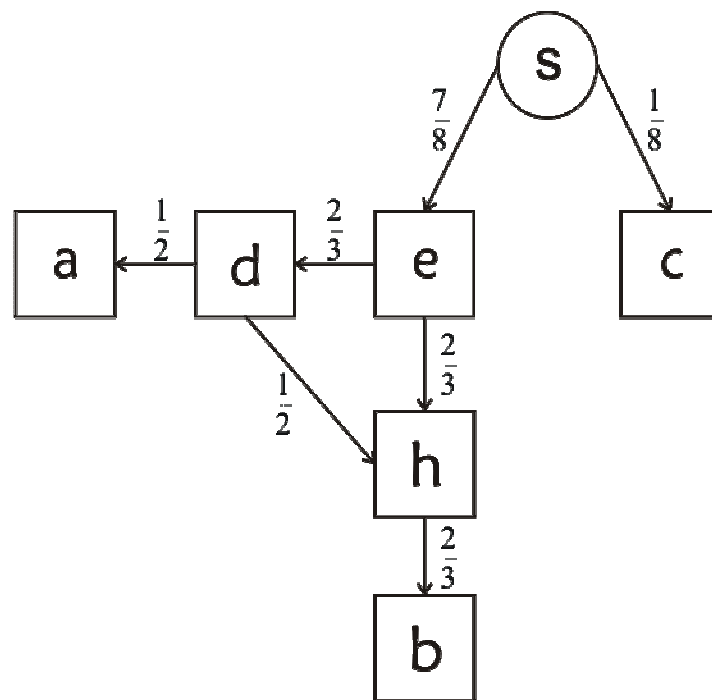
S pravděpodobností $\frac{5}{8}$ nejdříve padne série *lrl* a vyhraje hráč A. S pravděpodobností $\frac{3}{8}$ bude série *rlrr* vítězná a vyhraje hráč B.

Př.: Hod mincí bude opakován tak dlouho, dokud za sebou nepadne série *rrr*, tedy vyhraje hráč A, nebo dokud nepadne série *rl* a vyhraje hráč B, nebo až padne série *lll*, v tom případě vyhraje hráč C. Vypočítejte pravděpodobnost výhry jednotlivých hráčů postupným zjednodušením stochastického grafu.

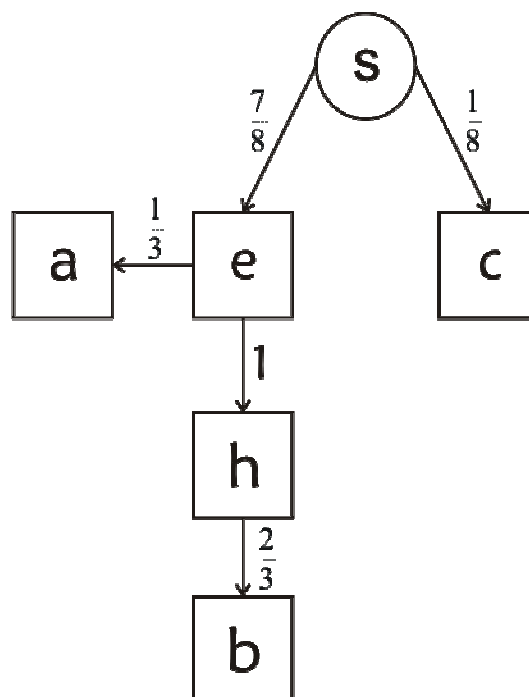
1.-2.



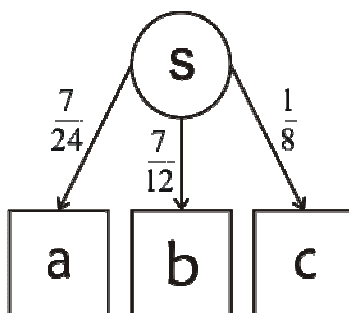
3.



4.



5.



Nejpravděpodobnější je, že série hodů skončí *rrl* a tak se vítězem nejpravděpodobněji stane hráč *B*. Naopak nejméně pravděpodobný je konec série *lll*, tudíž výhra hráče *C*.

U tohoto příkladu si je třeba uvědomit, že ne vždy mají série *lll* a *rrr* stejnou pravděpodobnost úspěchu.

4 – Penneyovy hry

Př.: Hod mincí – tři hráči.

Ve hře se opakuje hod mincí tak dlouho, dokud nepadne rub. Nejprve hází mincí hráč A, po něm hráč B, pak hráč C, pak opět hráč A atd. Padne-li některému z hráčů rub, zvítězí. Pro každého hráče vypočítejte pravděpodobnost jeho vítězství.

$$P_A = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3n-2}$$

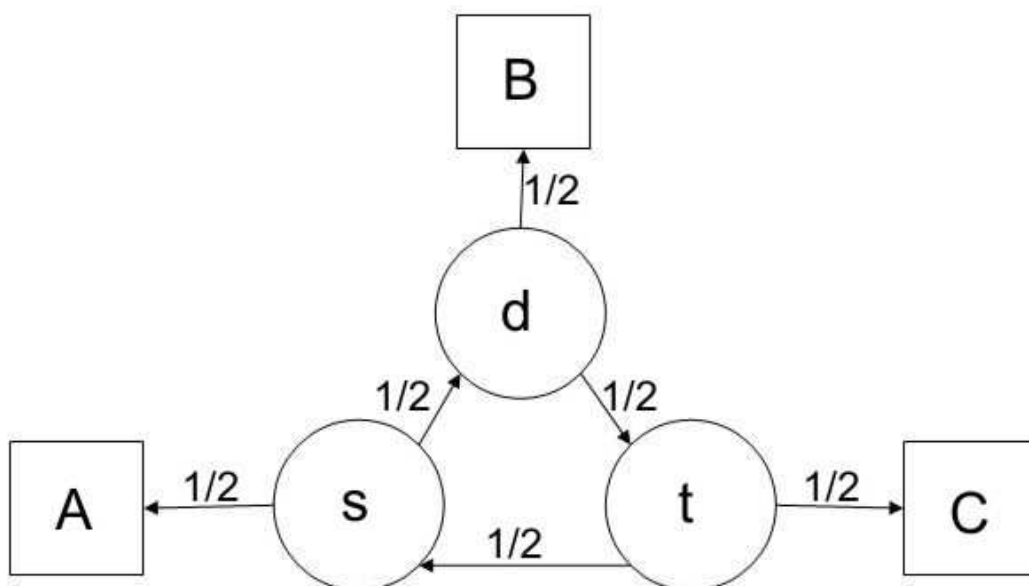
Sčítanci tohoto nekonečného součtu jsou členy geometrické posloupnosti s prvním členem $\frac{1}{2}$ a kvocientem $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

$$P_A = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{4}{7}$$

$$P_B = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7}$$

$$P_C = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}$$

Nyní spočítáme stejný příklad pomocí stochastického grafu.



V grafu začínáme na pozici $\textcircled{s}$ (start), hází hráč A. Pokud padne rub, vyhrává. To se stane s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Padne-li líc, hází hráč B. Pokud hodí rub, vyhrává a

hra končí. Jinak pokračuje hráč C . Jestli hodí rub, vyhraje on. Pokud i tentokrát padne líc, hází znovu hráč A .

Nyní si spočítáme pravděpodobnost výhry jednotlivých hráčů. Pravděpodobnost výhry hráče A označíme x , pravděpodobnost výhry hráče B označíme y a pravděpodobnost výhry hráče C označíme z .

$$P_A : x = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 x, \quad P_A = \frac{4}{7}$$

Pravděpodobnost výhry hráče B se spočítá pomocí stochastického grafu stejně. Začínáme na pozici s . S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ budeme házet a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ uspějeme. Bude-li neúspěšný i hráč C a znovu i hráč A , můžeme vyhrát. K tomu dojde s pravděpodobností $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

$$P_B : y = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 y, \quad P_B = \frac{2}{7}$$

Z grafu vidíme, že hráč C vyhraje, pokud hráči A a B budou neúspěšní, a poté hodí rub.

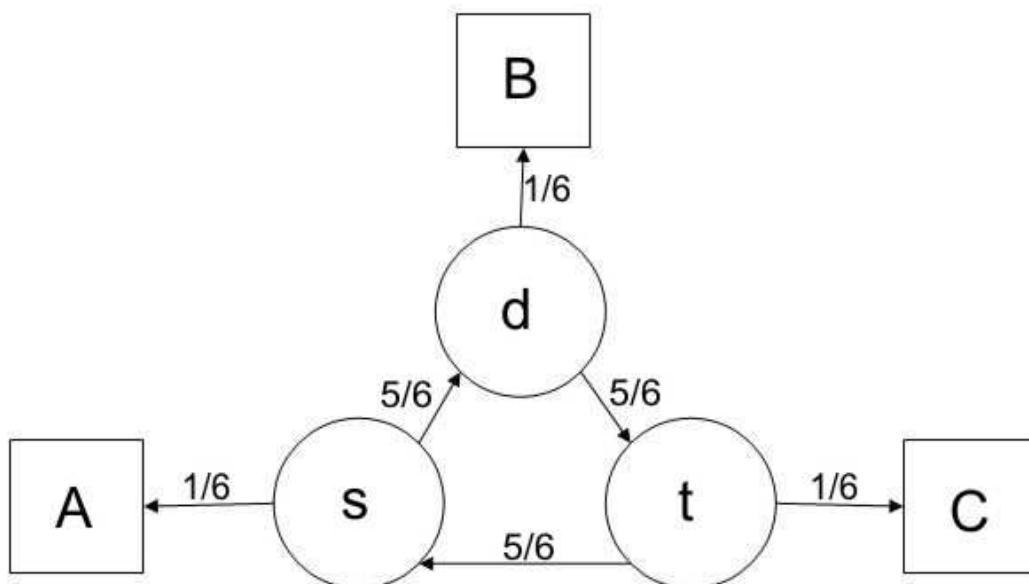
$$P_C : z = \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 z, \quad P_C = \frac{1}{7}$$

Pravděpodobnost výhry hráčů B a C lze spočítat i o něco jednodušeji. Stačí si uvědomit, že pravděpodobnost výhry hráč B je stejná jako hráče A , podmíněná však jeho prvním neúspěchem. Čili: $P_B = \frac{1}{2} \cdot P_A$

$$P_C = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot P_A$$

Př.: Hod kostkou – tři hráči.

Ve hře se hází kostkou tak dlouho, dokud nepadne šestka. Nejprve hází hráč A, po něm hráč B, pak hráč C, pak opět hráč A atd. Hráč, který hodí šestku, vyhrává. Pro každého hráče vypočítejte pravděpodobnost jeho vítězství.



V grafu začínáme na pozici s (start), hází hráč A. Pokud padne šestka, vyhrává. To se stane s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Nepadne-li šestka, hází hráč B. Pokud hodí šestku, vyhrává a hra končí. Jinak pokračuje hráč C. Jestli hodí šestku on, vyhraje. Pokud i tentokrát nepadne šestka, hází znovu hráč A.

Nyní si spočítáme pravděpodobnost výhry jednotlivých hráčů. Pravděpodobnost výhry hráče A označíme x , pravděpodobnost výhry hráče B označíme y a pravděpodobnost výhry hráče C označíme z .

$$P_A : x = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 x, \quad x = \frac{36}{91}$$

Začínáme na pozici s . S pravděpodobností $\frac{5}{6}$ budeme házet a s pravděpodobností $\frac{1}{6}$ uspějeme. Bude-li neúspěšný i hráč C a znovu i hráč A , můžeme vyhrát. K tomu dojde s pravděpodobností $\left(\frac{5}{6}\right)^3$.

$$P_B : y = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 y, \quad y = \frac{30}{91}$$

Z grafu vidíme, že hráč C vyhraje, pokud hráči A a B budou neúspěšní a poté hodí šestku.

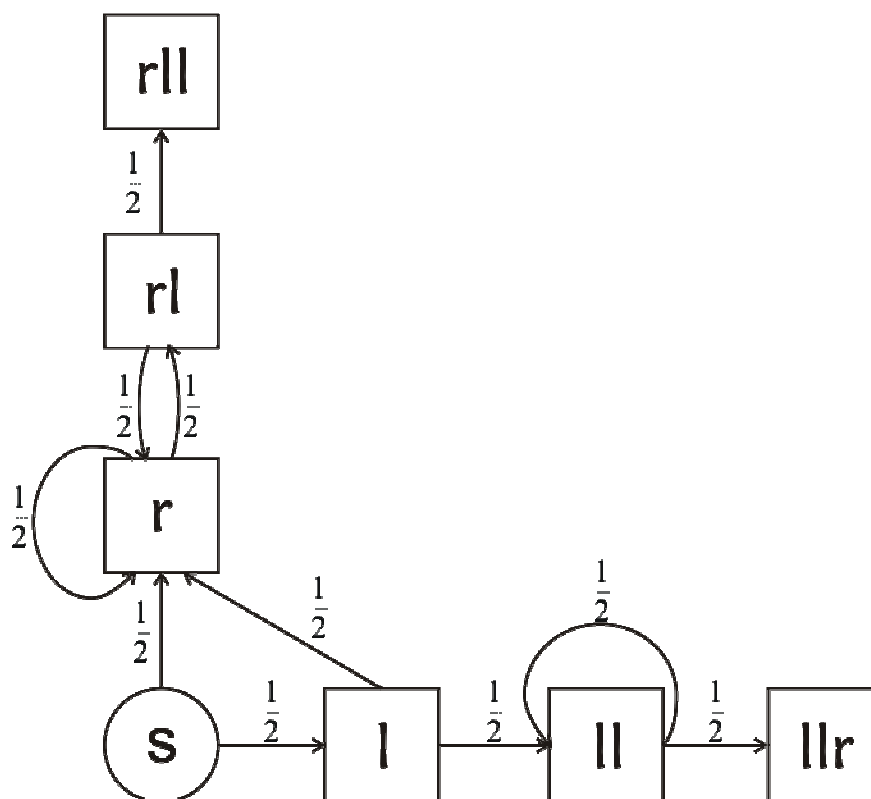
$$P_C : z = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 z, \quad z = \frac{25}{91}$$

Pravděpodobnost výhry hráčů B a C lze opět spočítat i o něco jednodušeji. Uvědomíme-li si, že pravděpodobnost výhry hráč B je stejná jako hráče A , podmíněná však jeho prvním neúspěchem. Čili: $P_B = \frac{5}{6} \cdot P_A$

$$P_C = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot P_A$$

Př.: Hod mincí – dva hráči

Hod mincí bude opakován tak dlouho, až po rubu dvakrát za sebou padne líc (... *rl*) – vyhrává hráč *A*, nebo když po dvou lících za sebou padne rub (... *llr*) tehdy zvítězí hráč *B*. Vypočítejte pravděpodobnosti vítězství obou hráčů.



Nejdříve si řekněme, jak dosáhne vítězství hráč *B*. Ten musí nejdříve hodit líc. Ten hodí s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Dále má jedinou možnost jak vyhrát a to hodit opět líc. Pokud hodil opět líc, nemůže už prohrát. Může opět hodit líc, tím se ale nedostane do jiné situace než ve které se nacházel před hodem. Bude házet tolikrát, dokud nehodí rub a nezvítězí.

$$P_{llr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Nyní bychom mohli pravděpodobnost vítězství hráče A vypočítat jednoduchým odečtením od 1. Pojdme si to ale vypočítat pomocí grafu. Již první hod může rozhodnout o vítězství hráče A . To v případě pokud padne rub. Ten padne s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Z bodu r nevede žádná cesta k vítězství hráče B . Hráč A má ještě jednu možnost, kterou může zvítězit. Stane se tak v případě, pokud první hod padne líc a zároveň hod druhý padne rub. Opět se tak dostane do bodu r , ze kterého už nemůže prohrát.

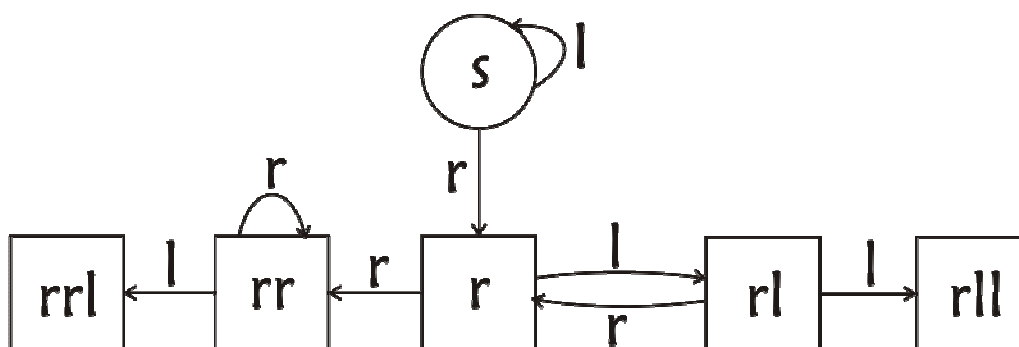
$$P_{rll} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Nyní můžeme říct, že pravděpodobněji vyhraje hráč A .

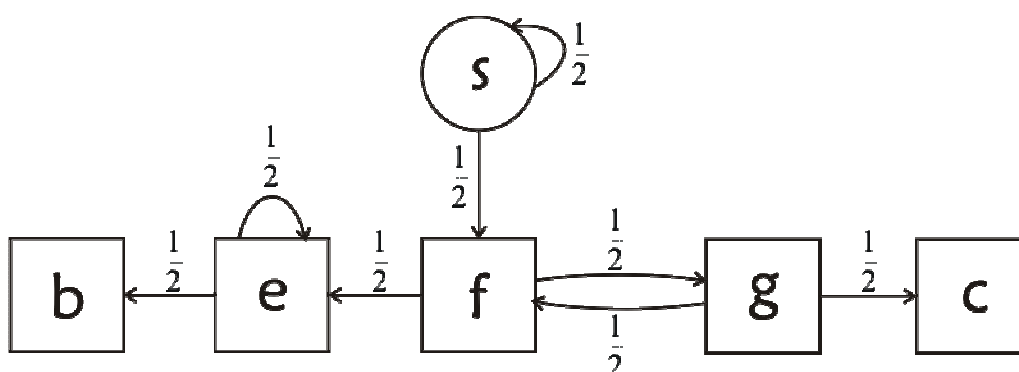
Př.: Nyní budeme mít několik sérií, ze kterých si hráči vybírají. Série $a = lrr$, $b = rrl$, $c = rll$, $d = llr$. Hráč A si vybírá první. Hráč B až po něm ze zbylých možností.

Na první pohled vidíme, že série a a c mají stejnou pravděpodobnost úspěchu. Označíme to takto: $a \approx c$. To samé platí o sériích b a d . Takže $b \approx d$. Z příkladu na straně 31 víme, že vítězství série c nad d je pravděpodobnější. Označíme takto: $c >> d$. Pokud tedy $a \approx c$ a $b \approx d$ můžeme říci, že $a >> b$. Nyní nám zbývá porovnat sérii b se sérií c .

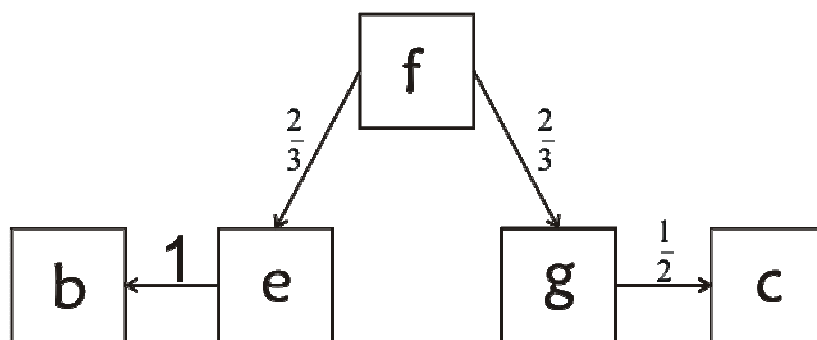
1.



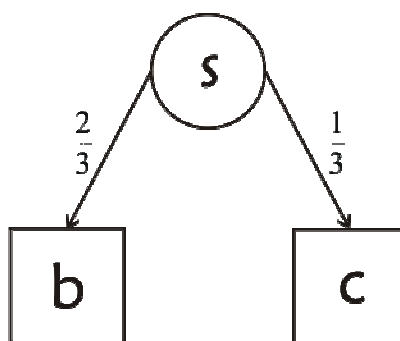
2.



3.



4.



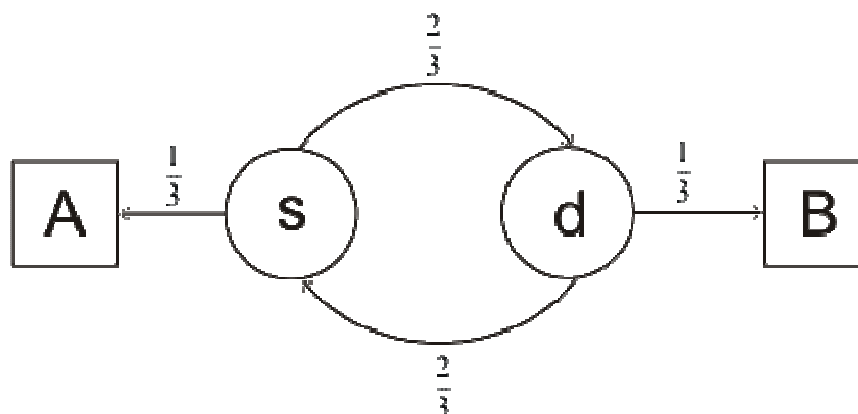
Právě jsme zjistili, že $b \gg c$. Tudíž také platí $d \gg a$.

Shrňme si jakých všech výsledků jsme dosáhli. $a \gg b$, $b \gg c$, $c \gg d$, $d \gg a$. Dokázali jsme, že žádná ze zmíněných sérií není nejlepší.

Pokud budeme chtít mít větší pravděpodobnost výhry, je pro nás důležité vybírat si až jako druhý. V tomto případě není výhodné mít možnost prvního výběru.

5 – Spravedlivé a nespravedlivé hry

Př.: Hráči A a B střídavě losují kouli z urny, kde jsou dvě červené koule a jedna bílá, tak dlouho, dokud někdo nevylosuje bílou kouli. Když vylosují červenou kouli, vrátí ji zpět do urny a losuje druhý hráč. Sestrojte pro tuto hru stochastický graf a zjistěte, jestli je hra vůči hráčům spravedlivá.



Nyní si spočítáme pravděpodobnost výhry pro jednotlivé hráče. Pravděpodobnost výhry hráče A označíme x .

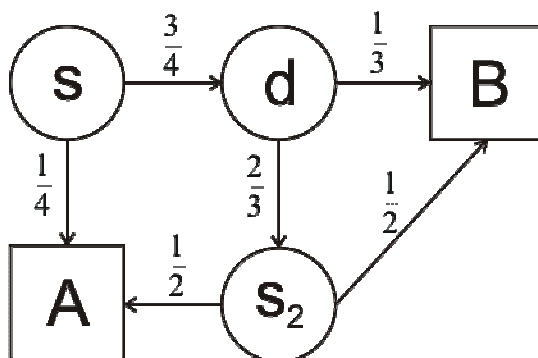
$$P_A : x = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 x, \quad P_A = \frac{3}{5}$$

$$P_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Zjištěné pravděpodobnosti se sobě nerovnají, hra je výhodnější pro hráče A.

Pokud chceme zajistit, aby hra byla spravedlivá, stačí, aby hráči po vylosování nevraceli kouli zpět do urny. Musí však být celkový počet koulí sudý a jen jedna vítězná.

Nyní tedy máme urnu, kde jsou tři koule červené a jedna bílá. Budeme losovat bez vracení.



Hráč A, který losuje první, má pravděpodobnost $\frac{1}{4}$, že vyhraje hned prvním tahem.

Pokud se tak nestane, tak hráč B má pravděpodobnost okamžité výhry $\frac{1}{3}$. Stane-li se, že

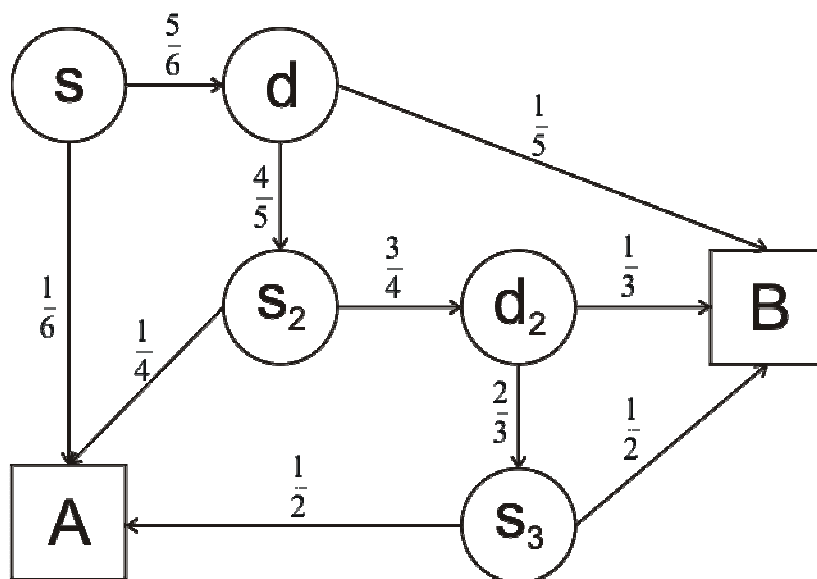
hráč A bude házet znovu (bod S_2), pravděpodobnost výhry a prohry je stejná, takže $\frac{1}{2}$.

Nyní si spočítáme celkové pravděpodobnosti a zjistíme, zda-li je hra skutečně spravedlivá.

$$P_A = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad P_B = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Pravděpodobnosti výhry hráčů A i B se rovnají, takže můžeme říct, že je hra spravedlivá.

Př.: V tomto příkladu máme urnu, kde je celkem šest koulí. Pět koulí je červených a jedna je bílá. Losujeme bez vracení.



Hráč A, který losuje první, má pravděpodobnost $\frac{1}{6}$, že vyhraje hned prvním tahem.

Pokud se tak nestane, tak hráč B má pravděpodobnost okamžité výhry $\frac{1}{5}$. Pokud hráč B

ještě nevyhrál, jsme v bodě S_2 . Losuje hráč A a s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ vyhraje. Pokud

nevyhraje, hráč B má šanci vyhrát a to s pravděpodobností $\frac{1}{3}$. Stane-li se, že hráč A bude

házet znovu (bod S_3), pravděpodobnost výhry a prohry je stejná, takže $\frac{1}{2}$. Oba hráči

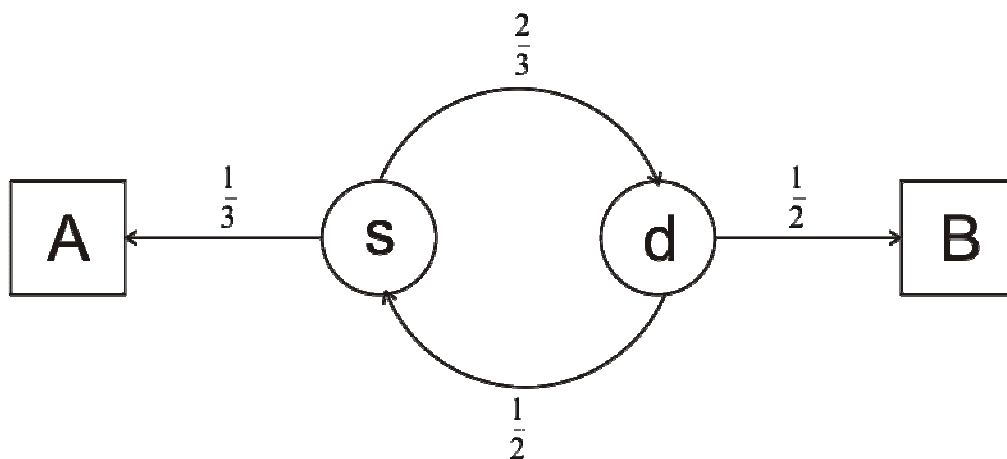
mají několik možností zvítězit. Je ale hra opravdu spravedlivá?

$$P_A = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P_B = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Pravděpodobnosti výhry hráčů A i B jsou stejné, hra je spravedlivá.

Př.: Hráč A bude házet kostkou. Pokud mu padne 1 nebo 2 zvítězí. Pokud prvním hodem nezvítězí, hází hráč B. Když hodí 3, 4 nebo 5 zvítězí. Hodí-li něco jiného hází opět hráč A. Sestrojte stochastický graf. Je tato hra spravedlivá?

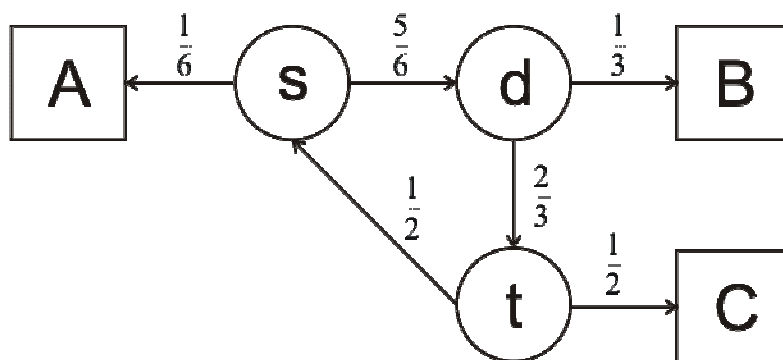


$$P_A : x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} x, \quad P_A = \frac{1}{2}$$

$$P_B : y = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} y, \quad P_B = \frac{1}{2}$$

Pravděpodobnost výhry jednotlivých hráčů je stejná, takže je hra spravedlivá.

Př.: Hru hrají tři hráči. Jako první hází kostkou hráč A. Padne-li mu šestka, vyhrává. Pokud ne, bude házet hráč B. Hráč B vyhraje, pokud hodí 5 nebo 4. Nebude-li úspěšný, hází hráč C. Ten vyhraje pokud hodí 1, 2 nebo 3. Při neúspěšném pokusu hází opět hráč A atd. Sestrojte stochastický graf. Je tato hra spravedlivá?



$$P_A : x = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} x, \quad P_A = \frac{3}{13}$$

$$P_B : y = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} y, \quad P_B = \frac{5}{13}$$

$$P_C : z = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} z, \quad P_C = \frac{5}{13}$$

Pravděpodobnost výhry jednotlivých hráčů není stejná, takže je hra není spravedlivá.

6 - Markovské řetězce

Markovské řetězce byly pojmenovány podle ruského matematika Andreje Andrejeviče Markova (1856 – 1922).

“Andrej A. Markov je nejvíce znám díky své práci v teorii pravděpodobnosti a v oblasti stochastických procesů, zejména Markovských řetězců.

Markov dokončil studium na Univerzitě v Sankt Petersburgu v roce 1878 a v roce 1886 se zde stal profesorem. Markovovy první práce se týkaly teorie čísel a analýzy, později limit integrálů, teorie aproximace a konvergence řad.



A. A. Markov (1886).

Po roce 1900 Markov použil metodu svého učitele Pafnutyho Čebyševa v teorii pravděpodobnosti. Dále studoval posloupnosti vzájemně závislých proměnných, kdy doufal, že nalezne limitní vědy teorie pravděpodobnosti v nejobecnějším případě. Dokázal centrální limitní větu za značně obecných podmínek.

Markov je znám zejména díky svému studiu Markovských řetězců, posloupností náhodných proměnných, kdy budoucí proměnná závisí pouze na aktuální proměnné a nikoliv na proměnných předchozích. Tato práce se stala základem teorie stochastických procesů.

Markov se také zajímal o poezii a studoval různé styly básní. Měl syna, který se narodil 9. září 1903 a pokračoval v práci svého otce.“

<http://natura.baf.cz/natura/2002/11/20021104.html>

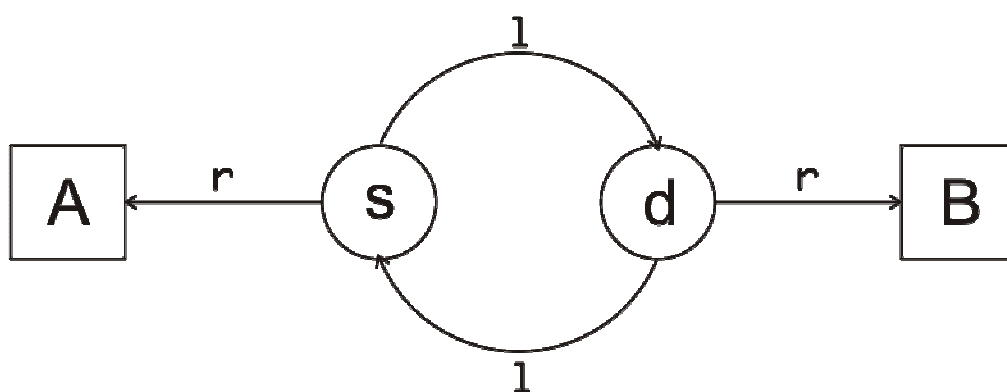
Markovské řetězce, nebo-li také Markovovy řetězce jsou jednoduchým případem stochastických procesů. Jedná se o časový proces, který je nespojitý a má parametr t . Ten nabývá hodnot z množiny přirozených čísel $t = 1, 2, \dots$

Máme-li posloupnost n pokusů, kde vždy označíme výsledek pokusu jedním z prvků konečné množiny výsledků a_j , $j = 1, 2, \dots$. Pokud chceme označit skutečnost, že v n -kolikátém pokusu nastal jev a_j , pak k tomu potřebujeme přirozené číslo k , $k = 1, 2, \dots, n$. Pak tedy zapíšeme skutečnost, že v k -tém pokuse došlo k výsledku a_j takto $A_j^{(k)}$

V našem zjednodušeném modelu určeném pro hry můžeme říci, že $t = k$. V podstatě jde o to, že v čase 3 došlo ke třetímu hození, losu apod.

Pozorování hry tvoří Markovův řetězec. Je ale důležité říci, že musí být v každém stavu procesu hry pravděpodobnost navštívení dalších stavů nezávislá na stavech předchozích. To znamená, že pravděpodobnost toho, že hra se v časovém okamžiku t ve stavu a_j vyvíjí nezávisle na tom, jak se vyvíjela dosud. Zjednodušeně lze říct, že chování v Markovových řetězcích je bezpaměťové.

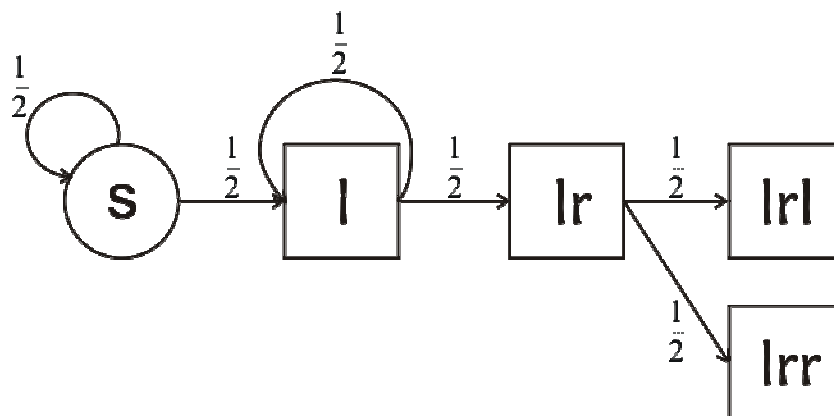
Př.: Dva hráči střídavě házejí mincí. Vyhrává ten, který první hodí rub. Začíná hráč A. Určete pravděpodobnost výhry hráče B v čase $t = 5$, takže pátým hodem.



Výhru hráče B pátým hodem můžeme zařídit pomocí jediné série rubů a líců a to je série $llllr$. Výsledná pravděpodobnost bude tedy $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

Př.: Hod mincí bude opakován tak dlouho, až padne série líc, rub, líc (... *lrl*) – vyhrává hráč A nebo série líc, rub, rub (... *lrr*) tehdy zvítězí hráč B. Vypočítejte pravděpodobnost, že hra skončí v čase $t = 5$, nebo-li pátým hodem.

Pro zjednodušení výpočtu si načrtneme stochastický graf.

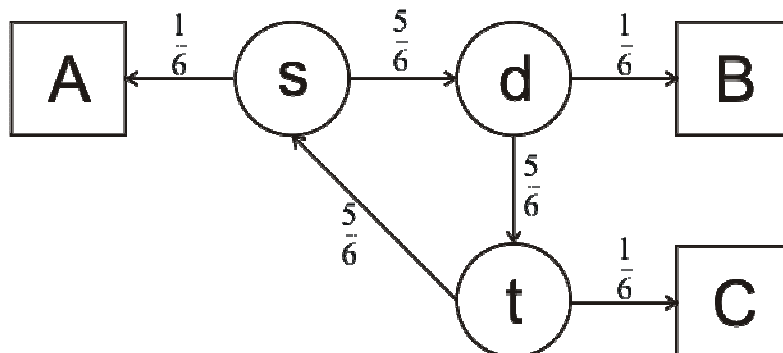


Z obrázku je patrné na první pohled, že hra je spravedlivá. Končí hody lrx , kde x je jakýkoli možný výsledek hodu. K tomu, aby hra skončila právě pátým hodem, potřebujeme ještě dva neúspěšné. Ty můžou padnout sériemi *rr*, *ll* a *rl*. Nikoli však sérií *lr*. Nyní tedy máme dvě série jak hra končí a tři série jak hra začíná. Zmíněné možnosti se mohou vzájemně kombinovat, takže je celkem šest možností, jak může hra probíhat, aby skončila právě pátým hodem.

$$rrlrr, rrlrl, llrr, llrl, rllrr, rllrl$$

Pravděpodobnost jedné série je $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ a máme šest různých sérií končících pátým hodem. Výsledná pravděpodobnost je $6 \cdot \frac{1}{32} = \frac{3}{16}$.

Př.: Tři hráči střídavě hází kostkou. Začíná hráč A, po něm hází hráč B a pak hráč C. Vyhrává ten, který první hodí šestku. Jaká je pravděpodobnost, že hra skončí dřív než hráč C bude házet podruhé?



Zavedeme si následující značení. Úspěšný hod budeme značit u . Ten má pravděpodobnost $\frac{1}{6}$. Neúspěšný hod s pravděpodobností $\frac{5}{6}$ označíme n . Úlohu můžeme spočítat více způsoby.

1. Napíšeme si všechny série, jak by mohla hra skončit ještě před druhým hodem hráče C:

$u, nu, nnu, nnnu, nnnnu$

$$P_u = \frac{1}{6}, P_{nu} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}, P_{nnu} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}, P_{nnnu} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}, P_{nnnnu} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$$

$$P = P_u + P_{nu} + P_{nnu} + P_{nnnu} + P_{nnnnu} = \frac{4651}{7776} = 0,598$$

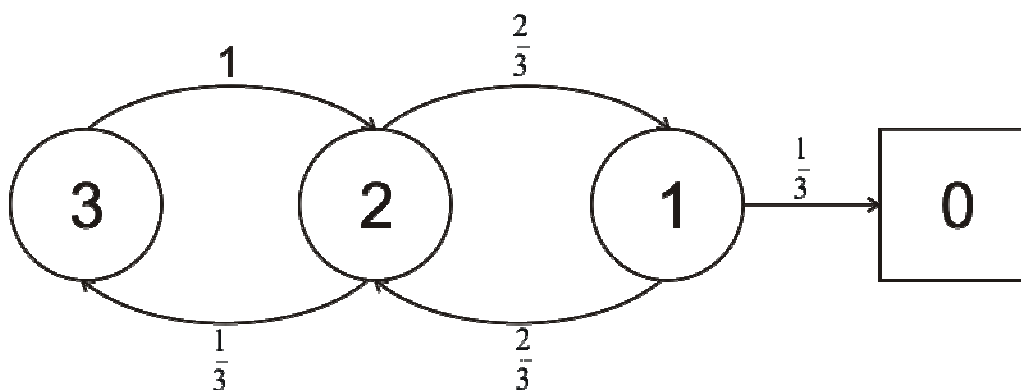
2. Další možnost jak příklad vypočítat je, uvědomit si, že hráč C bude házet podruhé jenom tehdy, pokud budou všichni hráči předním neúspěšní. Musí tedy nastat série $nnnnn$ a on bude házet. Abychom odpověděli na otázku, jaká je pravděpodobnost, že hra skončí dříve, než hráč C bude házet podruhé, odečteme pravděpodobnost série $nnnnn$ od 1.

$$P_{nnnnn} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} = 0,402$$

$$P = 1 - P_{nnnnn} = 1 - 0,402 = 0,598$$

7 – Bloudění

Př.: Pepa bydlí se třemi spolubydlícími. Všichni jsou v jednom pokoji a dívají se na televizi. Za Pepou přišla na návštěvu jeho přítelkyně a on by se chtěl dívat pouze s ní. Předpokládejme, že každou minutu jeden náhodně vybraný spolubydlící pokoj opustí nebo přijde zpátky do pokoje. Až nebude v pokoji nikdo ze spolubydlících, tak Pepa zamkne. Sestrojte stochastický graf popisující průběh změn počtu Pepovo spolubydlících v pokoji. Jak dlouho bude Pepa čekat?



Z grafu vidíme, že s pravděpodobností $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ bude Pepa čekat jenom 3 minuty.

Nyní si ukážeme jakými možnými způsoby může Pepa čekat 5 minut.

$$1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{81}, \text{ nebo } 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

$$\frac{8}{81} + \frac{2}{27} = \frac{14}{81}$$

Pepa bude čekat 5 minut s pravděpodobností $\frac{14}{81}$.

Doba čekání 7 minut.

$$1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{243} \quad \text{nebo} \quad 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{243}$$

$$1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{81} \quad \text{nebo} \quad 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{32}{729}$$

$$\frac{8}{243} + \frac{8}{243} + \frac{2}{81} + \frac{32}{729} = \frac{98}{729}$$

S pravděpodobností $\frac{98}{729}$ bude Pepa čekat právě 7 minut.

Pravděpodobnost čekání do 7 minut.

$$\frac{2}{9} + \frac{14}{81} + \frac{98}{729} = \frac{386}{729} = 0,529$$

Pepa s přítelkyní budou s pravděpodobností větší než $\frac{1}{2}$ čekat jen 7 minut.

Závěr:

Co říct na závěr této práce? Ukázali jsme si několik typů jednoduchých her. Je důležité uvědomit si, že ne všechny hry, které se na první pohled zdají být spravedlivé, spravedlivé opravdu jsou. Nyní tedy věřím, že nebudete zbytečně prohrávat, raději naopak někoho přelstíte a vyhrajete. Ukázali jsme si i hry, které jsou spravedlivé bez ohledu na pořadí hráčů, nebo také kde je výhodnější nechat první volbu na soupeři. To je další možnost, jak přelstít protivníky. Přesto vám přeji hodně štěstí, jelikož mít větší pravděpodobnost výhry někdy nestačí. I když je pravděpodobnost na vaší straně neznamena to, že pokaždé vyhrajete. Proto buďte trpělí, na výhru si počkejte a věřte, že znalost stochastických grafů se vám vyplatí.

Použité zdroje:

Plocki, A., Tlustý, P.: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé, Prométheus, Praha 2007

Plocki, A.: Stochastyka dla nauczyciela, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Plock 2005

Hebák, P., Kahounová, J.: Počet pravděpodobnosti v příkladech, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha 1982

<http://cs.wikipedia.org>

<http://natura.baf.cz/natura/2002/11/20021104.html>

http://www.upol.cz/fileadmin/user_upload/Veda/AUPO/Mathematica_VI_Matematika_3.pdf

<http://www.fi.muni.cz/research/formal-methods/stochastic.xhtml.cs>