



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Matematika ve fyzice

Harmonické oscilace a vlnění

Vypracoval: Jiří Blažek
Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice, duben 2013

Anotace

Předkládaná práce se zabývá matematickými prostředky, kterými je možné ve středoškolské fyzice popisovat harmonické kmity a vlnění. Nejčastěji jsou harmonické veličiny reprezentovány projekcemi rotujících symbolických vektorů – fázorů, přesto největší pozornost je věnována reprezentaci harmonických veličin komplexními čísly. Je ukázáno, že obě tyto metody ve skutečnosti představují formalizovaný způsob řešení algebraicko-diferenciálních rovnic, popisujících příslušné fyzikální děje. Všechny přístupy jsou při řešení modelových úloh uplatňovány současně a vzájemně porovnávány.

Text je především určen vyučujícím fyziky na středních školách a studentům fyziky na pedagogických fakultách.

Annotation

The presented work deals with mathematical tools, which are used to describe harmonic oscillations and waves in secondary schools. Harmonic quantities are most frequently represented as projections of rotating symbolic vectors – phasors, nevertheless most attention is paid to representation of harmonic quantities by complex numbers. It is shown that both these methods are in fact formalized methods of solution of differential-algebraic equations, describing relevant physical phenomena. All these approaches are applied simultaneously and compared to each other during solution of model examples.

The work is primarily intended for teachers of physics in secondary schools and for students of physics of pedagogical faculties.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Matematika ve fyzice jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury, uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s §47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, 30. dubna 2013

.....

Poděkování

Děkuji paní RNDr. Libuši Samkové, Ph.D. za odborné vedení a připomínky, které napomohly k odstranění některých nedostatků.

Obsah

1	Z historie komplexních čísel	9
2	Harmonický pohyb	14
3	Eulerův vztah	18
4	Obvody se střídavými proudy	22
4.1	Harmonické napětí na kondenzátoru	23
4.2	Harmonické napětí na cívce	26
4.3	Sériové zapojení RL	29
4.4	RLC obvod	35
4.5	Vybrané úlohy na střídavé proudy z Fyzikální olympiády	42
5	Vlnová optika	48
5.1	Postupná vlna	48
5.2	Youngův pokus	50
5.3	Interference na soustavě štěrbin	55
6	Závěr	61
	Seznam obrázků	62
	Seznam použité literatury	63

Úvod

Matematika ve výuce fyziky je značně široké téma. V práci jsem se zaměřil na užší oblast využití komplexních čísel ve středoškolské fyzice. Komplexní čísla lze velice efektivně uplatnit především při popisu periodických jevů. Týká se to oscilátorů (2. ročník gymnázií), vlnění (2. a 4. ročník) a především střídavých proudů (3. ročník). Uvedme si příklad. Studentům fyziky na středních školách i studentům fyziky na pedagogických fakultách obvykle nedělají problémy obvody se stejnosměrnými proudy. Většinu úloh lze řešit z Ohmova zákona, známého již ze základní školy, pouze u složitějších obvodů je někdy třeba výjimečně sáhnout ke Kirchhoffovým zákonům. Avšak žádný z těchto zákonů pro střídavé proudy neplatí. Na střední škole se obvody se střídavými proudy řeší prostřednictvím vektorové metody, kdy se jednotlivým harmonickým funkcím přiřazují symbolicky vektory v rovině, tzv. fázory. Na tomto základě se fyzikální problém převede na problém čistě geometrický. Studenti používají skládání vektorů a počítají velikosti stran a úhlů v trojúhelnících pomocí sinové a kosinové věty. Složitější úlohy, které se objevují pravidelně ve fyzikální olympiádě v nejvyšší kategorii A, vedou touto metodou obvykle k nepřehledným výpočtům, a tak je jen malé procento úspěšných řešení. Na rozdíl od této metody je výpočet pomocí komplexních čísel velmi prostý. Podle dohodnutých pravidel se harmonickým funkcím a prvkům obvodu přiřadí komplexní výrazy a dále se postupuje stejně jako pro stejnosměrné obvody. Geometrický problém je tak redukován na podstatně jednodušší problém algebraický, spočívající v manipulaci s komplexními výrazy. V naprosté většině případů vystačíme s Ohmovým zákonem a běžnými pravidly pro skládání odporů, které se v komplexním případě nazývají impedancemi. Úlohy na střídavé proudy jsou proto – alespoň v autorských řešeních ve fyzikální olympiádě – standardně řešeny v komplexní symbolice. Na vysokých technických školách jde již o samozřejmost.

Je samozřejmé, že metody řešení úloh s periodickými ději prostřednictvím dvojrozměrných vektorů nebo komplexních čísel jsou pro studenty trochu záhadou. Dokonce i jejich učitelům bývá skryto, na čem jsou tyto metody založeny, jaký fyzikální

obsah je za skryt a proč vedou ke správnému výsledku. Na střední škole nemohou být tyto metody řádně zdůvodněny a ve vysokoškolských kurzech fyziky a elektrotechniky není již na nějaké detailnější vysvětlování čas. Ve skutečnosti fyzikální základ spočívá v zákonech o harmonických dějích, vyjádřených prostřednictvím algebraických a diferenciálních rovnic, přičemž vektorová či komplexní symbolika je pouze formalizovaný způsob jejich řešení. Odpovídá to známé metodě řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty pro neznámou funkci $f(t)$, kterou lze substitucí $f(t) = \exp(\lambda t)$ převést na rovnici algebraickou. V případě rovnic popisujících oscilace je řešení λ imaginární nebo komplexní. Proto jsem v práci vybral několik charakteristických příkladů, které řeším nejdříve prostřednictvím prvotních fyzikálních zákonů vyjádřených ve formě diferenciálních rovnic a pak ukazuji, jak vektorová a komplexní metoda s tímto řešením souvisí.

Práce má následující strukturu. První kapitola je věnována historii zavedení komplexních čísel. Tato historie – ačkoli velmi zajímavá – je spojena s čistě matematickým problémem řešení algebraických rovnic, proto jsem jí věnoval jen málo pozornosti.

Druhá kapitola se týká lineárního oscilátoru a jeho (matematické) souvislosti s kruhovým pohybem. Jde vlastně o zpracování tradičního středoškolského přístupu k harmonickému pohybu, který ale mívá ten nedostatek, že se neuvádí, že jde o pouhou matematickou analogii, fyzikálně jde o rozdílné jevy. Pokusil jsem se tuto analogii jasně vymezit.

Stručný úvod do komplexních čísel je podán v třetí kapitole. Nesupluji zde středoškolskou látku, pouze se více zaměřuji na goniometrický tvar těchto čísel, z kterého je nejlépe zřejmá jejich souvislost s goniometrickými funkcemi, o které nám při vyšetřování harmonických dějů ve skutečnosti jde. Čtvrtá kapitola je věnována hlavnímu tématu – střídavým proudům. Postupuji zde od nejjednoduššího zapojení (samotný kondenzátor a cívka) až po relativně obtížný RLC obvod. Řešení těchto obvodů jsem se snažil zpracovat z více hledisek, ale nejelegantnější a nepřehlednější je asi řešení za pomoci komplexní symboliky.

Závěrečná pátá kapitola je věnována další významné oblasti středoškolské fyziky – teorii vlnění a vlnové optice. Při studiu jevů interference, spočívajících v superpozici koherentních vln, důsledně porovnávám přístup, ve kterém se s goniometrickými funkcemi pracuje přímo, s přístupy založenými na využití dvojrozměrných vektorů a komplexních čísel.

Text je především adresován studentům fyziky na pedagogických fakultách a dále středoškolským studentům, hlouběji se zajímajícím o fyziku, a také jejich učitelům.

1 Z historie komplexních čísel

Abychom pochopili, jak obtížně byla komplexní čísla do matematiky zaváděna, připomeňme si, že ještě v 17. století nebyla jednoznačně přijímaná ani záporná čísla. Například Antoine Arnaud dokazoval, že podíl $(-1)/1=1/(-1)$ musí být nesmysl – "jak by menší ku většímu číslu mohlo být totéž jako větší ku menšímu?" [1, str.192]. Dokonce samotný Leibniz souhlasil s tím že "na tom něco je". Se zápornými čísly však pracovali už Indové (přibližně v 7 století našeho letopočtu), a Evropané, přes všechny zmíněné filosofické nejasnosti, si brzy troufli ukousnout ještě větší sousto, když se začali zabývat mnohem abstraktnějším a komplikovanějším tématem – odmocninou ze záporného čísla [1].

S odmocninami ze záporného čísla se dostaneme do styku především při řešení polynomů druhého a vyššího stupně. Řešení kvadratických rovnic bylo známo už ve starém Babylonu přibližně 2000 let př.n.l. [1], ale tam se těmito – dnes bychom řekli komplexními – čísly nezaobírali, neboť byly chápány jako nesmyslné [2]. K problému se znovu dostala skupina renesančních italských matematiků, a to přes rovnice třetího a čtvrtého stupně. Příběh těchto matematiků – rivalů si zde ve stručnosti připomeneme. Podrobnější vylíčení této historie lze nalézt v publikacích [2,3].

Luca Pacioli (1445-1514) byl nejen dobrý matematik, ale také vynálezce podvojného účetnictví a bilančních listů a přítel Leonarda da Vinciho. Do příběhu komplexních čísel vstoupil jedním omylem - prohlásil totiž, že řešení kubické rovnice není možné. S tím se **Scipione del Ferro** (1465-1526) nesmířil a takové řešení našel. Vyřešil speciální případ rovnice, kde se vyskytuje třetí mocnina neznámé, ale chybí ta druhá. Tento přístup se ukázal jako účinný. Jako matematik se Scipione zajímal o různé problémy – studoval zlomky, vzorce pro součty řad třetích mocnin apod., ale jeho prvenství při řešení kubických rovnic mu nakonec přineslo nejvíc slávy. Svě řešení nejdříve tajil, později jej prozradil svému žákovi Mariu Fiorovi. Ten ovšem nebyl nějak talentovaným matematikem, toto řešení mu mělo pouze sloužit k pokoření jeho vrstevníka **Niccola Fontanu** (1500-1577). Veřejně ho vyzval k soutěži, kdo vyřeší víc kubických rovnic z těch, které si navzájem zadají. Fontana pochopil, že Fiore nějaké

řešení velmi pravděpodobně má, z čehož plynulo, že kubické rovnice musejí být řešitelné. To byl pro Fontanu dostatečně motivující fakt aby takové řešení začal hledat. Nejen že ho našel, ale na rozdíl od Fiora ho pochopil hlouběji, takže výsledek jejich veřejného souboje byl jednoznačný: z třiceti úloh, které zadal Fiore, Fontana vyřešil všechny, naopak Fiore nevyřešil ani jednu Fontanovu úlohu.

Niccola Fontana byl zajímavou postavou matematiky; kromě toho že figuruje v našem příběhu komplexních čísel, dokázal také spočítat objem libovolného čtyřstěnu jako funkci vzdáleností všech dvojic vrcholů. Mimoto se zabýval balistickými dráhami koulí. Z jeho výpočtů vycházel později Galileo. Dnes je Fontana spíše známý pod přezdívkou **Tartaglia** (v překladu "koptavec"), neboť v dětství na něj zaútočil opilý voják a z tohoto střetnutí si Fontana odnesl nejen jizvy, ale i vadu řeči.

Stejně jako před ním Ferro, i Fontana své řešení tajil. Z dnešního pohledu, kdy se závodí o prvěství a publikují se výsledky v co možná nejkratším čase, to možná vypadá trochu iracionálně. Prozradil ho až svému příteli a také vrstevníkovi **Girolamovi Cardanovi**. Fontana si ale chtěl své "know-how" ponechat pro sebe, a tak mu řekl pouze výsledný vzorec, bez postupu jak ho odvodit, a navíc pod slibem, že ho Cardano nikomu neprozradí.

Cardano byl velice schopný matematik (mimo jiné stál na počátku teorie pravděpodobnosti) a lékař a svůj slib bral několik let vážně. Jenomže pak se přihodilo několik věcí. Nejdříve si odvodil Fontanův vzorec sám, což nepřekvapuje u matematika jeho formátu, věděl totiž nejen že to jde, ale i jak to má vyjít. Pak ale narazil na neuveřejněný spis Scipiona del Ferra, z něhož poznal, že Fontana nebyl první, kdo přišel na řešení kubických rovnic, a že toto řešení tudíž nepatří zcela jen jemu. Když pak jeho žák Lodovic Ferrari přišel na některé vlastnosti kvadrických rovnic (rovnic čtvrtého stupně), došel Cardano k názoru, že doba uzrála k publikování všech nově získaných poznatků o rovnicích vyšších řádů. Učinil tak v roce 1545 ve své knize *Ars Magna* ("Velké umění"). Přestože všechny autory – jak Ferrariho, tak Fontanu a del Ferra – citoval a poděkoval jim za jejich objevy, Fontana se cítil podveden a s Cardanem už nikdy nepromluvil.

Z hlavní věty algebry, kterou máme od Gausse, dnes víme, že polynom n -tého stupně má právě n (obecně komplexních) kořenů. Dokud byly známy pouze kvadratické rovnice, byly buď oba kořeny reálné nebo – řečeno tehdejší dobou – nesmyslné. Kubické rovnice však donutily matematiky zabývat se odmocninami ze záporných čísel vážněji. Za prvé tito matematici zjistili, že kubická rovnice má tři kořeny, z nichž právě dva mohou být komplexní. Za druhé si všimli, že součet i součin těchto dvou komplexních kořenů, pokud takový případ nastane, je reálné číslo (máme samozřejmě na mysli rovnice s reálnými koeficienty), a za třetí, i reálné kořeny těchto rovnic byly často vyjádřeny pomocí imaginárních čísel, které se nakonec překvapivě odečetly (tzv. *casus irreducibilis*).

Komplexní čísla jako první přestal ignorovat Cardano. Ve své knize *Ars Magna* řešil následující úlohu (kterou pro přehlednost zapíšeme v dnešní symbolice):

$$x + y = 10, \quad x \times y = 40$$

Jednoduchou úpravou dostaneme kvadratickou rovnici. Řešení je

$$x = 5 + \sqrt{-15}, \quad y = 5 - \sqrt{-15}$$

Cardano však nevěřil, že takový výsledek má nějakou hodnotu. Psal, že se k němu dostaneme jen pokud "se překoná jisté mentální utrpení". A i tak je výsledek "stejně rafinovaný jako zbytečný". Přes to všechno udělal Cardano první krok k pochopení komplexních čísel. Nepokoušel se odmocninu z mínus jedné zahrnout někam mezi ostatní reálná čísla, ale dělal s ní různé formální úpravy. Podle toho dnes odmocninu ze záporného čísla, např. $\sqrt{-15}$, nazýváme někdy Cardanovo formální číslo.

Na Cardana navázal další Ital Rafael Bombelli (1526-1572). Povoláním byl architekt, ale svými zájmy byl matematik. V roce 1572 vydal knihu *Algebra*, kde shrnul vše, co věděl o imaginárních číslech, a tím uzavřel fázi jejich zrodu. Mimo jiné se v ní zabýval již zmíněným "*casus irreducibilis*", a to v souvislosti s následující rovnicí:

$$x^3 = 15x + 4$$

Na první pohled můžeme uhádnout, že kořenem je 4. Budeme-li však danou rovnici řešit pomocí Cardanových vzorců, dostaneme

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Bombelli však upozoroval, že

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}, \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

Po sečtení vyjde onen reálný kořen 4.

Bombelli bral komplexní čísla vážně a jako první připouštěl, že jejich studium může být užitečné k získání reálných výsledků. Z počítání s komplexními čísly vytvořil Bombelli standardní algebru se vším, co k ní patří [1,4].

Další problém vyvstal v souvislosti s pokusy definovat logaritmus ze záporných čísel. V roce 1712 spolu sváděli potyčku kvůli této nejasnosti Bernoulli a Leibniz [1]. Zatímco Bernoulli argumentoval tím, že jelikož $\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$, tak po integrování obou stran této rovnice vyjde $\ln(-x) = \ln(x)$, Leibniz oponoval, že integrace funguje pouze pro kladná x . Do sporu se vložil Euler, který nejdříve prohlásil, že se oba mýlí, neboť integrace vyžaduje libovolnou konstantu, tedy $\ln(-x) = \ln(x) + c$ (kde c je konstanta, shodná s logaritmem z mínus jedné), a pak v roce 1748 našel "zázračnou" formuli

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

která tuto konstantu pomohla určit. Jelikož $e^{i\pi} = -1$, je $\ln(-1)$ rovno $i\pi, 3i\pi, 5i\pi$ atd.

Výše uvedený vzorec je asi to nejnáročnější, co hodlám z poznatků o komplexních číslech použít.

Na Eulera navázal Gauss se svou hlavní větou algebry a ztotožněním komplexních čísel s rovinou, kde imaginární osa je kolmá na reálnou. Následoval Hamilton s kvaterniony (1843) což jsou čísla s jednou reálnou a třemi imaginárními jednotkami. Kvaterniony, stejně jako jejich další zobecnění – oktoniony se sedmi imaginárními jednotkami – však už nebudou tématem naší práce. Jenom poznamenejme, že v roce 1958 byl podán důkaz, že existují pouze čtyři číselné struktury, ve kterých se dá smysluplně zavést násobení a k němu inverzní dělení: reálná čísla, komplexní čísla, kvaterniony a oktoniony.

Podstatná pro nás je aplikace imaginárních čísel na fyzikální problémy. Výrazný milník v tomto směru se stal v roce 1893 na konferenci v Chicagu, kde mladý doktorand matematiky Charles Steinmetz zveřejnil proslulý příspěvek, nazvaný „Complex Quantities and Their Use in Electrical Engineering“. V něm upozornil na výjimečnou efektivitu komplexní symboliky při řešení elektrických střídavých obvodů. Jeho článek začínal slovy:

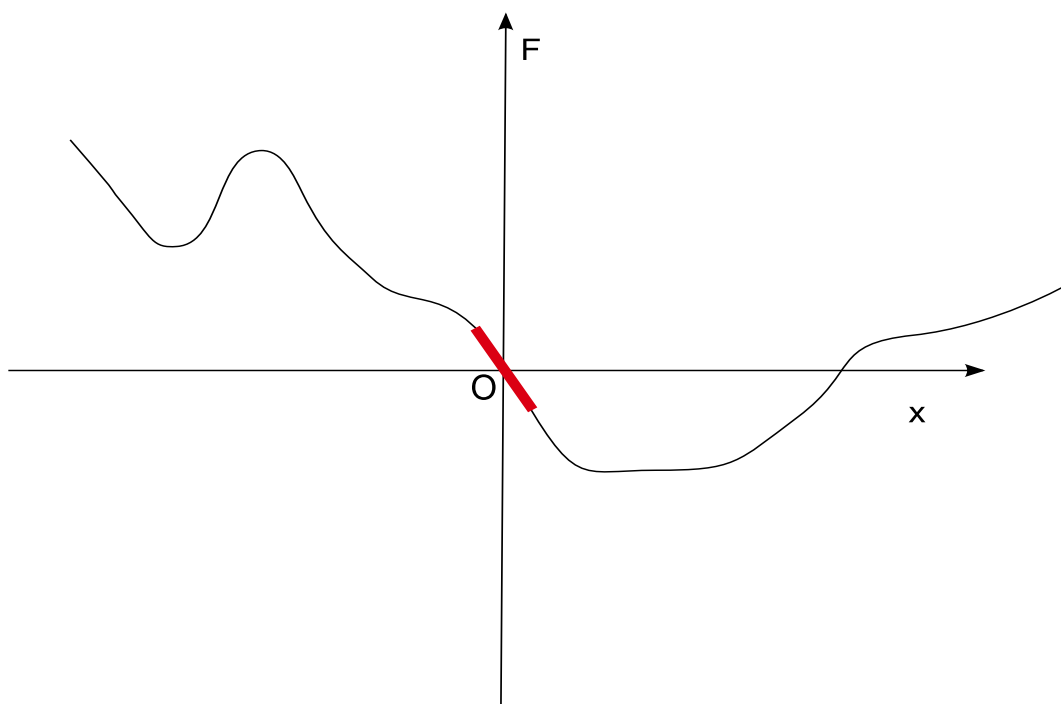
"We are coming more and more to use these complex quantities instead of using sines and cosines, and we find great advantage in their use for calculating all problems of alternating currents, and throughout the whole range of physics. Anything that is done in this line is of great advantage to science." [5, str.137]

Díky svému přístupu si Steinmetz později vysloužil přezdívku „Čaroděj, generující elektřinu z odmocniny z mínus jedné“ [5].

Z komplexních čísel se od té doby stal standardní nástroj výzkumu, a to až do dnešních časů. Z hlediska fyzikálních aplikací můžeme uvést kvantovou mechaniku, vzniklou na začátku 20.století, v níž jsou komplexní čísla a komplexní funkce neoddělitelnou součástí teorie. Co se týká čisté matematiky, zmíníme Riemannovu hypotézu (1859) [17], v současnosti asi nejslavnější nevyřešený matematický problém, který se zabývá kořeny tzv. zeta-funkce. Zeta funkci $\zeta(s)$ dostaneme jako součet modifikované harmonické řady, v níž jsou všechny členy v s -té mocnině. Riemannova hypotéza tvrdí, že všechna tzv. netriviální řešení rovnice $\zeta(s)=0$ leží v komplexní rovině na přímce rovnoběžné s imaginární osou a s reálnou částí $\frac{1}{2}$. Soudí se, že důkaz Riemannovy hypotézy by měl velký význam pro pochopení struktury prvočísel.

2 Harmonický pohyb

Vůbec nejčastější dynamický systém, se kterým se ve fyzice setkáváme, je harmonický oscilátor. Abychom pochopili, proč tomu tak je, představme si částici, jejíž pohyb je vázán na přímku, a jež se v daném okamžiku nachází v rovnovážném stabilním bodě. Přímku ztotožníme s osou x , jejíž počátek umístíme do rovnovážného stabilního bodu.



Obr.1: Síla v okolí stabilní rovnovážné polohy

Jaký průběh vykazuje síla $F(x)$, působící na částici v okolí rovnovážné polohy? To, že bod $x = 0$ je rovnovážný jinými slovy znamená, že síla je v tomto bodě nulová. Protože jde současně o rovnováhu stabilní, musí být síla v nejbližším okolí klesající funkcí x , což znamená, že pro malé kladné výchylky bude síla záporná a pro malé záporné výchylky bude naopak kladná. Jinak řečeno, síla bude mít charakter návratové síly. Ačkoli obecná závislost síly na výchylce může být obecně značně složitá, bude pro malé výchylky přibližně platit $F(x) \approx -kx$, kde k je kladná konstanta. Omezíme-li se v Newtonově pohybovém zákonu $F = ma$ (m je hmotnost částice a a její zrychlení) jen na malé výchylky ze stabilní rovnovážné polohy, dostaneme rovnici

$$ma = -kx \quad (1)$$

resp.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (2)$$

kde jsme za zrychlení dosadili $a = d^2x/dt^2$ a místo konstanty k zavedli novou konstantu $\omega = \sqrt{k/m}$.

Rovnice (2) je homogenní lineární diferenciální rovnicí 2. řádu s konstantními koeficienty, jejímž obecným řešením je, jak známo, funkce

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3)$$

Integrační konstanty A, B se v konkrétních případech určují z počáteční polohy a počáteční rychlosti oscilátoru.

Řešení (3) se stane názornějším, přejdeme-li od konstant A, B k novým konstantám x_0, φ vztahy $A = x_0 \cos \varphi, B = -x_0 \sin \varphi$. Pak

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

Z posledního zápisu je patrné, že řešením rovnice (1) jsou harmonické kmity s úhlovou rychlostí $\omega = \sqrt{k/m}$, amplitudou x_0 a počáteční fází φ .

Poznamenejme pro úplnost, že na střední škole se harmonické kmity uvádějí nejčastěji ve tvaru

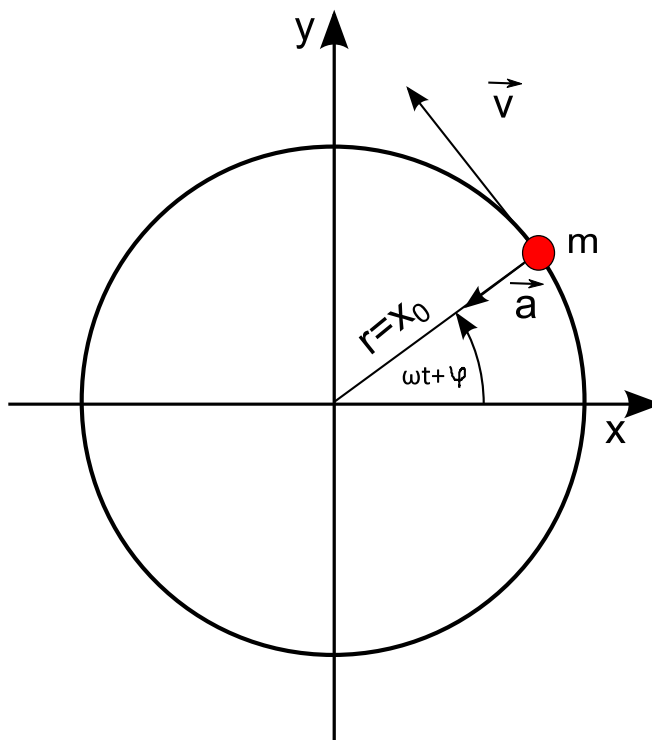
$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (5)$$

který bychom dostali z vyjádření (3) pro $A = x_0 \sin \varphi, B = -x_0 \cos \varphi$.

Diferenciální rovnice (2) v našem případě popisovala pohyb hmotného bodu, slabě vychýleného ze stabilní rovnovážné polohy. Ve skutečnosti má takto rovnice podstatně širší platnost. Může např. popisovat malé vibrace mostu nebo malé fluktuace náboje v plazmatu. S rovnicemi pro harmonický oscilátor se setkáváme ve všech oblastech fyziky, zdaleka nejde jen o oblast mechanického pohybu.

Podívejme se ještě, jak lze oscilátorovou rovnici řešit středoškolskými prostředky. K nim samozřejmě formulace problému pomocí diferenciální rovnice s jejím následným řešením nepatří. K nalezení řešení nám pomůže analogie s jevem, který studenti dobře znají a který zdánlivě s naším oscilátorem nijak nesouvisí.

Vyšetřujme rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici. Označme úhlovou rychlost pohybu ω a poloměr kružnice x_0 .



Obr.2: Pohyb hmotného bodu po kružnici

Studentům je známo, že velikost rychlosti hmotného bodu m je $v = \omega x_0$ a dostředivé zrychlení má velikost $a = v^2 / x_0 = \omega^2 x_0$. Dostředivému zrychlení odpovídá dostředivá síla $F = ma = m \omega^2 x_0$.

Projektujme nyní Newtonův pohybový zákon $\vec{F} = m\vec{a}$ do libovolné přímky, procházející počátkem kružnice. Nechť je touto přímkou osa x . Pak zřejmě

$$\begin{aligned}
x &= x_0 \cos(\omega t + \varphi) \\
v_x &= \omega x_0 \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega x_0 \sin(\omega t + \varphi) \\
a_x &= -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi) \\
F_x &= -m\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi)
\end{aligned}
\tag{6}$$

Povšimněme si, že mezi veličinami x , a_x a F_x našeho kruhového pohybu platí vztah

$$m a_x = -kx, \tag{7}$$

kde $k = m\omega^2$. Vztah (7), získaný projekcí kruhového pohybu, a rovnice (1) pro harmonický oscilátor jsou identické. Na základě známé matematické pravdy, že stejné rovnice mají stejná řešení bez ohledu na to, čeho se týkají, dostáváme okamžitě řešení (4) oscilátoru z první rovnice (6). Navíc jsme jako bonus získali i rychlost kmitavého pohybu, a to bez nutnosti derivovat:

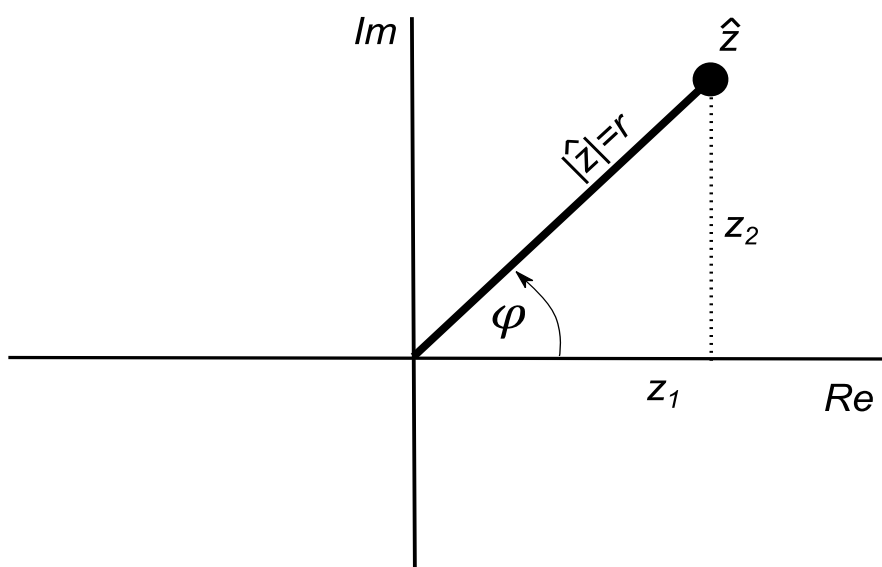
$$\begin{aligned}
x &= x_0 \cos(\omega t + \varphi) \\
v &= -\omega x_0 \sin(\omega t + \varphi)
\end{aligned}
\tag{8}$$

Poučný je zde jeden rys řešení, se kterým se budeme u periodických dějů setkávat i nadále: Původně jednorozměrný problém se snáze vyřešil po přidání jedné dimenze.

3 Eulerův vztah

Jak již bylo řečeno dříve, harmonické procesy je výhodné reprezentovat komplexními čísly. Při skládání harmonických funkcí je přímá manipulace s goniometrickými funkcemi obvykle těžkopádná. Vektorové skládání je v některých případech přehlednější, nicméně při řešení složitějších úloh, např. z oblasti střídavých proudů, je i ono nevyhovující. Jako velmi efektivní se zde jeví užití komplexních čísel, která na rozdíl od vektorů v rovině s operací skládání a odečítání disponují další mocnou operací - násobením a dělením.

Komplexní čísla se ve středoškolské fyzice běžně neobjevují, přestože jsou běžnou součástí středoškolské matematiky [11]. Připomeňme si zde pouze jejich goniometrický tvar. Komplexní číslo ve standardním tvaru $\hat{z} = z_1 + i z_2$ reprezentujeme v Gaussově rovině jako vektor $\vec{z} = (z_1, z_2)$.



Obr.3: Komplexní čísla v Gaussově rovině

Od kartézských souřadnic z_1, z_2 přejdeme k polárním souřadnicím z, φ :

$$z = |\hat{z}| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \quad (1)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{z_1}{|\hat{z}|}, \quad \sin(\varphi) = \frac{z_2}{|\hat{z}|}, \quad \left(\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{z_2}{z_1} \right)$$

Z inverzního vztahu $z_1 = r \cos \varphi$, $z_2 = r \sin \varphi$ dostáváme číslo $\hat{z}$ vyjádřené v polárních souřadnicích, což je onen požadovaný goniometrický tvar:

$$\hat{z} = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2)$$

Dalším důležitým krokem - pro studenty asi hůře pochopitelným - je zápis posledního členu ve formě Eulerova vztahu :

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \quad (3)$$

Udělejme si v této souvislosti krátkou odbočku. Položíme-li v předchozím vztahu $\varphi = \pi$, dostaneme identitu

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (4)$$

kteřá bývá někdy vydávána za nejkrásnější matematickou formuli [5,6]. Jsou v ní totiž obsaženy právě jednou fundamentální konstanty $0, 1, i, \pi$ a e .

Eulerův důkaz formule (3) z roku 1748 je založen na rozvoji funkcí e^x , $\cos x$ a $\sin x$ do Taylorových řad:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned} \quad (5)$$

Na základě podílového kritéria snadno ověříme, že řady na pravých stranách konvergují pro všechna x , včetně čísel komplexních. To umožňuje rozšířit definiční obor funkcí e^x , $\cos x$ a $\sin x$ do komplexních čísel. Speciálně dostáváme

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (6)$$

S využitím identit $i^{2k} = (-1)^k$ a $i^{2k+1} = i(-1)^k$ upravíme sumy přes sudé a liché mocniny:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = i \sin x$$
(7)

Důkaz je hotov.

Středoškolským studentům můžeme Eulerův vztah přiblížit poněkud přístupněji. V první fázi lze symbol e^{ix} pokládat za pouhé formální označení výrazu $\cos x + i \sin x$. Že tento výraz má všechny atributy exponenciální funkce, si studenti mohou ověřit snadno sami. Co očekáváme od exponenciální funkce? Např. tyto vlastnosti:

$$e^0 = 1$$

$$\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix}$$

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$$
(8)

Na ukázkou si ověříme pouze poslední identitu. Po jejím "dekódování" jde o ověření vztahu

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y),$$
(9)

resp. po roznásobení levé strany

$$(\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) =$$

$$= \cos(x+y) + i \sin(x+y)$$
(10)

Poslední vztah s ohledem na známé součtové vzorce skutečně platí.

I když již víme, že výraz $\cos x + i \sin x$ vykazuje vlastnosti typické pro exponenciální funkce, není zatím jasné, proč jsme dali přednost Eulerovu označení e^{ix} a ne např. 10^{ix} nebo π^x . Nyní již musíme využít prostředků vyšší matematiky a výraz $\cos x + i \sin x$ derivovat nebo integrovat. Vybereme si první možnost:

$$(\cos x + i \sin x)' = -\sin x + i \cos x = i(\cos x + i \sin x)$$
(11)

čili $(e^{ix})' = i e^{ix}$, jak se také očekává od exponenciální funkce se základem e a exponentem ix .

Pro účely pozdějších referencí uvedeme ještě Eulerův vzorec pro funkce $\cos x$ a $\sin x$. Je:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (12)$$

Odtud

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (13)$$

Po tomto nezbytném úvodu následují příklady praktického využití komplexních čísel ve středoškolské fyzice. Začneme střídavými obvody se zapojenými odpory, kondenzátory a cívkami.

4 Obvody se střídavými proudy

Pokud by se čtenář hlouběji zajímal o problematiku střídavých proudů, kterou se v následujících podkapitolách 4.1 až 4.5 budeme zabývat, doporučuji tyto publikace: [10] - středoškolská učebnice v níž jsou vysvětleny základy, obvody se řeší pouze vektorovou metodou; [13] – úvodní vysokoškolská skripta, jež zohledňují i komplexní symboliku; [14] – kniha, věnující se problematice už na poměrně náročné úrovni.

V následujících ukázkových úlohách budeme řešit střídavé proudy třemi způsoby. „Školní“ vektorovou metodou, v komplexní symbolice a pomocí diferenciální rovnice. Nejfyzikálnější - dá-li se to tak nazvat - je řešení vycházející z diferenciální rovnice. Na konkrétních úlohách si ukážeme, jak toto řešení souvisí s vektorovým přístupem a s algebraickým řešením v komplexní symbolice.

Poznamenejme ještě, že řešení střídavých proudů prostřednictvím vektorů se ve středoškolské fyzice nazývá obvykle metodou fázorů, řešení prostřednictvím komplexních čísel se nazývá symbolickou metodou. Jaký je asi původ těchto termínů? Ve fyzice pomocí vektorů nejčastěji popisujeme veličiny, které jsou charakterizovány velikostí a směrem v reálném (fyzickém) prostoru. Naproti tomu jsou harmonické veličiny reprezentovány vektory z abstraktního dvojrozměrného prostoru. Velikost vektoru je rovna amplitudě příslušné veličiny, jeho polární úhel odpovídá její fázi. Aby se tyto vektory odlišily od vektorů z „fyzického“ prostoru, nazývají se fázory. Komplexní čísla jsou zde zřejmě chápána – ne zcela správně – jen jako symboly, zastupující „skutečné“ reálné veličiny.

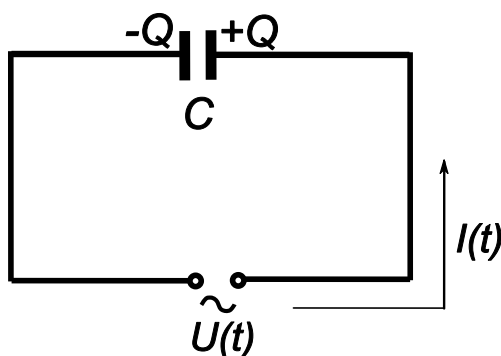
Domnívám se, že je zbytečné a pro studenty nejspíše i matoucí zavádět nové termíny, máme-li k dispozici termíny již zažitě. V další části práce budu proto mluvit o vektorové metodě a metodě komplexních čísel.

4.1 Harmonické napětí na kondenzátoru

Začneme touto úlohou: Na kondenzátor o kapacitě C je přivedeno střídavé napětí

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

Máme určit proud $I(t)$, procházející kondenzátorem.



Obr.4: Obvod střídavého proudu s kondenzátorem

Označme symbolem $Q(t)$ proměnný náboj na deskách kondenzátoru. Kondenzátor se střídavě nabíjí a vybíjí a tento mechanismus způsobuje, že obvodem prochází časově proměnný proud. Děj je zřejmě fyzikálně popsán dvěma rovnicemi:

$$U = \frac{Q}{C}, \quad I = \frac{dQ}{dt} \quad (2)$$

První rovnice udává známý vztah mezi napětím a nábojem na kondenzátoru, druhá dává do souvislosti proud se změnou náboje na deskách kondenzátoru. První rovnici zderivujeme podle času a za dQ/dt dosadíme z rovnice druhé. Obdržíme tak základní rovnici

$$I = C \cdot \frac{dU}{dt} \quad (3)$$

Konkrétně pro harmonické napětí (1) dostaneme odtud harmonický průběh proudu

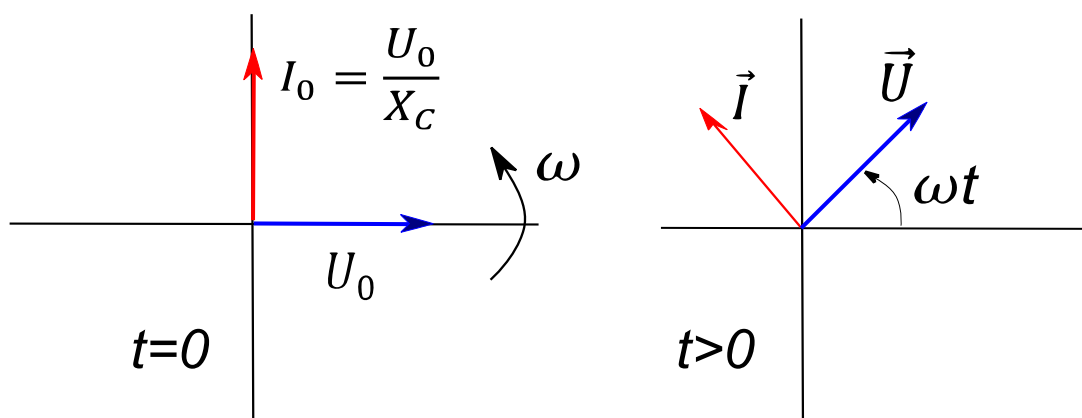
$$I = -\omega C \cdot U_0 \sin(\omega t) = \frac{U_0}{X_C} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

kde

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (5)$$

je kapacitance kondenzátoru. Ta vystupuje v roli odporu pro amplitudu proudu, $I_0 = U_0 / X_C$. Jde o analogii Ohmova zákona $I = U / R$ pro stejnosměrné napětí na odporu R .

Řešení (4) lze dát názornou geometrickou interpretaci. Veličiny U a I si představme jako x-ové složky vektorů $\vec{U}$, $\vec{I}$ o velikostech U_0 , I_0 , rotujících v rovině xy s úhlovou rychlostí ω , přičemž vektor $\vec{I}$ se předbíhá o úhel $\pi/2$ před vektorem $\vec{U}$.



Obr.5: Vektorové řešení obvodu s kondenzátorem

Ve složkovém zápisu jde o vektory

$$\begin{aligned} \vec{U} &= [U_0 \cos(\omega t), U_0 \sin(\omega t)] \\ \vec{I} &= [I_0 \cos(\omega t + \pi/2), I_0 \sin(\omega t + \pi/2)] \end{aligned} \quad (6)$$

Fyzikální význam mají pouze jejich x-ové složky.

Můžeme pokročit ještě dále, přiřadíme-li těmto vektorům v rovině komplexní čísla předpisem

$$\vec{a} = (a_x, a_y) \rightarrow \hat{a} = a_x + i a_y \quad (7)$$

Na rozdíl od vektorů lze komplexní čísla navíc násobit a dělit. Toho využijeme při opětovném řešení rovnice (3), kterou doplníme o imaginární složku. Ta nás fakticky nebude zajímat, usnadní nám však jinak těžkopádnou přímou manipulaci s goniometrickými funkcemi. Ačkoli tohoto konkrétního příkladu se zjednodušení netýká, výhodu práce s komplexními čísly oceníme později při řešení složitějších obvodů.

V souladu s tímto programem nahradíme napětí U ve vztahu (1) (resp. vektor $\vec{U}$ v (6)) komplexním číslem

$$\hat{U} = U_0 \cos(\omega t) + i U_0 \sin(\omega t) = U_0 e^{i\omega t} \quad (8)$$

Je zřejmé

$$\frac{d\hat{U}}{dt} = -\omega U_0 \sin(\omega t) + i \omega U_0 \cos(\omega t) = i \omega U_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (9)$$

resp.

$$\frac{d\hat{U}}{dt} = i \omega \hat{U} \quad (10)$$

Komplexní analogií rovnice (3) pro proud je tak rovnice

$$\hat{I} = C \frac{d\hat{U}}{dt} = i \omega C \hat{U} = \frac{\hat{U}}{\hat{X}_C} \quad (11)$$

kde jsme vztahem

$$\hat{X}_C = \frac{1}{i \omega C} = -\frac{i}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \cdot e^{-i\pi/2} \quad (12)$$

zavedli komplexní kapacitanci. Uvádíme ji zde jednak ve standardním tvaru, jednak ve tvaru goniometrickém. Povšimněme si, že v komplexní symbolice jsme vztahem (11) dosáhli úplné analogie s Ohmovým zákonem $I = U/R$. Ten nyní platí nejen pro amplitudy, ale i pro časově proměnné (komplexní) veličiny. Skutečná hodnota proudu je daná reálnou částí jeho komplexní reprezentace $\hat{I}$:

$$I = \operatorname{Re} \hat{I} = \operatorname{Re} \frac{\hat{U}}{\hat{X}_C} \quad (13)$$

Při výpočtu podílu na pravé straně této rovnice můžeme pracovat se standardním tvarem komplexních čísel i s tvarem goniometrickým. Ačkoli jde v tomto případě o triviální výpočet, uvedeme si jako ilustraci obě možnosti:

a) Výpočet ve standardním tvaru

$$I = \operatorname{Re} \left[i \omega C U_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right] = -\omega C U_0 \sin \omega t = \omega C U_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (14)$$

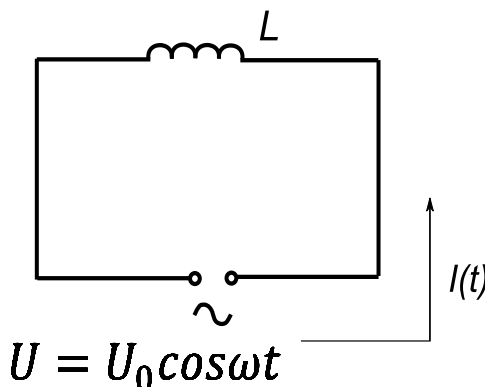
b) Výpočet v goniometrickém tvaru

$$I = \operatorname{Re} \left(\frac{U_0 e^{i \omega t}}{\frac{1}{\omega C} e^{-i \pi / 2}} \right) = \omega C U_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (15)$$

Je zřejmé, že druhý způsob je elegantnější, byť pro studenty bezpochyby abstraktnější: Pod komplexním číslem ve standardním tvaru si běžně představíme vektor v Gaussově rovině, na exponenciály s čistě imaginárními exponenty je třeba si nejdříve zvyknout.

4.2 Harmonické napětí na cívce

Nyní budeme vyšetřovat průběh proudu v cívce, na kterou je přivedeno harmonické napětí. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že cívka má nulový ohmický odpor (ideální cívka).



Obr.6: Obvod střídavého proudu s cívkou

Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce indukuje proměnné magnetické pole v cívce o indukčnosti L napětí

$$U_i = -L \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

kde $I(t)$ je proud protékající cívkou.

Jelikož má cívka podle předpokladu nulový odpor, musí být celkové napětí v obvodu, dané součtem napětí zdroje a napětí indukovaného v cívce, nulové. Odtud dostáváme základní rovnici pro cívku:

$$U(t) - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (2)$$

Diferenciální rovnicí (2) je proud $I(t)$ již určen. Pro harmonický průběh napětí

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (3)$$

dostáváme diferenciální rovnici

$$L \frac{dI}{dt} = U_0 \cos(\omega t) \quad (4)$$

kteřou lze řešit např. metodou separace proměnných:

$$\begin{aligned} dI &= \frac{U_0}{L} \cos(\omega t) dt \\ I &= \frac{U_0}{L} \int \cos(\omega t) dt = \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t) + I_0 \end{aligned} \quad (5)$$

Integrační konstanta I_0 odpovídá ideální situaci, kdy obvodem o nulovém odporu a nulovém napětí může protékat nenulový stejnosměrný proud. Jak ale uvidíme v úloze z kapitoly 3.3, v reálném obvodu o nenulovém, byť zanedbatelném odporu dochází k rychlému útlumu této složky. Položíme proto v dalším $I_0 = 0$:

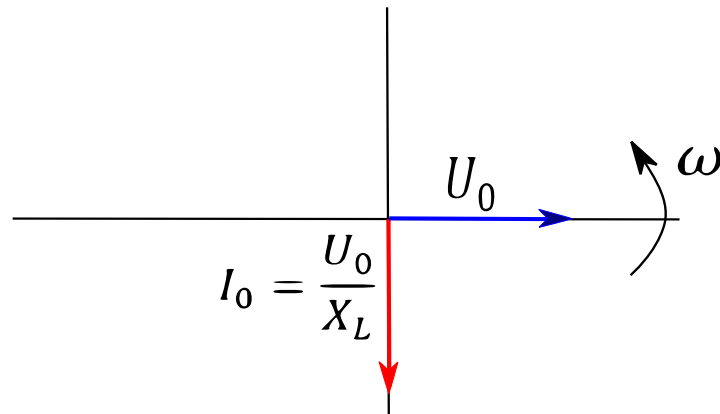
$$I = \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t) = \frac{U_0}{X_L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (6)$$

kde

$$X_L = \omega L \quad (7)$$

je indukance cívky. Amplitudy proudu a napětí jsou opět spojeny "Ohmovým zákonem" $I_0 = U_0 / X_L$, přičemž v roli odporu nyní vystupuje indukance.

Vztahu proudu a napětí lze dát – podobně jako u kondenzátoru – vektorovou formu:



Obr.7: Vektorové řešení obvodu s cívkou

Na obrázku jsou vektory $\vec{U}$, $\vec{I}$ o velikostech U_0 , I_0 zachyceny v okamžiku $t = 0$. Vektory rotují úhlovou rychlostí ω . Proud se za napětím opoždí o 90° . Připomeňme si, že na kondenzátoru se proud o 90° naopak předbíhá.

Diferenciální rovnici (4) ještě převedeme do komplexní reprezentace

$$L \frac{d\hat{I}}{dt} = \hat{U} \quad (8)$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{U} &= U_0 e^{i\omega t} \\ \hat{I} &= \hat{I}_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (9)$$

Zatím neurčená amplituda $\hat{I}_0$ je obecně komplexním číslem. S uvažováním identity

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = i\omega \hat{I} \quad (10)$$

přejde rovnice (8) v rovnici

$$\hat{U} = i\omega L \hat{I} \quad (11)$$

což je opět forma Ohmova zákona, v němž namísto odporu vystupuje komplexní indukance

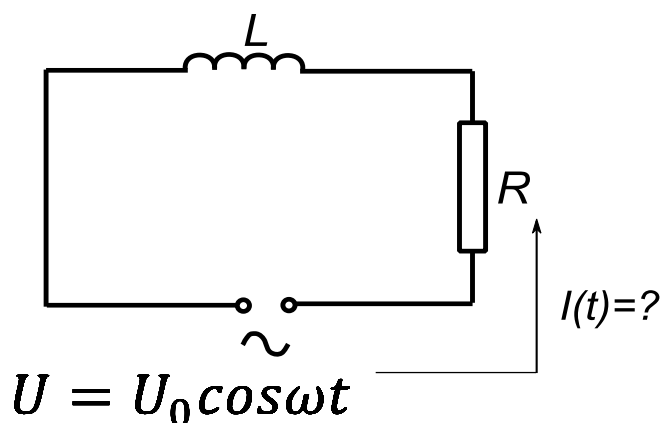
$$\hat{X}_L = i\omega L = X_L \cdot e^{i\pi/2} \quad (12)$$

Skutečný proud cívkou dostaneme jako reálnou část komplexního proudu $\hat{I}$:

$$I = \operatorname{Re} \left(\frac{\hat{U}}{\hat{X}_L} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{U_0 e^{i\omega t}}{X_L \cdot e^{i\pi/2}} \right) = \frac{U_0}{X_L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (13)$$

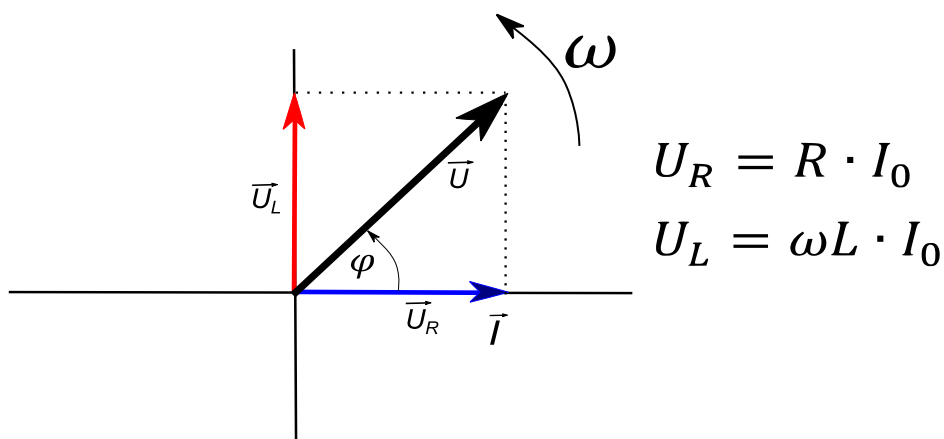
4.3 Sériové zapojení RL

Řešíme sériové zapojení zdroje střídavého napětí s odporem R a cívkou o indukčnosti L .



Obr.8: RL obvod se střídavým napětím

Vektorová metoda



Obr.9: Vektorové řešení RL obvodu

Soustava vektorů $\vec{U}, \vec{U}_L, \vec{U}_R, \vec{I}$ rotuje stálou úhlovou rychlostí ω , přitom vzájemné vztahy mezi jednotlivými vektory zůstávají konstantní. Vektor $\vec{U}$ celkového napětí je dán, hledáme vektor $\vec{I}$. Při řešení vyjdeme z toho, že vektor $\vec{U}_R$ je ve fázi s vektorem $\vec{I}$ a vektor $\vec{U}_L$ předbíhá $\vec{I}$ o úhel $\pi/2$.

Z obrázku dostáváme vztahy

$$U_0^2 = U_{0R}^2 + U_{0L}^2 = (R^2 + \omega^2 L^2) \cdot I_0^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{0L}}{U_{0R}} = \frac{\omega L}{R}.$$

Odtud

$$I(t) = \frac{U_0}{Z} \cdot \cos(\omega t - \varphi), \quad (1)$$

kde

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}, \quad \text{resp.} \quad \sin \varphi = \frac{\omega L}{Z}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}.$$

Komplexní metoda

Tutěž úlohu budeme nyní řešit prostřednictvím komplexních veličin. Využijeme toho, že v komplexním oboru lze použít Ohmův zákon, resp. zákony Kirchhoffovy ve tvaru, který známe pro stejnosměrné obvody.

Před vlastním řešením provedeme následující záměny:

$$\vec{U} = U_0 \cos \omega t \rightarrow \hat{U} = U_0 (\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t) = U_0 e^{i \omega t}$$

$$R \rightarrow \hat{R} = R$$

$$X_L = \omega \cdot L \rightarrow \hat{X}_L = i \cdot \omega L$$

$$I = ? \rightarrow \hat{I} = ?$$

Celková impedance (celkový odpor) obvodu je zřejmě

$$\hat{Z} = R + i \omega L = Z \cdot e^{i \varphi} \quad (Z, \varphi \dots \text{viz (2)})$$

Komplexní hodnoty proudu a napětí jsou svázány Ohmovým zákonem

$$\hat{U} = \hat{Z} \cdot \hat{I} \tag{3}$$

a) Výpočet reálné hodnoty proudu ze standardního tvaru komplexních čísel:

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \frac{U_0 (\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t)}{R + i \cdot \omega L} = \\ &= \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot [(R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t) + i \cdot (-\omega L \cos \omega t + R \sin \omega t)] \\ I &= \operatorname{Re} \hat{I} = A \cdot \cos \omega t + B \sin \omega t \end{aligned} \tag{4}$$

kde

$$A = U_0 \frac{R}{Z^2}, \quad B = U_0 \frac{\omega L}{Z^2} \tag{5}$$

b) Výpočet s využitím goniometrického tvaru komplexních čísel

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{Z e^{i\varphi}} = \frac{U_0}{Z} \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$I = \operatorname{Re} \hat{I} = \frac{U_0}{Z} \cos(\omega t - \varphi) \quad (6)$$

Výpočet v goniometrickém tvaru je sice rychlejší a řešení je přehlednější, nicméně zápis komplexních čísel v goniometrickém tvaru bude nejspíše pro většinu středoškolských studentů poněkud abstraktní. Není ovšem nutné jej používat, i když se tak běžně děje. Snadno totiž nahlédneme, že řešení (4) a (6) jsou skutečně identická, neboť úpravou poslední rovnice dostáváme

$$I = \frac{U_0}{Z} \cos(\omega t - \varphi) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

kde

$$A = \frac{U_0}{Z} \cos \varphi = \frac{U_0}{Z} \frac{R}{Z}, \quad B = \frac{U_0}{Z} \sin \varphi = \frac{U_0}{Z} \frac{\omega L}{Z}$$

(viz (5)).

Řešení z diferenciální rovnice

Tento přístup jsme si ponechali až nakonec. Vlastní fyzikální obsah děje je zachycen diferenciální rovnicí

$$U - L \frac{dI}{dt} = RI \quad (7)$$

vyjadřující, že součet napětí zdroje a napětí indukovaného v cívce se podle Faradayova zákona rovná napětí na odporu. Rovnici přepíšeme do tvaru

$$L \frac{dI}{dt} + RI = U_0 \cos(\omega \cdot t) \quad (8)$$

a) Řešení v reálném oboru

Obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice (8) je součtem obecného řešení homogenní rovnice I_h a řešení partikulárního I_p : $I = I_h + I_p$. Řešení homogenní rovnice

$$L \frac{dI_h}{dt} + R I_h = 0$$

nalezneme například metodou separace proměnných. Dostaneme

$$I_h(t) = I_{0h} \cdot e^{-Rt/L} \quad (9)$$

kde I_{0h} je integrační konstanta.

Zbývá najít jakékoli partikulární řešení nehomogenní rovnice (8). Na její pravé straně je funkce $\cos \omega t$; partikulární řešení se v tomto případě hledá ve tvaru

$$I_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (10)$$

Po dosazení z (10) do (8) dostaneme

$$(RA + L\omega B) \cdot \cos \omega t + (-L\omega A + RB) \cdot \sin \omega t = U_0 \cos \omega t$$

Rovnice bude splněna pro všechny okamžiky t , pokud koeficienty u funkcí kosinus a sinus na obou jejích stranách budou identické:

$$\begin{aligned} RA + L\omega B &= U_0 \\ -L\omega A + RB &= 0 \end{aligned}$$

Dostáváme $A = \frac{R}{Z^2} U_0$, $B = \frac{L\omega}{Z^2} U_0$, což souhlasí s předchozím řešením (4), resp. (6).

Úplné řešení je

$$I = I_{0h} + I_p = I_{0h} e^{-Rt/L} + I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Konstanta I_{0h} je určena počáteční hodnotou proudu. Avšak bez ohledu na její velikost pro $t \rightarrow +\infty$ člen s touto konstantou po určité době vymizí. Ustálené řešení je tak

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (11)$$

b) Řešení v komplexním oboru

Jak známo, fundamentální systém řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty se nejnázne hledá ve tvaru $e^{\lambda t}$, kde λ je obecně komplexní číslo. V případě, že řešíme úlohu s reálnými koeficienty a hledáme reálné řešení, stačí pro komplexní hodnotu λ provést záměnu

$$e^{\lambda t} \rightarrow \operatorname{Re}(e^{\lambda t}), \text{ resp. } e^{\lambda t} \rightarrow \operatorname{Im}(e^{\lambda t})$$

čímž dostaneme reálné řešení téže rovnice.

Rovnici (8) převedeme nejdříve do komplexního tvaru doplněním napětí U o imaginární složku $U_0 \sin \omega t$:

$$L \frac{d\hat{I}}{dt} + R\hat{I} = U_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad (12)$$

Vezmeme-li reálnou část rovnice, dostaneme:

$$L \frac{d(\operatorname{Re} \hat{I})}{dt} + R (\operatorname{Re} \hat{I}) = U_0 \cos \omega t$$

což je původní rovnice (8) pro $I = \operatorname{Re} \hat{I}$

Omezíme se hned od počátku na ustálené řešení. To hledejme ve tvaru

$$\hat{I} = I_0 e^{i(\omega t + \alpha)} \quad (13)$$

kde I_0 , α jsou zatím neznámé parametry. Po dosazení z (13) do (12) a s využitím identity $d\hat{I}/dt = i\omega \hat{I}$ dostaneme $(i\omega L + R) \cdot \hat{I} = \hat{U}$, což je Ohmův zákon (3).

Dále bychom postupovali jako v bodě (2). Abychom určili parametry I_0 , α řešení (13), převedeme (nepovinně) faktor $\hat{Z} = i\omega L + R$ do goniometrického tvaru $\hat{Z} = Z \cdot e^{i\varphi}$ a dosadíme za $\hat{I}$ z (13):

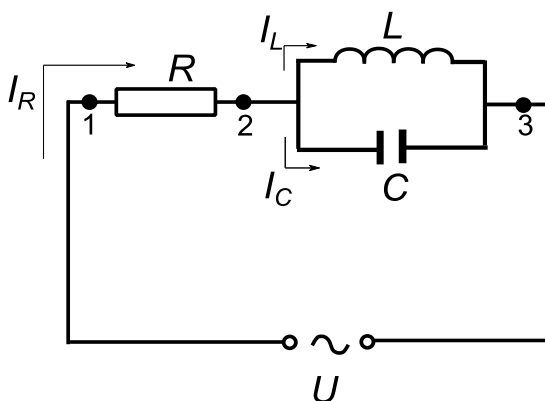
$$Z e^{i\varphi} I_0 e^{i(\omega t + \alpha)} = U_0 e^{i\omega t}.$$

Porovnáním obou stran dostaneme

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}, \quad \alpha = -\varphi, \quad I = \frac{U_0}{Z} \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$$

4.4 RLC obvod

Následující úloha rozhodně nepatří k triviálním, přesto svou náročností odpovídá podobným úlohám Fyzikální olympiády kategorie A.



Obr.10: RLC obvod se střídavým napětím

Obvod sestává ze zdroje střídavého napětí $U = U_0 \cos \omega t$, odporu R a paralelně zapojeného kondenzátoru o kapacitě C a cívky o indukčnosti L . Máme určit proudy I_R , I_C a I_L , protékající jednotlivými prvky, a dále napětí $U_R = U_{12}$ na odporu R a $U_p = U_{23}$ na paralelním úseku LC .

Opět uvedeme všechny tři přístupy k řešení. Diferenciální rovnice pouze sestavíme, ale řešit je nebudeme. Uvedeme je pouze proto, že přímo vyjadřují fyzikální zákony, které jsou ve vektorové a komplexní metodě skryty.

a) Výchozí soustava rovnic

Pro pět neznámých potřebujeme celkem pět rovnic. První dvě rovnice dostaneme z prvního a druhého Kirchhoffova zákona:

$$\begin{aligned} I_C + I_L &= I_R \\ U_R + U_P &= U = U_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (1)$$

Pro odpor R platí Ohmův zákon, pro cívku L platí zákon elektromagnetické indukce a pro kondenzátor C platí vztah úměrnosti mezi nábojem a napětím. Poslední vztah pro kondenzátor navíc zderivujeme, abychom mohli náboj nahradit proudem.

$$\begin{aligned} U_R &= R \cdot I_R \\ U_P &= L \cdot \frac{dI_L}{dt} \\ I_C &= C \cdot \frac{dU_P}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

Řešením algebraicko-diferenciální soustavy (1,2) bychom obdrželi příslušné časové průběhy. Je možné přímým dosazením ověřit, že řešení, která za okamžik získáme vektorovou nebo komplexní metodou, budou této soustavě vyhovovat.

b) Vektorová metoda

Veličinám $U, U_R, U_P, I_R, I_C, I_L$ přiřadíme odpovídající vektory $\vec{U}, \vec{U}_R, \vec{U}_P, \vec{I}_R, \vec{I}_C, \vec{I}_L$.

Kirchhoffovým zákonům (1) odpovídají vztahy mezi vektory:

$$\begin{aligned} \vec{I}_C + \vec{I}_L &= \vec{I}_R \\ \vec{U}_R + \vec{U}_P &= \vec{U} = U_0 (\cos \omega t, \sin \omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

Vektorové vztahy převedeme do vztahů pro velikosti vektorů a vztahy mezi jejich směry. Velikosti vektorů jsou amplitudami hledaných veličin, proto jim připíšeme nulový index ($|\vec{a}| \equiv a_0$):

$$\begin{aligned} U_{0R} &= R I_{0R} \\ U_{0P} &= X_L I_{0L}, \quad X_L \equiv \omega L \\ I_{0C} &= \frac{1}{X_C} U_{0P}, \quad X_C \equiv \frac{1}{\omega C} \end{aligned} \quad (4)$$

Vztahy mezi směry uvedeme raději slovně:

- vektory $\vec{I}_R, \vec{U}_R$ jsou souhlasně rovnoběžné

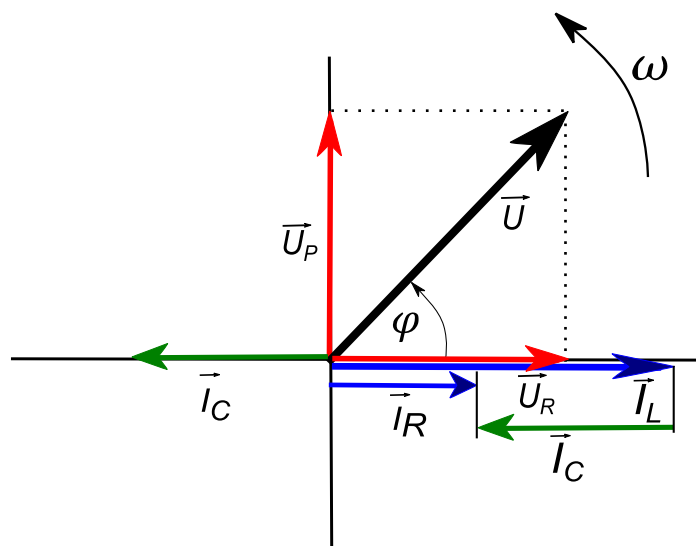
- vektor $\vec{I}_C$ předbíhá vektor $\vec{U}_p$ o $\pi/2$ (5)

- vektor $\vec{I}_L$ se za vektorem $\vec{U}_p$ opožďuje o $\pi/2$

Z posledních dvou podmínek vyplývá, že vektory $\vec{I}_C$ a $\vec{I}_L$ jsou nesouhlasně rovnoběžné. Z prvního vztahu ve (3) vyplývá navíc, že vektor $\vec{I}_R$ je s nimi rovnoběžný. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $I_{0L} \geq I_{0C}$, tj. $X_L \leq X_C$. Vektorová rovnice $\vec{I}_R = \vec{I}_L + \vec{I}_C$ pak přejde do skalárního vztahu mezi velikostmi rovnoběžných vektorů:

$$I_{0R} = I_{0L} - I_{0C} \quad (6)$$

Vztahy mezi vektory v určitém časovém okamžiku zachycuje obrázek:



Obr.11: Vektorové řešení RLC obvodu

Po dosazení za I_{0L}, I_{0C} z (4) do (6) dostaneme

$$I_{0R} = \frac{U_{0P}}{X_L} - \frac{U_{0P}}{X_C} \Rightarrow U_{0P} = \frac{X_C X_L}{X_C - X_L} \cdot I_{0R} \quad (7)$$

Dále je zřejmé

$$U_0^2 = U_{0R}^2 + U_{0P}^2 = (R I_{0R})^2 + \left(\frac{X_C X_L}{X_C - X_L} \cdot I_{0R} \right)^2 \Rightarrow I_{0R} = \frac{U_0}{Z} \quad (8)$$

kde jsme vztahem

$$Z \equiv \sqrt{R^2 + \left(\frac{X_C X_L}{X_C - X_L} \right)^2} \quad (9)$$

zavedli celkovou impedanci obvodu.

Ze znalosti amplitudy I_{0R} celkového proudu již snadno spočteme zbývající veličiny. Nejdříve vyjádříme jejich amplitudy pomocí amplitudy U_0 napětí zdroje:

$$\begin{aligned} U_{0R} &= R \cdot I_{0R} = \frac{R}{Z} \cdot U_0 \\ U_{0P} &= \frac{X_C X_L}{(X_C - X_L) \cdot Z} \cdot U_0 \\ I_{0C} &= \frac{U_{0P}}{X_C} = \frac{X_L}{(X_C - X_L) \cdot Z} \cdot U_0 \\ I_{0L} &= \frac{U_{0P}}{X_L} = \frac{X_C}{(X_C - X_L) \cdot Z} \cdot U_0 \end{aligned} \quad (10)$$

Časové závislosti dostaneme projekcí odpovídajících vektorů do osy x . Připomeňme si, že vektory z obrázku rotují jako celek kolem počátku souřadnic s úhlovou rychlostí ω . V okamžiku t svírá vektor $\vec{U}$ s osou x úhel ωt . Vektor $\vec{I}_R$ (spolu s vektory $\vec{U}_R, \vec{I}_L$) je opožděn o úhel φ , přičemž

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{0P}}{U_{0R}} = \frac{X_C X_L}{(X_C - X_L) \cdot R} \quad (11)$$

Nyní je již snadné stanovit fáze jednotlivých veličin:

$$\begin{aligned} U_R &= U_{0R} \cos(\omega t - \varphi) \\ U_P &= U_{0P} \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) = -U_{0P} \sin(\omega t - \varphi) \\ I_R &= I_{0R} \cos(\omega t - \varphi) \\ I_L &= I_{0L} \cos(\omega t - \varphi) \\ I_C &= I_{0C} \cos(\omega t - \varphi + \pi) = -I_{0C} \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (12)$$

Vztahy (8-12) jsou úplným řešením naší úlohy. Přímým dosazením lze ověřit, že vyhovují původním rovnicím (1-2).

c) Metoda řešení prostřednictvím komplexních čísel

Provedeme přiřazení $U \rightarrow \hat{U} = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ a přejdeme ke komplexním odporům:

$$\begin{aligned} R &\rightarrow \hat{R} = R \\ L &\rightarrow \hat{X}_L = i X_L \\ C &\rightarrow \hat{X}_C = -i X_C \end{aligned} \quad (13)$$

Veličiny X_L , X_C jsou definovány stejně jako ve vzorcích (3). Po tomto přiřazení postupujeme stejně jako bychom postupovali pro stejnosměrné obvody, pouze komplexní odpory budeme nyní nazývat impedancemi.

Impedanci $\hat{Z}_p$ paralelní části určíme ze vztahu pro paralelně zapojené odpory:

$$\frac{1}{\hat{Z}_p} = \frac{1}{\hat{X}_C} + \frac{1}{\hat{X}_L} \Rightarrow \hat{Z}_p = i \cdot \frac{X_C X_L}{X_C - X_L} \quad (14)$$

Celková impedance celého obvodu je dána sériovým spojením R a $\hat{Z}_p$:

$$\hat{Z} = R + \hat{Z}_p = R + i \cdot \frac{X_C X_L}{X_C - X_L} \quad (15)$$

Je výhodné tuto impedanci vyjádřit v goniometrickém tvaru:

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= Z \cdot e^{i\varphi} \\ Z &= \sqrt{R^2 + \left(\frac{X_C X_L}{X_C - X_L} \right)^2} \quad \text{tg} \varphi = \frac{X_C X_L}{(X_C - X_L) \cdot R} \end{aligned} \quad (16)$$

Celkové impedanci $\hat{Z}$ odpovídá celkový proud $\hat{I}$, protékající obvodem; je dán Ohmovým zákonem

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \frac{U_0}{Z} \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (17)$$

Na odporu R je proud a napětí

$$\begin{aligned}\hat{I}_R &= \hat{I} = \frac{U_0}{Z} \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} \\ \hat{U}_R &= R \cdot \hat{I}_R = \frac{R \cdot U_0}{Z} \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}\end{aligned}\quad (18)$$

Podobně určíme napětí a proudy na paralelní části:

$$\begin{aligned}\hat{U}_P &= \hat{Z}_P \cdot \hat{I} = \frac{X_C X_L \cdot U_0}{(X_C - X_L) \cdot Z} \cdot e^{i(\omega t - \varphi + \pi/2)} \\ \hat{I}_L &= \frac{\hat{U}_P}{\hat{X}_L} = \frac{X_C \cdot U_0}{(X_C - X_L) \cdot Z} \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} \\ \hat{I}_C &= \frac{\hat{U}_P}{\hat{X}_C} = \frac{X_L \cdot U_0}{(X_C - X_L) \cdot Z} \cdot e^{i(\omega t - \varphi + \pi)}\end{aligned}\quad (19)$$

Skutečné hodnoty jsou reálnými částmi odpovídajících komplexních hodnot. Tedy

$$\begin{aligned}I &= I_R = \frac{U_0}{Z} \cdot \cos(\omega t - \varphi) \\ U_R &= \frac{R \cdot U_0}{Z} \cdot \cos(\omega t - \varphi) \\ U_P &= \frac{X_C X_L \cdot U_0}{(X_C - X_L) \cdot Z} \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) \\ I_L &= \frac{X_C \cdot U_0}{(X_C - X_L) \cdot Z} \cos(\omega t - \varphi) \\ I_C &= \frac{X_L \cdot U_0}{(X_C - X_L) \cdot Z} \cos(\omega t - \varphi + \pi)\end{aligned}\quad (20)$$

S paralelním zapojením indukčnosti a kapacity je spojen zajímavý jev elektrické rezonance. Zkoumejme, co nastane pro $X_C = X_L$, kdy se činitel $(X_C - X_L)$ ve jmenovatelích (20) vynuluje. Rovnost obou impedancí X_C , X_L nastane pro frekvenci

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (21)$$

nazývanou podle fyzika W. Thomsona frekvencí Thomsonovou [10]. Nyní ve vztazích (20) provedeme limitní přechod $\omega \rightarrow \omega_0^-$ (tj. zdola, aby člen $X_C - X_L$ měl pro určitost kladné znaménko). Pak

$$\begin{aligned}(X_C - X_L) \cdot Z &\rightarrow \frac{L}{C} \\ \varphi &\rightarrow +\frac{\pi}{2}\end{aligned}\tag{22}$$

Po dosazení z (21) a (22) do (20) dostaneme hodnoty napětí a proudu v rezonanci:

$$\begin{aligned}I &= 0 \\ U_p &= U_0 \cos \omega_0 t \\ I_L &= \sqrt{\frac{C}{L}} U_0 \sin \omega_0 t \\ I_C &= -\sqrt{\frac{C}{L}} U_0 \sin \omega_0 t\end{aligned}\tag{23}$$

Vidíme, že zdroj nedodává do obvodu žádnou energii, $I = 0$, můžeme jej tudíž odpojit. Přesto budou v obvodu LC probíhat harmonické kmity s frekvencí ω_0 a s opačně orientovanými proudy v cívce a kondenzátoru, při kterých se bude navzájem přelévat energie mezi cívkou (resp. jejím magnetickým polem) a kondenzátorem (resp. jeho elektrickým polem).

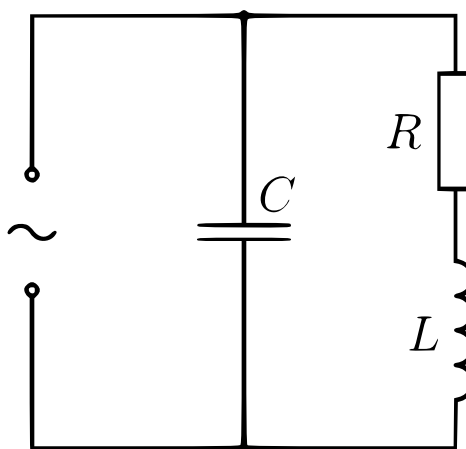
Poznamenejme ještě, že pro $\omega \rightarrow \omega_0^+$ bychom obdrželi vztahy (23) s opačnými znaménky, což odpovídá změně fáze o π .

4.5 Vybrané úlohy na střídavé proudy z Fyzikální olympiády

Na závěr kapitoly uvádím pro ilustraci dvě úlohy FO z posledních let. Přestože je soutěž výběrová, umožňují tyto úlohy udělat si představu o rozsahu středoškolského učiva v této oblasti. Úlohy řeším metodou vektorovou i komplexní. V souladu s původním zadáním úloh amplitudy harmonických veličin nahrazujeme jejich efektivními hodnotami ($a_{\text{ef}} = |\vec{a}| / \sqrt{2}$).

47. ročník FO 2005/2006, 1.kolo, úloha č. 4 [12]

Ke zdroji harmonického střídavého proudu jsou paralelně připojeny dvě větve. V jedné je zapojen kondenzátor o kapacitě $C = 10 \mu\text{F}$, ve druhé rezistor o odporu $R = 200 \Omega$ a cívka o indukčnosti $L = 2,00 \text{ H}$ (obr. 12). Větvi s kondenzátorem prochází proud o efektivní hodnotě $I_1 = 0,3 \text{ A}$, větvi s rezistorem a cívkou proud o efektivní hodnotě $I_2 = 0,2 \text{ A}$.



Obr.12: Zapojení k úloze 47. roč. FO

zdroj: http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/47/fo47a1_z.pdf

- Určete frekvenci f a efektivní hodnotu U napětí zdroje.
- Určete efektivní hodnotu I_c celkového proudu procházejícího zdrojem a jeho fázové posunutí proti svorkovému napětí. Součásti obvodu považujte za ideální.

Řešení

a) Vzhledem k tomu že větve jsou paralelní, přísluší oběma efektivním proudům I_1 , I_2 stejné efektivní napětí, což vede na dvě rovnice pro dvě neznámé U a ω :

$$\frac{U}{|Z_1|} = I_1, \quad \frac{U}{|Z_2|} = I_2 \quad (1)$$

kde Z_1 , Z_2 jsou absolutní hodnoty impedancí: $Z_1 = 1/\omega C$ a $Z_2 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$. Eliminujeme-li ze soustavy (1) napětí U a dosadíme-li za I_1 číselné hodnoty, dostaneme pro ω^2 následující kvadratickou rovnici:

$$L^2 C^2 \omega^4 + R^2 C^2 \omega^2 - \frac{9}{4} = 0 \quad (2)$$

Pro dané hodnoty dává tato rovnice jediné kladné řešení $\omega = 264,9$ rad/s, jemuž odpovídá frekvence $f = \omega / 2\pi = 42$ Hz. Hodnotu napětí U dopočítáme z rovnic (1), vypočtená číselná hodnota $U = 113$ V.

b) Oba proudy mají vůči sobě rozdílnou fázi, to ale komplexní impedance automaticky zohledňují. Můžeme tedy použít Ohmův zákon

$$\frac{\hat{U}}{\hat{Z}_1} + \frac{\hat{U}}{\hat{Z}_2} = \hat{I}_c,$$

kde I_c je celkový proud větvemi protékající a Z_1 , Z_2 jsou komplexní impedance. Počítejme:

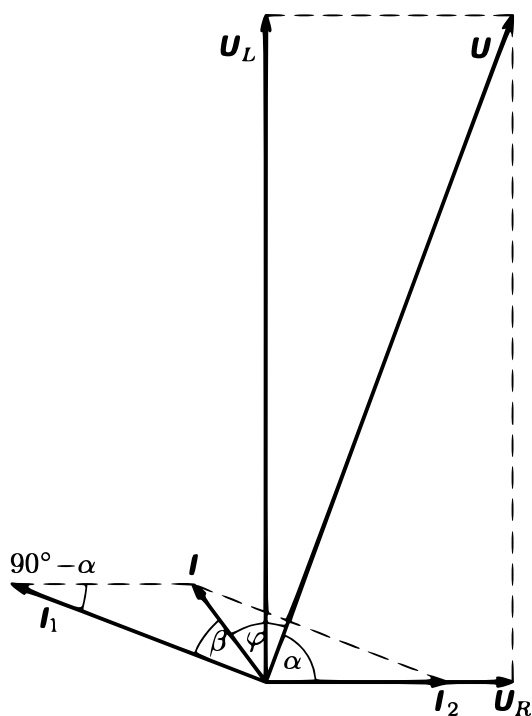
$$\hat{Z}_1 = \frac{1}{i\omega C}, \quad \hat{Z}_2 = R + i\omega L$$
$$\frac{1}{\hat{Z}_c} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} = i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L} = \frac{R + i \cdot (\omega C R^2 - \omega L + \omega^3 L^2 C)}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (3)$$

Ve finálním vzorci (3) jsou již obsaženy odpovědi na obě otázky - tedy jak na efektivní hodnotu celkového proudu, který spočítáme jako součin efektivního napětí a absolutní hodnoty výrazu (3), tak na posunutí, které spočítáme z tangenty imaginární a reálné

části. Jelikož úhel bude kladný, bude proud bude předbíhat napětí. Pro zadané hodnoty vyjde fázový posuv 58° a proud $0,13\text{ A}$.

Úlohu (b) můžeme vyřešit i vektorovou metodou. Na obou větvích je stejné napětí, tzn. vektorový součet napětí na odporu a cívce v první větvi musí být rovný vektoru napětí na kondenzátoru ve větvi druhé. V prvním případě je proud ve fázi s napětím na odporu, čili za výslednicí napětí se opožďuje o úhel $\alpha = \arctg(\omega L / R)$, ve druhém případě proud předbíhá napětí o $\pi / 2$. Úhel, který mezi sebou svírají oba proudy, je tedy $\alpha + \pi / 2$. Výslednici celkového proudu spočítáme z kosinové věty:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 - 2 I_1 I_2 \cdot \cos(\pi / 2 - \alpha)} = 0,13\text{ A}$$

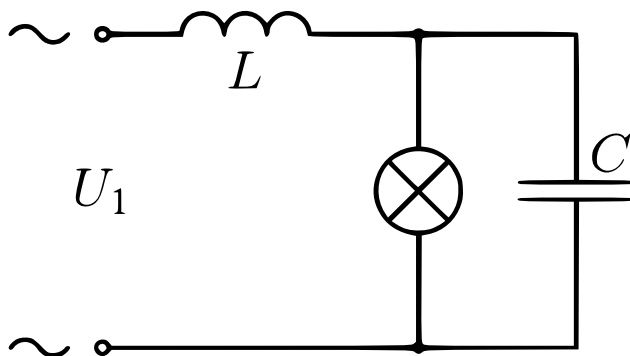


Obr.13: Řešení vektorovou metodou

zdroj. http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/47/fo47a1_r.pdf

53. ročník FO 2011/2012, 1.kolo, úloha č.5 [12]

Žárovku se jmenovitými hodnotami napětí $U_0 = 24 \text{ V}$ a proudu $I_R = 0,3 \text{ A}$ potřebujeme napájet ze zdroje střídavého proudu o efektivní hodnotě svorkového napětí $U_1 = 12 \text{ V}$ a frekvenci 50 Hz . Použijeme k tomu obvod zapojený podle obr. 14. Kondenzátor připojený paralelně k žárovce má dostatečně velkou kapacitu $C = 100 \mu\text{F}$.



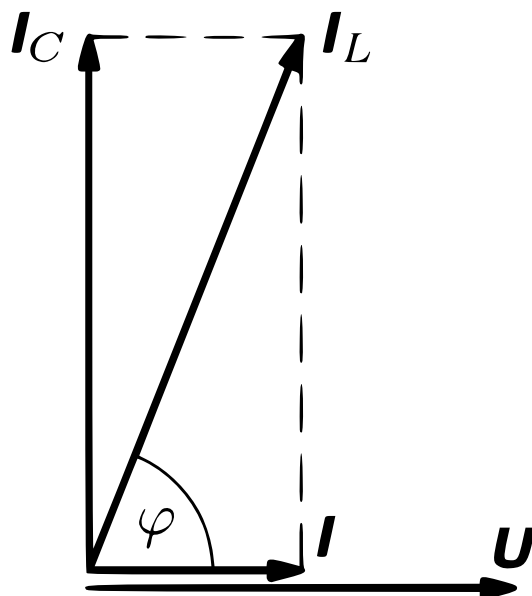
Obr.14: Zapojení k úloze 53. roč. FO

- a) Jakou indukčnost L musí mít cívka, aby napětí na žárovce mělo jmenovitou hodnotu?
- b) Jaké bude fázové posunutí napětí na žárovce oproti svorkovému napětí zdroje?
- Kondenzátor a cívku považujte za ideální, vnitřní odpor zdroje je zanedbatelný.

Řešení

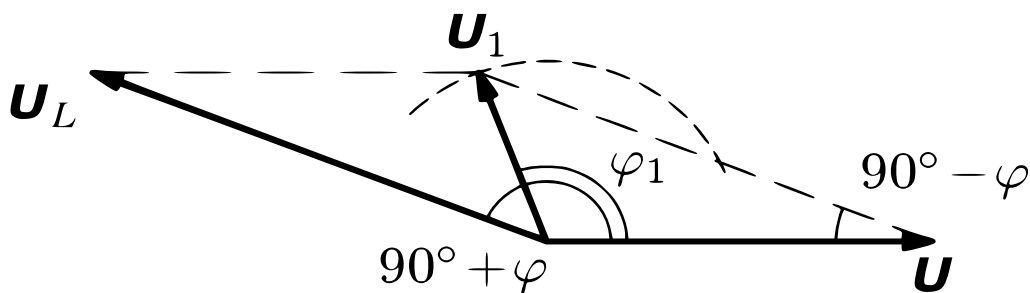
1) Řešení užitím vektorů (fázorů)

a) Na žárovce je podle zadání úlohy efektivní napětí $U_0 = 24 \text{ V}$, prochází jí tedy efektivní proud $I_R = 0,3 \text{ A}$. Na kondenzátoru musí být stejné napětí, proud na něm jej však předbíhá o $\pi/2$. Jeho amplitudu spočítáme ze vzorce $I_C = U_0 \omega C = 0,754 \text{ A}$. Celkový proud protékající obvodem je pak vektorovým součtem vektorů $\vec{I}_R$ a $\vec{I}_C$, tedy $I_0 = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = 0,811 \text{ A}$. Proud předbíhá napětí U_0 o úhel $\varphi = \arctg I_C / I_R = 1,19 \text{ rad}$.



Obr.15: Vektorové skládání proudů

Jak známo, na cívice napětí předbíhá proud o $\pi/2$, v našem případě je o tento úhel před výslednicí $\vec{I}_0$. Napětí U_L na cívice svírá s napětím U_0 na paralelní větvi s žárovkou a kondenzátorem tedy úhel $\alpha = \pi/2 + \varphi = 2,76$ rad. Abychom dostali výslednici napětí, stačí sečíst vektory $\vec{U}_L$ a $\vec{U}_0$. Její velikost získáme z kosinové věty, plynoucí z následujícího obrázku:



Obr.16: Vektorové skládání napětí

$$U_1^2 = U_0^2 + U_L^2 - 2U_0U_L \cos(\pi/2 - \varphi)$$

Vzhledem k tomu že velikosti napětí U_1 , U_0 a úhel φ známe, vede tento vztah na kvadratickou rovnici pro U_L . Její kořeny jsou $U_{L1} = 30,4$ V a $U_{L2} = 14,2$ V. Obě řešení

jsou fyzikálně přípustná. Indukčnost pak spočítáme ze vztahu $\omega L I_0 = U_L$. Pro první případ vyjde $L_1 = 0,119 \text{ H}$ pro druhý $L_2 = 0,056 \text{ H}$.

b) Ze znalosti celkového napětí U_1 , napětí na cívce U_L a žárovce U_0 , jejichž vektory tvoří trojúhelník, můžeme, jak plyne z obr. 16, za pomoci kosinové věty spočítat úhel φ_1 při jeho vrcholu, $U_L^2 = U_0^2 + U_1^2 - 2U_0 U_1 \cos \varphi_1$, což je rovnice o jedné neznámé φ_1 . Pro první hodnotu U_L vyjde $\varphi_1 = 1,93 \text{ rad}$, pro druhou $\varphi_1 = 0,45 \text{ rad}$. V obou případech je napětí na žárovce U_0 o tento úhel opožděno.

2) Řešení v komplexní symbolice

Odpor žárovky určíme z Ohmova zákona $R = U_0 / I_R = 80 \Omega$. Nyní již můžeme spočítat impedanci paralelní části:

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{R} + i\omega C \Rightarrow Z_p = \frac{R}{1 + i\omega RC}.$$

Celková impedance obvodu pak je

$$Z_1 = Z_p + Z_L = \frac{R}{1 + i\omega RC} + i\omega L$$

a) Poměr napětí na žárovce U_0 ku celkovému napětí U_1 je roven poměru impedancí Z_p / Z_1 . Pokud spočítáme absolutní hodnotu tohoto podílu, získáme poměr amplitud či efektivních hodnot U_0 / U_1 , jež ale podle zadání známe. Jedná se tedy o rovnici pro neznámou indukčnost cívky L . Stejně jako v předchozím případě vyjdou dvě řešení $L_1 = 0,119 \text{ H}$ a $L_2 = 0,056 \text{ H}$.

b) Chceme-li spočítat fázový rozdíl mezi napětím U_1 a U_0 , vyjdeme, stejně jako v předchozím případě, z poměru impedancí Z_p / Z_1 , z něhož poté určíme tangentu jako poměr jeho imaginární a reálné části. Jelikož úhel vyjde záporný, je napětí U_1 před U_0 . Pro dvě hodnoty indukčnosti L vychází dva úhly posunutí: $\varphi_1 = 1,93 \text{ rad}$ a $\varphi_1 = 0,45 \text{ rad}$.

5 Vlnová optika

Opět začneme tuto kapitolu literaturou, týkající se tématu: [15] - středoškolská učebnice, v níž jsou zmíněna základní fakta Youngova pokusu a principu difrakce; [16] - publikace pro středoškoláky se zájmem o fyziku, věnovaná kmitání a vlnění obecně; [9] - vysokoškolská skripta, v nichž jsem se částečně inspiroval při zpracování metody geometrického (resp. vektorového) skládání vln.

Se základy vlnové optiky se studenti seznamují už od druhého ročníku, samotnou interferenci však berou až v ročníku čtvrtém. I v tomto oboru se výrazně uplatňují operace s goniometrickými funkcemi, které, jak již víme z předchozího textu, je výhodné nahradit operacemi s dvourozměrnými vektory či s komplexními čísly.

5.1 Postupná vlna

Na úvod si na středoškolské úrovni připomeneme matematický popis rovinné monochromatické vlny, šířící se v kladném směru osy x . Veličina E , šířící se ve formě vlny, je popsána funkcí

$$E(t, x) = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (1)$$

kde E_0 je amplituda vlny, ω je úhlová frekvence, k je vlnové číslo a φ je počáteční fáze vlny v počátku souřadnic. Veličina E může být skalárem, např. proměnným tlakem ve zvukové vlně, nebo vektorem, např. vektorem elektrické intenzity v elektromagnetické vlně.

Důležitou charakteristikou vlny je její periodičita v čase a prostoru. Časovou periodu T – dobu kmitu – určíme jako nejmenší kladnou hodnotu, splňující podmínku $E(t + T, x) = E(t, x)$. Z této podmínky vyplývá $\omega T = 2\pi$, čili

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2)$$

Podobně podmínka $E(t, x + \lambda) = E(t, x)$ určuje vlnovou délku

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (3)$$

Další charakteristická veličina vlnění – fázová rychlost v – udává, s jakou rychlostí se šíří fáze $(\omega t - kx + \varphi)$ vlny. S danou hodnotou fáze je spojena určitá konkrétní hodnota E . Ze vztahu $\omega t - kx + \varphi = \text{konst.}$ dostáváme $x = \omega/k \cdot t + \text{konst.}$, takže fázová rychlost je

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (4)$$

Po dosazení za $k = 2\pi/\lambda$ dostaneme dobře známý vztah $v = f\lambda$, kde $f = \omega/2\pi = 1/T$ je kmitočet vlny.

Poslední charakteristikou, kterou si zde uvedeme, je intenzita vlnění. Intenzita I odpovídá toku energie v daném místě a čase a je úměrná kvadrátu veličiny E . Pro jednoduchost zvolíme konstantu úměrnosti mezi I a E^2 rovnou jedné. Pak

$$I(t, x) = E_0^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \quad (5)$$

Viditelné světlo má kmitočet řádu 10^{14} s^{-1} . Tak rychlé změny intenzity nedokáže naše oko samozřejmě registrovat. Okamžitou hodnotu I proto nahradíme její časovou střední hodnotou

$$\bar{I}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T I(t, x) dt \quad (6)$$

Po dosazení z (5) dostaneme

$$\bar{I} = E_0^2 \langle \cos^2(\omega t + \dots) \rangle \quad (7)$$

Při výpočtu střední hodnoty kvadrátu kosinu využijeme identitu $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$ a $\omega T = 2\pi$:

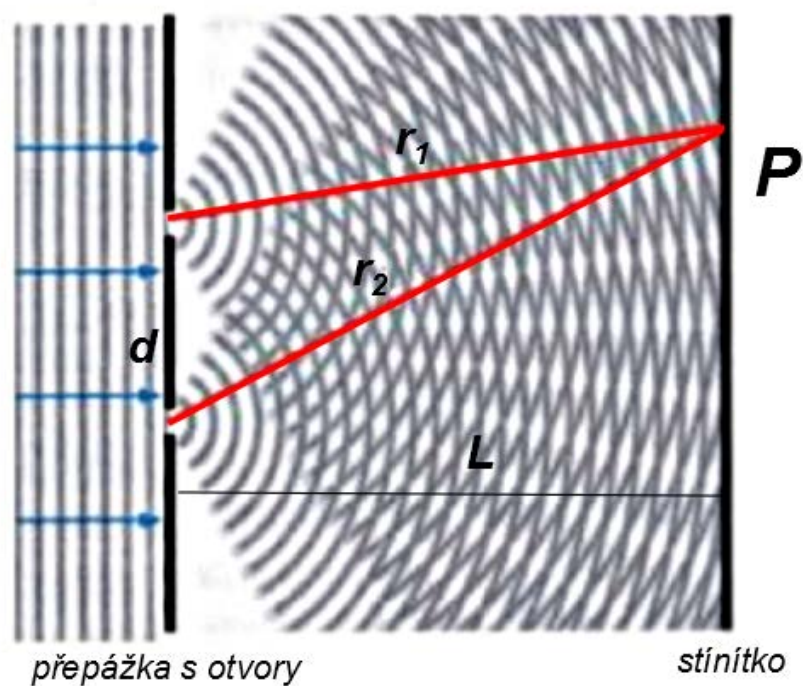
$$\langle \cos^2(\omega t + \alpha) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)}{2} dt = \frac{1}{2} \quad (8)$$

Je tedy $\bar{I} = E_0^2/2 = E_{\text{ef}}^2$, kde $E_{\text{ef}} \equiv E_0/\sqrt{2}$ je efektivní hodnota veličiny E .

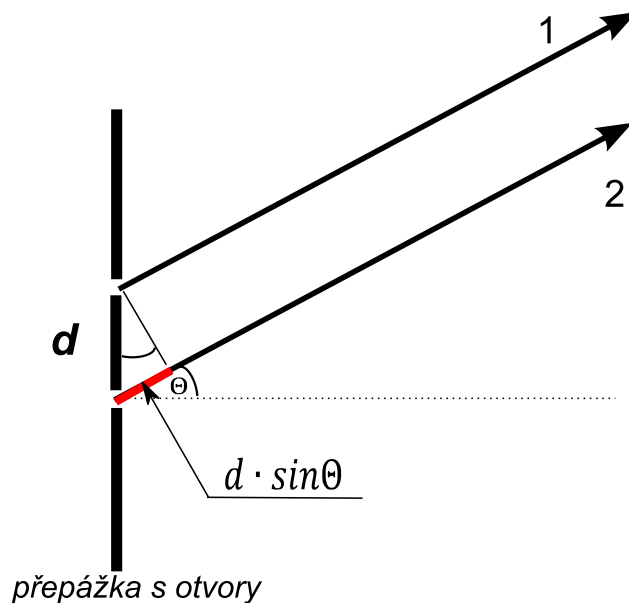
5.2 Youngův pokus

K porovnání možných matematických přístupů ve vlnové optice jsme si vybrali interferenci na mřížce. Začneme výkladem významného Youngova experimentu z roku 1801, kterým se experimentálně prokázala vlnová povaha světla [7,8].

Svazek rovnoběžného monochromatického záření o vlnové délce λ dopadá na přepážku se dvěma úzkými rovnoběžnými štěrbinami, jejichž vzdálenost d je srovnatelná s vlnovou délkou dopadajícího světla. Podle Huygensova principu se od obou štěrbin začnou šířit kruhové (resp. vlnkové) vlny, které po dopadu na stínítko či jiné registrační zařízení, umístěné ve vzdálenosti L od přepážky se štěrbinami, spolu interferují. Vzdálenost L je tak velká, aby bylo možné pokládat interferující paprsky z obou štěrbin za navzájem rovnoběžné.



Obr.17: Skládání vlnění na dvojštěrbíně



Obr.18: Průchod paprsků dvojštěrbinou

Paprsky vycházející z obou štěrbin nechť interferují (skládají se) v místě P stínítka, ležícím ve směru θ , měřeným od normály k rovině přepážky. Hodnoty elektrických složek v místě P jsou

$$E_1 = E_0 \cdot \cos(\omega t - k r_1), \quad E_2 = E_0 \cdot \cos(\omega t - k r_2) \quad (1)$$

a) Výslednou intenzitu na stínítku vypočteme nejdříve standardním středoškolským způsobem. Celková hodnota pole v místě P je

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cdot \cos\left(\frac{k(r_1 - r_2)}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2}\right) \quad (2)$$

Při úpravě jsme využili součtový vzorec

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (3)$$

Dráhový rozdíl téměř rovnoběžných paprsků 1,2 je patrný z detailu obrázku:

$$r_2 - r_1 = d \cdot \sin \theta \quad (4)$$

Tedy

$$I(P,t) = 4E_0^2 \cdot \cos^2\left(\frac{k d \sin \theta}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2}\right)$$

$$\bar{I}(P) = 2 \cdot E_0^2 \cdot \cos^2\left(k \frac{d \sin \theta}{2}\right) \quad (5)$$

Podle hodnoty odchylky θ paprsků od směru původního šíření kolísá intenzita mezi maximální hodnotou $2E_0^2$ a minimální nulovou hodnotou. Po dosazení za $k = 2\pi/\lambda$ dostaneme podmínku maxima ve tvaru

$$d \sin \theta_n = n \lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

Pro velké vzdálenosti L od přepážky a malé odchylky θ můžeme použít aproximaci $\sin \theta \approx \tan \theta = y/L$, kde y je souřadnice na stínítku, měřená od středu $\theta = 0$. Maxima se pak nacházejí v místech

$$y_n = n \cdot \frac{\lambda}{d} L \quad (7)$$

Z polohy maxim, daných tímto vztahem, určil Thomas Young poprvé v historii s velkou přesností vlnové délky viditelného světla. Zároveň jeho experiment prokázal vlnový charakter světla.

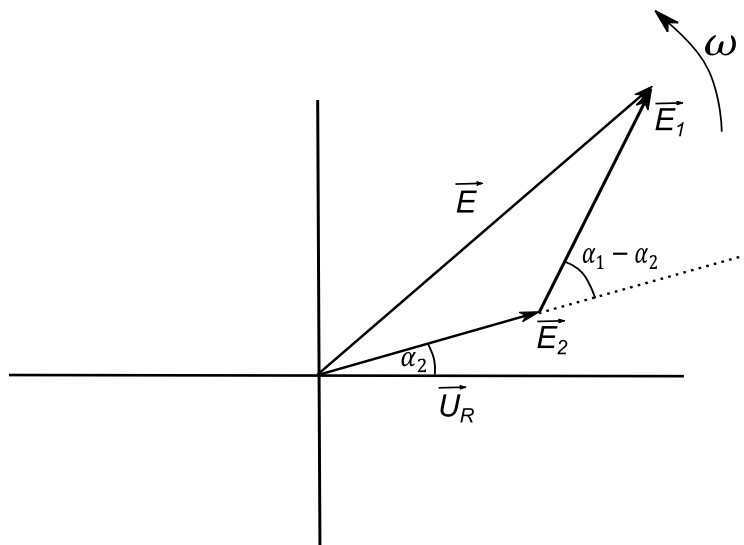
b) Tutéž úlohu - superpozici dvou vlnění o stejné frekvenci - spočteme nyní ve vektorové a komplexní symbolice. Práci nám to v tomto případě nijak zvlášť neusnadní. Oba alternativní postupy oceníme v následující úloze, v níž budeme skládat vlnění přicházející z mnoha ekvidistantně rozložených štěrbin.

Ve vektorové metodě provádíme přiřazení $\cos \alpha \rightarrow (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Označme zkráceně:

$$\alpha_1 \equiv \omega t - k r_1, \quad \alpha_2 \equiv \omega t - k r_2 \quad (8)$$

Výsledná intenzita je reprezentována vektorem (fázorem)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



Obr.19: Vektorové řešení – výsledná intenzita

Trojúhelník na obrázku je rovnoramenný, $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = E_0$. Velikost výsledné intenzity $|\vec{E}| = E_{0,\text{TOT}}$ určíme z kosinové věty:

$$E_{0,\text{TOT}}^2 = E_0^2 + E_0^2 + 2E_0^2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 4E_0^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \quad (9)$$

Vektor $\vec{E}$ svírá s vodorovnou osou úhel

$$\beta = \alpha_2 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Skutečnou hodnotu získáme projekcí vektoru $\vec{E}$ do vodorovné osy:

$$\begin{aligned} E &= E_{0,\text{TOT}} \cdot \cos \beta = 2E_0 \cdot \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \\ &= 2E_0 \cdot \cos \left(k \cdot \frac{r_2 - r_1}{2} \right) \cdot \cos \left(\omega t - k \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Výpočet střední hodnoty intenzity $\bar{I} = \langle E^2 \rangle$ bychom provedli stejně jako v předchozím přístupu.

V komplexní metodě provádíme přiřazení $\cos \alpha \rightarrow \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$. Tedy

$$\hat{E}_1 = E_0 \cdot e^{i\alpha_1}, \quad \hat{E}_2 = E_0 \cdot e^{i\alpha_2} \quad \text{a}$$

a

$$\begin{aligned}
\hat{E} &= \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = E_0 (e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2}) = E_0 \cdot e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} + e^{-i\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} \right) = \\
&= E_0 e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}} \cdot 2 \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}
\end{aligned} \tag{11}$$

Při úpravě jsme uplatnili malý trik – z první závorky jsme vytkli činitel $e^{i\beta}$, přičemž hodnota $\beta = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ byla stanovena z podmínky, aby v závorce zůstaly po vytknutí vzájemně komplexně sdružené výrazy.

Výslednou složku E superpozice obou vlnění dostaneme jako reálnou část komplexní veličiny $\hat{E}$:

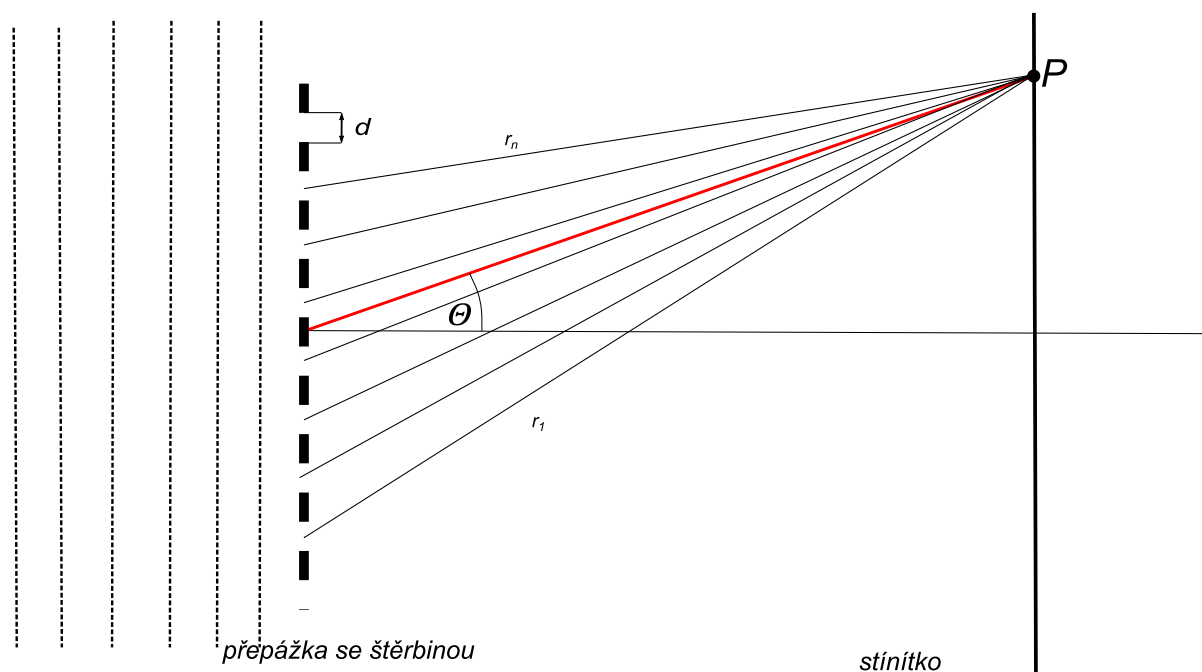
$$E = 2 E_0 \cdot \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \tag{12}$$

Všechny metody dávají podle očekávání týž výsledek.

5.3 Interference na soustavě štěrbin

Experimentální uspořádání zůstává stejné jako v Youngově pokusu, předpokládáme pouze libovolný počet ekvidistantně rozložených štěrbin. V případě velkého počtu štěrbin mluvíme o optické mřížce.

Uvažujme tedy přepážku s n štěrbinami, rozloženými ve vzájemné vzdálenosti d . Na přepážku v kolmém směru dopadá monochromatická vlna o frekvenci ω . Za přepážkou je ve velké vzdálenosti umístěno stínítko, na kterém pozorujeme výsledné rozložení intenzity.



Obr.20: Průchod vlnění mřížkou

Výsledná hodnota pole E v bodě P stínítka je dána součtem příspěvků od jednotlivých štěrbin:

$$E = \sum_{i=1}^n E_0 \cos(\omega t - k r_i) = E_0 \cdot \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i \quad (1)$$

kde jsme zavedli označení $\alpha_i \equiv \omega t - k r_i$. Je-li stínítko dostatečně daleko od přepážky, mají všechny paprsky směřující do bodu P (téměř) shodný směr θ , čemuž odpovídá, stejně jako u Youngova uspořádání, dráhový rozdíl sousedních paprsků

$$r_i - r_{i+1} = d \cdot \sin \theta \quad (2)$$

a fázový rozdíl

$$\Delta\alpha \equiv \alpha_{i+1} - \alpha_i = k \cdot (r_i - r_{i+1}) = k d \cdot \sin \theta \quad (3)$$

„Zbývá“ provést výpočet sumy v (1). Výpočet opět provedeme třemi způsoby, abychom je mohli porovnat z hlediska jejich náročnosti, případně i matematické elegance. Ukáže se, že výběr vhodného matematického aparátu může řešení úlohy výrazně usnadnit. I v tomto případě nám výpočet usnadní převedení jednodimenzionálního problému do dvou dimenzí.

a) Přímý výpočet

S tímto postupem jsme se v dostupné literatuře nesetkali, zřejmě pro jeho těžkopádnost. Sumu na pravé straně rovnice (1) vynásobíme nejdříve funkcí $\sin \beta$, přičemž úhel β upřesníme až v následujícím kroku:

$$\sin \beta \cdot \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n [\sin(\alpha_i + \beta) - \sin(\alpha_i - \beta)] \quad (4)$$

Úhel β nyní zvolíme tak, aby se na pravé straně této identity navzájem odečetli sousední členy. Zřejmě nás okamžitě napadne volba $\beta = \Delta\alpha$ ($\alpha_i + \Delta\alpha = \alpha_{i+1}$), ještě výhodnější však bude volba $\beta = \Delta\alpha / 2$ ($\alpha_i + \Delta\alpha / 2 = \alpha_{i+1} - \Delta\alpha / 2$). Po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i &= \frac{1}{2} \cdot \left[\sin \left(\alpha_n + \frac{\Delta\alpha}{2} \right) - \sin \left(\alpha_1 - \frac{\Delta\alpha}{2} \right) \right] = \\ &= \sin \left(\frac{\alpha_n - \alpha_1 + \Delta\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Při poslední úpravě jsme využili identity

$$\sin u + \sin v = 2 \cdot \sin \frac{u+v}{2} \cdot \cos \frac{u-v}{2} \quad (6)$$

Dosadíme ještě $\alpha_n - \alpha_1 = (n-1) \cdot \Delta\alpha$ a obdržíme

$$\sum_{i=1}^n \cos \alpha_i = \frac{\sin \left(n \frac{\Delta\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}} \cdot \cos \left(\alpha_1 + (n-1) \frac{\Delta\alpha}{2} \right) \quad (7)$$

Tedy

$$E = nE_0 \cdot \frac{\sin \left(n \frac{\Delta\alpha}{2} \right)}{n \sin \frac{\Delta\alpha}{2}} \cdot \cos \left(\alpha_1 + (n-1) \frac{\Delta\alpha}{2} \right)$$

$$\bar{I} = \langle E^2 \rangle = \frac{n^2 E_0^2}{2} \cdot \left(\frac{\sin \left(n \frac{\Delta\alpha}{2} \right)}{n \sin \frac{\Delta\alpha}{2}} \right)^2 \quad (8)$$

Činitel $1/2$ vznikl středováním kvadrátu funkce $\cos(\omega t + \dots)$.

Konstantě úměrnosti $n^2 E_0^2 / 2$ můžeme dát bezprostřední fyzikální význam.

V limitě $\theta \rightarrow 0$, resp. $\Delta\alpha \rightarrow 0$, dostáváme

$$\frac{\sin \left(n \cdot \frac{\Delta\alpha}{2} \right)}{n \cdot \sin \frac{\Delta\alpha}{2}} = \left(\frac{\sin \left(n \cdot \frac{\Delta\alpha}{2} \right)}{n \cdot \frac{\Delta\alpha}{2}} \right) \cdot \left(\frac{\frac{\Delta\alpha}{2}}{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}} \right) \rightarrow 1 \quad (9)$$

takže $\bar{I}(0) = n^2 E_0^2 / 2$ a

$$\bar{I}(\theta) = \bar{I}(0) \cdot \left(\frac{\sin \left(n \frac{\Delta\alpha}{2} \right)}{n \sin \frac{\Delta\alpha}{2}} \right)^2 \quad (10)$$

Analýza průběhu funkce (10) je poměrně náročná a není ani naším cílem. Lze ji najít ve vysokoškolských učebnicích optiky, např. [9].

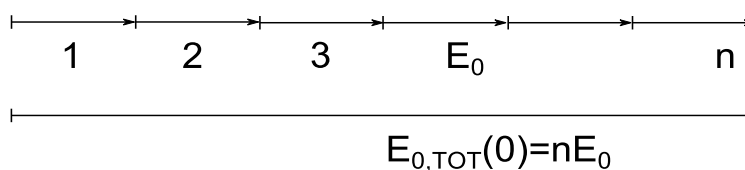
b) Geometrická metoda řešení

Metoda spočívá v součtu vektorů – fázorů $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$, kde

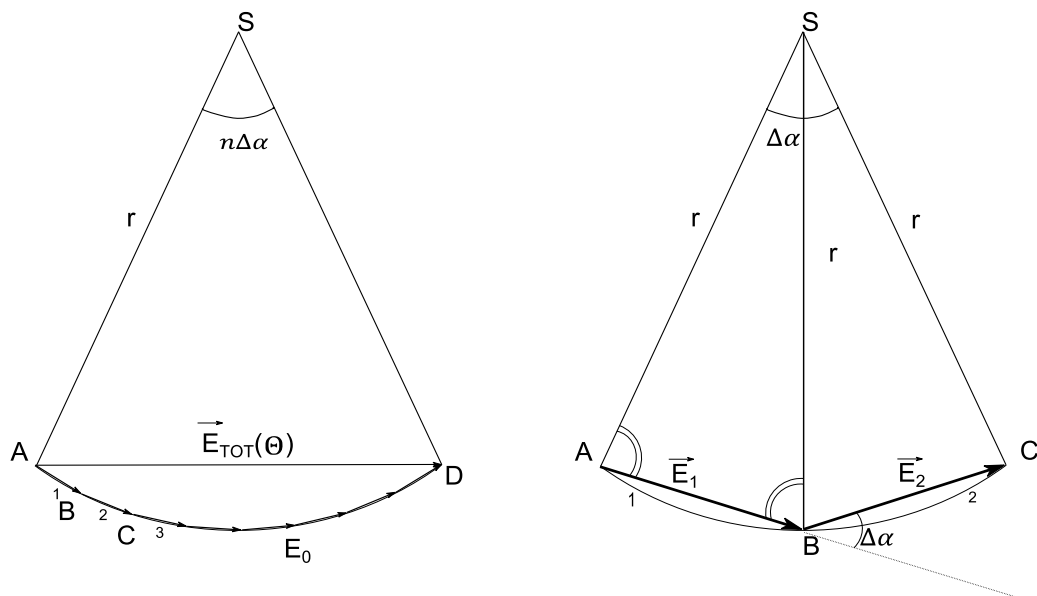
$$\vec{E}_i = E_0 (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

Vektory $\vec{E}_i$ mají všechny stejnou velikost E_0 a jsou vůči sobě pootočený o úhel $\Delta\alpha = k d \sin \theta$.

Pro přímý směr ($\theta = 0, \Delta\alpha = 0$) i pro obecný směr ($\theta \neq 0, \Delta\alpha \neq 0$) situaci v určitém časovém okamžiku zachycují obrázky. Ačkoli vektory rotují jako celek s úhlovou rychlostí ω , jejich vzájemné vztahy se v čase nemění.



Obr.21: Přímý směr



Obr.22: Obecný směr, součet a detail

Z detailu pro dva sousední vektory $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ (obrázek vpravo) je patrné, že všechny vektory $\vec{E}_k$ leží na oblouku kružnice o středu S a poloměru

$$r = \frac{E_0 / 2}{\sin \frac{\Delta \alpha}{2}} \quad (12)$$

Výsledná amplituda $E_{0,TOT}$ je sečnou této kružnice, odpovídající středovému úhlu $n \Delta \alpha$. Její velikost je tedy

$$E_{0,TOT}(\theta) = 2r \cdot \sin \frac{n \cdot \Delta \alpha}{2} = E_0 \cdot \frac{\sin \left(\frac{n \Delta \alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\Delta \alpha}{2}} \quad (13)$$

Tím jsme s výpočtem vlastně hotovi, neboť zatím neurčený fázový úhel α , který svírá vektor $E_{0,TOT}$ s vodorovnou osou x , bude vystupovat v periodické funkci $\cos \alpha = \cos(\omega t + \dots)$, která se po vystředování přes čas zredukuje na konstantní hodnotu 1/2. Chceme-li tento úhel přesto určit, dostaneme jej pomocí rozdílu úhlů SAD, SAB (hlavní obrázek):

$$\alpha = \alpha_1 + \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta \alpha}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{n \Delta \alpha}{2} \right) \right] = \omega t + (n-1) \frac{\Delta \alpha}{2} \quad (14)$$

Skutečná hodnota veličiny E je dána projekcí vektoru $\vec{E}$ do osy x ,

$$E_{\text{TOT}} = E_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\Delta\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}} \cos\alpha \quad (15)$$

což souhlasí s rovnicemi (8) předchozí metody.

c) Řešení prostřednictvím komplexních čísel

Tato metoda je nejúspornější a její největší výhodou asi je, že nevyžaduje nějaké zvláštní intelektuální úsilí. Vystačíme se vzorcem pro součet prvních n členů geometrické řady.

Příspěvkům $E = E_0 \cos \alpha_k$ (symbol i je nyní vyhrazen pro imaginární jednotku)

přiřadíme komplexní reprezentanty $\hat{E}_k = E_0 e^{i\alpha_k}$. Je

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \sum_{k=1}^n \hat{E}_k = E_0 \cdot \sum_{k=1}^n e^{i(\alpha_1 + (k-1)\Delta\alpha)} = E_0 e^{i\alpha_1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\Delta\alpha})^k = \\ &= E_0 e^{i\alpha_1} \cdot \frac{e^{in\Delta\alpha} - 1}{e^{i\Delta\alpha} - 1} \end{aligned} \quad (16)$$

Z čitatele a jmenovatele zlomku na pravé straně vytkneme činitele tak, abychom dostali rozdíl komplexně sdružených čísel:

$$\frac{e^{in\Delta\alpha} - 1}{e^{i\Delta\alpha} - 1} = \frac{e^{in\frac{\Delta\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\Delta\alpha}{2}}} \cdot \left(\frac{e^{in\frac{\Delta\alpha}{2}} - e^{-in\frac{\Delta\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\Delta\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\Delta\alpha}{2}}} \right) = e^{i(n-1)\frac{\Delta\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\Delta\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}} \quad (17)$$

Po dosazení (17) do (16) a vzetí reálné části dostaneme

$$E = \text{Re } \hat{E} = E_0 \cos\left(\alpha_1 + (n-1)\frac{\Delta\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\Delta\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}} \quad (18)$$

což je v souladu s předchozími výsledky.

6 Závěr

Otázka postavení a role matematiky ve výuce fyziky na základních a středních školách je velmi široká. Omezil jsem se proto na jednu dílčí, ale významnou oblast fyziky –harmonické děje, případně s nimi příbuzné děje spojené s vlněním. Jak již bylo uvedeno ve 2. kapitole, harmonické děje se zdaleka netýkají jen mechanických kmitů, lze se s nimi setkat v téměř každém fyzikálním oboru vždy, když je příslušný fyzikální systém málo vychýlen ze své stabilní rovnovážné polohy. Čtenář má přitom možnost porovnávat vedle sebe uváděné rozdílné matematické přístupy, založené na diferenciálních rovnicích, symbolických vektorech (fázorech), a na komplexních číslech. První z těchto metod, z fyzikálního hlediska fundamentální, přesahuje rámec středoškolských osnov. Poslední z těchto metod se redukuje na algebraické operace s komplexními čísly a z tohoto důvodu se mi jeví jako nejvhodnější, byť se tradičně dává přednost těžkopádnější geometrické metodě fázorů. Zřejmě k tomu přispívá i neuvědomovaný postoj, že fyzikální „realitu“ lze adekvátně popisovat pouze „reálnými“ čísly. V této souvislosti je vhodné si připomenout fundamentální fyzikální teorii – kvantovou mechaniku – která se bez komplexních čísel neobejde, např. „reálná“ hybnost je v této teorii reprezentována operátorem $-i\hbar \text{ grad}$.

Ještě několik obecných poznámek k postavení matematiky ve fyzice. Počátek novodobé fyziky je spjat s Galileo Galileem, který na konci 16. století kvantitativně studoval pohyb těles v gravitačním poli. Přitom zdůrazňoval, že jazykem přírody je matematika. Úžas, že jevy a zákony přírody lze vyjadřovat prostřednictvím čísel, nacházíme už u pythagorejců v 5. století př.n.l., ti na tom dokonce založili svou filosofii. Na úzké sepětí fyziky s matematikou se bohužel často zapomíná. Obě disciplíny se na všech stupních škol vyučují víceméně nezávisle na sobě, na pedagogických fakultách se navíc vyskytují studijní směry, ve kterých se student fyziky s matematikou setkává jen minimálně. Lze ale úspěšně studovat a poté vyučovat nějaký obor, aniž bychom, řečeno Galileovými slovy, znali jeho jazyk?

Seznam obrázků

Obrázek 1: Síla v okolí stabilní rovnovážné polohy.....	14
Obrázek 2: Pohyb hmotného bodu po kružnici	16
Obrázek 3: Komplexní čísla v Gaussově rovině.....	18
Obrázek 4: Obvod střídavého proudu s kondenzátorem	23
Obrázek 5: Vektorové řešení obvodu s kondenzátorem	24
Obrázek 6: Obvod střídavého proudu s cívkou.....	26
Obrázek 7: : Vektorové řešení obvodu s cívkou.....	28
Obrázek 8: RL obvod se střídavým napětím	29
Obrázek 9: Vektorové řešení RL obvodu.....	30
Obrázek 10: RLC obvod se střídavým napětím	35
Obrázek 11: Vektorové řešení RLC obvodu.....	37
Obrázek 12: Obvod RL sériově, C paralelně	42
Obrázek 13: Řešení vektorovou metodou	44
Obrázek 14: LC série.....	45
Obrázek 15: Vektorové složení proudů.....	46
Obrázek 16: Vektorové složení napětí	46
Obrázek 17: Skládání vlnění na dvojštěrbíně.....	50
Obrázek 18: Průchod paprsků dvojštěrbinou	51
Obrázek 19: Vektorové řešení - výsledná intenzita	53
Obrázek 20: Průchod vlnění mřížkou	55
Obrázek 21: Přímý svazek	58
Obrázek 22: Obecný svazek	59

Seznam použité literatury

- [1] I. Stewart: Odsud až do nekonečna. Argo/Dokořán 2006
- [2] M. Mareš: Příběhy matematiky. Pistorius 2008
- [3] M. Livio: Neřešitelná rovnice. Argo/Dokořán 2005
- [4] J. Bečvář E. Fuchs: Matematika v 16 a 17 století. Prometheus 1999
- [5] P.J. Nahin: An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$. Princeton un. Press 2010
- [6] en.wikipedia.org/wiki/Mattematical_beauty
- [7] R. Zajac, J. Šebesta: Historické pramene súčasnej fyziky. Alfa, Bratislava 1990
- [8] en.wikipedia.org/wiki/Young%27s_interference_experiment, 20.3. 2013
- [9] E. Klier: Optika. Skripta MFF UK Praha, 1986
- [10] O. Lepil, P. Šedivý: Fyzika pro gymnázia (Elektřina a magnetismus). Galaxie 1993
- [11] E. Calda: Matematika pro gymnázia (komplexní čísla). Prometheus 1994
- [12] <http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/zadani-a-reseni>
- [13] J. Brož: Elektřina a magnetismus II., SPN Praha 1975
- [14] B. Sedlák, I. Štoll: Elektřina a magnetismus. Academia 2002
- [15] O. Lepil: Optika. Prometheus Praha 2002
- [16] V. Pilát: Kmitání a vlnění. SPN Praha 1973
- [17] John Derbyshire: Posedlost prvočísly. Academia 2007