



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Poměr v kurikulu základní školy

Vypracovala: Šárka Nováková
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice, 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Poměr v kurikulu základní školy jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích,

.....

Poděkování:

Touto cestou bych chtěla poděkovat Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D., za odborné vedení mé bakalářské práce, za užitečné rady, spolupráci, připomínky a čas, který mi věnoval. Dále mé díky patří doc. RNDr. Heleně Binterové, Ph.D. za poskytnutí odborné literatury.

Anotace:

Hlavním cílem bakalářské práce je zmapovat učivo poměru, přímé a nepřímé úměrnosti na druhém stupni základní školy a následně vytvořit soubor řešených příkladů. Soubor řešených příkladů by měl sloužit žákům na základních školách a pomoci jim lépe pochopit dané učivo.

Klíčová slova:

Poměr, měřítko mapy, úměra, přímá úměrnost, nepřímá úměrnost

Annotation:

The main aim of this bachelor's work is curriculum mapping ratio, direct and inverse proportion on the second stage of Primary School and then to create a set of solved examples. The set of solved examples should serve pupils of Primary Schools and it should help them for better understanding of the curriculum.

Key words:

Ratio, the scale of a map, correlation, direct proportion, inverse proportion,

Obsah

1	Úvod.....	5
2	Poměr, úměra, přímá a nepřímá úměrnost.....	7
2.1	Poměr v učebnicích	8
2.2	Poměr.....	11
2.2.1	Zápis poměru.....	12
2.2.2	Postupný poměr.....	13
2.2.3	Krácení poměru	13
2.2.4	Rozšiřování poměru	13
2.2.5	Rozdělení hodnoty v poměru	15
2.2.6	Změna hodnoty v poměru	16
2.2.7	Měřítko map a plánů	17
2.3	Úměra	18
2.4	Přímá úměrnost.....	19
2.5	Nepřímá úměrnost	20
2.6	Trojčlenka.....	21
3	Řešené příklady s poměrem a postupným poměrem	24
3.1	Měřítko a plán mapy.....	49
4	Příklady k procvičení poměru a měřítka.....	57
4.1	Výsledky.....	61
5	Řešené příklady s úměrou, přímou a nepřímou úměrností	63
6	Příklady k procvičení úměry, přímé a nepřímé úměrnosti.....	74
6.1	Výsledky.....	75
7	Závěr	77
8	Literatura.....	78

1 Úvod

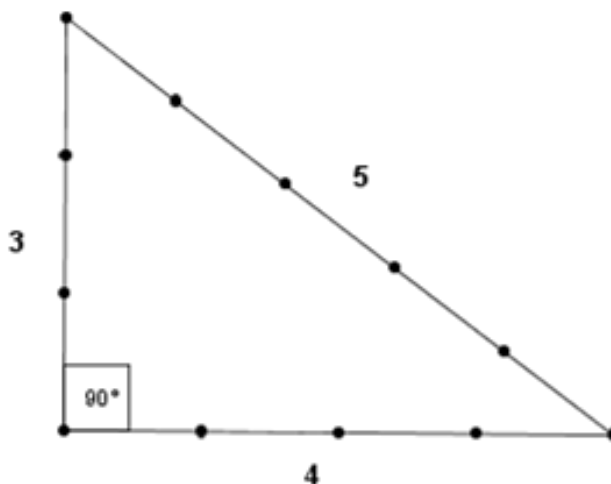
Matematiku užíval člověk již v pravěku. Vyvíjela se společně s tím, jak se rozvíjela lidská činnost a lidé se stále více sdružovali ve společenství. První matematické pojmy, jako jsou například číslovky, pomáhaly spíše k ulehčení komunikace. Zvláště poté, co se začal rozšiřovat obchod mezi jednotlivými sídlišti. Z počátku šlo jen o rozlišování mezi jednou, dvěma a více.

Daleko propracovaněji se matematika začala formovat ve starověkém Egyptě. Doklady o dovednostech Egyptanů v matematice se nám dochovaly na dřevěných tabulkách, papyrech a kožených svitcích. Nejvýznamnějšími nálezy jsou dva papyry. Prvním je Rhindův papyrus obsahující 85 matematických příkladů a druhým a o něco starším je Moskevský papyrus s 25 úlohami. Z nich je patrné, že již kolem roku 2 000 před Kristem existovala matematika jako samostatná disciplína. Staří Egyptané dovedně počítali s přirozenými čísly a zlomky, hledali neznámé množství, počítali obsahy rovinných útvarů apod. Papyry také obsahují úlohy, ve kterých se mají vypočítat rozměry trojúhelníku (resp. obdélníku), je-li znám obsah nebo poměr jeho stran. (BEČVÁŘ, 2003)

Téměř každý má Egypt spojený s pyramidami. Jsou důkazem toho, že Egyptané byli impozantními staviteli. Praktická geometrie však nebyla pro každého. Jednalo se o velmi utajovanou nauku, kterou vykonávali napínači provazů. Byli to takoví moderní zeměměřiči. My se o této nauce můžeme jen dohadovat a vymýšlet různé hypotézy. „*S naprostou jistotou lze pouze tvrdit, že nauka o poměrech velikostí byla důležitou součástí této staroegyptské geometrie. Nelze si představit, že by si stavitel nenačrtl alespoň v hrubých rysech zmenšený obrázek obrovské stavby, kterou hodlal postavit.*“ (EUKLEIDÉS 2009, s. 11)

V případě stavby pyramidy vyvstává otázka, jakým způsobem určili pravý úhel. Přeci jen podstavy těchto fascinujících staveb mají tvar téměř dokonalého čtverce nebo

obdélníku. Má se za to, že využívali nejznámějšího pythagorejského trojúhelníku¹. Zkonstruovali ho tak, že vzali provaz, který rozdělili uzly na dvanáct stejných dílů. Poté vytvořili trojúhelník, jehož poměr stran byl 3 : 4 : 5. Naproti nejdelší straně tak vznikl úhel 90°.



I když ze vzdálené minulosti se nám dochovaly opravdu jen střípky, učivo poměru se nadále rozvíjelo a dnes poměr a s ním související úměru, přímou a nepřímou úměrnost využíváme s naprostou samozřejmostí v domácnostech i v zaměstnání. Proto má poměr své právoplatné místo ve výuce matematiky na základních školách.

Pokusila jsem se zjistit, jakým způsobem je učivo poměru, přímé a nepřímé úměrnosti předáváno žákům na základních školách a následně jsem vypracovala soubor řešených příkladů, což bylo i cílem mé bakalářské práce.

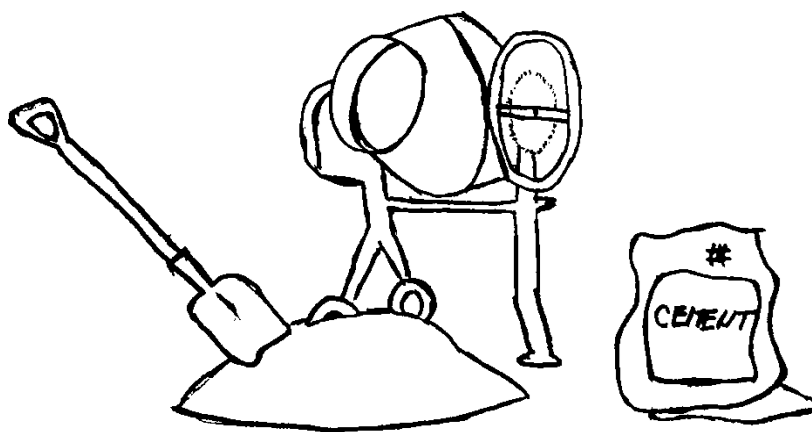
V první části jsem se zabývala vysvětlením pojmů poměru, přímé a nepřímé úměry a matematickými operacemi s nimi. Každou matematickou operaci jsem poté ukázala na jednoduchém příkladu.

V druhé části bakalářské práce jsem se věnovala řešeným příkladům, které jsem řadila od nejlehčích po ty těžší. A za kapitolu řešených úloh jsem dala pár neřešených příkladů, pro případného zájemce, aby si mohl učivo sám vyzkoušet.

¹ Pythagorova věta [online]. [cit. 2015-03-13]. Dostupné z: <http://www.matematika.cz/pythagorova-veta>

2 Poměr, úměra, přímá a nepřímá úměrnost

Poměr a s ním související přímou a nepřímou úměrnost užíváme dnes a denně v našich domácnostech či profesích, i když si to kolikrát ani neuvědomujeme. Využijeme ho například při ředění koncentrátů na různá čistidla, v receptech, stavebních pracích atd.



Důležitým pedagogickým dokumentem, ve kterém jsou stanoveny obecně závazné požadavky na vzdělávání pro jednotlivé stupně a obory, je Rámcový vzdělávací program (RVP) ² platný od 1. 9. 2013. Rámcový vzdělávací program určuje charakteristiku, cíle a pojetí základního vzdělávání. Vymezuje v sobě i vzdělávací oblasti, včetně matematiky.

V RVP je učivo poměru, přímé a nepřímé úměrnosti řazeno na druhý stupeň ZŠ. Nalezneme ho pod nadpisem „ČÍSLO A PROMĚNNÁ“. Od žáka, kterému bude toto učivo zprostředkováno jeho učitelem matematiky, se očekává, že bude umět užívat *„různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část (přirozeným číslem,*

² Rámcový vzdělávací program 2013. [online]. [cit. 2014-06-17]. Dostupné z: <http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani>

poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)“ a že zvládne řešit situace vyjádřené poměrem, což zahrnuje i znalost měřítka map a plánů.

Na základě RVP si každá škola vytváří svůj vlastní Školní vzdělávací program (ŠVP). Podle něho probíhá výuka v konkrétních školách.

Pro účely vypracování bakalářské práce, jsem si vypůjčila ŠVP³ Základní školy a mateřské školy v Sázavě. V Sázavě se poměr, přímá a nepřímá úměra vyučuje v sedmém ročníku. Učivo zde má pokrýt znalost pojmu poměr, zvětšení a zmenšení v daném poměru, rozdělení hodnoty v daném poměru, měřítko, úměru, přímou i nepřímou úměrnost a práci s trojčlenkou. Tím by měl žák získat dovednosti k řešení úloh s již zmíněnými pojmy, zvládat práci s měřítkem map a plánů a umět určit vztah mezi přímou a nepřímou úměrností.

2.1 Poměr v učebnicích

Učebnice je důležitou součástí práce učitele a žáků ve škole. Je také klíčová pro jejich domácí přípravu, ač poslední dobou jsou stále více užívány moderní prostředky (například internet). Ale kvalitně zpracovaná učebnice, může učitele nasměrovat k tomu, jak vést výuku daného učiva.

Ve školách stále převládají dva přístupy k vyučování. Prvním je tradiční transmisivní přístup, který spočívá v přenesení znalostí učitele na žáka. Je to jednosměrný přenos, kdy žák dostává již ucelené předem promyšlené informace od učitele či rodiče a není mu dovoleno, aby na řešení nějaké problematiky přišel sám. Vylučuje se tak běžné chybování, které žáka také formuje. Přeci jen na moudrosti: „*Chybami se člověk učí*“, něco být musí.

³ Školní vzdělávací program ZŠ Sázava, 2013. [online]. [cit. 2014-06-17]. Dostupné z: <http://www.zssazava.cz/file-cabinet>

Druhým a novějším stylem vyučování, na který se poslední dobou upírá více pozornosti, je konstruktivistický přístup⁴, jenž více podněcuje žáka k přemýšlení a hledání vlastní cesty k poznání. Učitel je zde motivátor, který probouzí zájem žáka, předkládá mu podnětné úlohy a problémy a klade důraz na žákovu vlastní aktivitu.

Tak jako existují dva přístupy ve vyučování, můžeme podle mého názoru tyto přístupy rozeznat i v učebnicích. Ve starších učebnicích převládá spíše transmisivní přístup. Učebnice tohoto typu mohou být demotivující, protože žáka nevedou k přemýšlení, ale slepému omílání definic a vztahů. Žák se musí více spolehnout na svou abstrakci, protože matematické problémy většinou s praxí mají jen málo společného a ilustrovány jsou také jen poskrovnu. Rozvoj abstrakce je samozřejmě velmi důležitý a žákovi nemůže být vše „naservírováno na zlatém podnosu“. Ale co když si žák - na základě své nezkušenosti - nedokáže vytvořit správnou představu a tedy díky tomu nepochopí dané učivo? Proto si myslím, že znázornění nějaké situace (matematického problému) přispívá k tomu, že žák v budoucnu podobnou situaci rozezná a bude ji řešit podle správného vzoru.

Velmi zajímavou učebnicí, je učebnice doc. Binterové, doc. Fuchse a profesora Tlustého s názvem: „*Matematika 7: pro základní školy a víceletá gymnázia*“, kde je učivo poměru nejdříve vysvětleno na jednoduchých a reálných příkladech, které lze vyřešit logickou cestou, a zároveň podněcují žáka k zapojení se do řešení. Poté následuje tabulka, kde je shrnuto vše, co jsme na základě vyřešení příkladů objevili a tabulka se slovníčkem pro ucelení pojmů.

⁴ Více o konstruktivistickém přístupu: HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Vyd. 1. Praha: Portál, 2001, 187 s. Pedagogická praxe. ISBN 80-7178581-4

Ukázka zadání příkladu z učebnice doc. Binterové, doc. Fuchse a prof. Tlustého:

„Milena píše Kamilovi, kamarádovi z modelářského klubu, jak vytvářela patinu na svém modelu letadla. Nejdříve model nastříkala tmelem a vyleštila silně namočeným smirkovým papírem jemnosti 2 000. Dalším krokem byl preshading, spočívající v nastříkání 2,5 mm širokých proužků černé barvy. Poté model natřela modrou barvou, kterou smíchala s ředidlem S6001 v poměru 1 : 6. Barevný přechod mezi modrou a pískovou barvou vytvořila pomocí nemastné hmoty na připevňování plakátů, kterou nanasla válečkem o průměru 1,5 mm. Pískovou barvu Sand 1706 od Model Masteru smíchala rovněž s ředidlem S6001, tentokrát v poměru 1 : 3, čímž docílila nádherně sametového povrchu. Poté celý model nastříkala lesklým akrylátovým lakem Tamiya X-22 Clear, který byl smíchán s originálním ředidlem Tamiya X-20A Thinner v poměru 1 : 5 nebo 1 : 6. Vysvětlete, jak Milena ředila jednotlivé typy barev.“
(BINTEROVÁ 2008, s. 70)

Velmi hezky zpracovanou učebnicí je také „*Matematika pro 7. ročník základní školy*“ od docentů Odvárka a Kadlečka. Je zde podobný princip jako u předchozí učebnice.

Ukázka zadání příkladu z učebnice doc. Odvárka a doc. Kadlečka:

„Pepa maluje kuchyň, Čenda s Aničkou míchají barvu podle návodu:

Objemové dílky	
Malbytu	Vody
3	2

„Ředíte barvu správně?“ ptá se Pepa. „Samozřejmě, do tří dílů Malbytu nalejeme dva díly vody,“ odpovídá Anička. „Malbyt mícháme s vodou v poměru tři ku dvěma,“ dodává Čenda.

- *Anička nalila do prázdného kbelíku tři plné půllitrové odměrky Malbytu, Čenda přidal dvě plné půllitrové odměrky vody. Udělali správnou směs?*
- *Anička do kbelíku nalila další tři odměrky Malbytu. Kolik odměrek vody doplní Čenda, aby rozředění bylo správné?*
- *Čenda vodu doplnil a navíc přilil další dvě odměrky vody. Kolik odměrek Malbytu musí nalít Anička, aby byl Pepa s barvou spokojen?“ (ODVÁRKO 2011, s. 5)*

2.2 Poměr

Většina učebnic jde na vysvětlení tohoto učiva základní školy přes jeho funkci – k čemu vlastně slouží a kdy ho využijeme. Při otevření učebnice získáme informaci: „**Poměrem něco porovnáváme (poměřujeme).**“ Ale my umíme porovnávat dvojím způsobem. Porovnáváme dvě i více hodnot při hledání odpovědi na otázku: „**O kolik ...?**“ nebo „**Kolikrát ...?**“ V prvním případě porovnáváme rozdílem a v druhém případě podílem.

Ve třídě 7. A na základní škole v Poměrově bylo 12 dívek a 6 chlapců.

a) O kolik bylo více dívek než chlapců:

$$12 - 6 = 6$$

Dívek bylo o 6 více.

b) Kolikrát bylo více dívek než chlapců:

$$12 \div 6 = 2$$

Dívek bylo 2 x více.

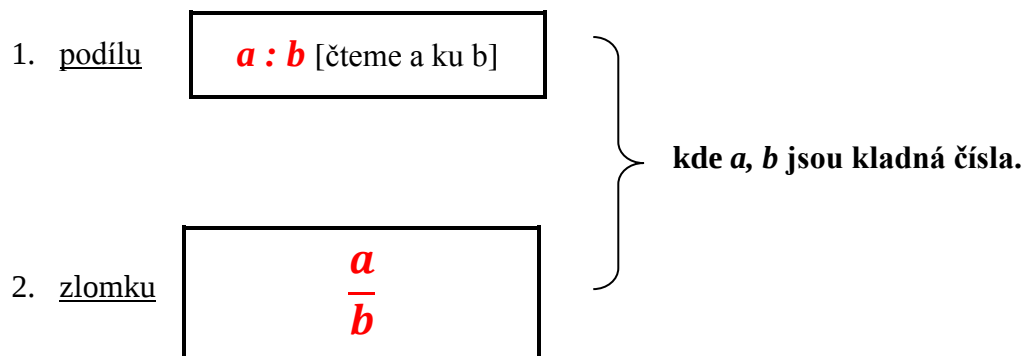


Při poměřování podílem řešíme **poměr**, přičemž všechny části poměru musí být ve **stejných jednotkách**. To znamená, že nemůžeme například poměřovat 3 kg hrušek a 300 g jablek, ale musíme je převést na společné jednotky: 3 000 g hrušek a 300 g

jablek. Nyní je snadné zjistit, že gramů hrušek je 10 x více než gramů jablek a že hrušky a jablka jsou v poměru 3 000 : 300 (tj. 10 : 1).

2.2.1 Zápis poměru

Poměr lze zapisovat ve tvaru:



Číslo „ a “ je **prvním členem** poměru a číslo „ b “ je **druhým členem**. Pořadí členů poměru se zachovává. Kdyby se pořadí zaměnilo, získali bychom převrácený poměr. (Převrácený poměr k poměru $a : b$ je poměr $b : a$.)

Zapište do poměru:

a) 3 litry a 5 hl

1 hl = 100 l

3 : 500

b) 200 m a 4 km

1 km = 1 000 m

200 : 4 000

c) 15 t písku a 800 kg štěrku

1 t = 1 000 kg

15 000 : 800

2.2.2 Postupný poměr

Pokud má poměr více jak dva členy, říkáme mu postupný poměr (například $3 : 5 : 7$).

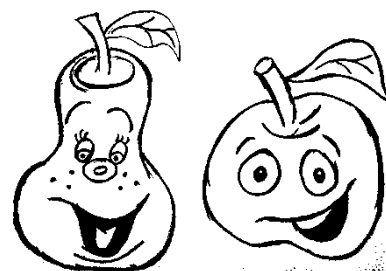
2.2.3 Krácení poměru

Tak jako lze krátit zlomky, můžeme stejným způsobem krátit poměr. Poměr můžeme krátit **kladným** číslem různým od 0 a 1, jsou-li všechny jeho členy **soudělná čísla**. Znamená to tedy, že vydělíme každý člen stejným kladným číslem.

Poměr, jehož členy (čísla) jsou nesoudělná přirozená čísla, označujeme jako poměr v základním tvaru. (Poznámka: Přirozenými čísly se myslí celá kladná čísla: 1, 2, 3, ...)

V Kristiánově košíčku bylo 6 hrušek a 14 jablek. V jakém poměru byla jablka k hruškám? Jejich poměr uveďte v základním tvaru.

Jablka k hruškám jsou v poměru: $14 : 6$



Poměr v základním tvaru:

$$\begin{array}{l} 14 = 2 * 7 \\ 6 = 2 * 3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 14 = 2 * 7 \\ 6 = 2 * 3 \end{array}} \right\} (\cancel{2} * 7) : (\cancel{2} * 3) = 7 : 3$$

2.2.4 Rozšiřování poměru

Rozšiřování je opakem krácení. Při rozšiřování **vynásobíme** každý člen (číslo) poměru stejným kladným číslem, které je různé od 0 a 1.

Rozšiřováním ani krácením se hodnota poměru nemění. Máme-li třeba poměr $2 : 5$ nebo $4 : 10$, je výsledek podílu čísel dva a pět stejný jako podíl čtyřky a desítky.

$$2 \div 5 = 0,4 \qquad 4 \div 10 = 0,4$$

Říkáme, že **poměry** se stejnou hodnotou se **rovnají**.

$$2 : 5 = 4 : 10$$

Tomáš dostal od paní učitelky zadáno několik poměrů. Některé jsou v základním tvaru a jiné vznikly jejich rozšířením. Pomozte bezradnému Tomovi zjistit, které poměry se rovnají, a najděte číslo, kterým jsou poměry rozšířeny.

$$1 : 3; \quad 5 : 7; \quad 2 : 6; \quad 9 : 4; \quad 25 : 35; \quad 3 : 9; \quad 27 : 12;$$

Poměr $1 : 3$ je v základním tvaru, protože čísla 1 a 3 jsou nesoudělná. Hledáme k nim tedy poměr se stejnou hodnotou, který je jeho rozšířením:

$$1 : 3 = 2 : 6 \text{ (rozšíření dvěma)}$$

$$1 : 3 = 3 : 9 \text{ (rozšíření třemi)}$$

Dalším poměrem v základním tvaru je $5 : 7$:

$$5 : 7 = 25 : 35 \text{ (rozšíření pěti)}$$

Posledním je poměr $9 : 4$:

$$9 : 4 = 27 : 12 \text{ (rozšíření třemi)}$$

Rozšiřováním si můžeme pomoci i v případě, kdy chceme získat základní tvar poměru. Zvláště pokud se části poměru skládají z desetinných čísel nebo zlomků a je pro nás těžké nalézt společné číslo, kterým se dají tyto části dělit.

Poměr $0,6 : \frac{3}{2}$ uveďte do základního tvaru.

$$0,6 : \frac{3}{2} = \frac{6}{10} : \frac{3}{2} = \frac{6}{10} : \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10} : \frac{15}{10} = 6 : 15 = 2 : 5$$

2.2.5 Rozdělení hodnoty v poměru

Bratr se sestrou se tak dlouho hádali o čokoládovou tyčinku, až ji rozlomili. Jak dlouhé byly části tyčinky, jestliže celá měřila 8 cm a rozlomená byla v poměru 3 : 5?



Vždy, když máme něco rozdělit v daném poměru, můžeme si to nejprve představit jako rozdělení na stejné dílky, přičemž počet dílků je dán součtem všech částí poměru. V našem případě, si čokoládovou tyčinku nakouskujeme na 8 dílků (tj. $3 + 5 = 8$). A poměr 3 : 5 nám potom říká, že 3 dílky této čokoládové tyčinky se odlomily od 5 dílků.



Nyní nám je jasné, že musíme zjistit, jak dlouhý je jeden dílek tyčinky:

$$8 \text{ cm} \div 8 \text{ dílky} = 1 \text{ cm}$$

A poté zjistíme délku odlomených částí:

$$3 \text{ dílky} * 1 \text{ cm} = \underline{3 \text{ cm}}$$

$$5 \text{ dílků} * 1 \text{ cm} = \underline{5 \text{ cm}}$$

Kontrola:

Součet výsledných hodnot, by nám měl opět dát hodnotu původní (tzn. 8 cm):

$$3 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

Odpověď: Bratr se sestrou rozlomili tyčinku na části o délce 3 cm a 5 cm.

2.2.6 Změna hodnoty v poměru

Změnit hodnotu v daném poměru znamená vynásobit hodnotu tímto poměrem, který je ve tvaru zlomku. Pokud je **zlomek větší než jedna** (tj. $a > b$), daná hodnota se **zvětší** a pokud je **zlomek menší než jedna** (tj. $a < b$), jde o **zmenšení**.

Rodiče dávali týdně Simoně na autobus, školní pomůcky a kroužky 300 Kč. Ale protože se náklady zvýšily, zvýšili rodiče i částku, kterou jí dávali v poměru 5 : 3. Kolik korun Simona nově dostává?

První část poměru představuje novou částku a druhá část poměru dosavadní částku. Tři dílky tedy reprezentují 300 Kč a naším úkolem je zjistit kolik korun je 5 dílků.

Nejjednodušším způsobem je vypočítání jednoho dílku:

$$300 \div 3 = 100$$

A pět dílků tedy je:

$$100 * 5 = \underline{500}$$

Jeden dílek



Pokud si příklad pořádně prohlédneme, zjistíme, že nejdříve jsme druhou částí poměru částku dělili a výsledek poté vynásobili první částí poměru, což odpovídá vynásobení hodnoty poměrem ve tvaru zlomku: $300 * \frac{5}{3} = 500$.

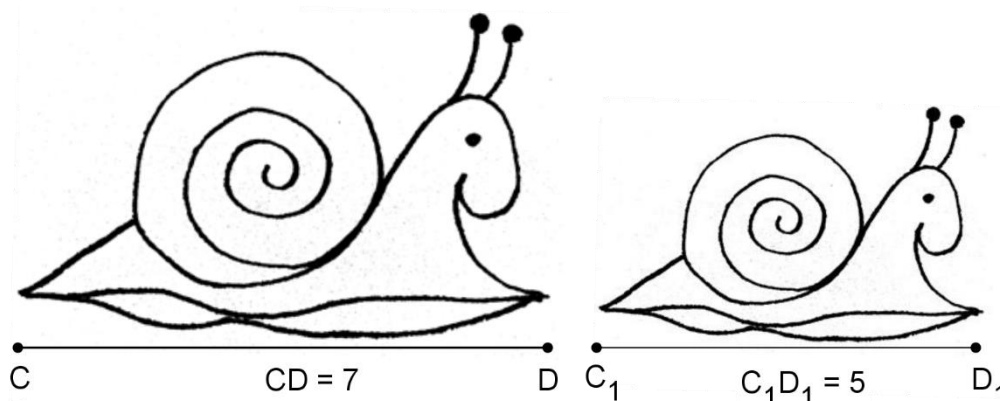
Odpověď: Simona nyní dostává 500 Kč.

2.2.7 Měřítko map a plánů

Poměr, který vyjadřuje vztah mezi **vzdáleností na mapě** (plánu) a **vzdáleností reálnou**, nazýváme **měřítkem**⁵. Například měřítko 1 : 400 znamená, že 1 centimetr na mapě, zobrazuje 400 cm (tj. 4 m) ve skutečnosti.

Toto vysvětlení je pro nás naprosto postačující, ale je důležité si uvědomit, že měřítko **mapa : realita**, není úplně přesné. Tato nepřesnost vychází z toho, že naše země je kulatá a ne placatá.⁶

Malá Verunka našla šneka dlouhého 7 cm. Rozhodla se ho nakreslit, ale délka nakresleného šneka byla 5 cm. V jakém měřítku ho zobrazila?



Délku nakresleného šneka dáme do poměru s délkou skutečného. A po zkrácení na základní tvar získáme měřítko.

$$5 : 7 = \underline{1 : 1,4}$$

Odpověď: Verunka nakreslila šneka v měřítku 1 : 1,4 . To znamená, že ve skutečnosti je šnek 1,4 krát větší než ten na papíře.

⁵ Více o měřítku: *Vyznáte se v měřítku mapy?* [online]. [cit. 2015-04-18]. Dostupné z: http://www.zememeric.cz/12-97/1_2880.html

⁶ O nepřesnosti map více na straně 70: MICHALOVÁ, J.: *Prostorově orientované systémy pro podporu manažerského rozhodování*. 1. vydání. Praha: C. H. Beck, 2007

2.3 Úměra

Úměra je označením pro rovnost dvou poměrů. Tato rovnost nám říká, že hodnoty poměrů jsou shodné.

Zápis rovnosti dvou poměrů:

$$a : b = c : d$$

Čísla ***a***, ***d*** jsou **vnější členy** úměry a čísla ***b***, ***c*** jsou **vnitřní členy** úměry. Aby byla úměra správně, musí platit, že součin vnějších členů se rovná součinu vnitřních členů (tj. $a * d = b * c$).

Určete, zda $5 : 2 = 7,5 : 3$, je správnou úměrou.

Podle tvrzení, že součin vnějších členů má být roven součinu vnitřních členů, se musí $5 * 3$ rovnat součinu $2 * 7,5$.

$$5 * 3 = 15$$

$$7,5 * 2 = 15$$

vnější členy

$$a : b = c : d$$

vnitřní členy

Jiným způsobem, jak ověřit zda se dva poměry rovnají, je vypočítat hodnoty poměrů:

$$5 \div 2 = 2,5$$

$$7,5 \div 3 = 2,5$$

Další metoda pro ověření správnosti úměry je zkrácení poměrů na základní tvar. Jelikož první poměr je již v základním tvaru, budeme krátit druhý poměr:

$$7,5 : 3 = 15 : 6 = 5 : 2$$

Jedná se tedy o správnou úměru.

2.4 Přímá úměrnost

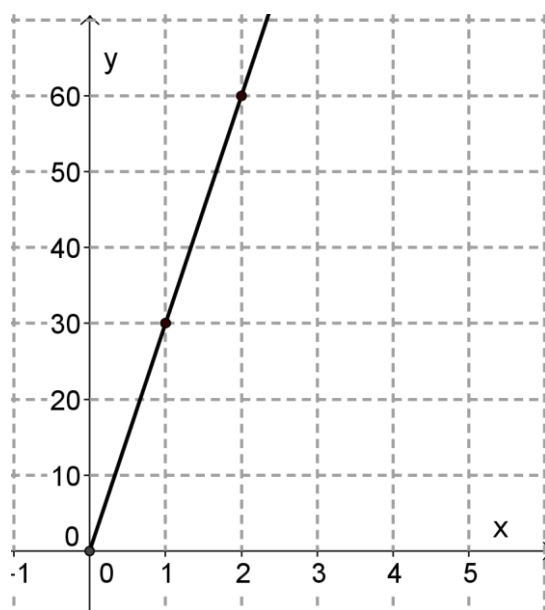
Přímá úměrnost je označení pro vztah mezi dvěma veličinami, pro něž platí: „*Zvětší-li/zmenší-li se jedna veličina, zvětší/zmenší se i veličina druhá*“. Veličiny, jenž se mění ve stejném poměru, označujeme „ x “ a „ y “, stejně jako osy pravoúhlé soustavy souřadnic.

Grafem přímé úměrnosti je **přímka** (nebo její část), která vždy prochází počátkem. Rovnicí je $y = k * x$. Přičemž „ y “ je závislou proměnou, „ x “ je nezávislou proměnou a „ k “ je koeficient.

Příkladem přímé úměrnosti, může být pro nás tolik známé nakupování v obchodě. Například koupíme-li kilo pomerančů, zaplatíme 30 Kč. Pokud ale koupím 2 kila, zaplatíme 60 Kč. Tedy **čím více** pomerančů koupíme, **tím více** zaplatíme.

x (kg)	1	2	3	3,5
y (Kč)	30	60	90	105

Graf:



Rovnice:

$$y = 30x$$

2.5 Nepřímá úměrnost

U nepřímé úměrnosti to funguje jinak než u té přímé. Tady platí: „*Kolikrát se **zvětší/zmenší** hodnota x , tolikrát se **zmenší/zvětší** hodnota y* “. Tedy čím víc, tím méně a opačně.

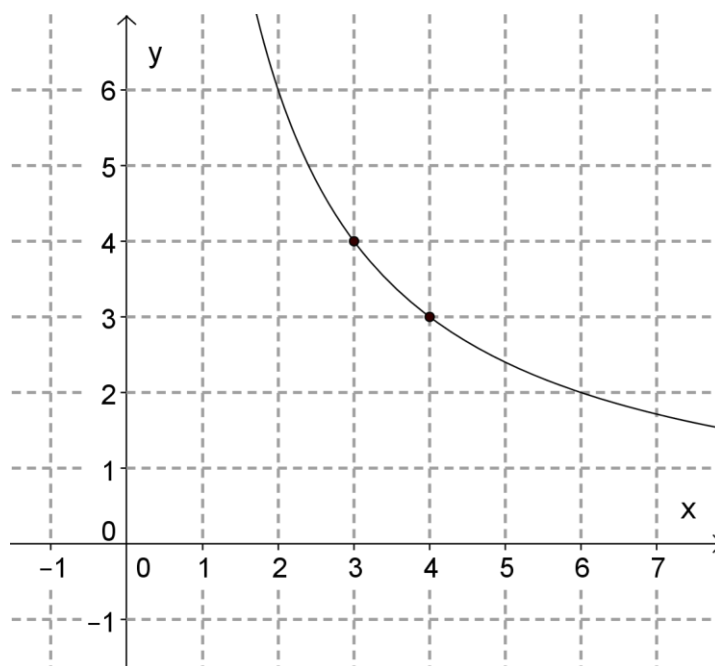
Grafem nepřímé úměrnosti je **rovnoosá hyperbola** (nebo její část), která nikdy neprochází počátkem. Rovnicí je $y = \frac{k}{x}$, kde x se nesmí rovnat 0.

Tři dělníci dokáží postavit provizorní můstek přes říčku za 4 hodiny. Pokud by byli 4, zvládli by to za kratší dobu. Tedy platí **čím více** dělníků, **tím kratší** dobu jim to potrvá (nebo čím méně, tím déle). Samozřejmě je tu otázka toho, při jakém počtu dělníků přestává být práce efektivní, protože nemůže být velká spousta lidí nahuštěna

u jedné práce. Akorát by si překáželi.

x (dělníků)	2	3	4
y (hodin)	6	4	3

Graf:



Rovnice:

$$y = \frac{12}{x}$$

2.6 Trojčlenka

Trojčlenku využijeme při počítání úloh s přímou a nepřímou úměrností, známe-li tři údaje a chceme dopočítat ten čtvrtý.

Při výpočtu úlohy je klíčové správné pochopení textu a stanovení na sobě závislých veličin. Dále je třeba dbát na správný zápis úlohy do trojčlenky. Pod sebe píšeme vždy

stejně veličiny a po stranách zápisu kreslíme šipky, které značí typ úměrnosti (tj. přímou nebo nepřímou úměrnost). Šipka kreslená na straně u neznáme, začíná vždy od ní.

Přímá úměrnost:

V prádelně „Uděláme práci za vás“ vypere průměrně 5 praček 260 kg prádla za den. Kolik prádla by se vypralo, kdyby praček bylo 7?

Čím více praček bude prát, tím více prádla se vypere – opravdu se jedná o přímou úměrnost.

Zápis úlohy pomocí trojčlenky:

$$\begin{array}{lcl} \uparrow & 5 \text{ praček} & \dots\dots\dots 260 \text{ kg} \\ \uparrow & 7 \text{ praček} & \dots\dots\dots x \text{ kg} \end{array}$$

pata šipky

Po stranách zápisu doplníme šipky, které míří stejný směrem. Protože šipkami mířícími stejným směrem, znázorňujeme přímou úměrnost.

Nyní si uvědomme, co vše víme:

1. V úměře jde o rovnost dvou poměrů.
2. Poměry musí být ve stejných jednotkách.

První poměr se bude skládat z hodnot představujících množství prádla a druhý z praček. Šipky po stranách zápisu nám dávají návod, jak budeme postupovat. První členy poměrů jsou totiž u pat šipek a začíná se vždy od neznámé hodnoty.

$$x : 260 = 7 : 5$$

Poměry zapíšeme do zlomků a dopočítáme neznámou x:

$$\frac{x}{260} = \frac{7}{5}$$

$$x = 7 * 260 \div 5 = \underline{364}$$

Odpověď: Sedm praček vypere průměrně za den 364 kg prádla.

Nepřímá úměrnost:

Rybník je napájen dvěma potůčky. Vypuštěný rybník se pomocí těchto dvou zdrojů vody naplní za tři dny. Za jak dlouho by se naplnil rybník, kdyby do něj přitékalo pět potůčků?

Jedná se o slovní úlohu na nepřímou úměrnost, protože pokud zvýšíme počet zdrojů, ze kterých voda přitéká, naplnění rybníku bude trvat kratší dobu.

Zápis úlohy pomocí trojčlenky:

↓	2 potůčky	3 dny	↑
	5 potůčků	x dní	

Šipky, které míří **opačným směrem**, představují nepřímou úměrnost. A stejně jako u úměrnosti přímé, nám šipky pomohou zapsat poměry do rovnosti. Musíme ale dávat pozor, abychom u druhého poměru první člen napsali správně, jelikož opět začínáme od paty šipky.

$$x : 3 = 2 : 5$$

$$\frac{x}{3} = \frac{2}{5}$$

$$x = 3 * 2 \div 5 = \underline{1,2}$$

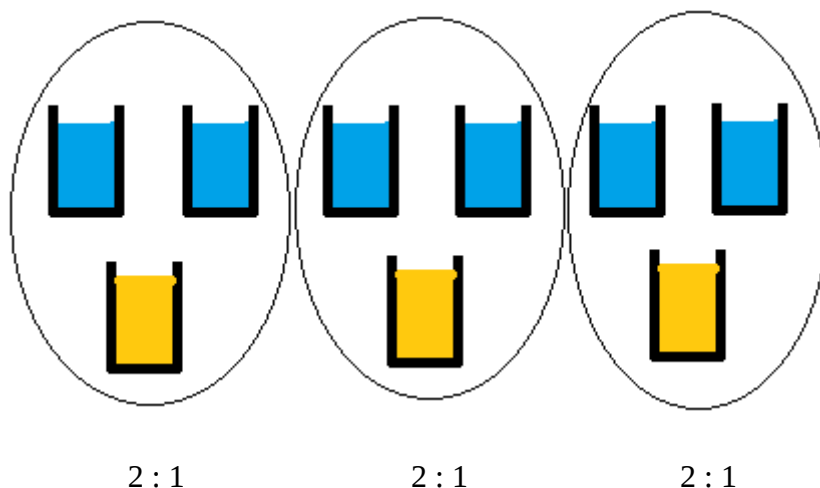
Odpověď: Pět potůčků by naplnilo rybník za 1,2 dne.

3 Řešené příklady s poměrem a postupným poměrem

1. Lukáš a Kristýna dělají domácí limonádu. Maminka jim řekla, že na 2 sklenice plné vody připadá 1 sklenice pomerančové šťávy. Kolik sklenic šťávy musí nalít do 6 sklenic vody?

Řešení:

Podle maminky máme nalít do dvou sklenic vody, jednu sklenici pomerančové šťávy. Do čtyř sklenic nalijeme tedy dvě sklenice šťávy a do šesti dáme tři (viz obrázek). Jinak si můžeme říci, že šest sklenic vody je třikrát více než dvě sklenice vody a to znamená, že sklenic šťávy musí být také 3 x více.

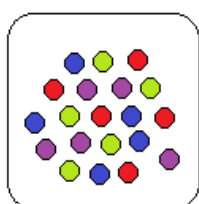


Odpověď: Limonádu uděláme tím způsobem, že do 6 sklenic nalijeme 3 sklenice šťávy. Voda a šťáva jsou tedy v poměru 6 : 3.

2. Pět dětí (Adam, Eva, Jana, Bořek a Jakub) pomáhalo starému pánovi sbírat popadaná jablka. Ten jim za jejich snahu dal sáček, který obsahuje 20 bonbónů. Sáček ale přebral jen Jakub a Adam. Dohodli se, že Adam vezme bonbóny Janě a Evě a Jakub vezme sladkosti Bořkovi. V jakém poměru si Adam a Jakub bonbóny rozdělili? A kolik bonbónů si tedy nakonec odnese Adam a kolik Jakub?

Řešení:

Představme si tento příklad jako klasické rozdávání. Adam bere bonbóny pro tři lidi (včetně sebe) a Jakub pro dva.



Rozdávání	Adam	Jakub
1.	  	 
2.	  	 
3.	  	 
4.	  	 

Adam s Jakubem si bonbóny rozdělili v poměru 3 : 2 , protože Adam v každém rozdávání dostane 3 bonbóny a Jakub 2.

Když spočítáme bonbóny v tabulce, vyjde nám, že Adam dostane 12 a Jakub 8 bonbónů.

Jinak si můžeme spočítat, kolik má každý dostat bonbónů $\rightarrow 20 : 5 = 4$. Dále víme, že Adam si odnese bonbóny určené sobě, Janě a Evě $\rightarrow 3 * 4 = 12$. A nakonec Jakub vezme bonbóny sobě a ještě Bořkovi, tedy $2 * 4 = 8$.

Předchozí způsob je vlastně rozdělováním hodnoty v poměru, protože poměr bonbónů, které si vezme Adam a které Jakub, je 3 : 2. V rámci počítání s poměry postupujeme tedy zcela identicky: 3 dílky + 2 dílky = 5 dílků. Jeden dílek spočítáme tak, že vydělíme

20 bonbónů 5 dílky, a tak zjistíme, že na jeden dílek (na jedno dítě) připadají 4 bonbóny
→ 3 dílky tedy představují 12 bonbónů a 2 dílky 8 bonbónů.

Odpověď: Adam a Jakub si rozdělili bonbóny v poměru 3 : 2, přičemž Adam si odnese 12 bonbónů a Jakub 8.

3. „Ve škole je 960 žáků. Na prvním stupni je 630 žáků. Kolik žáků je na druhém stupni? V jakém poměru je počet žáků I. stupně k počtu žáků II. stupně? V jakém poměru je počet všech žáků k počtu žáků I. stupně? V jakém poměru je počet žáků II. stupně k počtu všech žáků celé školy?“ (ŽENATÁ 2014, s. 60)

Řešení:

a) Kolik je žáků na druhém stupni?

$$960 - 630 = \underline{330}$$

Odpověď: Na druhém stupni je 330 žáků.

b) V jakém poměru je počet žáků I. stupně k počtu žáků II. stupně?

- Žáků prvního stupně je 630 a druhého 330, poměr je tedy **630 : 330**.
Tento poměr lze upravit na základní tvar, protože části poměru jsou soudělná čísla →

$$\frac{(30 * 21)}{(30 * 11)} = \frac{21}{11}$$

Odpověď: Poměr žáků prvního a druhého stupně je 21 : 11.

c) V jakém poměru je počet všech žáků k počtu žáků I. stupně?

- Všech žáků je 960. Žáků na prvním stupni je 630. Poměr je tedy **960 : 630**. Jedná se opět o soudělná čísla →

$$\frac{(30 * 32)}{(30 * 21)} = \frac{32}{21}$$

Odpověď: Počet všech žáků k počtu žáků I. stupně je 32 : 21.

d) V jakém poměru je počet žáků II. stupně k počtu všech žáků?

- Na druhém stupni je 330 žáků a celkem je na škole 960 žáků. Poměr je 330 : 960. Upravením na základní tvar získáme →

$$\frac{(30 * 11)}{(30 * 32)} = \frac{11}{32}$$

Odpověď: Počet žáků druhého stupně k počtu všech žáků je v poměru 11 : 32.

4. Pan Komárek si nechal vytisknout plánec z katastru nemovitostí, na kterém má jeho zahrada ve tvaru obdélníku rozměry 12 cm a 7 cm. Změňte rozměry na plánu v poměru 3 : 5. Určete zda, se rozměry na plánu zmenší nebo zvětší a zahradu nakreslete. Poté запиšte v jakém poměru je rozloha zahrady na původním plánu k rozloze zahrady na plánu změněném.

Řešení:

Změna čísla v poměru znamená, že ono číslo vynásobíme poměrem ve tvaru zlomku. V tomto případě půjde o zmenšení, protože zlomek $\frac{3}{5}$ je menší než 1 (tj. číselník je menší než jmenovatel: $3 < 5$) →

$$12 * \frac{3}{5} = 12 * 3 \div 5 = \underline{7,2}$$

$$7 * \frac{3}{5} = 7 * 3 \div 5 = \underline{4,2}$$

Rozloha původního plánu:

$$S = a * b = 12 * 7 = 84$$

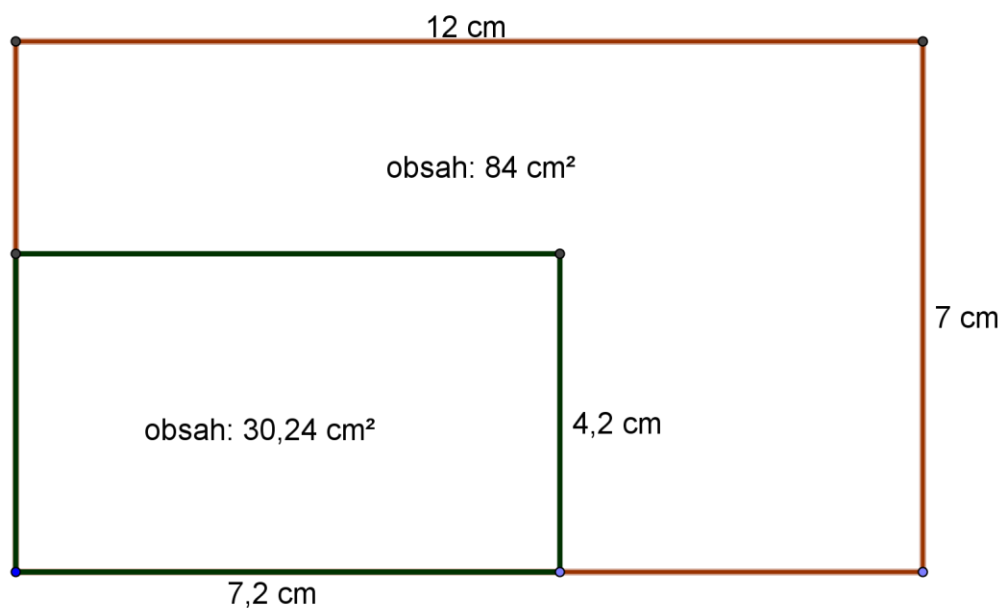
Rozloha změněného plánu:

$$S = a_1 * b_1 = 7,2 * 4,2 = 30,24$$

Poměr rozloh:

$$84 : 30,24 = 8\,400 : 3\,024 = 525 : 189 = 175 : 63 = \underline{25 : 9}$$

Odpověď: Rozměry zahrady se v poměru 3 : 5 zmenšily na 7,2 cm a 4,2 cm a rozlohy zahrad na pláncích jsou v poměru 25 : 9.



5. Uveďte dané poměry do základního tvaru:

- a) 12 : 21
- b) 13 : 26
- c) 7 : 9
- d) 2 : 4 : 6
- e) 8 : 24 : 12
- f) 3 : 6 : 2
- g) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{1}{3}$

Řešení:

a) $12 : 21 = (3 * 4) : (3 * 7) = \underline{4 : 7}$

b) $13 : 26 = (13 * 1) : (13 * 2) = \underline{1 : 2}$

c) $7 : 9 = (1 * 7) : (3 * 3) = \underline{7 : 9}$ (čísla 7 a 9 jsou nesoudělná, nelze je tedy krátit)

d) $2 : 4 : 6 = (2 * 1) : (2 * 2) : (2 * 3) = \underline{1 : 2 : 3}$

e) $8 : 24 : 12 = (4 * 2) : (4 * 6) : (4 * 3) = \underline{2 : 6 : 3}$

f) $3 : 6 : 2 = (3 * 1) : (3 * 2) : (1 * 2) = \underline{3 : 6 : 2}$ (čísla 3, 6 a 2 jsou nesoudělná)

g) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{1}{3} = \frac{6}{12} : \frac{9}{12} : \frac{4}{12} = \underline{6 : 9 : 4}$

6. Určete dvě libovolná trojčíselná čísla tak, aby byla v poměru 5 : 9.

Řešení:

Vynásobíme (rozšíříme) oba členy poměru stejným číslem, tak aby vzniklo trojčíselné číslo, nejjednodušší je vynásobit je 100:

$$(5 * 100) : (9 * 100) = \underline{500 : 900}$$

7. „Napište v co nejjednodušším tvaru převrácené poměry k poměrům:“

a) $4 : 5$

b) $13 : 9$

c) $\frac{7}{3}$

d) $1,9 : 57$

e) $15 : 1$

$$f) \frac{2}{5} : \frac{3}{4}$$

(TREJBAL 1994, s. 39)

Řešení:

a) $4 : 5 \rightarrow \underline{5 : 4}$

b) $13 : 9 \rightarrow \underline{9 : 13}$

c) $\frac{7}{3} = 7 : 3 \rightarrow \underline{3 : 7} (= \frac{3}{7})$

d) $1,9 : 57 \rightarrow 57 : 1,9 = 570 : 19 = (30 * 19) : (1 * 19) = \underline{30 : 1}$

e) $15 : 1 \rightarrow \underline{1 : 15}$

f) $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{15}{20} : \frac{8}{20} = \underline{15 : 8}$

8. *Paní Ostružinová se rozhodla, že pro svou čtyřčlennou rodinu připraví na oběd rizoto s kuřecím masem. Podle receptu bude potřebovat:*

2	kostky bujónu
400 g	dlouhozrnné rýže
300 g	kuřecích prsou
250 g	mražené zeleninové směsi
3	lžíce oleje

Nečekaně se jí ale ozvala sestra, že přijede se svým manželem a jejich dcerou. Jak bude muset upravit množství ingrediencí v receptu, aby se najedlo 7 lidí?

Řešení:

Jedná se o zvětšení v poměru $7 : 4 \rightarrow$

$$2 * \frac{7}{4} = \underline{3,5}$$

$$400 * \frac{7}{4} = \underline{700}$$

$$300 * \frac{7}{4} = \underline{525}$$

$$250 * \frac{7}{4} = \underline{437,5}$$

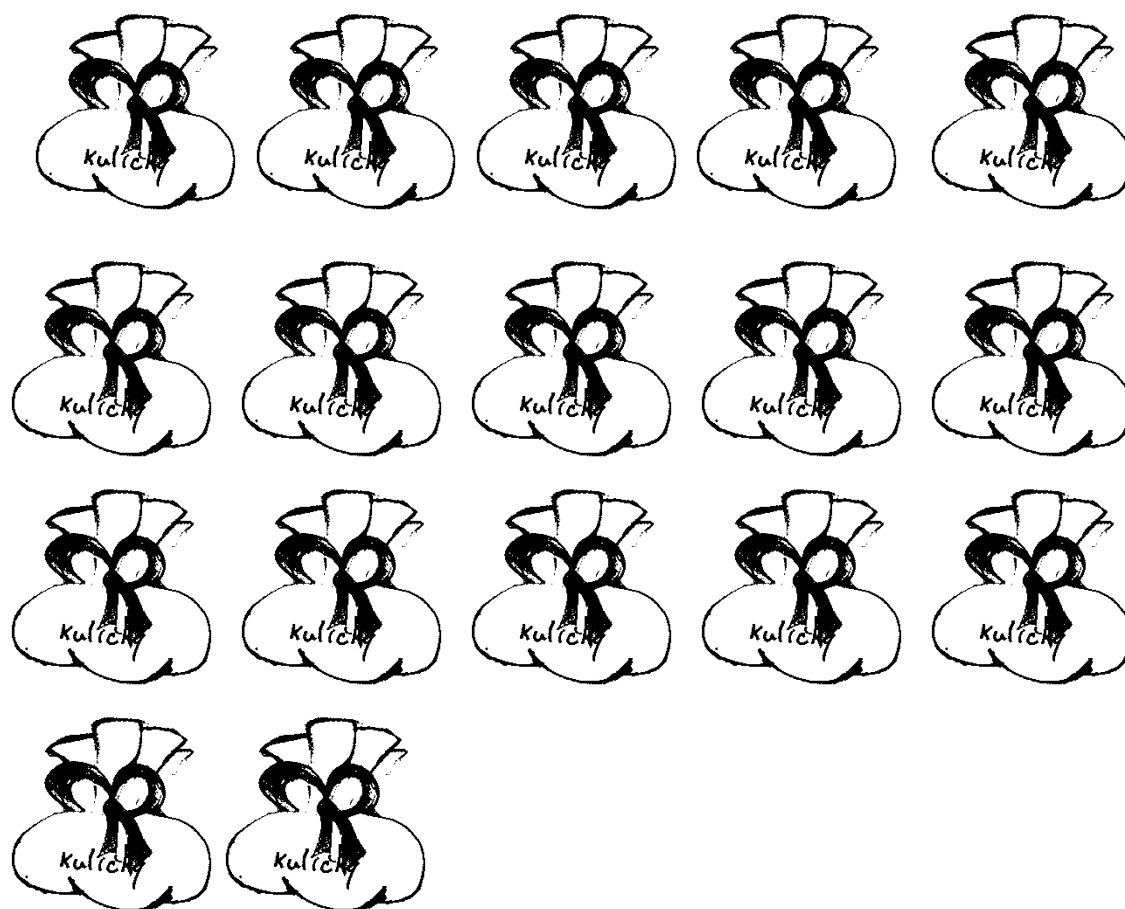
$$3 * \frac{7}{4} = \underline{5,25}$$

Odpověď: Paní Ostružinová bude na oběd potřebovat 3 a půl kostky bujónu, 700 g dlouhozrnné rýže, 525 g kuřecích prsou, 437,5 g mražené zeleninové směsi a 5,25 lžic oleje.

9. V březnu se konal turnaj ve cvrnkání a hrálo se o 612 duhových kuliček. Protože byl Jirka velmi dobrým hráčem, vyhrál. Jirka ale nebyl lakomý a rozdělil výhru mezi sebe a své tři bratry v poměru 2 : 3 : 5 : 7. Kolik kuliček dostal každý sourozenec, jestliže Jirka si ponechal nejvíce kuliček?

Řešení:

Poměr nám říká, že jeden bratr dostal 2 dílky z výhry, druhý 3 dílky, třetí 5 dílků a čtvrtý (tj. Jirka, protože si nechal nejvíce) dostal 7 dílků. Všechny dílky byly stejně velké. Můžeme si tak představit kuličky rozdělené do 17 (tj. 2 + 3 + 5 + 7) stejných měšců.



Naším úkolem je zjistit, kolik kuliček je v jednom měšci a pak je spravedlivě rozdělit:

$$612 \div 17 = 36$$

První bratr:

$$2 * 36 = \underline{72}$$

Druhý bratr:

$$3 * 36 = \underline{108}$$

Třetí bratr:

$$5 * 36 = \underline{180}$$

Jirka:

$$7 * 36 = \underline{252}$$

Kontrola:

$$72 + 108 + 180 + 252 = 612$$

Odpověď: První bratr dostal 72 kuliček, druhý bratr 108 kuliček, třetí 180 a Jirka si ponechal 252 kuliček.

10. Za jednu směnu vyrobily stroje ve sklárnách 17 820 zkumavek. Stroje pracovaly v poměru 4 : 7 : 9. Kolik zkumavek vyrobil každý stroj za jednu hodinu, jestliže směna trvá 9 hodin?

Řešení:

Nejdříve je třeba zjistit, kolik jednotlivé stroje vyrobily výrobků za celou směnu.

Krok 1: Kolik zkumavek připadá na jeden díl →

$$17\,820 \div (4 + 7 + 9) = 891$$

Krok 2: Kolik zkumavek vyrobí každý stroj za směnu →

1. stroj: $4 * 891 = 3\,564$

2. stroj: $7 * 891 = 6\,237$

3. stroj: $9 * 891 = 8\,019$

Krok 3: Kolik zkumavek vyrobí každý stroj za 1 hodinu →

1. stroj: $3\,564 \div 9 = 396$

2. stroj: $6\,237 \div 9 = 693$

3. stroj: $8\,019 \div 9 = 891$

Odpověď: První stroj vyrobí za jednu hodinu 396 zkumavek, druhý 693 a třetí 891.

11. „Hlava štiky měřila 12 cm. Délka hlavy k délce masité části těla byly v poměru 3 : 8 a délka masité části těla k délce ocasu v poměru 2 : 1.

1. V jakém poměru byly délky hlavy, masité části těla a ocasu?
2. Jak byla štika dlouhá?“ (TREJBAL 1994, s. 43)

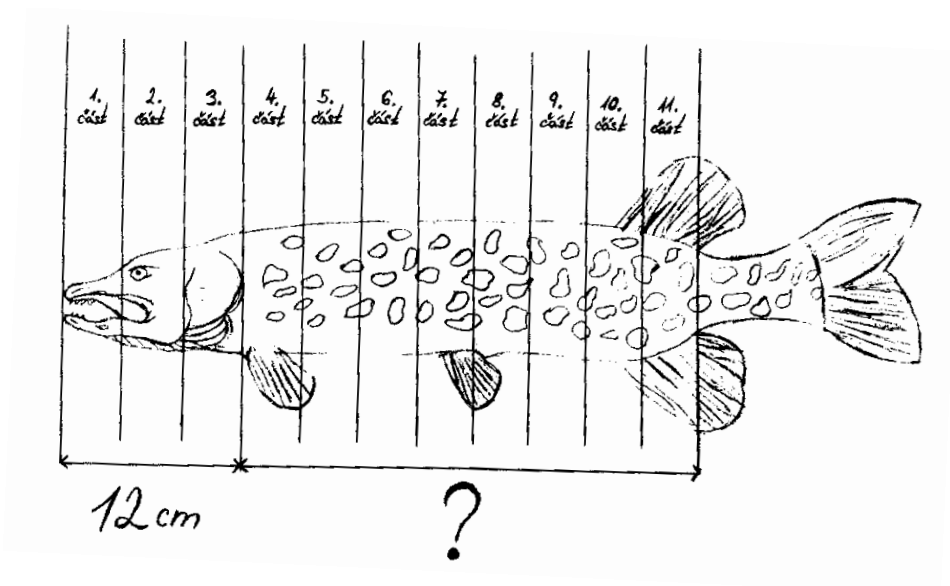
Řešení:

a) Poměr hlavy, části těla a ocasu:

➤ I. Způsob

Krok 1: Představíme si, že hlava a masitá část těla štiky je rozdělena na 11 stejných částí (dle poměru 3 : 8).

Krok 2: Jedna část je dlouhá 4 cm, protože víme, že hlava měří 12 cm a je tvořena třemi částmi.



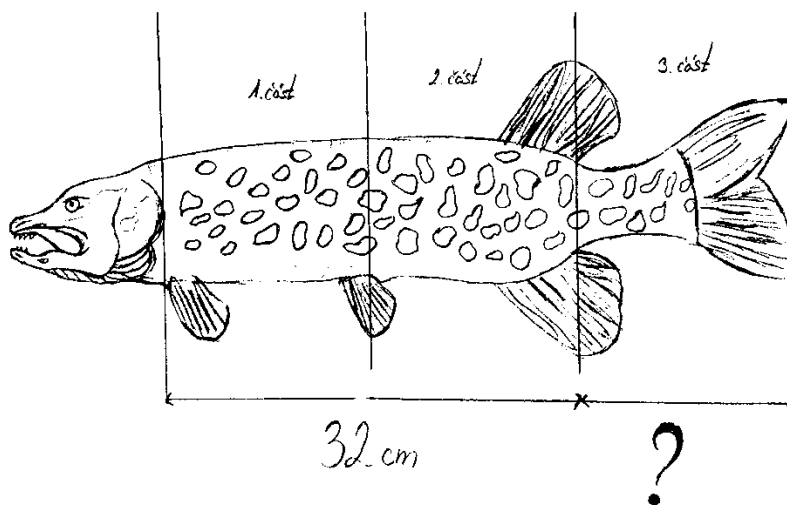
Krok 3: Nyní tedy můžeme dopočítat, jak dlouhé je tělo ryby →

$$4 * 8 = 32$$

Krok 4: Obdobně zjistíme i délku ocasu, ale s tím rozdílem, že tělo a ocas štiky rozdělíme na 3 stejné části (dle poměru 2 : 1).

Krok 5: Vypočítáme délku jedné části tak, že využijeme délky masité části těla (tj. 32 cm), která je rozdělena na 2 části →

$$32 \div 2 = 16$$



Krok 6: Délka ocasu je 16 cm, protože $1 \cdot 16 = 16$.

Krok 7: Jednotlivé délky štiky dáme do poměru → 12 : 32 : 16 a pomocí krácení získáme poměr 3 : 8 : 4.

➤ II. Způsob

Krok 1: Známe dva poměry - 3 : 8 a 2 : 1. Společného mají to, že oba se nějakým způsobem týkají masité části těla štiky. Konkrétně k této části patří čísla 8 a 2.

Krok 2: Číslo 8 je čtyřikrát větší, než číslo 2. Stačí tedy druhý poměr čtyřikrát rozšířit a spojit ho s tím prvním → 3 : 8 : 4.

Masitá část těla

$$3 : \boxed{8 \text{ a } 8} : 4 \Rightarrow 3 : 8 : 4$$

Odpověď: Hlava k tělu a ocasu štiky je v poměru 3 : 8 : 4.

b) Délka štiky:

- Jelikož jsme v předchozím úkolu zjistili jednotlivé délky částí těla štiky, zbývá je jen sečíst $\rightarrow 12 + 32 + 16 = \underline{60}$.

Odpověď: Štika je dlouhá 60 cm.

12. Věk maminky a tatínka je v poměru 7 : 8. Stáří tatínka a dcery je v poměru 12 : 5 a maminky se synem v poměru 3 : 1. Kolik je všem let a v jakém poměru je věk sourozenců, jestliže tatínkovi je 48 let?

Řešení:

Číslo 8 reprezentuje tatínkův věk. Abychom zjistili, kolik je mamince, musíme jeho věk rozdělit na 8 stejných dílků a poté hodnotou jednoho dílku vynásobit první část poměru:

$$48 \div 8 = 6$$

$$6 * 7 = \underline{42}$$

Při poměru věku tatínka s dcerou, postupujeme obdobně, jen teď je poměr 12 : 5. A údaj týkající se stáří tatínka je ukryt v první části poměru:

$$48 \div 12 = 4$$

$$4 * 5 = \underline{20}$$

Synův věk:

$$42 \div 3 = 14$$

$$14 * 1 = \underline{14}$$

Poměr věku sestry a bratra:

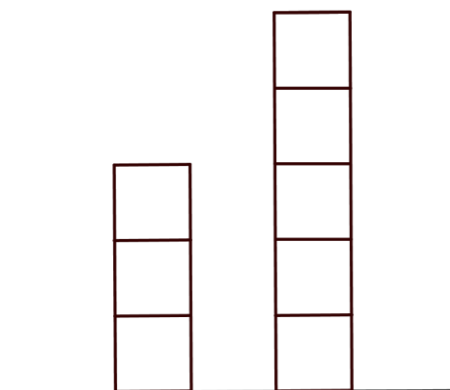
$$20 : 14 = \underline{10 : 7}$$

Odpověď: Mamince je 42 let, dceři 20 let a synovi 14 let. Poměr věku sestry a bratra je 10 : 7.

13. Nakreslete obrys dvou panelových domů, jejichž výšky jsou v poměru 3 : 5.

Řešení:

Z poměru 3 : 5 víme, že budeme potřebovat 8 stejných dílků (protože $3 + 5 = 8$). Určíme si, že jeden dílek bude reprezentován například čtvercem, jehož strana je rovna jednomu centimetru. První panelový dům se tedy bude skládat ze tří čtverců poskládaných na sebe a druhý panelový dům z pěti.

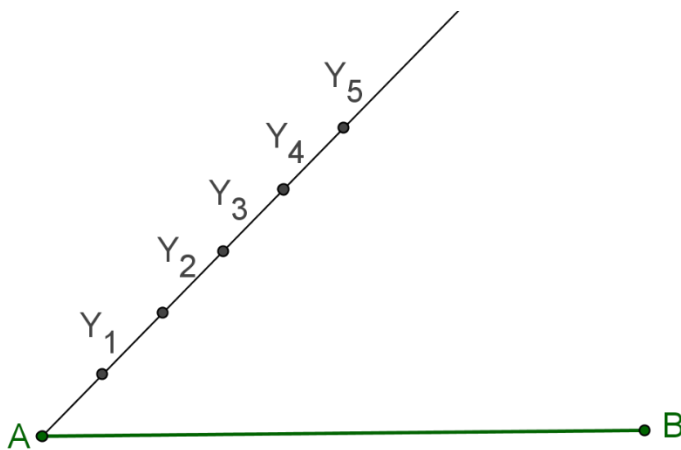


14. Rozdělte úsečku $|AB| = 7\text{ cm}$ v poměru $2 : 7$.

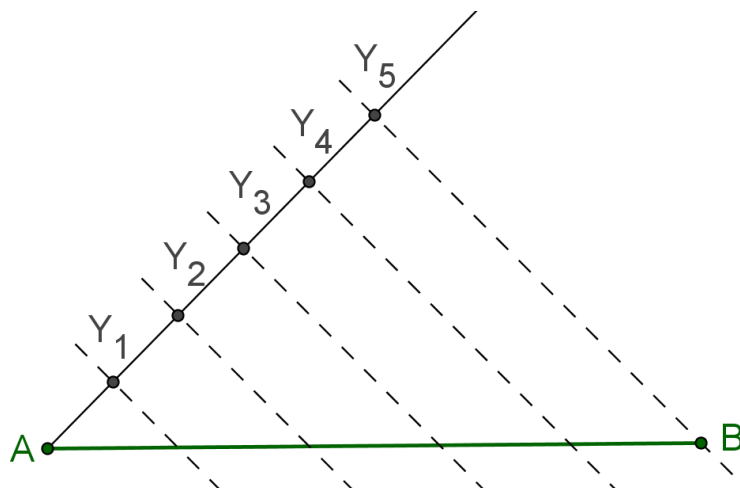
Řešení:

Nejdříve si připomeňme rozdělení úsečky na stejné dílky. Poté už bude jednoduché rozdělit ji v poměru $2 : 7$.

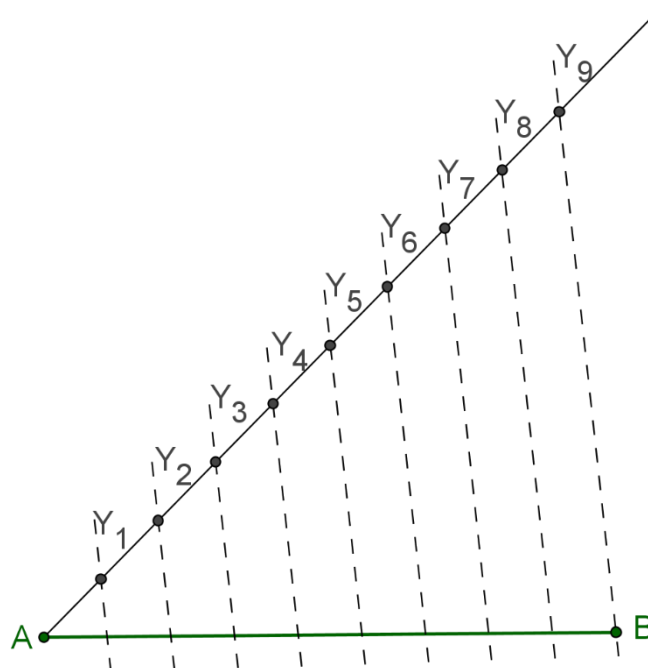
Rozdělme úsečku například na 5 stejných dílků. Uděláme to tak, že k úsečce vedeme z bodu A polopřímku, která s úsečkou AB svírá úhel přibližně 45° . Na nově vzniklou polopřímku nanese 5 bodů, které jsou od sebe stejně vzdáleny (začínáme v bodě A). Můžeme si je pojmenovat Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 .



Nyní vytvoříme přímku, která bude procházet posledním bodem (tzn. Y_5) a bodem B. Poté s touto přímkou povedeme rovnoběžky, které procházejí jednotlivými body (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4). Posledním krokem je vyznačit průsečíky rovnoběžek s přímkou AB a jak vidíme na následujícím obrázku, úsečka AB je rozdělena na 5 stejně velkých částí.



Vraťme se zpět k rozdělení úsečky v poměru 2 : 7. Nyní budeme přímkou svírající s úsečkou AB 45° rozdělovat na 9 částí (protože $2 + 7 = 9$). Opět poslední bod (tzn. Y_9) spojíme s bodem B a vedeme rovnoběžky. Tím jsme rozdělili úsečku na 9 stejných částí.



Ale nás zajímá jen přímkou, která prochází bodem Y_2 , protože potřebujeme úsečku rozdělit v poměru 2 : 7.



a) ΔKLM : $k = 15$; $l = 12$; $m = 4$
 b) ΔXYZ : $x = 2,4$; $y = 3,6$; $z = 2$
 c) ΔOPQ : $o = 7,5$; $p = 9$; $q = 13,5$

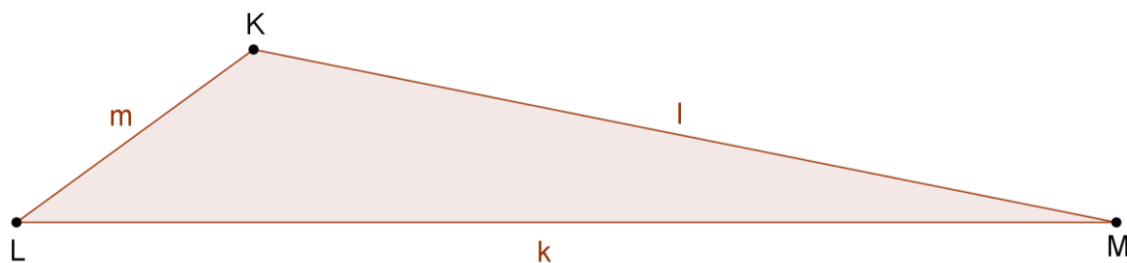
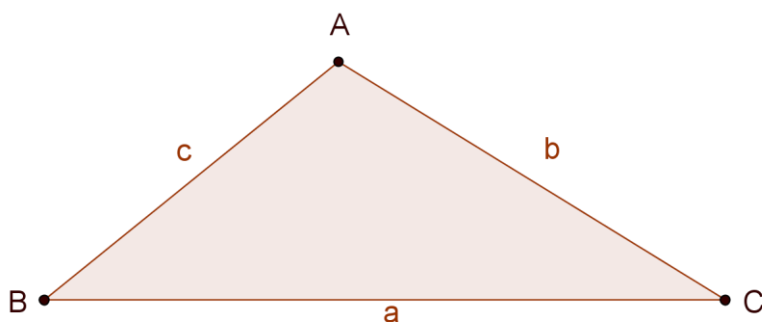
➤ Nejdříve musíme zkontrolovat, jestli délky stran trojúhelníku jsou seřazeny od největší po nejmenší, tak jako je tomu u trojúhelníku ABC:

40

- Trojúhelníky jsou si podobné, jestliže se rovnají hodnoty poměrů všech odpovídajících si stran. Musíme tedy zjistit, zda $\frac{a}{k} = \frac{b}{l} = \frac{c}{m}$:

$$\frac{9}{15} \stackrel{?}{=} \frac{6}{12} \stackrel{?}{=} \frac{5}{4} \rightarrow \underline{0,6 \neq 0,5 \neq 1,25}$$

Odpověď: Trojúhelník KLM není podobný trojúhelníku ABC.



b) $\triangle XYZ$

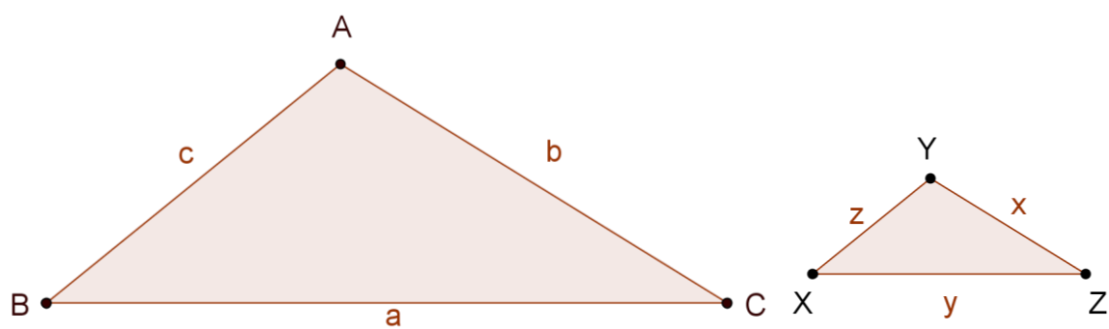
- Sestupné seřazení stran trojúhelníku $\rightarrow$

$$3,6 > 2,4 > 2$$

- Trojúhelníky jsou si podobné, pokud $\frac{a}{y} = \frac{b}{x} = \frac{c}{z} \rightarrow$

$$\frac{9}{3,6} \stackrel{?}{=} \frac{6}{2,4} \stackrel{?}{=} \frac{5}{2} \rightarrow \underline{2,5 = 2,5 = 2,5}$$

Odpověď: Trojúhelník XYZ $\sim$ ABC.

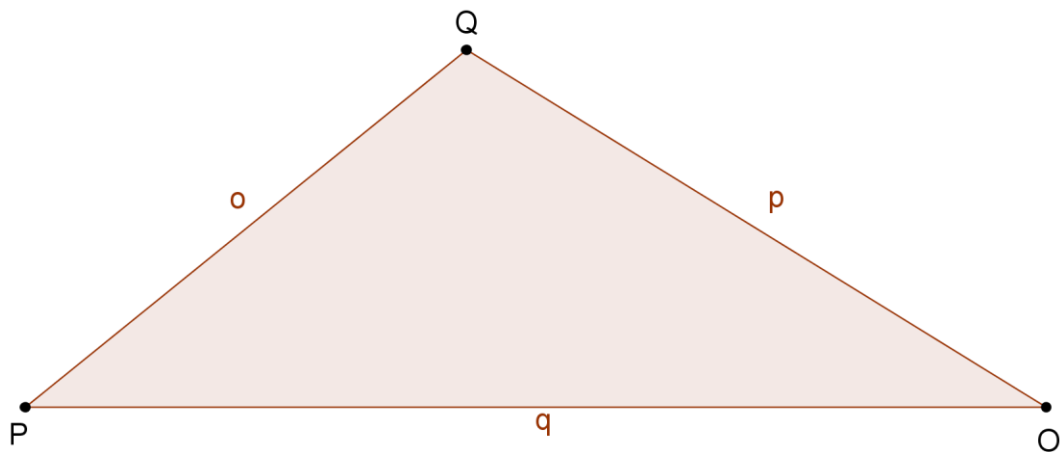
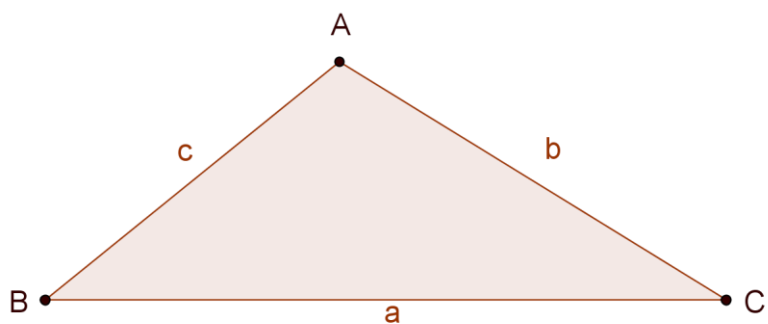


c) $\triangle OPQ$

$$13,5 > 9 > 7,5$$

$$\frac{9}{13,5} \stackrel{?}{=} \frac{6}{9} \stackrel{?}{=} \frac{5}{7,5} \rightarrow \underline{0,\overline{66} = 0,\overline{66} = 0,\overline{66}}$$

Odpořd': Trojúhelník OPQ $\sim$ ABC.



16. Narysujte trojúhelník XYZ jehož obvod je 27 cm a strany jsou v poměru $1,5 : 4 : 3$,

Řešení:

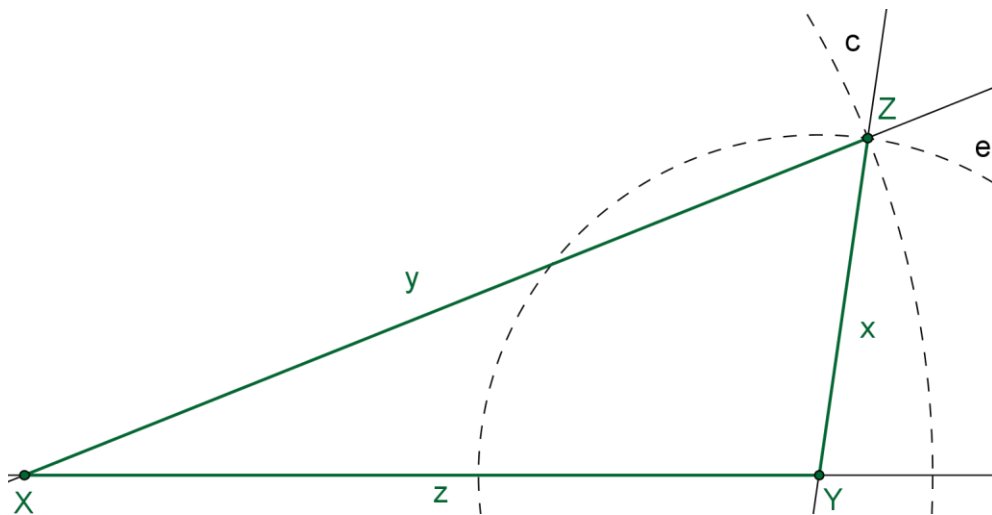
Před rýsováním si nejdříve musíme spočítat, jak dlouhé jsou jednotlivé strany:

Krok 1: Jeden dílek $\rightarrow 27 \div (1,5 + 4 + 3,5) = 27 \div 9 = 3$

Krok 2: Strana x $\rightarrow 1,5 * 3 = \underline{4,5}$

Krok 3: Strana y $\rightarrow 4 * 3 = \underline{12}$

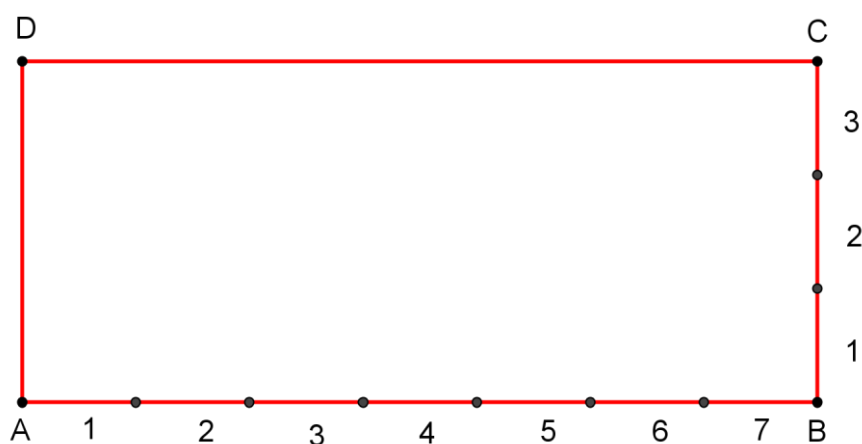
Krok 4: Strana z $\rightarrow 3,5 * 3 = \underline{10,5}$



17. Jeníkovi si nechali postavit dům. Dům už je skoro hotov a oni chtějí jet nakoupit nábytek a spotřebiče do kuchyně. Ale na to potřebují vědět rozměry místnosti. Architekt jim dal plánec, na kterém je velká místnost ve tvaru obdélníku vyčíslena poměrem stran a obvodem. Obvod kuchyňské místnosti je 30 m a délka s šířkou jsou v poměru 7 : 3. Vypočítejte rozměry místnosti.

Řešení:

Představme si obdélník, jehož délka je rozdělena na 7 stejných dílků a šířka je rozdělena na 3 stejné dílky. Stejně dílky nám vyplývají z toho, že členy poměru musí být vždy ve stejných jednotkách.



Obvod celé kuchyně (tj. obdélníku) je 30 m. Ale obvod zahrnuje dvakrát délku a dvakrát šířku, proto ho musíme vydělit dvěma a tím dostaneme součet délky a šířky.

$$d + š = 15 \text{ m}$$

Podle obrázku potřebujeme zjistit délku jednoho dílku. My jich máme 10 (tj. 7 + 3). Jeden dílek:

$$15 \div (7 + 3) = 1,5$$

Délka je tvořena ze 7 dílků:

$$1,5 * 7 = \underline{10,5}$$

Šířka je ze 3 dílků:

$$1,5 * 3 = \underline{4,5}$$

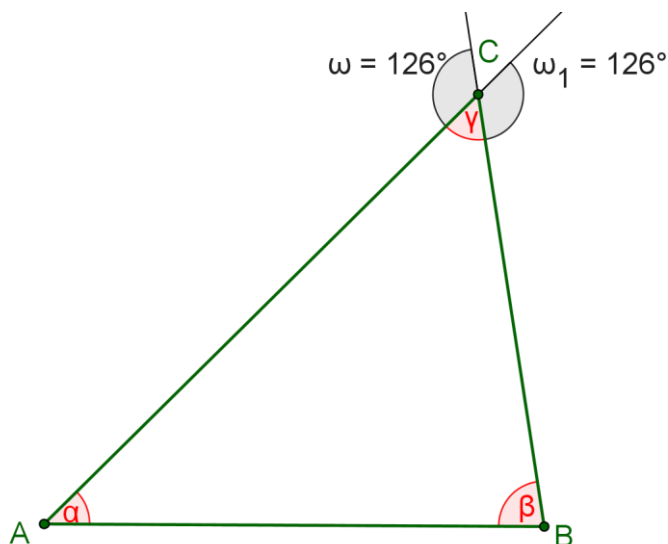
Kontrola:

$$o = 2 * (d + š) = 2 * (10,5 + 4,5) = \underline{30}$$

Odpověď: Kuchyně má 10,5 m na délku a 4,5 m na šířku.

18. „V trojúhelníku ABC se velikost vnějšího úhlu při vrcholu C rovná 126° . Velikosti vnitřních úhlů α , β při vrcholech A, B jsou v poměru 5 : 9. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů α , β , γ trojúhelníku ABC.“ (TREJBAL 1994, s. 41)

Řešení:



První co v této úloze musíme udělat, je zjistit velikost vnitřního úhlu u vrcholu C. Stačí si uvědomit, že vnější úhel a vnitřní úhel mají společně 180° (je to patrné z obrázku díky prodloužení úsečky AC).

$$\text{Krok 1: Velikost úhlu } \gamma = 180^\circ - 126^\circ = \underline{54^\circ}$$

Krok 2: Zjistíme, kolik stupňů se bude „dělit“ mezi úhly α a β . Využijeme k tomu to, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je $180^\circ \rightarrow$

$$\alpha + \beta = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$$

Krok 3: Rozdělení úhlu 126° v poměru $5 : 9 \rightarrow$

$$126^\circ \div (5 + 9) = 126^\circ \div 14 = 9^\circ$$

Krok 4: Dopočítání úhlů α a $\beta \rightarrow$

$$\alpha = 5 * 9^\circ = \underline{45^\circ}$$

$$\beta = 9 * 9^\circ = \underline{81^\circ}$$

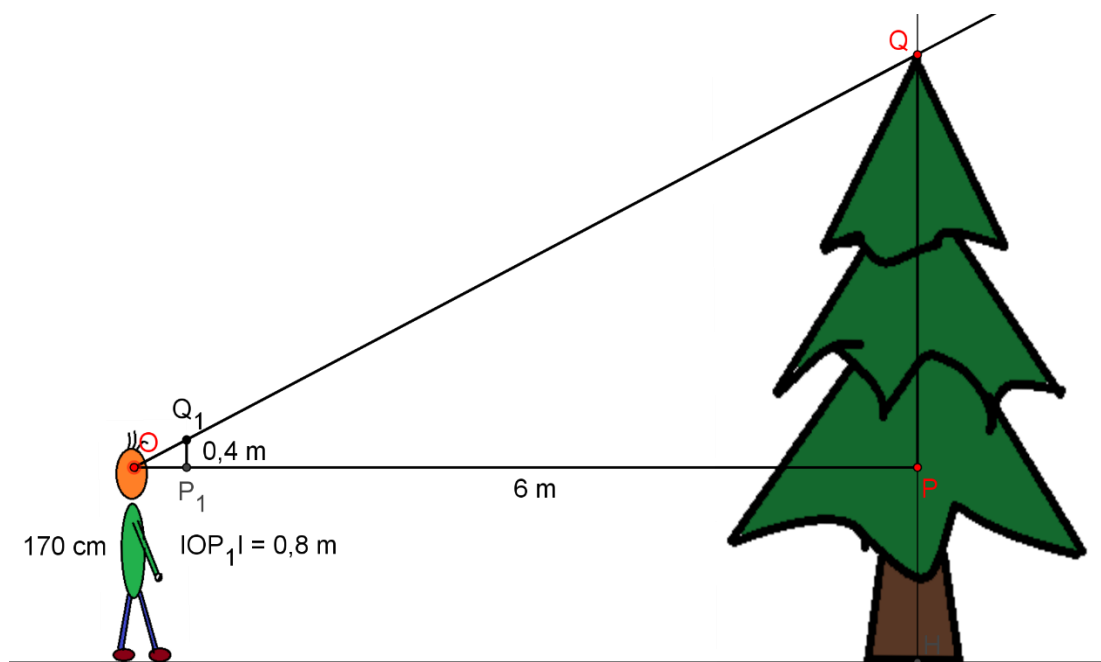
Krok 5: Kontrola: $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ + 81^\circ + 54^\circ = 180^\circ$

Odpověď: Úhel α je velký 45° , úhel β je 81° a úhel γ je 54° .

19. Jakub si na internetu přečetl návod, jak v přírodě odhadnout výšku stromu. Rozhodl se, že to zkusí. Vydal se do nedalekého lesa, kde si vyhlídl malý smrček. Udělal od něj 6 kroků, které považoval za 6 m. Našel tenký klacek, který zkrátil tak, aby se při pohledu na dolní část klacku koukal rovně a aby přes vrchní část viděl špičku stromu. Klacek pak odhadl na 40 cm a ruku s ním měl od sebe nataženou přibližně 80 cm. Jak vysoký byl přibližně strom, jestliže Jakub měřil 170 cm?

Řešení:

Nejdříve si náčrtkem zobrazme situaci. Díky tomu uvidíme co dělat.



Když se pozorně podíváme na obrázek, zjistíme, že díky klacku nám vznikly dva podobné trojúhelníky. A to trojúhelníky OPQ a OP_1Q_1 . Z toho nám tedy vyplývá, že $|PQ| : |P_1Q_1|$ musí mít stejnou hodnotu jako $|OP| : |OP_1|$.

Tím vypočítáme výšku části stromu, která Jakuba převyšuje. A protože tři údaje známe, dopočítání čtvrté je už hračka:

$$\frac{x}{0,4} = \frac{6}{0,8}$$

$$x = 0,4 * 6 \div 0,8 = 3$$

Výška stromu je rovna součtu vypočítané hodnoty (tj. část stromu) s výškou Jakuba do úrovně jeho očí (tj. cca 160 cm):

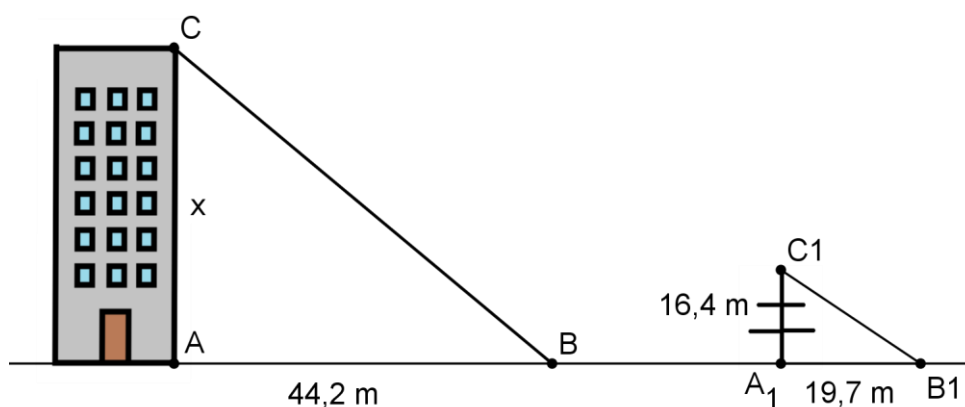
$$3 \text{ m} + 1,6 \text{ m} = \underline{4,6 \text{ m}}$$

Odpověď: Strom je vysoký přibližně 4,6 m.

20. V městečku je vysoká budova, která vrhá stín 44,2 m. Opodál této budovy stojí stožár dlouhý 16,4 m, který má ve stejnou dobu stín o 24,5 m kratší. Jak pomocí stínů zjistíme, kolik měří budova?

Řešení:

Pro lepší orientaci ve slovní úloze, je nejlepší načrtnout si situaci.



Paprsky světla, které dopadají na stranu budovy a stožáru tvoří stín. Tyto paprsky, které vycházejí z jedno bodu (tj. Slunce) bychom správně neměly brát jako rovnoběžné. Ale naše hvězda je od nás natolik vzdálená a budova se stožárem jsou natolik blízko u sebe, že je jako rovnoběžné vnímat můžeme.

Díky rovnoběžnosti paprsků a pravému úhlu, který svírá budova i stožár se zemí, můžeme říci, že trojúhelníky ABC a A₁B₁C₁ si jsou podobné. Proto k výpočtu neznámé hodnoty, lze využít vztahu podobnosti trojúhelníků:

$$\frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|}$$

Ještě před výpočtem výšky budovy, musíme zjistit délku stínu stožáru:

$$44,2 - 24,5 = 19,7$$

Výška budovy:

$$\frac{x}{16,4} = \frac{44,2}{19,7}$$

$$x \doteq \underline{36,8}$$

Odpověď: Budova je vysoká přibližně 36,8 m.

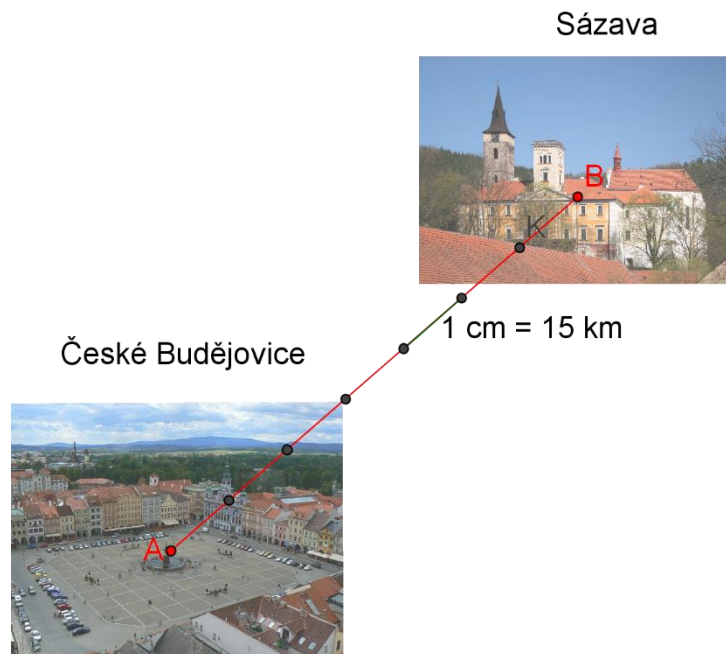
3.1 Měřítko a plán mapy

1. Město České Budějovice je od Sázavy vzdálené vzdušnou čarou 105 km. Jak dlouhou čarou je tato vzdálenost na mapě o měřítku 1 : 1 500 000 vyznačena?

Řešení:

Jeden centimetr na mapě představuje jeden milion pět set tisíc centimetrů ve skutečnosti. Skutečná vzdálenost je 105 km. Naším úkolem je zjistit, kolikrát se 1 500 000 cm vejde do 105 km. Tím získáme údaj o délce úsečky, která spojuje tyto dvě města na mapě:

$$10\,500\,000 \div 1\,500\,000 = \underline{7}$$



Odpověď: České Budějovice a Sázavu bychom mohli na mapě spojit úsečkou dlouhou 7 cm.

2. *Narýsujte úsečku, která na mapě reprezentuje vzdálenost:*

- a) 3,5 km v měřítku 1 : 50 000
- b) 550 cm v měřítku 1 : 110
- c) 117 m v měřítku 1 : 900

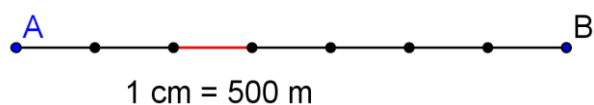
Řešení:

a) 3,5 km v měřítku 1 : 50 000

- Podle měřítka je jeden centimetr na mapě padesát tisíc centimetrů (tj. 500 m) ve skutečnosti. Ptáme se tedy, kolikrát se 50 000 cm vejde do 3,5 km. Odpověď získáme tak, že reálnou vzdálenost v centimetrech (tj. $3,5 \text{ km} = 3\,500 \text{ m} = 350\,000 \text{ cm}$) vydělíme 50 000 →

$$350\,000 \div 50\,000 = \underline{7}$$

- 3,5 km je na mapě znázorněno úsečkou o délce 7 cm.

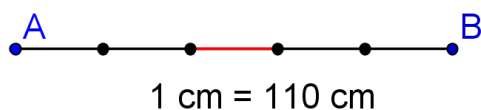


b) 550 cm v měřítku 1 : 110

- Měřítko i reálná vzdálenost jsou ve stejných jednotkách. Z tohoto důvodu nemusíme skutečnou vzdálenost převádět a rovnou můžeme zjistit, jak dlouhá bude délka úsečky na mapě →

$$550 \div 110 = \underline{5}$$

- 5 cm na mapě reprezentuje vzdálenost 550 cm ve skutečnosti.

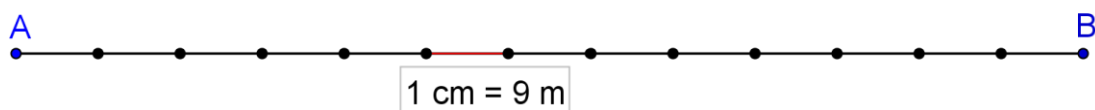


c) 117 m v měřítku 1 : 900

- Nejprve 117 m převedeme na cm, tj. $117\text{ m} = 11\,700\text{ cm}$.
- Nyní vypočítáme délku úsečky na mapě →

$$11\,700 \div 900 = 13$$

- 13 cm na mapě znázorňuje 117 m ve skutečnosti.



3. Určete měřítko mapy, jestliže:

a) Reálná vzdálenost je 480 km a vzdálenost na mapě je 15 cm.

b) Reálná vzdálenost je 1 467 m a vzdálenost na mapě je 3 cm.

Řešení:

a) Reálná vzdálenost = 480 km; vzdálenost na mapě = 15 cm

- Měřítko mapy je vyjádřením poměru, jehož prvním členem je vzdálenost na mapě a druhým členem je skutečná (resp. reálná) vzdálenost. Poměrem porovnáváme dvě části, které jsou ve stejných jednotkách.

Krok 1: Převédeme známé údaje na stejné jednotky →

$$480 \text{ km} = 480\,000 \text{ m} = 48\,000\,000 \text{ cm}$$

Krok 2: Vzdálenosti dáme do poměru, a pokud to jde, zkrátíme →

$$15 : 48\,000\,000 = \underline{1 : 3\,200\,000}$$

Odpověď: Měřítkem mapy je 1 : 3 200 000.

b) Reálná vzdálenost = 1 467 m; vzdálenost na mapě = 3 cm

$$\text{Krok 1: } 1\,467 \text{ m} = 146\,700 \text{ cm}$$

$$\text{Krok 2: } 3 : 146\,700 = \underline{1 : 48\,900}$$

Odpověď: Měřítkem mapy je 1 : 48 900.

4. Praha je na mapě s Ostravou spojena 12 cm úsečnou. Jakou skutečnou vzdálenost tato přímka reprezentuje, jestliže mapa je v měřítku 1 : 2 300 000?

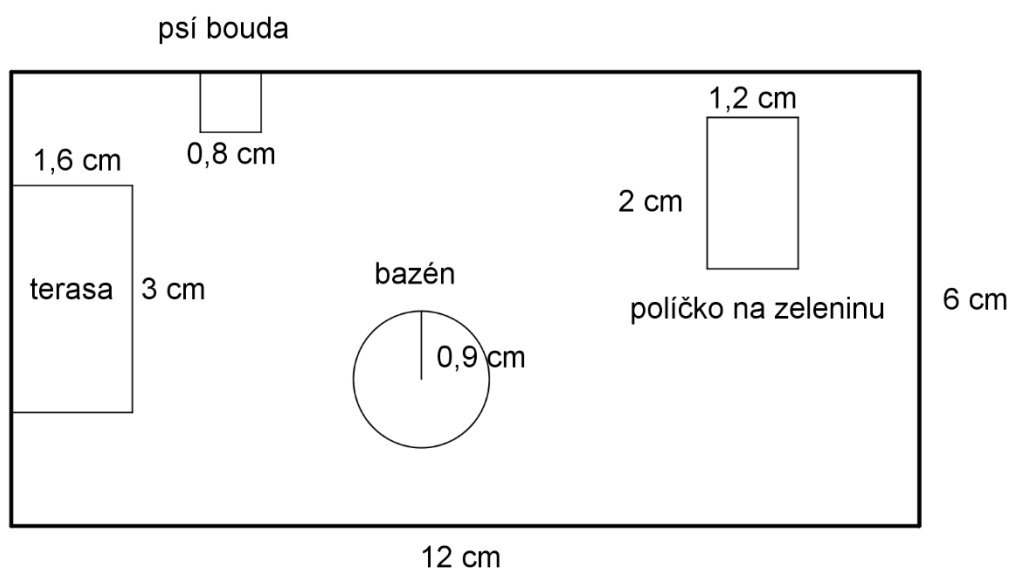
Řešení:

Měřítko nám říká, že 1 cm na mapě představuje 2 300 000 cm (tj. 23 km) ve skutečnosti. Reálnou vzdálenost reprezentovanou dvanácti centimetry tedy získáme tak, že celé měřítko rozšíříme dvanácti:

$$(1 * 12) : (2\,300\,000 * 12) = \underline{12 : 27\,600\,000}$$

Odpověď: Dvanáct centimetrů na mapě je ve skutečnosti 27 600 000 cm (tj. 276 km).

5. Na obrázku je plánek zahrady se všemi mírami v měřítku 1 : 300. Určete skutečné rozměry.



Řešení:

Začněme nejdříve samotnými rozměry zahrady. Délka zahrady na plánu má 12 cm. A měřítko je 1 : 300. Délka ve skutečnosti:

$$12 \text{ cm} * 300 = 3\,600 \text{ cm} = \underline{36 \text{ m}}$$

Šířka zahrady:

$$6 \text{ cm} * 300 = 1\,800 \text{ cm} = \underline{18 \text{ m}}$$

Terasa je stejně jako celá zahrada ve tvaru obdélníku s rozměry 3 cm a 1,6 cm. Rozměry ve skutečnosti jsou:

$$3 \text{ cm} * 300 = 900 \text{ cm} = \underline{9 \text{ m}}$$

$$1,6 \text{ cm} * 300 = 480 \text{ cm} = \underline{4,8 \text{ m}}$$

Psí bouda ve tvaru čtverce:

$$0,8 \text{ cm} * 300 = 240 \text{ cm} = \underline{2,4 \text{ m}}$$

Bazén má poloměr:

$$0,9 \text{ cm} * 300 = 270 \text{ cm} = \underline{2,7 \text{ m}}$$

A nakonec políčko na pěstování zeleniny má rozměry:

$$2 \text{ cm} * 300 = 600 \text{ cm} = \underline{6 \text{ m}}$$

$$1,2 \text{ cm} * 300 = 360 \text{ cm} = \underline{3,6 \text{ m}}$$

6. Škoda Octavia II 1.9 TDI má ve skutečnosti délku 4,8 m. Na technickém výkresu je ale jeho délka pouhých 24 cm. Určete měřítko výkresu.

Řešení:

Skutečná délka 4,8 m je na výkresu reprezentována délkou 24 cm. Pokud dáme tyto dvě délky do poměru, získáme měřítko. Nejdříve však musíme převést hodnoty na stejné jednotky:

$$4,8 \text{ m} = 480 \text{ cm}$$

$$24 : 480 = 4 : 80 = \underline{1 : 20}$$

Odpověď: Technický výkres je v měřítku 1 : 20.

7. Rodiče Alenky naplánovali na víkend pěší výlet, při kterém půjdou z obce Zahrádky do obce Kravaře. Protože byla Alenka zvědavá, vytiskla si z internetu turistickou mapu, která byla v měřítku 1 : 150 000. Tam si výrazně vyznačila cestu, kudy půjdou. Zajímalo ji totiž, kolik kilometrů ujdou. Jelikož byla chytrá a cestu chtěla změřit co nejpřesněji, vzala provázek a velmi pečlivě ho pokládala na vyznačenou cestu. Když byla s prací spokojená, změřila délku provázku. K jakému výsledku Alenka došla, jestliže provázek byl dlouhý 10,5 cm?

Řešení:



Máme měřítko 1 : 150 000. Jeden centimetr na mapě je tedy 1,5 km ve skutečnosti.
A 10,5 cm na mapě je:

$$10,5 * 150\,000 = \underline{1\,575\,000}$$

Odpověď: Alenka s rodiči se chystá na cestu dlouhou přibližně 15,8 km.

4 Příklady k procvičení poměru a měřítka

1. *Třináctiletý fanoušek Kamil má na zdi plakáty s těmito zpěváky: Justin **Bieber**, Miley **Cyrus**, Demi **Lovato** a Olly **Murs**.*
 - a) *Vyjádřete počet písmen jejich příjmení v postupném poměru (příjmení jsou zvýrazněná).*
 - b) *Vyjádřete poměr počtu písmen ve jméně zpěváka k počtu písmen v jeho příjmení.*
 - c) *V jakém poměru je počet samohlásek (ve všech jménech i příjmeních) k počtu souhlásek?*
2. *Cestovní agentura vyslala plný autobus turistů k moři. Bylo v něm 16 dětí a 28 dospělých. O kolik méně bylo dětí než dospělých? Kolikrát více bylo dospělých než dětí? V jakém poměru byl počet dětí vůči počtu dospělým? V jakém poměru byl počet dospělých vůči všem cestujícím? V jakém poměru byli všichni cestující k dětem?*
3. *Ema chtěla mamince k narozeninám upéct „hrníčkovou“ bábovku. Kromě vajíček, prášku do pečiva, vanilkového cukru a kakaa do ní přidala 2 hrnky polohrubé mouky, 1 hrnek mléka, půl hrnku rostlinného oleje a 1 hrnek cukru krupice. V jakém poměru by byly suroviny odměřené hrnkem, kdyby bábovky dělala dvě?*
4. *Při výprodeji zimní obuvi, snížil obchodník cenu jednoho páru kozaček v poměru 3 : 7. Kolik boty původně stály, když je po slevě prodává za 894 Kč?*

5. *Dané poměry vyjádřete co nejmenšími přirozenými čísly.*

10 : 25	18 : 8	2, 4 : 5, 6	8 : 3, 2
27 : 126	12 : 36	24 : 64 : 44	3 : 9 : 27

6. *Doplňte chybějící číslo:*

$\frac{x}{7} = \frac{6}{14}$	$\frac{13}{15} = \frac{39}{x}$	$\frac{x}{60} = \frac{9}{12}$	$\frac{3}{11} = \frac{x}{121}$	$\frac{27}{x} = \frac{3}{6}$
$\frac{2}{48} = \frac{1}{x}$	$\frac{28}{63} = \frac{x}{9}$	$\frac{19}{14} = \frac{38}{x}$	$\frac{x}{16} = \frac{25}{80}$	$\frac{2}{3} = \frac{24}{x}$

7. *Kamil, Mirek, Pavlína a Honza na letní brigádě sběru jahod natrhali za jeden den jahody v poměru 4 : 2 : 7 : 5. Kolik každý natrhal, jestliže Pavlína sesbíral 63 kg?*

8. *Změňte dané číslo:*

- a) 1 248 v poměru 7 : 3
- b) 2 940 v poměru 5 : 12
- c) 4 835 v poměru 9 : 5
- d) 184 v poměru 13 : 4
- e) 5 700 v poměru 6 : 19

9. Obvod trojúhelníku OPQ je 186 mm. Určete délky jeho stran, které jsou v poměru $5 : 3 : 4$.

10. Tři dělníci dostali za svou práci dohromady 33 579 Kč. Dohodli se, že výplatu si rozdělí v poměru $5 : 6 : 2$ podle toho, jak pracovali. Kolik každý z nich měl peněz?

11. „Vypočítejte velikost vnitřních úhlů trojúhelníku, víte-li, že tyto velikosti jsou v poměru:

a) $2 : 3 : 5$

b) $4 : 4 : 7$

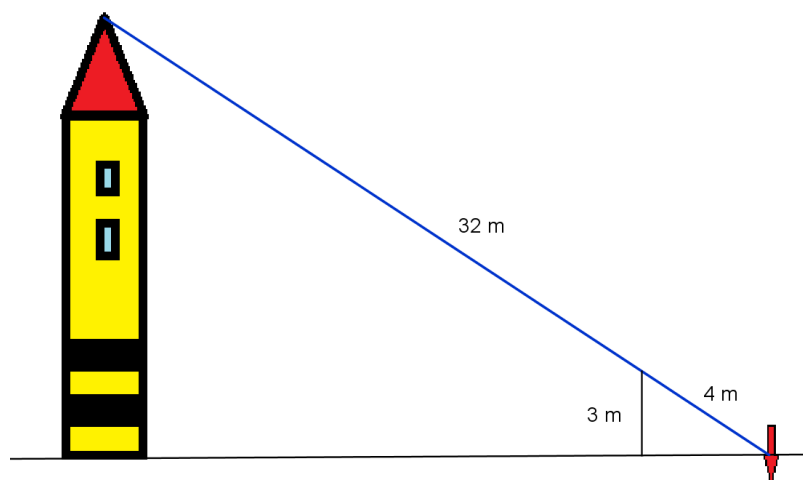
c) $1 : 3 : 4$

d) $3,5 : 7,5 : 7$

Který z těchto trojúhelníků je pravoúhlý a který rovnoramenný? V jakém poměru jsou velikosti vnitřních úhlů v rovnostranném trojúhelníku?“ (TREJBAL 1994, s. 40)

12. Úsečku $|CD| = 9$ cm rozdělte v poměru $2 : 3$. Úlohu řešte geometricky.

13. Z vrcholu věže je na zem natažené lano dlouhé 32 m. Asi 4 m od ukotvení lana je lano ve výšce 3 m. Jak vysoká je věž?



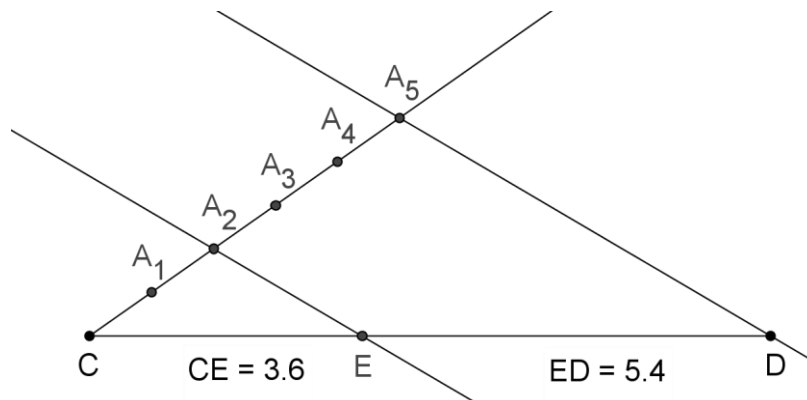
14. V tabulce doplňte chybějící údaje:

měřítko	Na mapě	Ve skutečnosti
1 : 300	5 cm	
1 : 750		9 m
1 : 2 400	3,6 dm	
40 : 1	64 cm	
	4,8 cm	9,6 km

15. Na obehnání čtvercovitého pozemku bylo zapotřebí 74 m pletiva. Jak dlouhá je jedna strana pozemku na plánu s měřítkem 1 : 500?

4.1 Výsledky

1. **a)** $6 : 5 : 6 : 4$; **b)** $6 : 6$ ($1 : 1$); $5 : 5$ ($1 : 1$); $4 : 6$ ($2 : 3$); $4 : 4$ ($1 : 1$); **c)** $18 : 22$ ($9 : 11$).
2. o 12 méně; 1,75 krát více; $16 : 28$ ($4 : 7$); $28 : 44$ ($7 : 11$); $44 : 16$ ($11 : 4$).
3. $4 : 2 : 1 : 2$.
4. 2 086 Kč
5. $2 : 5$; $9 : 4$; $3 : 7$; $5 : 2$; $3 : 14$; $1 : 3$; $6 : 16 : 11$; $1 : 3 : 9$.
6. 3; 45; 45; 33; 54; 24; 4; 28; 5; 36.
7. Kamil: 36 kg; Mirek: 18 kg; Pavlína: 63 kg; Honza: 45 kg.
8. **a)** 2 912; **b)** 1 225; **c)** 8 703; **d)** 598; **e)** 1 800.
9. 77,5 mm; 46,5 mm; 62 mm.
10. 12 915 Kč; 15 498 Kč; 5 166 Kč.
11. **a)** 36° , 54° , 90° - pravoúhlý trojúhelník; **b)** 48° , 48° , 84° - rovnoramenný trojúhelník; **c)** $22,5^\circ$, $67,5^\circ$, 90° - pravoúhlý trojúhelník; **d)** 35° , 75° , 70° ; rovnostranný trojúhelník: $1 : 1 : 1$.
- 12.



13. 24 m

14.

Měřítko	Na mapě	Ve skutečnosti
1 : 300	5 cm	15 m
1 : 750	1,2 cm	9 m
1 : 2 400	3,6 dm	864 m
40 : 1	64 cm	1,6 cm
1 : 200 000	4,8 cm	9,6 km

15. 3,7 cm.

5 Řešené příklady s úměrou, přímou a nepřímou úměrností

1. Vyjádřete neznámý člen x úměry $3 : x = 27 : 18$.

Řešení:

a) I. způsob – pomocí rovnosti poměrů:

- Zapišeme poměry do zlomků a získáme tak rovnici o jedné neznámé, kterou následně vyřešíme.

$$\frac{3}{x} = \frac{27}{18} \quad /* 18x$$

$$3 * 18 = 27x \quad /\div 27$$

$$\underline{x = 2}$$

a) II. způsob – pomocí rovnosti součinu vnitřních a vnějších členů:

$$3 * 18 = 27x \quad /\div 27$$

$$\underline{x = 2}$$

2. Doplňte tabulku přímé úměrnosti a narysujte její graf.

x	0,5	2		6
y	1		5	

Řešení:

V této úloze můžeme využít buď toho, že veličiny (čísla, hodnoty) se mění ve stejném poměru, nebo si sestavíme rovnici úměrnosti a do ní budeme dosazovat.

a) I. způsob – hodnoty se mění ve stejném poměru:

$$0,5 : 2 = 5 : 20 = 1 : 4$$

- Jako se hodnoty x mění v poměru $1 : 4$, budou se měnit i hodnoty y ve stejném poměru.

x	0,5	2		6
y	1	4	5	

- Nyní máme poměr hodnot y $1 : 5$ (tj. druhý člen poměru je pětikrát větší než první člen). Ve stejném poměru musí být i hodnoty x .

x	0,5	2	2,5	6
y	1	4	5	

- U posledního sloupce pokračujeme stejně.

x	0,5	2	2,5	6
y	1	4	5	12

b) II. způsob – sestavení rovnice přímé úměrnosti:

- Rovnice přímé úměrnosti má tvar $y = k * x$. Z této rovnice si můžeme vyjádřit hodnotu k .

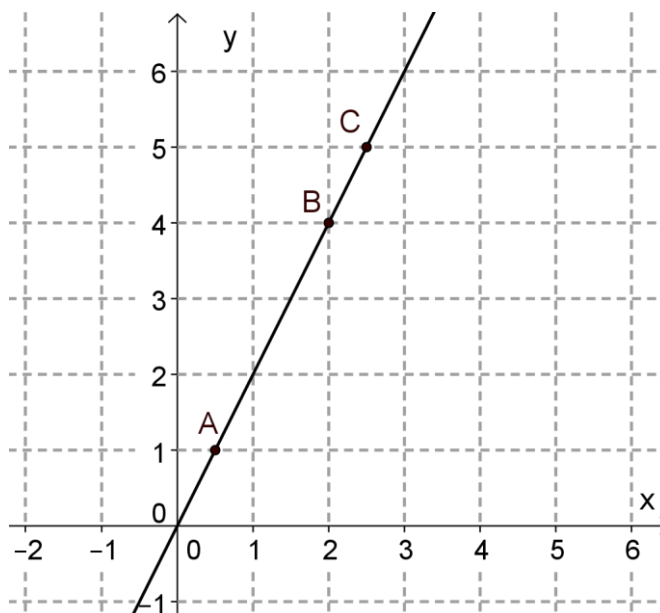
$$k = \frac{y}{x}$$

➤ První sloupeček tabulky nám dává jak hodnotu x , tak hodnotu y .

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice, zjistíme, že $k = \frac{1}{0,5} = 2$.

➤ Rovnicí této úměrnosti je $y = 2 * x$. V tuto chvíli můžeme hodnoty zadané v tabulce dosadit do rovnice a získat tak chybějící hodnoty.

x	0,5	2	$5 \div 2$ $= 2,5$	6
y	1	$2 * 2$ $= 4$	5	$2 * 6$ $= 12$



3. *Vášnivý sběratel poštovních známek – pan Jakub – si ze sady 10 známek koupil 4 známky, za které zaplatil 24 Kč. Kolik korun by zaplatil, kdyby si koupil 1, 2, 5, 7 nebo 10 známek? Určete, zda se jedná o přímou nebo nepřímou úměrnost, zapište rovnici úměrnosti a sestavte tabulku.*

Řešení:

Jedná se o přímou úměrnost, protože čím více si koupí známek, tím více zaplatí.

Rovnice úměrnosti:

$$24 = 4 * k$$

$$k = 6$$

$$\underline{y = 6x}$$

Tabulka:

x (ks)	1	2	4	5	7	10
y (Kč)	6	12	24	30	42	60

4. V cukrárně Nebeský pamlsek vyrábějí dortíky cupcakes. Dvě cukrářky jich za 3 hodiny upečou 120 ks. Jak dlouho by trvalo zhotovit stejné množství dortíků 1, 3, 4, 5 cukrářkám? Určete, zda se jedná o přímou nebo nepřímou úměrnost, zapište rovnici úměrnosti a sestavte tabulku.

Řešení:

V tomto případě jde o nepřímou úměrnost, protože čím více cukrářek vyrábí, tím kratší dobu jim bude trvat výroba 120 dortíků.

Rovnice úměrnosti:

$$3 = \frac{k}{2}$$

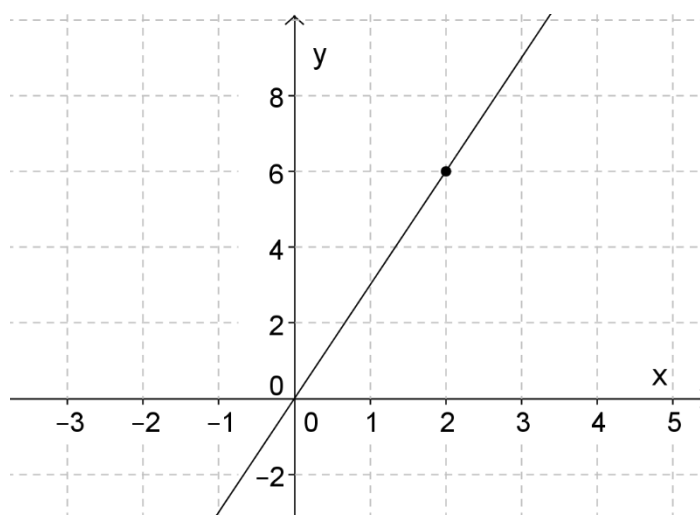
$$k = 6$$

$$\underline{y = \frac{6}{x}}$$

Tabulka:

x (cukrářek)	1	2	3	4	5
y (hodin)	6	3	2	1,5	1,2

5. Úměrnost je zadána grafem. Zapište její rovnici.



Řešení:

Hledáme rovnici přímě úměrnosti, protože grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem. Její rovnice má obecný tvar $y = k \cdot x$, takže potřebujeme alespoň jeden bod, abychom získali konstantu.

Tento bod získáme ze zadaného grafu. Úlohu máme ulehčenou tím, že jeden vhodný bod (tj. ten s celočíselnými souřadnicemi) je tam vyznačený.

Bod si můžeme označit například jako bod A [2, 6]. Dosadíme ho do obecné rovnice a zjistíme konstantu:

$$6 = 2k$$

$$k = 3$$

$$\underline{y = 3x}$$

Odpověď: Rovnice této přímé úměrnosti je ve tvaru $y = 3x$.

6. Švadlena má ušít svatební šaty. Svatba je již za 4 dny a ona ještě ani nezačala. Kdyby každý den šatům věnovala 2 hodiny, ušila by je za týden, ale kolik hodin musí denně šít, aby zakázku stihla včas?

Řešení:

Čím více času se bude denně věnovat šatům, **tím méně** dnů jí to bude trvat – nepřímá úměrnost.

$$\begin{array}{l} \downarrow \begin{array}{l} 7 \text{ dní} \dots\dots\dots 2 \text{ h} \\ 4 \text{ dny} \dots\dots\dots x \text{ h} \end{array} \uparrow \end{array}$$

Zápis rovnosti poměrů pro nepřímou úměrnost a dopočítání neznámé:

$$\frac{x}{2} = \frac{7}{4}$$

$$x = 2 * 7 \div 4 = \underline{3,5}$$

Odpověď: Švadlena by musela šít 3,5 hodiny denně, aby stihla zhotovit svatební šaty za 4 dny.

7. Pan Koudelka jel z Ostravy do Prahy. Na místo dojel za 3 hodiny a 55 minut. Jeho průměrná rychlost byla 72 km/h a po cestě se zastavil na 10 minut na benzínce, aby natankoval. Ten den jel po stejné trase i pan Uhlíř, ale on bez přestávky dorazil do Prahy o 30 minut dříve, než pan Koudelka. Jakou průměrnou rychlostí jel? Výsledek zaokrouhlete na celá čísla.

Řešení:

Nejdříve musíme zjistit, jak dlouho pan Koudelka jel autem a všechny hodnoty převést na stejné jednotky.

Pan Koudelka:

$$3 \text{ h} * 60 \text{ min} = 180 \text{ min}$$

$$180 \text{ min} + 55 \text{ min} - 10 \text{ min} = 225 \text{ min}$$

$$225 \text{ min} * 60 \text{ s} = 13\,500 \text{ s}$$

Pan Koudelka strávil v autě 13 500 sekund.

$$72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A průměrnou rychlost měl 20 m/s.

Pan Uhlíř:

$$180 \text{ min} + 55 \text{ min} - 30 \text{ min} = 205 \text{ min}$$

$$205 \text{ min} * 60 \text{ s} = 12\,300 \text{ s}$$

Pan Uhlíř jel 12 300 sekund.

Čím větší rychlost, tím kratší doba – nepřímá úměrnost.

$$\begin{array}{r} \downarrow 13\,500 \text{ s} \dots\dots\dots 20 \text{ m/s} \uparrow \\ \downarrow 12\,300 \text{ s} \dots\dots\dots x \text{ m/s} \uparrow \end{array}$$

$$\frac{x}{20} = \frac{13\,500}{12\,300}$$

$$x = 20 * 13\,500 \div 12\,300 \doteq \underline{22}$$

Odpověď: Pan Uhlíř jel průměrnou rychlostí 22 m/s (tj. 79,2 km/h).

8. *Soukromý zemědělec má rozsáhlá pole, na kterých pěstuje pšenici. Každý rok na podzim vyrážely dva kombajny SAMBO, aby sklídily úrodu. Tyto dva zemědělské stroje zvládly za 4 hodiny sklidit 12 hektarů pole s pšenicí. Letos ale zemědělec přikoupil ještě jeden kombajn. Kolik hektarů sklídí tyto 3 kombajny za 7 hodin?*

Řešení:

Jedná se o složenou trojčlenku, protože máme více údajů. Provedeme podobný zápis, jako jsme zvyklí s tím rozdílem, že tentokrát budeme mít o jeden sloupeček navíc.

$$\begin{array}{r} 2 \text{ kombajny} \dots\dots\dots 4 \text{ h} \dots\dots\dots 12 \text{ ha} \\ 3 \text{ kombajny} \dots\dots\dots 7 \text{ h} \dots\dots\dots x \text{ ha} \\ \hline \end{array}$$

Nyní si můžeme představit úlohu jako dva samostatné příklady. Podobné příklady jsme sice počítali, ale odpracovaný čas byl vždy stejný.

I. příklad: Máme dva kombajny, které za 4 hodiny dokáží sklidit 12 hektarů. Kolik hektarů zvládnou za 7 hodin?

Čím déle budou pracovat, **tím více** hektarů pšenice sklídí – přímá úměrnost.

$$\begin{array}{r} \uparrow 4 \text{ hodiny} \dots\dots\dots 12 \text{ ha} \uparrow \\ \hline 7 \text{ hodin} \dots\dots\dots x \text{ ha} \end{array}$$

$$\frac{x}{12} = \frac{7}{4}$$

$$x = 12 * 7 \div 4 = \underline{21}$$

II. příklad: Dva kombajny za 7 hodin zvládnou 21 hektarů (tuto hodnotu jsme zjistili v I. příkladu). Kolik hektarů zvládnou 3 kombajny za stejnou dobu?

Čím více kombajnů, tím více práce se udělá – přímá úměrnost.

$$\begin{array}{r} \uparrow 2 \text{ kombajny} \dots\dots\dots 21 \text{ ha} \uparrow \\ \hline 3 \text{ kombajny} \dots\dots\dots x \text{ ha} \end{array}$$

$$\frac{x}{21} = \frac{3}{2}$$

$$x = 21 * 3 \div 2 = \underline{31,5}$$

Odpověď: Tři kombajny sklídí za 7 hodin 31,5 ha.

9. Vítek, který žije v Praze, má v Sázavě v 10 hodin dopoledne velmi důležitou pracovní schůzku. Praha je od Sázavy vzdálená přibližně 68 km. Vítek si řekl, že když vyjede v 8 hodin ráno, stihne schůzku včas a ještě bude mít dostatečnou časovou rezervu. Co čert nechtěl, ráno byla hned od Prahy dopravní zácpa. Vítek tak jel 23 km průměrnou rychlostí 5 m/s. Po dvacátém třetím kilometru mohl zase šlápnout na plyn. Jakou rychlostí musí nyní jet, aby schůzku stihl a měl ještě alespoň 10 minut k dobru?

Řešení:

Nejdříve budeme řešit situaci, která vedla ke zdržení. Musíme zjistit, jak dlouho se Vítek zasekl na úseku dlouhém 23 km. Kdo si pamatuje vzoreček, může využít toho, že:

$$t = \frac{s}{v}$$

Nebo si můžeme položit otázku: „Pokud ujedu 5 m za sekundu, jak dlouho mi potrvá ujet 23 000 m?“:

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 5 \text{ m} \dots\dots\dots 1 \text{ s} & \uparrow \\ & \underline{23\,000 \text{ m} \dots\dots\dots x \text{ s}} & \end{array}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{23\,000}{5}$$

$$x = 4\,600 \text{ s} = 1 \text{ h } 16 \text{ min } 40 \text{ s}$$

Na cestu si Vítek stanovil 2 h, ale dopravní situace mu z daného času odkrojila podstatnou část a do toho potřebuje dalších 10 minut rezervy. Takže nyní má na zbývající cestu (tj. $68 \text{ km} - 23 \text{ km} = 45 \text{ km}$) čas 33 min 20 s (tj. 2 000 s).

Zapišme si známé údaje:

$$\begin{array}{ccc} 4\,600 \text{ s} \dots\dots\dots 23\,000 \text{ m} \dots\dots\dots 5 \text{ m/s} \\ 2\,000 \text{ s} \dots\dots\dots 45\,000 \text{ m} \dots\dots\dots x \text{ m/s} \end{array}$$

Jako první musíme zjistit, kolik metrů ujedeme za 2 000 sekund s rychlostí 5 m/s, jestliže stejnou rychlostí za 4 600 sekund ujedeme 23 000 m:

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 4\,600 \text{ s} \dots\dots\dots 23\,000 \text{ m} & \uparrow \\ & \underline{2\,000 \text{ s} \dots\dots\dots x \text{ m}} & \end{array}$$

$$\frac{x}{23\,000} = \frac{2\,000}{4\,600}$$

$$x = 10\,000$$

Nyní víme, že za 2 000 sekund ujedeme rychlostí 5 m/s 10 000 m. Jakou rychlostí tedy musí jet, aby ujel za 2 000 sekund 45 000 m?

$$\begin{array}{l} \uparrow 10\,000\text{ m} \dots\dots\dots 5\text{ m/s} \uparrow \\ \uparrow 45\,000\text{ m} \dots\dots\dots x\text{ m/s} \uparrow \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{45\,000}{10\,000}$$

$$\underline{x = 22,5}$$

Odpověď: Vítek by musel jet rychlostí 22,5 m/s (tj. 81 km/h).

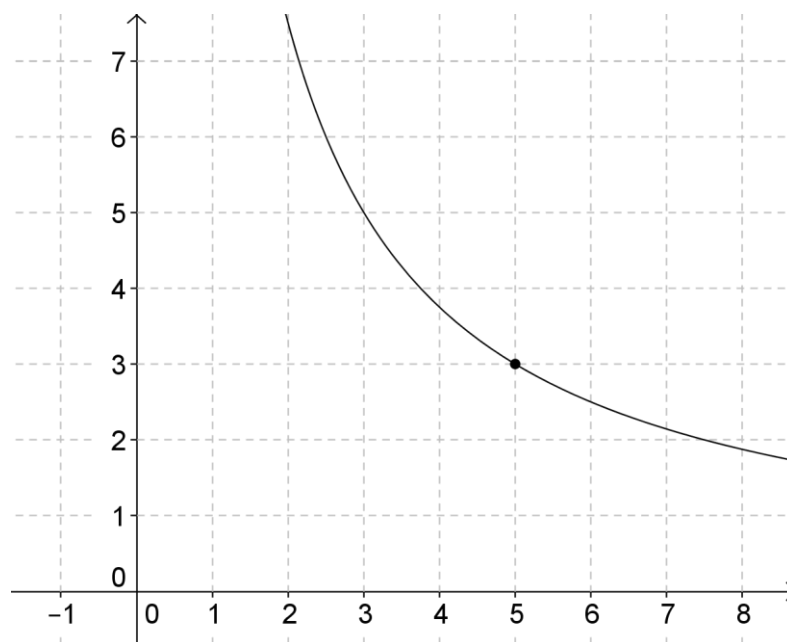
6 Příklady k procvičení úměry, přímé a nepřímé úměrnosti

1. Najděte takovou neznámou x , aby se jednalo o úměru, jestliže máme zadáno $12 : 9 = 36 : x$.
2. Zjisti, zda dané body leží na grafu nepřímé úměrnosti $y = \frac{9}{x}$:
 - a) $[1, 9]$
 - b) $[18, 2]$
 - c) $[3, 27]$
 - d) $[3, 3]$
 - e) $[4, 5; 2]$
 - f) $[1, 5; 7]$
3. Nalezněte rovnici přímé úměrnosti, jestliže její graf prochází bodem $G [5, 8]$.
4. Pět vysokozdvížných vozíků vyloží náklad kamionu, který je uložen na paletách za 3 hodiny. Napište rovnici a nakreslete graf závislosti počtu hodin na počtu vysokozdvížných vozíků.
5. Andulka chtěla na trhu koupit borůvky. Na prodejní ceduli byla cena za 100 g borůvek 45 Kč. Andulka si ale koupila 350 g borůvek. Kolik za ně zaplatila?
6. Dva malíři pokojů vymalovali obývací pokoj za 2,5 hodiny. Jak dlouho by to trvalo 4 malířům?
7. Škola nakupuje do tělocvičny sedací míče. Čtyři míče stojí 512 Kč. Kolik si jich škola může koupit za 2 304 Kč?

8. *Do Brna přijela koncertovat velmi známá pěvecká skupina. V předprodeji se prodalo 2 354 vstupenek za zvýhodněnou cenu 950 Kč/vstupenka. Na místě se potom prodalo dalších 640 vstupenek za plnou cenu 1 180 Kč/vstupenka. Kolik by organizátoři koncertu získali, kdyby všechny vstupenky byly za zvýhodněnou cenu? A jaký výnos by měli, kdyby každá vstupenka stála 1 180 Kč? Kolik ve skutečnosti nakonec organizátoři této události utržili?*
9. *Ve fabrice vyrobily tři stroje za 8 hodinovou směnu 7 680 součástek. Kolik součástek by vyrobilo 7 strojů, kdyby směna trvala 12 hodin?*

6.1 Výsledky

1. $x = 27$.
2. **a)** ano; **b)** ne; **c)** ne; **d)** ano; **e)** ano; **f)** ne.
3. $y = 1,6x$.
4. nepřímá úměrnost; $y = \frac{15}{x}$;



5. přímá úměrnost; 158 Kč (157,5 Kč).
6. 1,25 h.
7. 18 míčů.
8. 2 844 300 Kč; 3 532 920 Kč; 2 991 500 Kč
9. 26 880 ks.

7 Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo vytvoření souboru řešených úloh na téma poměr, úměra, přímá a nepřímá úměrnost. Většina příkladů v práci je vyřešena a vysvětlena. U některých je řešení úloh doplněno fotografiemi, tabulkami, grafy a obrázky vytvořenými v programu GeoGebra. Je to kvůli lepšímu náhledu na příklad a pro snadné pochopení, které vede k rychlému a logickému vyřešení.

Byla bych ráda, pokud by má práce posloužila žákům i učitelům. Žákům v lepší orientaci a práci s poměrem, úměrou, přímou a nepřímou úměrností a učitelům například v jejich přípravě na hodinu. Mně samotné její vypracování pomohlo k upevnění a ucelení pojmů souvisejících s tématem.

Příklady jsem se snažila volit, řadit a řešit tak, aby se každý na jejich základě dokázal vpravit do této problematiky.

8 Literatura

- [1] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 371 s. Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 23. ISBN 8071962554.
- [2] BĚLOUN, František a Jiří KADLEČEK. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu: pro 2. stupeň základní školy*. 8. vyd. Ilustrace Martin Mašek. Praha: Prometheus, 2003, 254 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-719-6104-3.
- [3] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 7: pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008, 103 s. ISBN 978-807-2386-796.
- [4] CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 213 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 8071960209.
- [5] EISLER, Jaroslav, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6-9 pro 2. stupeň ZŠ a nižší ročníky víceletých gymnázií: [kompletní přehled učiva, řešené úlohy, procvičování]*. 3. vyd. Praha: Fragment, 2012, 184 s. ISBN 978-80-253-1411-1.
- [6] EUKLEIDÉS. *Základy*. 1. vyd. Překlad František Servít. Nymburk: OPS, 2009, 130 s. Prameny evropské vzdělanosti, 3. sv. ISBN 978-808-7269-053.
- [7] FOLTA, Jaroslav. *Dějiny matematiky I*. Praha: Národní technické muzeum, 2004. ISBN 8023940317.
- [8] HEJNÝ, M. a kol. 1989: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. 1989. ISBN 80-08-00014-7
- [9] HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Vyd. 1. Praha: Portál, 2001, 187 s. Pedagogická praxe. ISBN 80-7178581-4

[10] *Matematika v proměnách věků*. 1. vyd. Editor Jindřich Bečvář, Eduard Fuchs. Praha: Prometheus, 2001, 267 s. Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 16. ISBN 807196218x.

[11] MÜLLEROVÁ, Jana. *Matematika 7: pro 7. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990, 187 s. Učebnice pro základní školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 8004240089.

[12] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy: pro 2. stupeň základní školy*. 3., přeprac. vyd. Ilustrace Martin Mašek. Praha: Prometheus, 2011, 88 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-427-8.

[13] ŘEPÍKOVÁ, Alena. *Přehled matematiky: pro 2. stupeň základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2013, 239 s. ISBN 978-80-7235-516-7.

[14] ŠAROUNOVÁ, Alena. *Matematika 7*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 212 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 807196106x.

[15] TREJBAL, Josef. *Sbírka úloh z matematiky: pro 7. ročník základní školy*. 2. vyd., 1. vyd. v Prometheu. Praha: Prometheus, 1994, 184 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-85849-08-9.

[16] ŽENATÁ, Emílie. *Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník: [s klíčem]*. 2. vyd. Praha: Blug, [2014], 214 s. ISBN 8072749617.

Pedagogické dokumenty:

[17] *Rámcový vzdělávací program 2013*. [online]. [cit. 2014-06-17]. Dostupné z: <http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani>

[18] *Školní vzdělávací program ZŠ Sázava, 2013*. [online]. [cit. 2014-06-17]. Dostupné z: <http://www.zssazava.cz/file-cabinet>

Elektronické zdroje:

- [19] *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. [online]. Editor Milan Hejný, Jarmila Novotná, Nad'a Vondrová. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004, viii, 212 s. [cit. 2015-04-16]. ISBN 80729018931. Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_59.pdf
- [20] *Hejného metoda*. [online]. [cit. 2015-01-14]. Dostupné z: <http://www.h-mat.cz/>
- [21] *Historický vývoj zobrazovacích metod*. [online]. [cit. 2015-03-11]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~xschlesi/e_schlesingerova.pdf
- [22] *Mathsisfun*. [online]. [cit. 2014-12-16]. Dostupné z: <http://www.mathsisfun.com/numbers/ratio.html>
- [23] MICHALOVÁ, J.: *Prostorově orientované systémy pro podporu manažerského rozhodování*. [online] 1. vydání. Praha: C. H. Beck, 2007 [cit. 2015-04-18]. ISBN: 978-80-7179-463-9. Dostupné z: <https://books.google.cz/books?id=lYmAJWNk7gIC&pg=PA70&lpg=PA70&dq=mapa+a+skutečnost&source=bl&ots=6KOoKRpAAY&sig=GxijPyYmMXZpaYvZQ9UOIlKZUnc&hl=cs&sa=X&ei=KnQyVfqsI8agPYbAgegK&ved=0CCoQ6AEwAjgK#v=onepage&q=mapa%20a%20skute%C4%8Dnost&f=false>
- [24] *Purplemath. Ratios*. [online]. [cit. 2014-12-16]. Dostupné z: <http://www.purplemath.com/modules/ratio.htm>
- [25] *Pythagorova věta*. [online]. [cit. 2014-04-16]. Dostupné z: <http://www.matematika.cz/pythagorova-veta>
- [26] *Ratios*. [online]. [cit. 2014-12-25]. Dostupné z: <http://edhelper.com/ratios.htm>
- [27] *Vyznáte se v měřítku mapy?* [online]. [cit. 2015-04-18]. Dostupné z: http://www.zememeric.cz/12-97/1_2880.html