

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

Úlohy o maximech a minimech

Bakalářská práce

Jitka MICHALOVA

Knihovna JU - PF



3 1 1 5 1 7 2 4 2 8

České Budějovice, duben 2006

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

V Českých Budějovicích 29. 4. 2006

J. Michalová

Anotace

Název:	Úlohy o maximech a minimech
Vypracovala:	Jitka Michalová
Vedoucí práce:	RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Klíčová slova:	Metody řešení úloh, extrémální úlohy, elementární matematika

Práce si klade za cíl podat přehled elementárních metod hledání maximálních minimálních hodnot funkcí. Obsahuje metodu zaměřenou na využití vlastností kvadratické funkce, odhad pomocí A-G nerovnosti a metodu diskriminantu. Použití metod je ukázáno na řadě vyřešených úloh.

Anotace

Title: Maximum and minimum funktion problems
Author: Jitka Michalová
Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Key words: Problème solving, extremal problème, elementary
mathematics

The aim of this diploma work is to give a survey of elementary methods in finding the maximum and minimum values of functions. It includes a metod focused on the use of characteristics of square functions, the survey by help A-G inequality and method of discriminant. The use of the methods is shown on some solved tasks.

Obsah

Úvod	7
1 Úlohy řešené pomocí A-G nerovností.....	8
1.1 Základní pojmy.....	8
1.2 Nejčastější chyby.....	10
1.3 Řešené úlohy	12
2 Využití kvadratické funkce.....	29
2.1 Řešené úlohy.....	31
3 Metoda diskriminantu.....	38
3.1 Řešené úlohy	39
Závěr	50
Seznam literatury	51

Úvod

V mnoha rozdílných oborech se dostáváme k problému, kdy potřebujeme nalézt extrémální hodnoty (ať se jedná o klasické obory např. zedník, truhlář ..., nebo o specializované obory např. architekti, konstruktéři ...), tj. maximum a minimum. Tyto úlohy řešíme obvykle pomocí diferenciálního počtu a integrálů. S těmito možnostmi řešení se setkáváme někteří na střední škole jiní až na vysoké.

Tyto úlohy se dají řešit i jednoduššími matematickými operacemi. Jde o využití látky, kterou i žáci středních škol znají.

Ve své práci se budu zabývat nejsnadnějším řešením těchto úloh. Omezím se na tři elementární metody. První z nich je využití A-G nerovnosti, kdy porovnáváme aritmetický a geometrický průměr. Další možností řešení je využití vlastností kvadratické funkce a metody diskriminantu. Záměrně jsem vybrala jen určité typy úloh, které se při uvádění jednotlivých metod opakují, aby mohl čtenář lépe porovnat přednosti i nevýhody těchto postupů.

1 Úlohy řešené pomocí A–G nerovností

Tato metoda umožňuje stanovit největší a nejmenší hodnoty funkcí. Vychází z Cauchyovy nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Připomeňme si nejprve základní znalosti o aritmetickém a geometrickém průměru.

1.1 Základní pojmy

Pro nezáporná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ definujeme aritmetický průměr $A_n(x)$, pro nějž platí:

$$A_n(x) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

a geometrický průměr $G_n(x)$:

$$G_n(x) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

K řešení úloh budeme využívat následující větu.

Věta 2 (A-G nerovnost)

Nechť jsou dána nezáporná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$. Pak platí:

$$G_n(x) \leq A_n(x)$$

Příčemž rovnost nastává právě, když

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

Lemma:

Jestliže při konstantním součtu dvou čísel menší číslo zvětšíme o hodnotu menší, než je absolutní hodnota jejich rozdílu, a druhé o stejnou hodnotu zmenšíme, pak se zvětší součin těchto čísel.

Důkaz:

Nejprve dokážeme následující tvrzení (*Lemma*).

Označme tyto čísla a, b , kde $a < b$.

Zvolme $a' = a + \varepsilon$ a $b' = b - \varepsilon$, přičemž $b - a > \varepsilon > 0$.

Pak $a' \cdot b' = (a + \varepsilon) \cdot (b - \varepsilon) = ab - a\varepsilon + b\varepsilon - \varepsilon^2 = ab + \varepsilon(b - a - \varepsilon)$.

Z podmínky pro ε je $\varepsilon(b - a - \varepsilon) > 0$, tzn. že $a' \cdot b' > ab$.

Důkaz tedy:

Předpokládejme nejprve, že rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Necht' $x_1 = x_2 = \dots = x_n = a$.

$$A_n(x) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{n \cdot a}{n} = a$$

$$G_n(x) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Potom tedy platí $G_n(x) = A_n(x)$.

Pokud jsou aspoň dvě z čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ různá, musí existovat číslo x_i menší než

a a x_j větší než a , kde $a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ je aritmetickým průměrem.

$$a'_i = a$$

$$a'_j = a_i + a_j - a'_i = a_i + a_j - a$$

Pro ostatní $a'_k = a_k$ $k \neq i, j$

Podle Lemma platí $x_i \cdot x_j < x'_i \cdot x'_j$ a tedy $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} < \sqrt[n]{x'_1 \dots x'_n}$.

Jsou-li čísla x_r , $r = 1, \dots, n$ rovna průměru, pak $G_n(x) < G'_n(x) = \sqrt[n]{a^n} = a = A_n(x)$.

V opačném případě celý postup opakujeme, dokud všechna čísla nebudou rovna průměru.

$$G_n(x) < G'_n(x) < G''_n(x) < \dots < \sqrt[n]{a^n} = a = A_n(x)$$

$$G_n(x) < A_n(x).$$

1.2 Nejčastější chyby

Při používání A-G nerovnosti pro určování extrémálních hodnot se objevují tyto chyby:

(a) V prvním případě jde o použití A-G nerovnosti i přesto, že některý z činitelů je záporný. Pro použití této metody musí platit, že dosazené členy jsou nezáporné. Je-li tedy některý člen záporný, nemůžeme použít tuto metodu nebo musíme výraz vhodně upravit.

(b) Nevhodná úprava a volba výrazu. Musíme se snažit, aby se všechny činitele rovnali, byli omezeni konstantní funkcí.

Příklad:

Najděte největší hodnotu výrazu $V = 6x \cdot (11 - x)$, $x \in R$.

A-G nerovnost použijeme, když platí:

hodnota x je nezáporná ($0 \leq x \leq 11$), můžeme například:

$$\sqrt{V} = \sqrt{6x \cdot (11 - x)} \leq \frac{6x + (11 - x)}{2} = \frac{5x + 11}{2}$$

Ale $0 \leq x \leq 11$, a proto

$$V \leq \left(\frac{5x + 11}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{5 \cdot 11 + 11}{2} \right)^2 = 1089.$$

Číslo 1 089 není však výsledkem. Výraz V nabývá ve skutečnosti mnohem menší hodnoty. Chyba nastala v úvaze, že výrazy $6x \cdot (11 - x)$, $\frac{5x + 11}{2}$ nabývají největší hodnoty pro stejné x . Podle věty o A-G nerovnosti rovnost nastane právě, když $6x = 11 - x$, tj. $x = \frac{11}{7}$. My jsme však dosadili $x = 11$. Chceme-li této chybě předejít musíme se snažit, aby se výrazy s proměnnou vykrátily (na jedné straně vyšla konstantní funkce).

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{6 \cdot x \cdot (11 - x)} \leq \frac{6 + x + (11 - x)}{3}$$

Pak

$$V \leq 182.$$

Poslední nerovnost sice platí, ale číslo 182 není opět řešením úlohy. Totiž, kdyby pro některé x platilo $V = 182$, tak by v A-G nerovnosti nastala rovnost, a to je možné jenom tehdy jsou-li si činitelé rovny. V našem případě soustava

$$6 = x = 11 - x$$

nemá řešení. Musíme najít soustavu takovou, aby pro nějaké x se činitele rovnali.

Správný postup:

Výraz V vydělíme 6 a použijeme A-G nerovnost pro $n = 2$.

$$\sqrt{\frac{V}{6}} = \sqrt{x(11 - x)} \leq \frac{x + (11 - x)}{2}$$

Tedy

$$V \leq 181,5.$$

Rovnost nastane, když $x = 11 - x$, tedy $x = 5,5$.

Číslo 181,5 je největší hodnotou výrazu V .

1.3 Řešené úlohy

1. Extrémy algebraických výrazů.:

Úloha 1.1

Nalezněte největší hodnotu výrazu $V = x(6 - x)$, $0 < x < 6$.

Řešení:

Výraz V má dva členy, proto řešíme pomocí A–G nerovností pro $n = 2$.

Platí $\sqrt{x(6 - x)} \leq \frac{x + (6 - x)}{2}$, odtud

$$x(6 - x) \leq 9.$$

Výraz je největší, nastane-li rovnost obou činitelů, tj. když

$$x = 6 - x, \text{ tedy}$$

$$x = 3.$$

Největší hodnota výrazu je $V = 9$, pro $x = 3$.

Úloha 1.2

Určete největší hodnotu výrazu $V = 4x - 3x^2$, $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$.

Řešení:

Nejprve musíme výraz V vhodně upravit, abychom obdrželi součin, vytkneme x :

$$V = x(4 - 3x).$$

Po odhadu pomocí A–G nerovnosti by měla být levá strana konstantní, proto ještě vynásobíme třemi:

$$3V = 3x(4 - 3x).$$

Podle A–G nerovnosti platí :

$$\sqrt{3V} = \sqrt{3x(4 - 3x)} \leq \frac{3x + (4 - 3x)}{2}$$

$$3V \leq 4$$

$$\text{Potom } V_{\max} = \frac{4}{3}.$$

Rovnost nastává právě, když

$$3x = 4 - 3x. \text{ Odtud}$$

$$x = \frac{2}{3}.$$

Největší hodnota výrazu $V = \frac{4}{3}$ a to pro $x = \frac{2}{3}$.

Úloha 1.3

Nalezněte minimální hodnotu funkce $f(x) = 8x + \frac{1}{2x}$, $x > 0$.

Řešení:

Podle A-G nerovnosti pro $n = 2$ platí:

$$\sqrt{8x \cdot \frac{1}{2x}} \leq \frac{8x + \frac{1}{2x}}{2}, \text{ po úpravě dostaneme}$$

$$4 \leq 8x + \frac{1}{2x}.$$

Minimum nastane právě tehdy, když

$$8x = \frac{1}{2x}, \text{ tedy když}$$

$$x = \frac{1}{4}.$$

Minimální hodnota funkce $f(x) = 4$ pro $x = \frac{1}{4}$.

Úloha 1.4

Nalezněte největší hodnotu výrazu $V = x^2 \cdot (21 - 2x)$, $0 < x < \frac{21}{2}$.

Řešení:

Použijeme A-G nerovnost pro $n = 3$, aby po odhadu vyšla konstanta:

$$\sqrt[3]{x \cdot x(21-2x)} \leq \frac{x+x+(21-2x)}{3} = 7$$

$$V \leq 7^3 = 343$$

Rovnost nastává právě, když

$$x = 21 - 2x. \text{ Odtud}$$

$$x = 7.$$

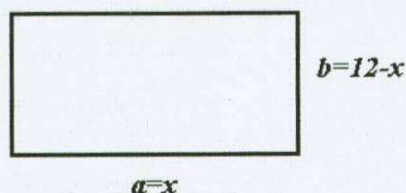
Číslo 343 je největší hodnotou výrazu V pro $x = 7$.

2. Planimetrické úlohy:

Úloha 2.1

Pravoúhelník má obvod $O = 24$ cm. Najděte rozměry stran a, b tak, aby pravoúhelník měl maximální obsah.

Řešení:



Obr. 1

Obvod pravoúhelníku je

$$O = 2(a + b) = 24.$$

Označme strany $a = x$, $b = 12 - x$, potom platí $S = x(12 - x)$.

Podle A-G nerovnosti:

$$\sqrt{x(12-x)} \leq \frac{x+(12-x)}{2} = 6, \text{ kde } 0 < x < 12.$$

Po úpravě $S \leq 36$. Největší hodnota $S_{\max} = 36$ nastane právě, když platí $x = 12 - x$.

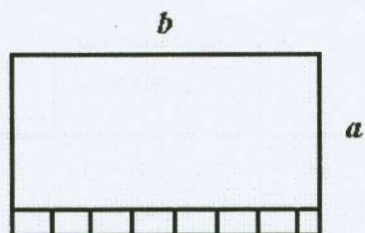
Tedy $x = 6$, potom $a = 6\text{ cm}$ a $b = 6\text{ cm}$.

Maximální obsah pravoúhelníku je 36 cm^2 , když $a = b = 6\text{ cm}$.

Úloha 2.2

Z prken, která jsou k dispozici, se má postavit plot o délce 200 m. Tímto plotem je potřeba ohradit dvůr, který má obdélníkový půdorys, tak, aby ohrazená plocha byla co největší, při čemž dvůr na jedné straně zůstává ohraničen zdí.

Řešení:



Obvod ohraničené plochy $2a + b = 200$ $0 <$

$$a < 100$$

$$a = x \quad b = 200 - 2x$$

Obr. 2

$$S = x \cdot (200 - 2x)$$

$$S = 2x \cdot (100 - x)$$

Poznámka:

Funkce S a $y = \frac{S}{2}$ nabývají největších hodnot při jedné a téže hodnotě x .

$$\frac{S}{2} = x \cdot (100 - x)$$

A-G nerovnost:

$$\sqrt{x \cdot (100 - x)} \leq \frac{(100 - x) + x}{2} = 50.$$

Největší možný obsah $S_{\max} = 50 \text{ m}^2$ nastane, když

$$100 - x = x$$

$$x = 50$$

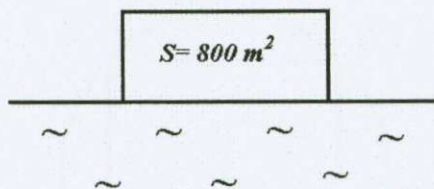
Potom $a = 50$ a $b = 100$.

Pozemek má tvar obdélníku o rozměrech 50m x 100m.

Úloha 2.3

Jedna strana pravoúhlého pozemku se přimyká ke břehu kanálu, další tři strany jsou ohrazeny plotem. Jaké by měly být rozměry pozemku, aby se jeho obsah rovnal 800 m^2 a délka plotu byla co nejmenší?

Řešení:



Obsah pozemku je $S = x \cdot y$, pak

$$800 = x \cdot y \quad \text{a} \quad y = \frac{800}{x}.$$

Pro obvod pozemku platí :

Obr. 3

$$O = 2x + y = 2x + \frac{800}{x} = 2 \left(x + \frac{400}{x} \right), \text{ po úpravě}$$

$$\frac{O}{2} = x + \frac{400}{x}.$$

Podle A-G nerovnosti:

$$\sqrt{x \cdot \frac{400}{x}} \leq \frac{x + \frac{400}{x}}{2},$$

$$2\sqrt{400} \leq x + \frac{400}{x},$$

$$2\sqrt{400} \leq \frac{O}{2}.$$

Nejmenší délka plotu $O_{\min} = 80m$ nastane, když

$$x = \frac{400}{x}$$

$$x = 20$$

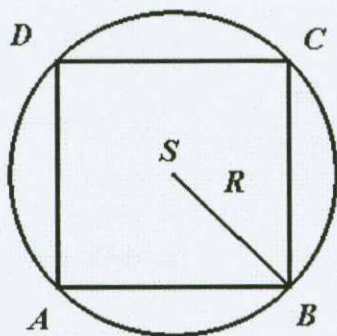
$$\text{Pak } y = \frac{800}{x} = \frac{800}{20} = 40m.$$

Rozměry pozemku jsou $20 \times 40m$.

Úloha 2.4

Do kružnice o poloměru R vepište pravoúhelník největšího obsahu.

Řešení:



Obsah pravoúhelníka je $S = a \cdot b$,

$$b \in (0, 2R).$$

Z obrázku plyne $a^2 = (2R)^2 - b^2$. Obsah S i jeho druhá mocnina S^2 nabývají maxima současně.

$$S^2 = a^2 \cdot b^2 = b^2 \cdot ((2R)^2 - b^2)$$

Obr. 4

Z A-G nerovnosti plyne:

$$\sqrt{b^2 \cdot ((2R)^2 - b^2)} \leq \frac{b^2 + ((2R)^2 - b^2)}{2} = 2R^2,$$

potom $S_{\max} = 2R^2$.

Přičemž rovnost nastane právě, když

$$b^2 = (2R)^2 - b^2$$

$$b = \sqrt{2}R$$

$$a = \sqrt{(2R)^2 - b^2} = \sqrt{2}R.$$

Pravoúhelník největšího obsahu vepsaný do kružnice je čtverec o straně $\sqrt{2}R$.

3. Úlohy o tělesech:

Úloha 3.1

Konzervy tvaru válce, mají daný objem V . Určete rozměry konzerv tak, aby se na jejich výrobu spotřebovalo co nejméně plechu.

Řešení:

Hledáme nejmenší povrch, potom

$$Q = Q(r, h) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h, \quad h = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$$

A-G nerovnost:

$$Q(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}}$$

$$Q \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \pi \cdot V^2}$$

$$Q = Q_{\min} \leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}}$$

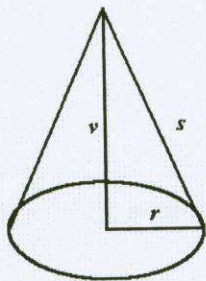
$$h = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}} = 2r$$

Nejmenší povrch plechovky $Q = 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \pi \cdot V^2}$, pro $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}}$, $h = 2r$.

Úloha 3.2

Určete rozměry rotačního kužele, který má při daném konstantním povrchu S největší objem.

Řešení:



Povrch kužele je

$$S = \pi r^2 + \pi r s, \quad s = \frac{S - \pi r^2}{\pi r} = \frac{S}{\pi r} - r.$$

Pro objem kužele platí, $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$.

Obr. 5

Z Pythagorovy věty plyne

$$v = \sqrt{s^2 - r^2},$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{S}{\pi r} - r\right)^2 - r^2},$$

$$v = \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 r^2} - \frac{2S}{\pi}}.$$

Po dosazení do V

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 r^2} - \frac{2S}{\pi}}$$

$$V^2 = \frac{1}{9} (r^2 S^2 - 2S \pi r^4) \quad , \text{ použijeme substituci } r^2 = a$$

$$\frac{9V^2}{2S\pi} = a \left(\frac{S}{2\pi} - a \right)$$

Podle A-G nerovnosti:

$$\sqrt{a \cdot \left(\frac{S}{2\pi} - a \right)} \leq \frac{a + \left(\frac{S}{2\pi} - a \right)}{2} = \frac{S^2}{16\pi^2}$$

$$V^2 = \frac{2S\pi}{9} \cdot \frac{S^2}{16\pi^2}$$

$$V_{\max} = \frac{S}{12\pi} \cdot \sqrt{2S\pi}$$

Objem bude největší, když

$$a = \frac{S}{2\pi} - a$$

$$a = \frac{S}{4\pi}$$

A neboť $r^2 = a$, po dopočtení r , kdy $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$, vypočteme také v .

$$v = \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 \cdot \frac{S}{4\pi}} - \frac{2S}{\pi}} = \sqrt{\frac{2S}{\pi}}$$

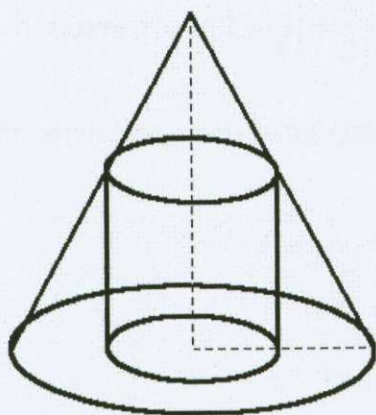
Rotační kužel největšího objemu má rozměry $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$, $v = \sqrt{\frac{2S}{\pi}}$.

Úloha 3.3

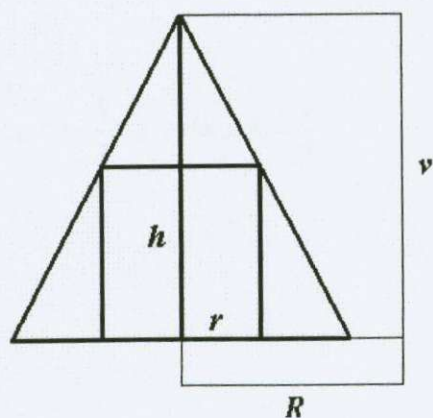
Do rotačního kužele o poloměru R a výšce v vepište rotační válec:

- o největším plášti
- o největším objemu

Řešení:



Obr. 6



Obr. 7

a) Obsah pláště $Q = 2\pi r \cdot h$

Za pomoci podobnosti trojúhelníků vypočteme

$$\frac{r}{R} = \frac{v-h}{v} = 1 - \frac{h}{v}$$

$$r = R\left(1 - \frac{h}{v}\right).$$

Tedy $Q = 2\pi R\left(1 - \frac{h}{v}\right) \cdot h$, potom

$$Q = \frac{2\pi R}{v}(v-h)h.$$

Podle A-G nerovnosti:

$$\sqrt{(v-h)h} \leq \frac{(v-h)+h}{2}$$

$$Q \leq \frac{2\pi R}{v} \cdot \frac{v^2}{4} = \frac{\pi R v}{2}$$

Rovnost nastane právě, když

$$v-h=h$$

$$h = \frac{v}{2}.$$

$$\text{Po dosazení } r = R\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{R}{2}.$$

Vepsaný válec o největším plášti má poloměr $r = \frac{R}{2}$ a výšku $h = \frac{v}{2}$.

b) Objem válce $V = \pi r^2 \cdot h$

Za pomoci podobnosti trojúhelníků dostaneme:

$$\frac{r}{R} = \frac{v-h}{v} = 1 - \frac{h}{v}$$

$$h = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot v$$

$$\text{Tedy } V = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot v = \pi r^2 v \left(\frac{R-r}{R}\right) = \frac{\pi v}{R} \cdot r^2 (R-r).$$

Než použijeme A-G nerovnost musíme výraz rozšířit

$$V = \frac{\pi v}{2R} \cdot r^2 (2R - 2r)$$

$$\sqrt[3]{r \cdot r (2R - 2r)} \leq \frac{r + r + (2R - 2r)}{3}$$

$$r \cdot r (2R - 2r) \leq \left(\frac{2R}{3}\right)^3 = \frac{8R^3}{27}$$

$$\text{Po dosazení } V \leq \frac{\pi v}{2R} \cdot \frac{8R^3}{27} = \frac{4\pi v R^2}{27}$$

$$V_{\max} = \frac{4\pi v R^2}{27} \text{ právě, když}$$

$$r = 2R - 2r$$

$$3r = 2R$$

$$r = \frac{2}{3}R$$

$$\text{Nyní dosadíme } h = \left(1 - \frac{r}{R}\right)v = \left(1 - \frac{2R}{3R}\right)v = \frac{1}{3}v$$

$$\text{Vepsaný válec o největším objemu } V = \frac{4\pi v R^2}{27}, \text{ pro } r = \frac{2}{3}R \text{ a } h = \frac{1}{3}v.$$

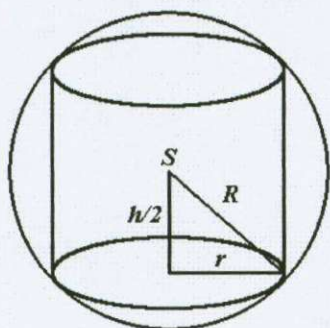
Úloha 3.4

Do koule o poloměru R vepište rotační válec:

- a) největšího pláště
- b) největšího objemu

Řešení:

a) Pro obsah pláště platí: $Q = 2\pi r \cdot h$



Z Pythagorovy věty: $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$

potom

$$Q = 2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2} =$$

$$= 4\pi \sqrt{r^2 \cdot (R^2 - r^2)}$$

Obr. 8

Podle A-G nerovnosti je

$$4\pi \sqrt{r^2 (R^2 - r^2)} \leq 4\pi \cdot \frac{r^2 + (R^2 - r^2)}{2}.$$

$Q_{\max} = 2\pi R^2$ právě tehdy, když

$$r^2 = R^2 - r^2$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} R = \frac{R \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Po dosazení $h = R \cdot \sqrt{2}$.

Rotační válec o největším plášti $Q = 2\pi R^2$ s poloměrem $r = \frac{R \cdot \sqrt{2}}{2}$ a výšce

$$h = R \cdot \sqrt{2}.$$

b) Pro objem válce platí: $V = \pi r^2 \cdot h$

Z Pythagorovy věty $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ potom

$$V = \pi r^2 \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2\pi \sqrt{r^4 \cdot (R^2 - r^2)}$$

Abychom mohli použít A-G nerovnost, musíme výraz rozšířit:

$$V = 2\pi \sqrt{r^2 \cdot r^2 \cdot (R^2 - r^2)}$$

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{r^2 \cdot r^2 \cdot (2R^2 - 2r^2)}$$

Tedy:

$$\sqrt[3]{r^2 \cdot r^2 (2R^2 - 2r^2)} \cdot \frac{r^2 \cdot r^2 \cdot (2R^2 - 2r^2)}{3} \cdot \frac{2R^2}{3}, \text{ potom}$$

$$V_{\max} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2R^2}{3} = \frac{4\pi R^2}{3\sqrt{2}} \text{ právě tehdy, když}$$

$$r^2 = 2R^2 - 2r^2$$

$$3r^2 = 2R^2$$

$$r = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Nyní dopočítáme } h = 2\sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{3}} = 2\sqrt{\frac{R^2}{3}} = 2R\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

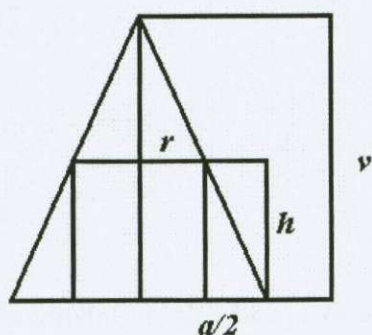
$$\text{Největší objem rotačního válce je } V = \frac{4\pi R^2}{3\sqrt{2}}, \text{ když } r = R\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ a } h = 2R\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Úloha 3.5

Do pravidelného čtyřbokého jehlanu s výškou v a délkou hrany podstavy a vepíše rotační válec:

- maximálního objemu
- maximálního pláště tak, aby jeho dolní podstava ležela uvnitř podstavy jehlanu a horní hrany ležely v bočních stěnách jehlanu.

Řešení:



Obr. 9

Po použití A-G nerovnosti:

$$\text{a) Objem válce } V = \pi r^2 \cdot h.$$

Z podobnosti trojúhelníků vypočteme

$$\frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{v-h}{v}, \text{ tedy } h = v - \frac{2rv}{a}.$$

Nyní dosadíme do rovnice pro výpočet V :

$$V = \pi r^2 \cdot \left(v - \frac{2rv}{a} \right) = \frac{\pi v}{a} \cdot r \cdot r \cdot (a - 2r).$$

$$\sqrt[3]{r \cdot r \cdot (a - 2r)} = \frac{r \cdot r \cdot (a - 2r)}{3}$$

$$r \cdot r \cdot (a - 2r) \leq \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

$$V \leq \frac{\pi v}{a} \cdot \frac{a^3}{27} = \frac{\pi v a^2}{27}$$

Maximální objem $V_{\max} = \frac{\pi v a^2}{27}$, pak

$$r = a - 2r$$

$$r = \frac{a}{3}$$

Dopočteme nyní $h = v - \frac{2 \cdot \frac{a}{3} \cdot v}{a} = \frac{v}{3}$.

Válec má poloměr $r = \frac{a}{3}$ a výšku $h = \frac{v}{3}$ při maximálním objemu $V_{\max} = \frac{\pi v a^2}{27}$.

b) Obsah válce: $Q = 2\pi r \cdot h$

Z podobnosti trojúhelníků plyne $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{v-h}{v}$, tedy $h = v - \frac{2rv}{a}$.

Po dosazení $Q = 2\pi r \cdot \left(v - \frac{2rv}{a}\right) = \frac{\pi v}{a} \cdot 2r \cdot (a - 2r)$.

A-G nerovnost:

$$\sqrt{2r \cdot (a - 2r)} \leq \frac{2r + (a - 2r)}{2}$$

$$2r \cdot (a - 2r) \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$Q = \frac{\pi v a}{4}$$

Maximální obsah válce je $Q = \frac{\pi v a}{4}$ je-li

$$2r = a - 2r$$

$$r = \frac{a}{4}$$

Potom tedy $\dots = \frac{v}{2}$.

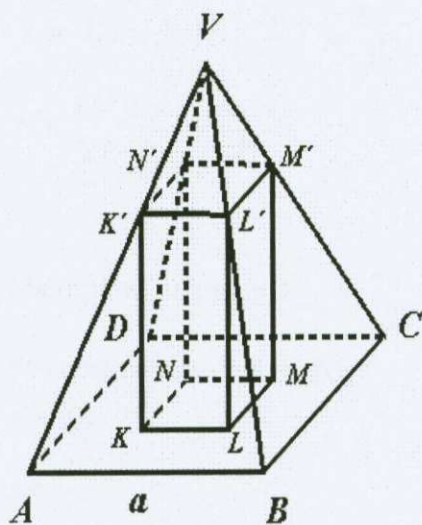
Válec o největším plášti má poloměr $r = \frac{a}{4}$ a výšku $h = \frac{v}{2}$.

Úloha 3.6

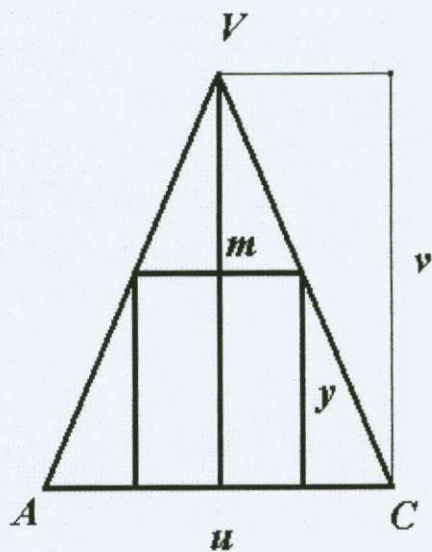
Do pravidelného čtyřbokého jehlanu vepište kvádr:

- maximálního objemu
- maximálního pláště tak, aby jeho dolní podstava ležela uvnitř podstavy jehlanu a horní hrany podstavy ležely v bočních stěnách jehlanu

Řešení:

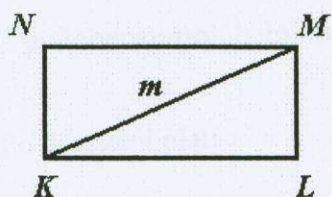


Obr. 10



Obr. 11

a) Objem kvádru $V = x \cdot x \cdot y$.



Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{v-y}{v} = \frac{m}{u} = \frac{x \cdot \sqrt{2}}{a \cdot \sqrt{2}}, \text{ odtud } y = v - \frac{vx}{a}.$$

Obr. 12

Nyní dosadíme $V = x \cdot x \cdot \left(v - \frac{vx}{a} \right) = \frac{v}{a} \cdot x \cdot x \cdot (a - x)$, po úpravě

$$V = \frac{v}{2a} \cdot x \cdot x \cdot (2a - 2x).$$

Podle A-G nerovnosti platí:

$$\sqrt[3]{x \cdot x \cdot (2a - 2x)} \leq \frac{x + x + (2a - 2x)}{3}$$

$$x \cdot x \cdot (2a - 2x) \leq \left(\frac{2a}{3} \right)^3 = \frac{8a^3}{27}$$

$$V \leq \frac{8a^3}{27} \cdot \frac{v}{2a} = \frac{4a^2v}{27}$$

$$\text{Maximální objem je } V_{\max} = \frac{4a^2v}{27}.$$

Rovnost nastane právě, když

$$x = 2a - 2x$$

$$x = \frac{2}{3}a$$

Po dosazení pro y platí $y = \frac{1}{3}v$.

Podstava kvádru má tvar čtverce, a to $x = \frac{2}{3}a$, a výšku $y = \frac{1}{3}v$.

b) Obsah kváдру $Q = 4 \cdot x \cdot y$

Z podobnosti trojúhelníků plyne $\frac{v-y}{v} = \frac{x}{a}$, tedy $y = v - \frac{vx}{a}$.

Po dosazení platí $Q = 4 \cdot x \cdot \left(v - \frac{vx}{a}\right) = \frac{4v}{a} \cdot x \cdot (a-x)$

Po využití A-G nerovnosti

$$\sqrt{x \cdot (a-x)} \leq \frac{x + (a-x)}{2}$$

$$x \cdot (a-x) \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

Maximální plášť $Q_{\max} = \frac{4v}{a} \cdot \frac{a^2}{4} = va$, je-li

$$x = a - x$$

$$x = \frac{1}{2}a$$

Po dopočtení $y = \frac{1}{2}v$.

Kvádr má maximální plášť při straně $x = \frac{1}{2}a$ a výšce $y = \frac{1}{2}v$.

2 Využití kvadratické funkce

Další metodou pro řešení extrémálních úloh je využití kvadratické funkce a jejího grafu. Kvadratická funkce nabývá pouze jednoho extrému. A to pouze minima nebo maxima. O jaký extrém se jedná, napoví znaménko koeficientu kvadratického členu, který určuje umístění paraboly.

Věta 3:

Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ nabývá extrémní hodnoty $y_{ext.} = c - \frac{b^2}{4a}$

pro $x_0 = -\frac{b}{2a}$

O minimum funkce se jedná, jestliže $a > 0$ a o maximum funkce, jestliže $a < 0$.
Existuje-li maximum dané úlohy pak neexistuje minimum a naopak.

Důkaz:

Převédeme funkci y na čtverec.

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c$$

$$y = a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Číslo $c - \frac{b^2}{4a}$ je stálé číslo, nezávislé na hodnotě proměnné x .

Máme dvě možnosti:

1. Je-li $a > 0$, pak člen $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ není nikdy záporný, ale pro $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nabývá

nulové hodnoty. Proto proměnná y má nejmenší hodnotu rovnou $y_{\min} = c - \frac{b^2}{4a}$

a nemá hodnotu největší.

2. Je-li $a < 0$, pak člen $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ je vždy záporný, ale pro $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nabývá

nulové hodnoty. Proměnná y má největší možnou hodnotu rovnou

$y_{\max} = c - \frac{b^2}{4a}$ a nemá hodnotu nejmenší.

2.1 Řešené úlohy

1. Polynomické výrazy:

Úloha 1.1

Nalezněte extrém funkce $f(x) = 2x^2 - 16x + 32$.

Řešení:

Protože $a = 2$ je větší než nula, funkce nabývá minima, maxima nedosahuje, a to

v bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

$$x_0 = -\frac{-16}{2 \cdot 2} = 4$$

Dosadíme do funkce: $f(x)_{\min} = f(4) = 2 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 + 32 = 0$

Funkce nabývá svého minima $y = 0$ v bodě $x = 4$.

Úloha 1.2

Nalezněte extrém funkce $f(x) = -3x^2 + 18x + 9$.

Řešení:

Jediného extrému, kterého funkce dosahuje je maximum, neboť $a = -3$.

$$\text{Tedy } x_0 = -\frac{18}{2 \cdot (-3)} = 3.$$

$$f(x)_{\max} = f(3)_{\max} = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 + 9 = 36$$

V bodě $x = 3$ nabývá funkce své největší hodnoty $y = 36$.

Úloha 1.3

Nalezněte největší hodnotu funkce $f(x) = 3x^2 - 5x + 8$.

Řešení:

Neboť $a = 3$, funkce y má nejmenší hodnotu, ale největší hodnotu nemá. Úloha tudíž nemá řešení.

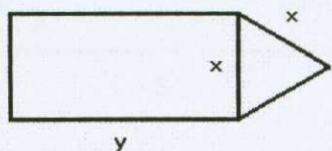
2. Planimetrické úlohy:

Úloha 2.1

Obrazec se skládá z obdélníka o rozměrech x, y a rovnostranného trojúhelníka o délce strany x . (Oba útvary mají stranu délky x společnou.)

Určete rozměry obrazce tak, aby jeho obsah byl při daném konstantním obvodu l maximální.

Řešení:



Obvod obrazce $o = 2y + 3x$, $o = l$ potom

$$y = \frac{l - 3x}{2}.$$

Obr. 13

Obsah obrazce je $S = x \cdot y + \frac{x \cdot v}{2}$, kde $v = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{v\sqrt{3}}{2}$. Po dosazení platí

$$S = x \cdot \left(\frac{l - 3x}{2} \right) + \frac{x \cdot x\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Nyní upravme } S = \frac{(-6 + \sqrt{3})x^2}{4} + \frac{l}{2}x.$$

Největší obsah nastane:

$$S_{\max} \text{ pro } x_0 = \frac{-\frac{l}{2}}{2 \cdot \frac{(-6 + \sqrt{3})}{4}} = \frac{l}{6 - \sqrt{3}} \text{ a tedy}$$

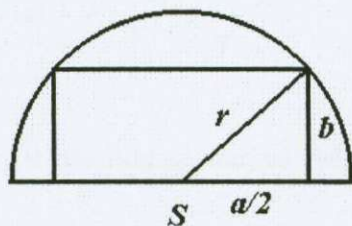
$$y_0 = \frac{l - \frac{3l}{6 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{l \cdot (5 - \sqrt{3})}{22}$$

$$\text{Rozměry obrazce jsou } x = \frac{l}{6 - \sqrt{3}}, \quad y = \frac{l \cdot (5 - \sqrt{3})}{22}.$$

Úloha 2.2

Do daného půlkruhu vepište pravoúhelník maximálního obsahu tak, aby jeho dva sousední vrcholy ležely na průměru půlkruhu a zbývající dva vrcholy na jeho hraničních kružnici.

Řešení:



Pomocí Pythagorovy věty $r^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$,

$$\text{odtud } b = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Pro obsah pravoúhelníku platí $S = a \cdot b$.

Obr. 14

Po dosazení

$$S = a \cdot \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$S^2 = a^2 \cdot \left(r^2 - \frac{a^2}{4} \right)$$

$$4S^2 = 4a^2r^2 - a^4$$

Pomocí substituce $a^2 = x$ dojdeme ke kvadratické funkci $y = -x^2 + 4xr^2 - 4S^2$,

která nabývá svého maxima pro $x_0 = \frac{4r^2}{2} = 2r^2$.

Pak je $a^2 = 2r^2$

$$a = r\sqrt{2} \text{ a}$$

$$b = \sqrt{r^2 - \frac{2r^2}{4}} = \frac{r}{\sqrt{2}}, \text{ po úpravě } b = \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}.$$

Hledaný pravoúhelník má stranu $a = r\sqrt{2}$ a $b = \frac{a}{2}$.

Úloha 2.3

Do továrny dorazila zásilka s dráty s délkou l . Tyto dráty se mají tvarovat tak, aby vznikl pravoúhelník největšího obsahu.

Řešení:

Obsah pravoúhelníku zapíšeme ve tvaru:

$$S = x \left(\frac{l}{2} - x \right) = -x^2 + \frac{l}{2}x$$

$a < 0$ tato funkce nabývá svého maxima pro $x_0 = \frac{-\frac{l}{2}}{-2 \cdot 1} = \frac{l}{4}$

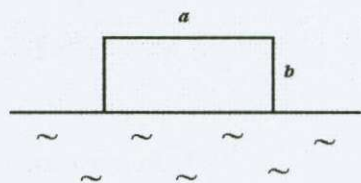
Dopočteme druhou stranu obdélníka $\frac{l}{2} - x_0 = \frac{l}{4}$

Drát tvarujeme do tvaru čtverce a to ve vzdálenosti $\frac{1}{4}l$.

Úloha 2.4

Zahradník měl pravoúhlý pozemek těsně u řeky tak, že řeka tvořila hranici pozemku z jedné strany. Na oplocení spotřeboval 300m pletiva. Najděte rozměry jeho pozemku, když víte, že plošný obsah je maximální.

Řešení:



Díky řece zahradník oplotil pouze tři strany, potom $a + 2b = 300$, $0 < b < 150$

Po označení $b = x$, platí $a = 300 - 2x$.

Obr. 15

Obsah pozemku je

$$S = a \cdot b = (300 - 2x) \cdot x$$

$$S = -2x^2 + 300x.$$

Tato kvadratická funkce nabývá své největší hodnoty v bodě $x_0 = \frac{300}{4} = 75$, tedy

$b = 75m$, potom $a = 150m$.

Maximální obsah $S_{\max} = 150 \cdot 75 = 11\,250 m^2$

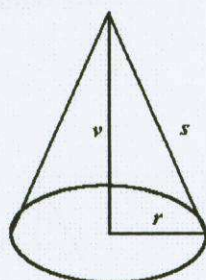
Zahradníkův pozemek má rozměry $75\,m \times 150\,m$.

3. Úlohy o tělesech:

Úloha 3.1

Určete rozměry rotačního kužele, který má při daném konstantním povrchu S největší objem.

Řešení:



Obr. 16

Pro povrch kužele platí

$$S = \pi r^2 + \pi r s, \quad s = \frac{S - \pi r^2}{\pi r} = \frac{S}{\pi r} - r$$

$$\text{Objem kužele } V = \frac{1}{3} \pi r^2 v.$$

Z Pythagorovy věty plyne

$$v = \sqrt{s^2 - r^2},$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{S}{\pi r} - r\right)^2 - r^2},$$

$$v = \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 r^2} - \frac{2S}{\pi}}.$$

Po dosazení do V

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 r^2} - \frac{2S}{\pi}}$$

$$9V^2 = r^2 (S^2 - 2\pi S r^2)$$

Abychom dostali kvadratickou funkci, použijeme substituci $r^2 = a$.

$y = -2\pi S a^2 + S^2 a - 9V^2$, funkce nabývá maxima pro

$$a_0 = \frac{S^2}{4\pi S} = \frac{S}{4\pi}.$$

Potom je $r^2 = \frac{S}{4\pi}$,

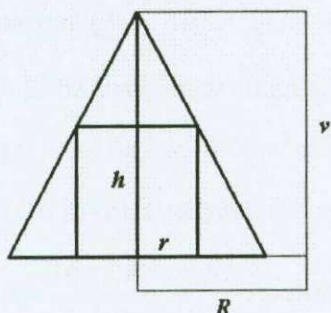
$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} \text{ a po dopočetní } v = \sqrt{\frac{2S}{\pi}}.$$

Rotační kužel má poloměr $r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ a výšku $v = \sqrt{\frac{2S}{\pi}}$.

Úloha 3.2

Do rotačního kužele o poloměru R a výšce v vepište válec o největším plášti.

Řešení:



Obr. 17

Pro obsah pláště platí: $Q = 2\pi r \cdot h$

Z podobnosti trojúhelníků vyjádříme r :

$$\frac{r}{R} = \frac{v-h}{v} = 1 - \frac{h}{v}$$

$$r = R \left(1 - \frac{h}{v} \right)$$

Tedy $Q = 2\pi R \left(1 - \frac{h}{v} \right) \cdot h$, potom $Q = 2\pi R h - \frac{2\pi R}{v} h^2$.

Nyní jsme dospěli ke kvadratické funkci, jejíž maximum je v bodě

$$h_0 = \frac{2\pi R}{2 \frac{2\pi R}{v}} = \frac{v}{2}.$$

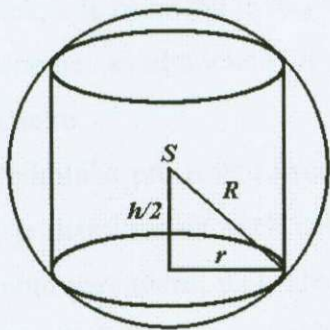
Po dopočetní $r = R \left(1 - \frac{\frac{v}{2}}{v} \right) = \frac{R}{2}$.

Do rotačního kužele vepíšeme válec o poloměru $r = \frac{R}{2}$ a výšce $h = \frac{v}{2}$.

Úloha 3.3

Do dané koule o poloměru R vepište válec o největším plášti.

Řešení:



Obr. 18

Obsah pláště: $Q = 2\pi r \cdot h$

Z Pythagorovy věty: $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$,
potom

$$Q = 2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Jelikož výraz Q stejně jako Q^2 dosahují
stejně největší hodnoty, můžeme tedy

napsat $Q^2 = 4\pi^2 r^2 (4R^2 - 4r^2)$.

Jelikož vychází rovnice 4. stupně použijeme substituci $r^2 = a$, odtud tedy rovnice

$$Q^2 = -16\pi^2 a^2 + 16\pi^2 R^2 a.$$

Tato rovnice nabývá své největší hodnoty v bodě

$$a = \frac{16\pi^2 R^2}{2 \cdot 16\pi^2} = \frac{R^2}{2}, \text{ potom}$$

$$r = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ a } h = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = 2\sqrt{\frac{R^2}{2}} = 2r.$$

Hledaný válec má poloměr $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ a výšku $h = 2r$.

3 Metoda diskriminantu

Extremální hodnotu určíme z podmínky pro diskriminant kvadratické rovnice. Tato metoda umožňuje řešit snadno i úlohy obsahující odmocninu s neznámou nebo zlomek, kde neznámá je ve jmenovateli. Metodu používáme, když po úpravě výrazu dostaneme kvadratickou rovnici s veličinou, jejíž extrém hledáme, v podobě parametru.

Podmínka pro řešení kvadratické rovnice, pokud má být v oboru reálných čísel ($\mathbb{R}$), je diskriminant větší nebo roven nule. Odtud dostaneme nerovnost omezující hodnotu parametru, tedy hledané funkce. Řešením této nerovnosti určíme extrémy funkce. Je třeba se zamyslet, za jakých podmínek je funkce definovaná a jakých hodnot může nabývat.

3.1 Řešené úlohy:

1. Extrémy algebraických výrazů:

Úloha 1.1

Nalezněte minimální hodnotu funkce $f(x) = 4x + \frac{1}{2x}$, $x > 0$.

Řešení:

Předpokládejme, že minimum existuje a označme jej m . Hledáme tedy x tak, aby

platilo $4x + \frac{1}{2x} = m$. Po úpravě $8x^2 - 2mx + 1 = 0$. Tedy

$$4m^2 \geq 32$$

$$m \geq 2\sqrt{2}$$

Protože m je minimální hodnota funkce, zvolíme $m = 2\sqrt{2}$. Platí tedy

$4x + \frac{1}{2x} = 2\sqrt{2}$, po úpravě dostaneme rovnici $8x^2 - 4\sqrt{2}x + 1 = 0$. Vypočteme

ještě příslušné hodnoty x .

$$x = \frac{4\sqrt{2} \pm 0}{16} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Daná funkce nabývá svého minima $f_{\min}(x) = 2\sqrt{2}$ v hodnotě $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Úloha 1.2

Stanovte minimální hodnotu funkce $f(x) = \frac{3(x+1)}{x^2}$.

Řešení:

Hledáme x tak, aby platilo $\frac{3(x+1)}{x^2} = m$. Potom $-mx^2 + 3x + 3 = 0$.

Má-li být x reálné musí být diskriminant větší nebo roven nule:

$$D = 12m + 9 \geq 0$$

$$m \geq -\frac{3}{4}.$$

Za m vezmeme nejmenší hodnotu, tj. $m = -\frac{3}{4}$.

Potom tedy dostaneme rovnici $3x^2 + 12x + 12 = 0$ a odtud $x = \frac{-12 \pm 0}{6} = -2$.

Minimální hodnota funkce je $f_{\min}(x) = -\frac{3}{4}$ pro $x = -2$.

2. Planimetrické úlohy:

Úloha 2.1

Obrazec se skládá z obdélníka o rozměrech x, y a rovnostranného trojúhelníka o délce strany x . (Oba útvary mají stranu délky x společnou.)

Určete rozměry obrazce tak, aby jeho obsah byl při daném konstantním obvodu l maximální.

Řešení:

Pro obvod obrazce (obr. 12) platí $o = 2y + 3x$, $o = l$, z této rovnice vytkneme

jednu neznámou $y = \frac{l - 3x}{2}$.

Obsah obrazce je $S = x \cdot y + \frac{x \cdot v}{2}$, kde $v = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Po dosazení do vzorce pro obsah dostaneme rovnici $S = x \cdot \left(\frac{l - 3x}{2}\right) + \frac{x \cdot x\sqrt{3}}{4}$, po

jejím upravení platí $0 = (-6 + \sqrt{3})x^2 + 2lx - 4S$.

Aby x bylo reálné číslo, je třeba, aby diskriminant byl větší nebo roven nule.

Tedy $4l^2 \geq 4 \cdot (-6 + \sqrt{3}) \cdot (-4S)$

Po úpravě $S \geq \frac{l^2}{4(6 - \sqrt{3})}$.

Po dosazení do původní kvadratické rovnice vypočítáme x ,

$x = \frac{l}{6 - \sqrt{3}}$ a pomocí něj $y = \frac{l(5 - \sqrt{3})}{22}$.

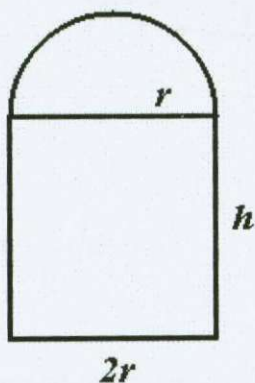
$$S = \frac{l^2}{4(6-\sqrt{3})} \text{ je maximální obsah obrazce při rozměrech } x = \frac{l}{6-\sqrt{3}} \text{ a}$$

$$y = \frac{l(5-\sqrt{3})}{22}.$$

Úloha 2.2

Jaké rozměry má mít profil okna složený z obdélníka a přilehlého půlkruhu, aby při daném plošném obsahu S byl obvod okna minimální?

Řešení:



Pro obsah okna platí $S = \frac{\pi r^2}{2} + 2rh$, potom

$$2h = \frac{S}{r} - \frac{\pi r}{2}.$$

Obvod okna vypočteme jako $o = 2h + 2r + \pi r$.

Do této rovnice dosadíme a po úpravě dospějeme ke kvadratické rovnici s neznámou r a

Obr. 19

parametrem o : $(\pi + 4)r^2 - 2or + 2S = 0$.

Diskriminant $D = o^2 - 2S(\pi + 4)$ musí být větší nebo roven nule, odtud

$o \geq \sqrt{2S(\pi + 4)}$. Nejmenší možnou hodnotou o je tedy $o = \sqrt{2S(\pi + 4)}$, když

$D = 0$. Po dosazení do rovnice vypočteme

$$r = \frac{2\sqrt{2S(\pi + 4)}}{2(\pi + 4)}$$

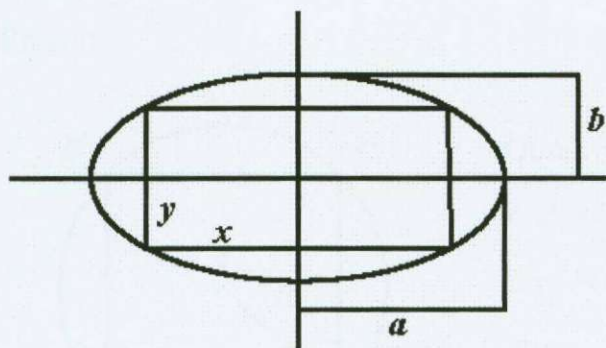
$$r = \sqrt{\frac{2S}{\pi + 4}} \text{ a také } h = \sqrt{\frac{2S}{\pi + 4}} = r.$$

Profil okna má rozměry $r = \sqrt{\frac{2S}{\pi + 4}}$ a $h = r$.

Úloha 2.3

Do elipsy o daných poloosách a , b vepište obdélník maximálního obsahu. Jaké jsou jeho rozměry?

Řešení:



Obr. 20

Z rovnice elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ vyjádříme}$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Pro obsah obdélníka platí:

$$S = 4xy, \text{ tedy}$$

$$S = 4x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Po úpravě dostaneme rovnici 4. stupně:

$$-16x^4 \frac{b^2}{a^2} + 16x^2 b^2 - S^2 = 0$$

Zvolme tedy substituci $x^2 = z$, pak $-16 \frac{b^2}{a^2} z^2 + 16b^2 z - S^2 = 0$ kvadratická

rovnice s parametrem S a neznámou z .

Aby úloha měla reálné řešení, musí být diskriminant D větší nebo roven nule.

$$\text{Odtud } 256b^4 \geq 64 \frac{b^2}{a^2} S^2, \text{ tedy } 2ab \geq S.$$

Za S vezmeme největší možnou hodnotu, tj. $S = 2ab$.

Pak po dosazení do kvadratické rovnice zjistíme

$$z = \frac{a^2}{2}, \text{ odtud}$$

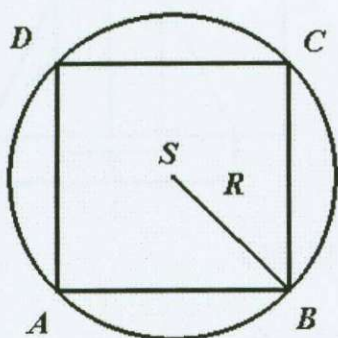
$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ a } y = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Obdélník vepsaný do elipsy má rozměry $\frac{a}{\sqrt{2}}$ a $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

Úloha 2.4

Do dané kružnice o poloměru R vepište obdélník největšího obsahu.

Řešení:



obr. 21

Obsah obdélníka je $S = a \cdot b$, $b \in (0, 2R)$.

Z obrázku pomocí Pythagorovy věty plyne

$$a = \sqrt{4R^2 - b^2}. \text{ Po dosazení platí}$$

$$S = b \cdot \sqrt{4R^2 - b^2}.$$

Po upravení položíme $b^2 = z$ a dospějeme ke kvadratické rovnici

$$-z^2 + 4R^2 z - S^2 = 0.$$

Za podmínky, že diskriminant musí být větší nebo roven nule, platí

$$16R^4 \geq 4S^2, \text{ potom } S \leq 2R.$$

Největší možný obsah obdélníka je $S = 2R$.

Po dosazení $z = 2R^2$, tedy

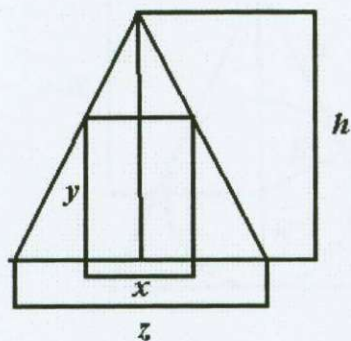
$$b = R\sqrt{2} \text{ a } a = R\sqrt{2}.$$

Obdélník vepsaný do kruhu je čtverec o straně $R\sqrt{2}$.

Úloha 2.5

Do rovnoramenného trojúhelníku o základně z a k ní příslušné výšce h vepište obdélník největšího obsahu.

Řešení:



Obr. 22

Obsah obdélníku je $S = x \cdot y$.

Z podobnosti trojúhelníků plyne:

$$\frac{x}{z} = \frac{h-y}{h} = 1 - \frac{y}{h}, \text{ potom}$$

$$x = z \left(1 - \frac{y}{h} \right).$$

Tedy $S = z \left(1 - \frac{y}{h} \right) \cdot y$, po úpravě dojdeme k rovnici

$$-zy^2 + zhy - Sh = 0.$$

Má-li být řešením rovnice reálné číslo, musí platit $D \geq 0$, přičemž parametr S musí být maximální.

Z podmínky pro diskriminant dostaneme $z^2h^2 \geq 4Shz$, po úpravě $\frac{zh}{4} \geq S$.

Největší možná hodnota S je tedy $S_{\max} = \frac{zh}{4}$.

Potom $y = \frac{h}{2}$ a $x = \frac{z}{2}$.

Obdélník vepsaný do trojúhelníka má maximální obsah $S_{\max} = \frac{zh}{4}$ jsou-li jeho

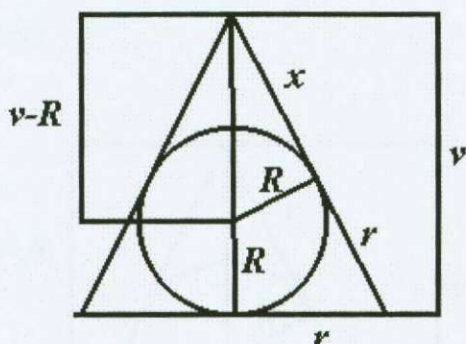
rozměry $y = \frac{h}{2}$ a $x = \frac{z}{2}$.

3. Úlohy o tělesech:

Úloha 3.1

Dané kouli o poloměru R opište kužel s minimálním objemem.

Řešení:



Obr. 23

Pro objem kužele platí: $V = \frac{\pi r^2 v}{3}$.

Z podobnosti trojúhelníků plyne:

$$\frac{x}{v} = \frac{R}{r}, \text{ tedy } x = \frac{Rv}{r}.$$

Pomocí Pythagorovy věty dostaneme rovnost

$$(v - R)^2 = x^2 + R^2, \text{ odtud } x^2 = v(v - 2R).$$

Potom můžeme zapsat $x^2 = \frac{R^2 v^2}{r^2} = v(v - 2R)$, z tohoto výrazu vyjádříme r^2 .

$$r^2 = \frac{R^2 v}{v - 2R}$$

Po dosazení r^2 do vzorce pro objem dostaneme:

$$V = \frac{\pi v}{3} \cdot \frac{R^2 v}{v - 2R}.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $\pi R^2 v^2 - 3Vv + 6VR = 0$.

Má-li být řešením rovnice reálné číslo, musí platit $D \geq 0$, přičemž parametr V musí být minimální.

Odtud $9V^2 \geq 24\pi VR^3$. Po vydělení kladným V dostaneme $V \geq \frac{8\pi R^3}{3}$, tedy

$$V_{\min} = \frac{8\pi R^3}{3}.$$

Pak po dosazení do kvadratické rovnice vypočteme

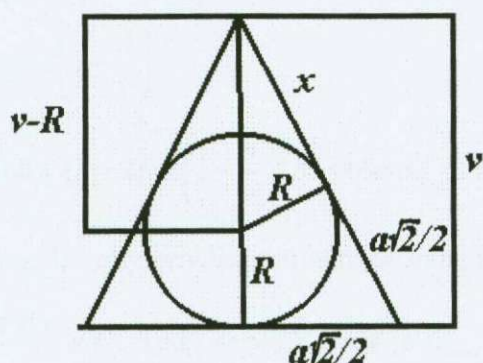
$$v = \frac{3 \cdot \frac{8\pi R^3}{3}}{2\pi R^2} = 4R \text{ a } r = \sqrt{\frac{R^2 \cdot 4R}{4R - 2R}} = R\sqrt{2}.$$

Kužel opisující kouli má poloměr $\dots \sqrt{2}$ a výšku $v = 4R$.

Úloha 3.2

Dané kouli o poloměru R opište čtyřboký jehlan s minimálním objemem.

Řešení:



Obr. 24

Pro objem jehlanu platí:

$$V = \frac{a^2 v}{3}.$$

Z podobnosti trojúhelníků plyne:

$$\frac{x}{v} = \frac{R}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}. \text{ Po úpravě } x = \frac{2Rv}{a\sqrt{2}}.$$

Pomocí Pythagorovy věty dostaneme rovnost $(v - R)^2 = x^2 + R^2$, odtud

$$x^2 = v(v - 2R).$$

Nyní můžeme zapsat $x^2 = \frac{4R^2 v^2}{2a^2} = v(v - 2R)$, potom $a^2 = \frac{2R^2 v}{v - 2R}$.

Po dosazení výšky do vzorce pro objem a úpravě dostáváme kvadratickou rovnici:

$$2R^2 v^2 - 3Vv + 6VR = 0$$

Aby v bylo reálné číslo, je třeba, aby diskriminant byl větší nebo roven nule.

$$\text{Tedy } 9V^2 \geq 48VR^3.$$

Po úpravě $V \geq \frac{16}{3}R^3$, a tedy $V_{\min} = \frac{16}{3}R^3$.

Dosazením do kvadratické rovnice vypočteme výšku $v = \frac{3 \frac{16R^3}{3}}{4R^2} = 4R$ a stranu

$$a = 2R.$$

Dané kouli opišeme jehlan s podstavou o straně $a = 2R$ a výšce $v = 4R$.

Úloha 3.3

Do rotačního kužele vepište válec o největším plášti.

Řešení:

Pro obsah pláště platí: $Q = 2\pi r \cdot h$

Z podobnosti trojúhelníků (viz. obr. 6, 7) vyjádříme r :

$$\frac{r}{R} = \frac{v-h}{v} = 1 - \frac{h}{v}$$

$$r = R \left(1 - \frac{h}{v} \right)$$

Tedy $Q = 2\pi R \left(1 - \frac{h}{v} \right) \cdot h$, potom $-2\pi R h^2 + 2\pi R v h - Qv = 0$.

Z podmínky pro diskriminant dostaneme $4\pi^2 R^2 v^2 \geq 8\pi R v Q$, odtud

$$\frac{\pi R v}{2} \geq Q. \text{ Tedy největší plášť je } Q_{\max} = \frac{\pi R v}{2}.$$

Po zpětném dosazení do kvadratické rovnice vypočteme $h = \frac{2\pi R v}{4\pi R} = \frac{v}{2}$ a

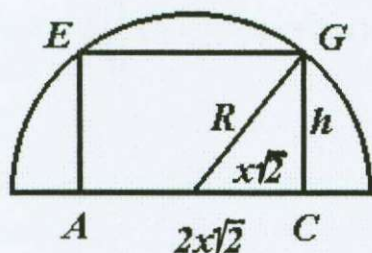
$$r = R \left(1 - \frac{\frac{v}{2}}{v} \right) = \frac{R}{2}.$$

Válec o největším plášti $Q_{\max} = \frac{\pi R v}{2}$ má poloměr $r = \frac{R}{2}$ a výšku $h = \frac{v}{2}$.

Úloha 3.4

Do polokoule o poloměru R je vepsán kvádr se čtvercovou podstavou, která leží v kruhové podstavě polokoule a vrcholy horní podstavy kváдру se dotýkají vrchlíku polokoule. Určete rozměry kváдру, má-li být jeho povrch maximální.

Řešení:



Kvádr ABCDEFGH má povrch

$$S = 2(ab + bc + ac).$$

Strany čtvercové podstavy zvolíme, a to

$$a = b = 2x, \quad c = h, \quad \text{potom}$$

$$S = 2(4x^2 + 4xh).$$

Obr. 25

Pomocí Pythagorovy věty vyjádříme h :

$$h = \sqrt{R^2 - 2x^2}.$$

Po dosazení $S = 2(4x^2 + 4x\sqrt{R^2 - 2x^2})$, odtud

$$192x^4 - (16S + 64R^2)x^2 + S^2 = 0.$$

Abychom dostali kvadratickou rovnici x^2 položíme z :

$$192z^2 - (16S + 64R^2)z + S^2 = 0.$$

Má-li být řešením rovnice reálné číslo, musí platit $D \geq 0$, přičemž parametr S musí být maximální.

$$\text{Tedy } (S + 4R^2)^2 \geq 3S^2.$$

$$\text{Po odmocnění } |S + 4R^2| \geq |\sqrt{3S}|.$$

Výrazy uvnitř absolutní hodnoty jsou kladné, proto $S + 4R^2 \geq \sqrt{3S}$, potom

$$S \leq \frac{4R^2}{\sqrt{3}-1} = 2R^2(\sqrt{3}+1).$$

Největší povrch je $S_{\max} = 2R^2(\sqrt{3}+1)$. Po dosazení do původní kvadratické

$$\text{rovnice vypočítáme } z = \frac{32R^2(\sqrt{3}+1) + 64R^2}{384}, \text{ po úpravě } z = \frac{R^2}{4} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Potom $x = \frac{R}{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$, jelikož jsme si zvolili stranu podstavy $2x$, potom

$$2x = R \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \text{a} \quad h = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}} = x\sqrt{2}.$$

Kvádr, jenž vepíšeme do polokoule má čtvercovou podstavu o straně

$$a = b = R \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} \text{ a výšku kváдру } h = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}.$$

Závěr

V práci byly uvedeny tři metody řešení úloh na maxima a minima, které nepotřebují znalosti diferenciálního počtu. Jejich předností je jednoduché a srozumitelné řešení přístupné i středoškolským studentům. Řešené úlohy, které jsou součástí každé kapitoly, by mohly sloužit jako materiál při práci v matematickém kroužku, nebo jako příručka žákům vyšších tříd středních škol, kteří chtějí nabýt představ o povaze úloh, jimiž se zabývá vyšší matematika.

V této práci jsem se zaměřila na metodu A-G nerovnosti, diskriminantu a využití vlastností kvadratické funkce. Za zmínku stojí i metoda využití kubické funkce, nebo další způsoby řešení postavené na znalostech vyšší nebo elementární matematiky, například využití syntetické geometrie. Tyto metody však nebyly do této práce vzhledem k jejímu rozsahu zařazeny.

Úlohy na toto téma měly, mají a budou mít velký význam, neboť naše otázka: jak z mála prostředků získat co největší užitek, zde bude pořád, a nekladou si ji jenom lidé vzdělání. Mnoho těchto úloh vyplývá přímo z praxe.

Seznam literatury

- [1] Hroník, J.: Úlohy o maximech a minimech funkcí, Mladá Fronta, Praha 1967
- [2] Natanson, I. P.: Jednoduché úkoly na maxima a minima, Technicko-vědecké vydavatelství, 1952
- [3] Řežníčková, E.: Elementární metody řešení extrémálních úloh, diplomová práce, Pedagogická fakulta v Českých Budějovicích, katedra matematiky, České Budějovice 2001