

Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Vybrané úlohy z Pythagoriády

Vypracoval: Jan Mentlík
Vedoucí práce: Mgr. Hana Štěpánková, PhD
České Budějovice 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Vybrané úlohy z Pythagoriád jsem vypracoval; samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 13. dubna 2016

.....
podpis

Poděkování

Rád bych věnoval poděkování Mgr. Haně Štěpánkové, PhD. za podporu a cenné rady při psaní této bakalářské práce.

Anotace

Cílem bakalářské práce: „Vybrané úlohy z Pythagoriád“ je srozumitelné vypočítání příkladů, jenž se v této matematické soutěži vyskytují a jsou určeny pro žáky sedmého ročníku základních škol nebo pro žáky druhého ročníku osmiletého gymnázia. Úlohy jsou vybrány ze školního kola soutěže. Tyto vypočítané úlohy by měly pomoci nejen žákovi při počítání úloh, ale i učiteli s přípravou žáků na tuto matematickou soutěž.

Každá Pythagoriáda je rozdělena do tří kategorií podle způsobu řešení na analytické, geometrické a logické.

Annotation

The main purpose of this bachelor thesis: "Selected tasks from Pythagoriads" includes lucid calculating of the examples, which occur in this mathematical competition and are dedicated for seventh class of basic schools or second class eight-year-old gymnasium. Examples are chosen from the local competition for schools. These solved examples are meant to help not only students in practising, but also for teachers in preparing students for the mathematical competition.

Every Pythagoriad is divided to three categories according to the method of solving the problem and those are analytical, geometric and logical.

Obsah

1	Úvod	7
2	Pythagoriáda 2008/2009	8
2.1	Logické řešení úloh	8
2.1.1	První příklad	8
2.1.2	Druhý příklad	8
2.1.3	Třetí příklad	9
2.1.4	Čtvrtý příklad	10
2.1.5	Pátý příklad	11
2.1.6	Šestý příklad	12
2.2	Analytické řešení úloh	13
2.2.1	První příklad	13
2.2.2	Druhý příklad	14
2.3	Geometrické řešení	14
2.3.1	První příklad	14
2.3.2	Druhý příklad	15
2.3.3	Třetí příklad	17
3	Pythagoriáda 2009/2010	19
3.1	Logické řešení úloh	19
3.1.1	První příklad	19
3.1.2	Druhý příklad	19
3.1.3	Třetí příklad	19
3.1.4	Čtvrtý příklad	20
3.1.5	Pátý příklad	21
3.2	Analytické řešení úloh	21
3.2.1	První příklad	21
3.2.2	Druhý příklad	22
3.2.3	Třetí příklad	22
3.2.4	Čtvrtý příklad	23
3.3	Geometrické řešení úloh	23
3.3.1	První příklad	23
3.3.2	Druhý příklad	24
4	Pythagoriáda 2012/2013	26
4.1	Logické řešení úloh	26
4.1.1	První příklad	26
4.1.2	Druhý příklad	26
4.1.3	Třetí příklad	27
4.1.4	Čtvrtý příklad	27
4.1.5	Pátý příklad	28
4.2	Analytické řešení úloh	29
4.2.1	První příklad	29
4.2.2	Druhý příklad	29
4.2.3	Třetí příklad	29

4.2.4	Čtvrtý příklad	30
4.2.5	Pátý příklad	31
5	Pythagoriáda 2013/2014	33
5.1	Logické řešení	33
5.1.1	První příklad	33
5.1.2	Druhý příklad	33
5.1.3	Třetí příklad	34
5.2	Analytické řešení	35
5.2.1	První příklad	35
5.2.2	Druhý příklad	35
5.2.3	Třetí příklad	36
5.3	Geometrické řešení	36
5.3.1	První příklad	36
5.3.2	Druhý příklad	38
6	Závěr	39
7	Použitá literatura a zdroje	40

1 Úvod

Pythagoriáda je matematická soutěž, která je určena žákům pátých až osmých tříd základních škol a odpovídajícím ročníkům osmiletého gymnasia. Je rozdělena na školní, okresní a krajská kola. Každá Pythagoriáda obsahuje patnáct příkladů, které kladou důraz na prostorovou představivost a logické uvažování. Každá úloha je za 1 bod. Aby se žák stal úspěšným řešitelem školního kola, musí mít 9 a více bodů. Časový úsek na vyřešení úloh je 60 minut. Žák během řešení nesmí používat matematické tabulky a kalkulačku.

V této bakalářské práci jsem se zaměřil na školní kola. Motivaci k psaní tohoto tématu jsem čerpal z nedostatku volně dostupných vypracovaných úloh pro žáky, kteří se na tuto soutěž připravují. Samozřejmě může tento materiál posloužit i učiteli, který připravuje žáky na soutěž.

Bakalářská práce je rozdělena podle ročníku Pythagoriády. Vybral jsem dvě starší zadání (2008/2009, 2009/2010) a dvě novější zadání (2012/2013, 2013/2014). Ukazuje to, jak se vybrané úlohy za určitou dobu pozměnily. Každý test v Pythagoriádě je rozdělen na: logické, analytické a geometrické řešení. Úlohy jsou přiřazeny do určité části podle toho, jakým způsobem je nejjednodušší jejich vyřešení.

Bakalářská práce je sázena programem $\text{\LaTeX}$, který umožňuje autorům textů sázet a tisknout svá díla ve velmi vysoké typografické kvalitě, přičemž autor používá profesionály předdefinovaných vzhledů dokumentu.

Všechny zadání včetně obrázků jsou převzaty z internetových stránek Základní školy v Hradci Králové [9].

2 Pythagoriáda 2008/2009

2.1 Logické řešení úloh

2.1.1 První příklad

Zadání

Doplňte další tři členy řady tvořené podle určitého pravidla.

0 ; -1 ; -4 ; -13 ; • ; • ; • ; ...

Řešení

Abychom mohli odhalit další tři čísla, musíme zjistit, podle jakého pravidla vznikly zadaná čísla. Uvažujeme, že číslo nula bylo zadáno. Můžeme určit, o kolik jsou čísla od sebe. Mínus jednička je od nuly vzdálena o 1. Mínus čtyřka je od mínus jedničky vzdálena o 9. Mezi -13 a -4 je vzdálenost 9. Zdá se, že vzdálenost mezi čísly roste mocninou čísla 3. Nabízí se za další číslo v řadě vzít takové, které je od -13 vzdálené o 27. Tedy:

$$-(3)^3 - 13 = -40$$

Stejným způsobem dopočítáme následující čísla řady. Tedy:

$$-(3)^4 - 40 = -121$$

$$-(3)^5 - 121 = -364$$

Další čísla v řadě jsou: $-40, -121, -364$.

2.1.2 Druhý příklad

Zadání

Určete pět po sobě jdoucích přirozených čísel, jejichž součet je 150.

Řešení

Naším úkolem je najít pět po sobě jdoucích čísel, jejichž součet bude 150. První číslo, si můžeme označit, jako neznámou a . Následující číslo zvětšíme o jedna, protože hledáme po sobě jdoucí číslo a můžeme ho tedy zapsat jako: $a + 1$. Tímto způsobem si vypíšeme pět po sobě jdoucích čísel: $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4$. Ze zadání víme, že jejich součet se má rovnat 150. Dostáváme tedy rovnici ve tvaru:

$$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) = 150,$$

$$5a + 10 = 150,$$

$$5a = 140,$$

$$a = 28.$$

První z pěti hledaných čísel je číslo 28. Další čtyři jsou 29, 30, 31, 32.

Můžeme provést zkoušku, abychom si byli jisti, že jsme našli správná čísla. Jestliže tyto čísla sečteme, musíme dostat jako jejich součet číslo 150. Tedy: $28 + 29 + 30 + 31 + 32 = 150$. Zjistili jsme, že součet těchto pěti přirozených po sobě jdoucích čísel je skutečně 150.

Pět po sobě jdoucích přirozených čísel, jejichž součet je 150, jsou čísla: 28, 29, 30, 31 a 32.

2.1.3 Třetí příklad

Zadání

Nahrad'te písmena číslicemi tak, aby součet byl správný. (Stejná písmena znamenají stejné číslice, různá písmena různé číslici.)

$$\begin{array}{r} \mathbf{AABAB} \\ \mathbf{DCBAB} \\ \mathbf{CCDCBB} \end{array}$$

Řešení

Naším úkolem je správně doplnit místo písmen číslice tak, aby součet byl správný. Na místě jednotek vidíme, že pokud sečteme písmeno **B** s písmenem **B**, dostaneme písmeno **B**. Abychom mohli nahradit písmeno **B** číslicí, musíme najít takovou, kterou když sečteme sama se sebou, dostaneme tu samou číslici. Jediná číslice, které splňuje tuto podmínku, je 0: $0 + 0 = 0$. Písmeno **B** jsme nahradili číslicí 0.

Na místě desítek vidíme, že platí: $\mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Za písmeno **A** dosadíme číslici 5 a dostáváme: $5 + 5 = 10$. Žádná jiná číslice uvedenou podmínku nesplňuje. Sepíšeme nulu a jedničku si budeme držet do dalšího součtu. Součet na místě stovek nám říká: $0 + 0 = \mathbf{C}$. Nesmíme ale zapomenout, že z předcházejícího součtu, si držíme jedničku, kterou doplníme do součtu a dostaneme: $0 + 0 + 1 = \mathbf{C}$, $\mathbf{C} = 1$. Dále dosadíme za již známá písmena jejich hodnotu a získáme hodnotu písmene **D**: $5 + 1 = 6$.

Zjistili jsme hodnoty všech písmen ($\mathbf{A} = 5$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = 1$, $\mathbf{D} = 6$), nahradíme je za odpovídající čísla a jako zkoušku provedeme součet. Pokud součty budou matematicky správně, zdárně jsme tuto úlohu vyřešili.

$$\begin{array}{r} \mathbf{55050} \\ \mathbf{61050} \\ \hline \mathbf{116100} \end{array}$$

2.1.4 Čtvrtý příklad

Zadání

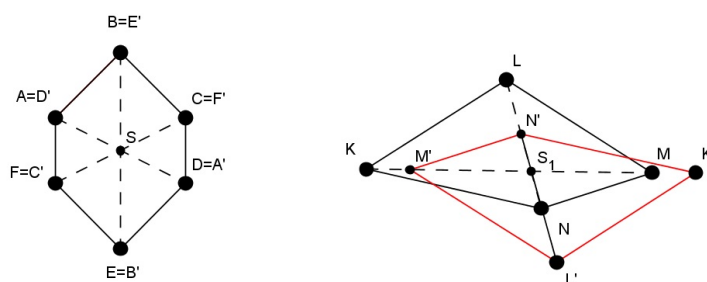
Určete slovo, které dostaneme, jestliže vyškrtneme všechna středově souměrná písmena.

H T I A S B N H O U S L E Z

Řešení

Nejdříve si připomene, co je středová souměrnost.

Středová souměrnost na přímce, v rovině nebo v prostoru se středem v bodě S (tzv. střed souměrnosti) je takové zobrazení, které zobrazuje střed S na sebe sama a bod A různý od S na bod A' , který se nachází na polopřímce opačné k SA ve stejné vzdálenosti od S jako bod A (tj. platí pro něj $|SA| = |SA'|$). Příklad středové souměrnosti:



Budeme tedy procházet postupně všechna písmena a snažit se u nich najít střed souměrnosti (pokud nenajdeme střed souměrnosti u některého písmene, přeskočíme ho a půjdeme na další písmeno v pořadí).

H T I A S B N H O U S L E Z

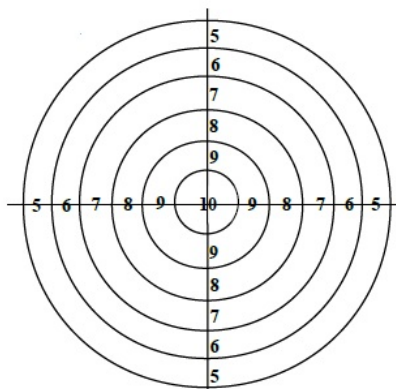
Písmena, která jsou středově souměrná, mají vyznačen červeně střed souměrnosti. Písmena, u kterých jsme nenašli středovou souměrnost, sepíšeme postupně jak jdou po sobě a dostaneme námi hledané slovo.

Hledané slovo je: **TABULE**.

2.1.5 Pátý příklad

Zadání

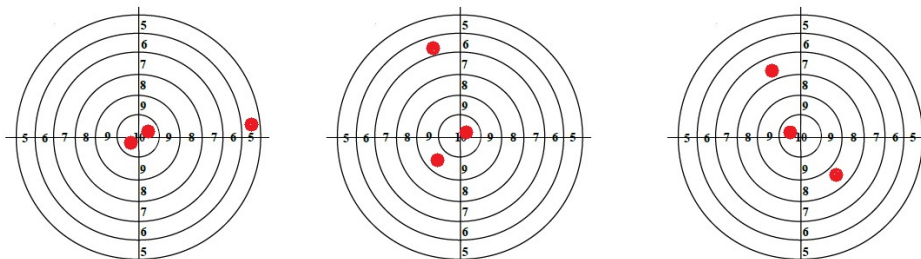
Pavel střílel 3x do terče a vždy se trefil. Celkem nastřílel 25 bodů. Kolika způsoby mohl terč zasáhnout? Jednotlivé možnosti vypište. Pořadí zásahů neuvažujte.



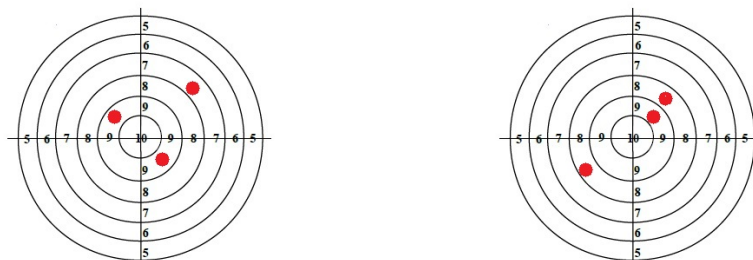
Řešení

Ze zadání víme, že Pavel střílí celkem 3x a součet těchto střel je 25. Pořadí zásahů neuvažujeme, tedy je stejné, jestli Pavel střelí například 10, 5, 1 nebo 1, 10, 5. Počítá se to jako jeden způsob zásahu terče. Tuto úlohu budeme řešit metodou od největší po nejmenší číslo na terči, tedy budeme uvažovat zásahy do největších čísel po nejmenší.

Začneme číslem 10. Kdyby Pavel střelil 3x do středu terče (10, 10, 10), nastřílel by celkem 30 bodů, což nevyhovuje zadání. Další možnost s číslem 10 je, že Pavel střelil 2x střed (10, 10, X), což dává součet 20, a do 25 zbývá zásah do čísla 5. První způsob zásahu terče je **10, 10, 5**. Tím jsme vyčerpaly možné zásahy střelení 2x do středu. Zbývá nám možnost zasáhnutí středu jednou a dva zásahy do terče. Druhý zásah může být do čísla 9 a z toho nám vyplyne, že třetí zásah bude do čísla 6. Dostáváme další možný způsob střely **10, 9, 6**. Další možný druhý zásah je také číslo 8, dohromady s prvním dávají součet 18 a do 25 zbývá zásah čísla 7. Dostáváme třetí možný způsob zásahu terče a to **10, 8, 7**. Další možné způsoby s kombinací čísla 10 již neodpovídají zadání, jelikož jejich součet je menší nebo větší než 25. Můžeme si tyto zásahy zakreslit do terče:



Vezmete tedy číslo 9. Pokud by Pavel střelil 3x číslo 9, dostal by součet 27, který neodpovídá zadání. Vezmeme tedy dva zásahy do čísla 9, součet je 18 a do 25 nám zbývá trefit číslo 7. Čtvrtý možný zásah terče je **9, 9, 7**. Další možné kombinace zásahu (9, 9, X) už nejsou, přejdeme tedy na způsob zásahu (9, Y, X). Jako druhý zásah budeme uvažovat střelu do čísla 8 a do 25 nám zbývá 8. Pátý způsob zásahu terče je **9, 8, 8**. Další kombinace s číslem 9 nejsou. Můžeme si tyto zásahy zakreslit do terče:



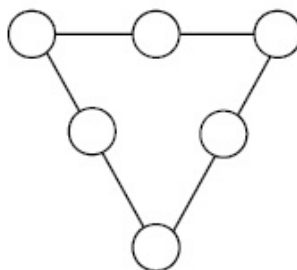
Vyčerpali jsme všechny možné zásahy do terče, pro které platí, že jejich součet má být 25. Kdybychom vzali zásah 3x do čísla 8, dostaneme součet 24, který je menší, než součet v zadání, což znamená, že další možné způsoby zásahu do terče neexistují.

Pavel mohl zasáhnout terč pěti způsoby: 10, 10, 5; 10, 9, 6; 10, 8, 7; 9, 9, 7 a 9, 8, 8.

2.1.6 Šestý příklad

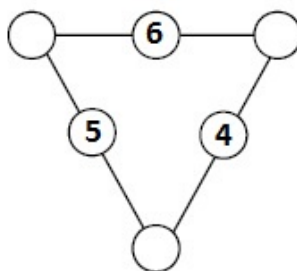
Zadání

Do kroužků na obrázku doplňte čísla od 1 do 6 tak, aby součet čísel na každé straně trojúhelníka byl 9. (Každé číslo může být použito pouze jednou.)

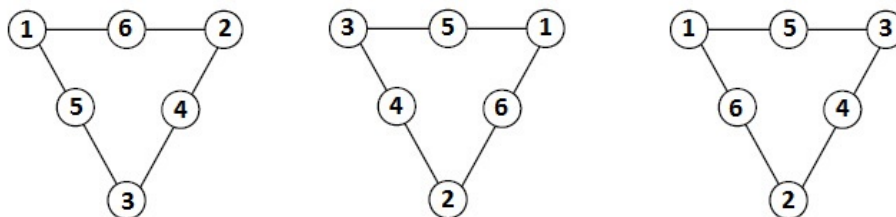


Řešení

Pokud by jsme vzali tři největší čísla (6, 5, 4) a daly je do rohů trojúhelníka, součet dvou čísel na každé straně by byl větší nebo roven 9. Vidíme, že tato úvaha není správná. Zkusíme tedy tato čísla dát do středů stran a do rohů potom rozmístit menší čísla (1, 2, 3). Zakreslíme si tedy větší čísla do středů stran.



U první strany vidíme, že musíme k číslu 6 přičíst čísla 1 a 2, aby platilo, že součet je 9. Musíme ale zvolit správný roh. Pokud by jsme dvojku napsali do levého rohu, z další strany by nám vyplynulo, že k součtu 9 potřebujeme přičíst číslo dva, aby součet byl správný. Ale čísla se nesmí opakovat, takže číslo dva musíme dát do pravého rohu a do levého napíšeme jedničku. Zbude nám číslo tři, které zapíšeme do spodního kroužku. Zkontrolujeme, jestli součet na všech hranách je 9: $1 + 6 + 2 = 9$, $1 + 5 + 3 = 9$, $2 + 4 + 3 = 9$. Součet na všech stranách je 9, takže naše řešení je správné. Čísla můžeme různě přeuspořádat, uvedu zde tři možná řešení:



2.2 Analytické řešení úloh

2.2.1 První příklad

Zadání

Správcovská firma zakoupila pro tři domy podle jejich objednávek stejné plastové popelnice v celkové hodnotě 14400 Kč. První dům si objednal 3 popelnice a zaplatil za ně 3600 Kč a druhý dům si objednal 5 popelnic. Kolik popelnic si objednal třetí dům?

Řešení

Víme, že první dům si objednal 3 popelnice v hodnotě 3600 Kč. Druhý dům si objednal 5 popelnic. Naším úkolem je spočítat, kolik popelnic si objednal třetí dům. U prvního domu známe počet popelnic i kolik za ně zaplatili. Můžeme tedy spočítat cenu jedné popelnice: $3600 : 3 = 1200$. Cena jedné popelnice je 1200 Kč. Nabízí se dopočítat, kolik popelnic firma zakoupila pro všechny tři domy. Tedy: $14400 : 1200 = 12$. Správcovská firma zakoupila 12 kusů popelnic. Stačí nám tedy odečíst od celkového počtu popelnic počet popelnic pro první a druhý dům, a získáme počet popelnic, který si objednal třetí dům. Tedy: $12 - 3 - 5 = 4$.

Třetí dům si objednal 4 popelnice.

2.2.2 Druhý příklad

Zadání

V nádrži bylo ráno 10 hl nafty. Při dopolední směně se spotřebovala $\frac{1}{4}$ objemu nafty a při odpolední směně $\frac{2}{5}$ zbytku. Kolik litrů nafty bylo v nádrži na konci odpolední směny?

Řešení

Počáteční stav nafty v nádrži byl 10 hl. Při dopolední směně se spotřebovala $\frac{1}{4}$ objemu nafty. Spočítáme tedy jednu čtvrtinu z deseti hl nafty: $10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$. Při dopolední směně se spotřebovalo 2,5 hl nafty. V nádrži po dopolední směně zbylo $10 - 2,5 = 7,5$ hl nafty.

Při odpolední směně se spotřebovaly dvě pětiny zbytku, tedy z 7,5 hl nafty. Spočítáme si, kolik hl nafty se spotřebovalo. Vypočítáme tedy dvě pětiny ze 7,5 hl nafty: $7,5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{15}{5} = 3$. Při odpolední směně se spotřebovaly 3 hl nafty. Po odpolední směně zbylo v nádrži $7,5 - 3 = 4,5$ hl nafty. V zadání po nás chtěli vyjádřit zbytek nafty v litrech, tedy převedeme hl na l (1 hl = 100 l): $4,5 \text{ hl} = 450 \text{ l}$.

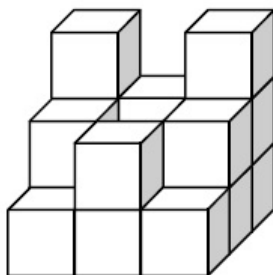
Na konci odpolední směny zbylo v nádrži 450 l nafty.

2.3 Geometrické řešení

2.3.1 První příklad

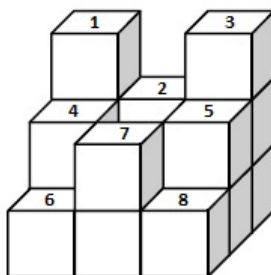
Zadání

Nakreslete, co uvidíte, když se na toto těleso díváte shora.



Řešení

Můžeme si do obrázku vyznačit čísla, která budou na nejvyšší krychličky v každém sloupci. Dostáváme tedy obrázek:



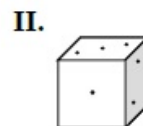
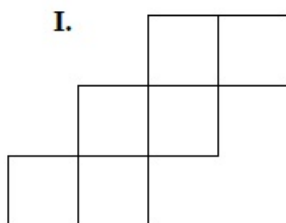
Vidíme, že z krychličky bude vidět čtverec, který je rozdělen na 9 malých čtverečků. Jelikož jsme si do každého čtverečku zapsali číslo, můžeme tedy zakreslit pohled shora (pro kontrolu si můžeme do každého čtverečku zapsat číslo, které jsme si označili v každé nejvyšší krychličce):

1	2	3
4		5
6	7	8

2.3.2 Druhý příklad

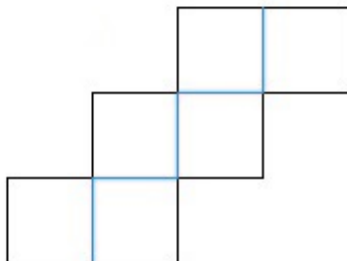
Zadání

Doplňte v obrázku **I** příslušný počet ok tak, aby se z něj po vystřížení a složení vznikla hrací kostka z obrázku **II**. (platí, že součet ok na protilehlých stěnách hrací kostky je vždy 7.)

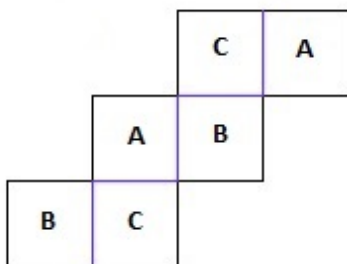


Řešení

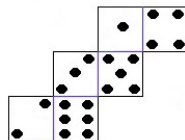
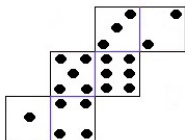
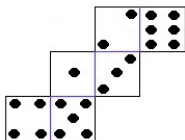
Nejdříve si můžeme do obrázku vyznačit úsečky, přes které budeme ohýbat papír tak, aby nám vznikla hrací kostka:



Zvýraznili jsme si v obrázku čtverečky, přes které budeme ohýbat papír. Ještě potřebujeme zjistit, které stěny jsou naproti sobě. Víme, že protilehlé strany po složení kostky nemají žádný společný bod. Pomocí tohoto pravidla nalezneme protilehlé strany, které si označíme stejným písmenem:



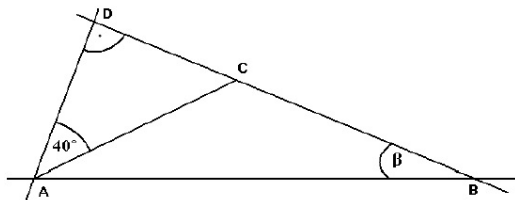
Našli jsme sobě odpovídající protilehlé strany. Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vytvoříme dvojice, které dávají součet 7. Tedy: (1, 6), (2, 5) a (3, 4). Každá dvojice nahradí stejná písmena. Dostáváme tedy řadu možností, jak čísla správně doplnit. Uvedu zde tři možná řešení:



2.3.3 Třetí příklad

Zadání

Určete velikost úhlu β , jestliže trojúhelník ABC je rovnoramenný ($|AC| = |BC|$).

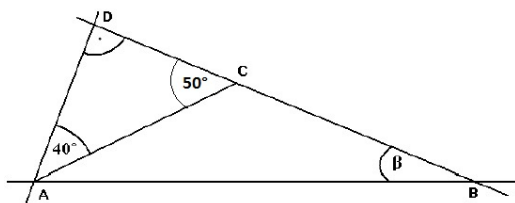


Řešení

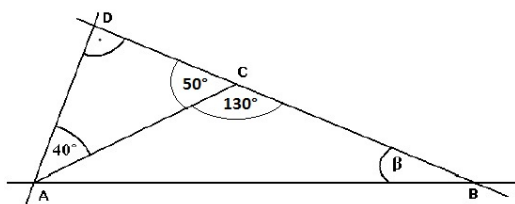
V trojúhelníku ACD známe velikost úhlu α , která je 40° . U vrcholu D je pravý úhel (tedy má velikost 90°). V libovolném trojúhelníku platí, že součet vnitřních úhlů se musí rovnat 180° . Můžeme dopočítat velikost úhlu γ . Dostáváme tedy rovnici:

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma + \delta &= 180^\circ, \\ 40^\circ + \gamma + 90^\circ &= 180^\circ, \\ \gamma &= 50^\circ.\end{aligned}$$

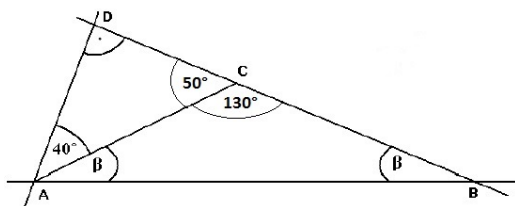
Zjistili jsme velikost úhlu γ a můžeme si ho zakreslit do obrázku.



Jelikož známe úhel γ , můžeme dopočítat vedlejší úhel, který si označíme jako x . Součet vedlejších úhlů se rovná 180° . Pak: $x = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$. Velikost vedlejšího úhlu x je 130° . Znázorníme si ho do obrázku.



Ze zadání víme, že trojúhelník ABC je rovnoramenný, což znamená, že velikost úhlu u vrcholu A je stejná, jako velikost úhlu u vrcholu B . Označíme oba úhly β , zakreslíme do obrázku a jejich velikost dopočítáme:



$$\beta + \beta + x = 180^\circ,$$

$$2\beta + 130^\circ = 180^\circ,$$

$$2\beta = 50^\circ,$$

$$\beta = 25^\circ.$$

Velikost úhlu β je 25° .

3 Pythagoriáda 2009/2010

3.1 Logické řešení úloh

3.1.1 První příklad

Zadání

Které číslo dá po dělení šestnácti sedm a zbytek 13?

Řešení

V této úloze známe dělitele, podíl a zbytek a naším úkolem je najít dělenec. Tedy: $? : 16 = 7 \text{ zb. } 13$. Úlohu vyřešíme zpětným výpočtem, jako by jsme prováděli zkoušku. Vynásobíme mezi sebou dělitele a podíl a k tomuto číslu přičteme zbytek a získáme hledaný dělenec. Tedy: $(16 \cdot 7) + 13 = 125$.

Námi hledaný dělenec je číslo 125.

3.1.2 Druhý příklad

Zadání

Doplňte další tři čísla v řadě: 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, ...

Řešení

Aby jsme mohli doplnit další tři čísla do řady, musíme nejdříve odhalit princip, kterým zadaná čísla vznikla. První číslo uvažujeme, že bylo zadáno. Druhé číslo je stejné jako první, tedy 1. U třetího čísla uvažujeme, že mohlo vzniknout součtem předchozích čísel, tedy $1 + 1 = 2$. Čtvrté číslo mohlo vzniknout součtem předchozích čísel 1, 1 a 2. Číslo 7 dostaneme součtem tří předchozích čísel. Pomalu už začínáme tušit princip vzniku dalších čísel. Zdá se, že číslo vznikne součtem tří předchozích čísel. Zda je tento princip správný, ověříme u následujících čísel. Číslo 13 opravdu můžeme napsat jako součet třech předcházejících čísel: $13 = 2 + 4 + 7$. Podobně vznikla i následující čísla: $24 = 4 + 7 + 13$, $44 = 7 + 13 + 24$ i $81 = 13 + 24 + 44$.

V tuto chvíli známe princip vzniku dalších čísel, takže můžeme doplnit další tři čísla do řady.

První hledané číslo vznikne součtem čísel 81, 44, 24, tedy $81 + 44 + 24 = 149$. Naše řada čísel po doplnění čísla 149 vypadá následovně: 1, 1, 2, 4, ..., 81, 149, ... Tento princip použijeme ještě dvakrát a dostaneme čísla 274 a 504.

Další tři čísla v řadě 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, ... jsou 149, 274 a 504.

3.1.3 Třetí příklad

Zadání

V trojúhelníku ABC jsou zadány délky stran $a = 3 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$. Určete všechny hodnoty, kterých může nabývat délka stran c , je-li vyjádřena celým číslem (v centimetrech).

Řešení

Abychom mohli určit hodnoty, kterých může nabývat strana c , potřebujeme znát trojúhelníkovou nerovnost. Ta říká, že součet dvou libovolných stran trojúhelníka musí být větší než jeho třetí strana. V matematickém zápisu to zní takto: $(a + b > c) \wedge (a + c > b) \wedge (b + c > a)$. Čísla budeme tedy dosazovat za neznámou c od čísla 1 a po

jedné zvyšovat, dokud nenajdeme správná řešení, tak aby platila trojúhelníková nerovnost. (Se zápornými čísly a nulou nebudeme pracovat, jelikož strana trojúhelníka nemůže nabývat záporné nebo nulové velikosti).

Číslo 1 nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost, jelikož neplatí vztah: $(3+1 > 4)$. Další celé číslo je 2, které již splňuje všechny tři podmínky trojúhelníkové nerovnosti: $(3+4 > 2) \wedge (3+2 > 4) \wedge (4+2 > 3)$. V tuto chvíli jsme našli první řešení, které splňuje zadání úlohy. Vyzkoušíme další celá čísla.

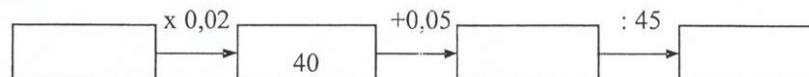
Pro čísla 2, 3, 4, 5, 6 platí trojúhelníková nerovnost, ale pro čísla 7 a vyšší již tato nerovnost neplatí.

Strana c tedy může nabývat hodnot: 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm nebo 6 cm.

3.1.4 Čtvrtý příklad

Zadání

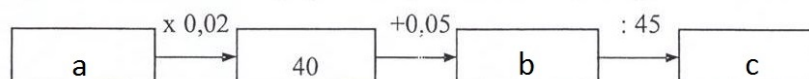
Doplňte do obdélníků chybějící čísla podle naznačených výpočtů:



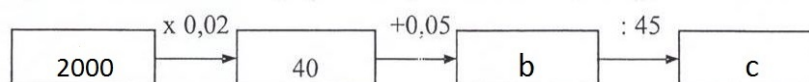
Řešení

Cílem tohoto příkladu je, aby jsme doplnili do prázdných obdélníků čísla taková, která po provedení naznačených matematických operací (sčítání, násobení a dělení) dávají správný matematický výsledek.

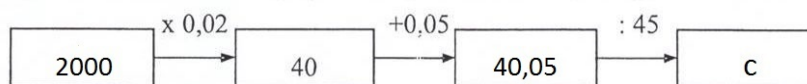
Na místo chybějících čísel si můžeme napsat písmena a, b, c . Pak bude příklad vypadat takto:



U prvního výpočtu vidíme, že když vynásobíme písmeno a číslem 0,02, dostaneme výsledek 40. V matematickém zápisu: $a \cdot 0,02 = 40$. Vidíme, že v rovnici máme pouze jednu hodnotu, kterou neznáme a můžeme ji snadno dopočítat. Jestliže rovnici vydělíme číslem 0,02, dostaneme námi hledanou hodnotu písmena a . Tedy: $a = \frac{40}{0,02}$, z čehož dostáváme, že $a = 2000$. Úloha po dosazení za písmeno a vypadá následovně:

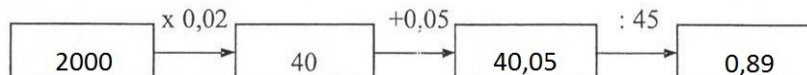


Další výpočet nám říká, že když k číslu 40 přičteme číslo 0,05, dostaneme písmeno b . Tedy $40 + 0,05 = b$, $b = 40,05$. Nalezli jsme další hledanou hodnotu, kterou doplníme do obdélníku za písmeno b .



V následující matematické operaci vidíme, že číslo 40,05 vydělené číslem 45 dává podíl c . Jestliže mezi sebou čísla vydělíme, nalezneme námi hledanou hodnotu, kterou doplníme do posledního obdélníčku za písmeno c . Tedy $40,05 : 45 = c$, $c = 0,89$.

Za písmeno c můžeme do obdélníčku zapsat číslo 0,89.



Chybějící čísla jsme doplnili do obdélníků, takže jsme úlohu zdárně vyřešili.

3.1.5 Pátý příklad

Zadání

Lukáš jel k babičce. Z domova vyšel ve 14 hodin. Cesta na nádraží mu trvala 20 minut, čtvrt hodiny čekal na vlak. Vlakem jel $1\frac{2}{3}$ hodiny, pak šel ještě 35 minut pěšky. V kolik hodin přišel k babičce?

Řešení

Čas, kdy Lukáš vyrážel k babičce zapíšeme ve tvaru *hodiny*^{minuty}, tedy 14^{00} , a postupně budeme přičítat časové hodnoty, které následovali, než Lukáš dojel k babičce. Cesta na nádraží mu trvala 20 minut, takže na nádraží přišel ve 14^{20} . Čtvrt hodiny čekal na vlak, vyjádříme si tuto hodnotu v minutách, je to 15 minut. Vlak přijel ve 14^{35} . Cesta vlakem trvala $1\frac{2}{3}$ hodiny. Dvě třetiny hodiny si převedeme na minuty, $\frac{2}{3}$ z 60 je $(60 : 3) \cdot 2 = 40$ minut. Jednu hodinu a 40 minutu přičteme k času 14^{35} , dostáváme $14^{35} + 1^{40} = 15^{75} = 16^{15}$. Nakonec šel Lukáš 35 minut pěšky, než dorazil k babičce. Přičteme k 16^{15} ještě 35 minut a dostaneme čas: $16^{15+35} = 16^{50}$.

Lukáš dorazil k babičce v 16 hodin a 50 minut (16^{50}).

3.2 Analytické řešení úloh

3.2.1 První příklad

Zadání

Vypočítejte součet všech prvočísel, kterými je dělitelné číslo 560.

Řešení

Nejprve musíme zjistit, z jakých prvočísel se skládá číslo 560. (Prvočíslo je číslo, které je dělitelné pouze jedničkou a samo sebou). To zjistíme tak, že zadané číslo rozložíme na součin prvočísel: $560 = 10 \cdot 56 = 2 \cdot 5 \cdot 56 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$. Prvočísla, jimiž je dělitelné číslo 560, jsou 2, 5 a 7. Můžeme udělat jejich součet: $2 + 5 + 7 = 14$.

Součet všech prvočísel, kterými je dělitelné číslo 560 je 14.

3.2.2 Druhý příklad

Zadání

Kanystř plný benzínu má hmotnost 15 kg. Když z něj odlijeme třetinu benzínu, jeho hmotnost klesne na 11 000 g. Kolik kg váží prázdný kanystř?

Řešení

V prvním kroku si musíme převést hodnoty hmotnosti na stejnou jednotku, buď na kg nebo g. Tedy 11000 g je 11 kg. Plný kanystř benzínu váží 15 kg a po odlití třetiny benzínu váží 11 kg. Abychom vypočetli hmotnost třetiny benzínu, musíme odečíst hodnotu plného kanystř od hodnoty po odlití třetiny $15 - 11 = 4$. Víme, že třetina benzínu váží 4 kg, tak si dopočítáme zbylé dvě třetiny $2 \cdot 4 = 8$. Známe hmotnost třetiny a dvou třetin benzínu, které když sečteme, dostaneme hmotnost benzínu v celém kanystř $4 + 8 = 12$. V tuto chvíli nám stačí odečíst od hmotnosti kanystř s benzínem hmotnost samotného benzínu a získáme hmotnost prázdného kanystř, tedy: $15 - 12 = 3$.

Prázdný kanystř váží 3 kg.

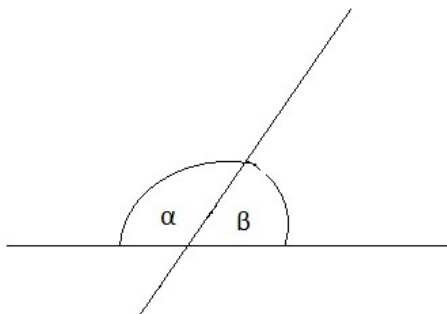
3.2.3 Třetí příklad

Zadání

Vedlejší úhly jsou α , a β , velikost úhlu α , je o $36^\circ 28'$ větší. Určete velikost úhlu β

Řešení

Tuto úlohu si můžeme nakreslit, aby jsme se ujistili, že máme α , a β správně umístěné jako vedlejší úhly. Viz obrázek:



Ze zadání víme, že úhel α , je o $36^\circ 28'$ větší než úhel β . Takže můžeme psát, že: $\alpha = \beta + 36^\circ 28'$. A víme, že součet vnější úhlů se má rovnat 180° . Takže získáváme vztah:

$$\alpha + \beta = 180.$$

Za α dosadíme vztah, který jsme si vyjádřili a dostáváme:

$$\begin{aligned} \beta + 36^\circ 28' + \beta &= 180^\circ, \\ 2\beta &= 180^\circ - 36^\circ 28', \\ 2\beta &= 143^\circ 32', \\ \beta &= 71^\circ 46'. \end{aligned}$$

Velikost úhlu β je $71^\circ 46'$.

3.2.4 Čtvrtý příklad

Zadání

V 9 g zelené papriky je 10 mg vitamínu C. V jakém množství zelené papriky je doporučená denní dávka vitamínu C (tj. 0,06 g)

Řešení

Na tento příklad můžeme uplatnit výpočet přes trojčlenku, avšak musíme si převést na stejné jednotky množství vitamínu C v paprice. Můžeme si vybrat, zda budeme používat miligram nebo gram. Vybral jsem si miligram. Vzhledem k tomu, že $1 \text{ g} = 1000 \text{ mg}$, doporučená denní dávka vitamínu C je 60 mg.

Máme tedy převedeno na stejné jednotky a můžeme vytvořit trojčlenku, akorát si musíme uvědomit, jestli se jedná o přímou nebo nepřímou úměrnost.

Definice přímé úměrnosti: Přímá úměrnost je taková závislost jedné veličiny na druhé, kdy se při zvýšení hodnoty jedné veličiny zvýší k -násobně hodnota druhé veličiny. Obecně lze takovou závislost popsat vzorcem: $y = k \cdot x$, kde k je koeficient přímé úměrnosti.

Definice nepřímé úměrnosti: Nepřímá úměrnost je taková závislost jedné veličiny na druhé, kdy při zvýšení hodnoty jedné veličiny se k -násobně zmenší hodnota druhé veličiny. Obecně lze takovou závislost popsat vzorcem: $y = \frac{k}{x}$, kde k je koeficient nepřímé úměrnosti.

V našem případě se jedná o přímou úměrnost, protože čím větší hmotnost bude mít zelená paprika, tím víc v ní bude vitamínu C. Hledané množství zelené papriky si označíme jako a . Dostáváme tedy:

9 g.....10 mg vitamínu C

a g.....60 mg vitamínu C

$$\frac{a}{9} = \frac{60}{10},$$

$$a = \frac{60 \cdot 9}{10},$$

$$a = 54.$$

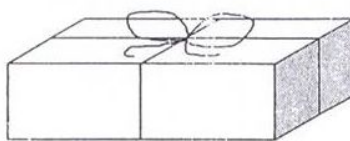
Doporučená denní dávka 60 mg vitamínu C je ve 54 g zelené papriky.

3.3 Geometrické řešení úloh

3.3.1 První příklad

Zadání

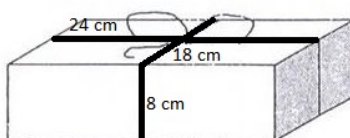
Alenka zabalila dárek do krabičky tvaru kvádrů vysokého 8 cm, jehož podstava má rozměry 24 cm a 18 cm. Pak ho převázala stuhou jako na obrázku. Kolik cm stuhy spotřebovala, jestliže na ozdobnou mašli počítáme 64 cm ?



Řešení

Ze zadání známe výšku, šířku i délku krabice. Když se na obrázek pozorně podíváme, vidíme, že výška krabice je stejně dlouhá, jako stuha, která vede přes boční stranu krabice.

Stejnou úvahou přijdeme na to, že i šířka a délka jsou stejně dlouhé, jako stuha, která vede přes a podél podstavy krabice. Doplníme si tedy velikosti v cm do obrázku.



Abychom zjistili kolik cm stuhy Alenka spotřebovala, spočítáme si, kolik cm stuhy spotřebovala na boční strany a na horní a spodní podstavu krabice. Potom k tomu číslu přičteme 64 cm stuhy, kterou Alenka spotřebovala na vytvoření ozdobné mašle.

Na jednu boční stranu spotřebovala 8 cm stuhy. Krabice má 4 boční strany, z čehož vyplývá, že na 4 boční strany spotřebuje: $8 \cdot 4 = 32$ cm stuhy. Na horní podstavu spotřebovala Alenka $24 + 18 = 42$ cm stuhy. Toto číslo vynásobíme dvěma, jelikož stejné množství stuhy spotřebuje i na spodní podstavě krabice, tedy: $42 \cdot 2 = 84$ cm stuhy. V tuto chvíli sečteme spotřebovanou délku stuhy na podstavách, bočních stěnách a na ozdobné mašli a dostaneme spotřebovanou délku stuhy.

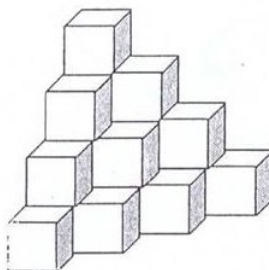
Výpočet: $32 + 84 + 64 = 180$ cm stuhy.

Alenka při zabalování krabice spotřebovala 180 cm stuhy.

3.3.2 Druhý příklad

Zadání

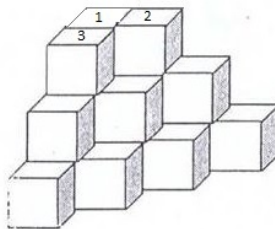
Z kolika malých krychlí je postaveno těleso na obrázku ?



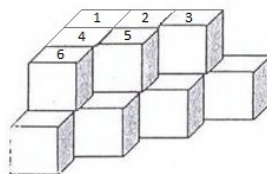
Řešení

Tuto úlohu si můžeme představit jako věž, která se skládá z jednoho přízemí a tří pater. Abychom zjistili, z kolika krychlíček se naše věž skládá, spočítáme počet krychlíček v každém patře a přízemí a tyto hodnoty potom sečteme. Začneme u nejvyššího patra, tedy u třetího.

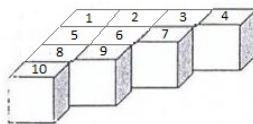
Ve třetím patře máme pouze 1 krychličku. Když jí odstraníme, vidíme dobře na počet krychlíček ve druhém patře.



Druhé patro je tvořeno třemi krychličkami. Známe tedy počet v druhém patře, takže je můžeme opět sundat a vrhnout se na první patro.



Po odkrytí druhého patra vidíme, že první patro je tvořeno šesti krychličkami. Takže známe počet krychlíček pro vytvoření prvního patra a můžeme se vrhnout na přízemí.



Po spočítání krychlíček v přízemí jsme zjistili, že na jeho vytvoření potřebujeme deset krychlíček. Známe tedy počty krychlíček v každé úrovni věže. Po jejich sečtení dostáváme počet krychlíček potřebných k vytvoření zadaného obrazce.

Výpočet: $1 + 3 + 6 + 10 = 20$.

Těleso na obrázku se skládá z 20 krychlíček.

4 Pythagoriáda 2012/2013

4.1 Logické řešení úloh

4.1.1 První příklad

Zadání

Ke vchodu do rozhledny vedou čtyři schody vysoké 35 cm, uvnitř je točité schodiště se 130 schody, z nichž každý je vysoký 15 cm. Špička věže na vrcholu rozhledny je 5,1 m nad horní podlahou. Jak vysoká je rozhledna?

Řešení

Úlohu si můžeme rozdělit na tři části. V první části vypočítáme, jak vysoké jsou všechny 4 schody, které vedou do vchodu rozhledny. V druhé části zjistíme velikost všech 130 schodů, které jsou uvnitř věže. Potom tyto dvě hodnoty sečteme a zjistíme, jak vysoká je rozhledna od země pod špičku věže. Potom nám již stačí jenom přičíst velikost špičky věže, kterou známe ze zadání a budeme znát celkovou výšku rozhledny.

Ze zadání víme, že jeden schod, který vede ke vchodu do rozhledny, je vysoký 35 cm. Ke vchodu vedou celkem 4 schody, takže jejich velikost spočítáme, jako výška jednoho schodu krát čtyři: $35 \cdot 4 = 140$ cm. Výška čtyřech schodů, které vedou ke vchodu do rozhledny je 140 cm.

Jeden schod točitého schodiště uvnitř rozhledny je vysoký 15 cm. Celkový počet schodů uvnitř rozhledny je 130. Stejným způsobem, jako jsme spočítali výšku schodů, které vedou ke vchodu do rozhledny, spočítáme výšku všech 130 schodů uvnitř rozhledny. Tedy: $15 \cdot 130 = 1950$ cm. Schodiště, které vede uvnitř rozhledny, je vysoké 1950 cm.

Pokud sečteme výšku schodiště před rozhlednou a uvnitř rozhledny, dostaneme výšku od země do konce posledního schodu. $1950 + 140 = 2090$ cm. Výšku od konce posledního schodu až po špičku rozhledny známe ze zadání, což je 5,1 m. Abychom mohli sečíst tyto dvě hodnoty mezi sebou, musíme je převést na stejnou jednotku, buď na cm nebo m. Vybereme si převod na metry, tedy: $2090 \text{ cm} = 20,9 \text{ m}$. V tuto chvíli sečteme velikost od země po poslední schod rozhledny s výškou věže rozhledny a získáme celkovou velikost rozhledny, což je $20,9 + 5,1 = 26$ m.

Rozhledna je vysoká 26 m.

4.1.2 Druhý příklad

Zadání

Jestliže se cvičenci seřadí do devítistupů nebo do dvanáctistupů, vždy čtyři cvičenci přebývají. Určete nejmenší možný počet cvičenců.

Řešení

Abychom zjistili nejmenší možný počet cvičenců, uděláme si nejmenší společný násobek čísel 9 a 12, protože cvičenci se řadí buď do devítistupů nebo dvanáctistupů a k němu potom přičteme číslo 4, protože vždy čtyři cvičenci zbudou.

Nejmenší společný násobek: Uděláme prvočíselný rozklad čísel, u kterých zjišťujeme nejmenší společný násobek, potom vezmeme všechna prvočísla, které obsahuje nejmenší číslo (v našem případě 9) a doplníme prvočísla z ostatních čísel taková, která nejsou

obsažena v nejmenším čísle.

Prvočíselný rozklad čísla 9 je $3 \cdot 3$ a prvočíselný rozklad čísla 12 je $2 \cdot 2 \cdot 3$.

Vezmeme všechna prvočísla z menšího čísla, tedy z čísla 9, a doplníme prvočísla z čísla 12, která nejsou obsažena v menším čísle. Tedy: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 9 \cdot 4 = 36$. Nejmenší společný násobek čísel 9 a 12 je 36. Nesmíme zapomenout přičíst číslo 4, takže dostáváme $36 + 4 = 40$.

Zjistili jsme nejmenší počet cvičenců, který je 40. Jako zkoušku si můžeme toto číslo vydělit devíti a dvanácti a měli bychom dostat, že v obou případech zbudou čtyři cvičenci.

Zk: $40 : 9 = 4$ zb. 4; $40 : 12 = 3$ zb. 4. V obou případech se nám potvrdilo, že zbudou čtyři cvičenci.

Nejmenší počet cvičenců je 40.

4.1.3 Třetí příklad

Zadání

V bedně je 5 krabic, v každé krabici 6 krabiček, v každé krabičce 15 čokolád. Každá čokoláda má hmotnost 200 g. Kolik kg čokolády je v bedně?

Řešení

Abychom zjistili kolik kg čokolády je v krabici, rozdělíme si úlohu na tři části.

V první části vypočítáme, kolik g čokolády je v jedné krabičce. Potom zjistíme váhu čokolády v jedné krabici a nakonec váhu čokolády v celé bedně, kterou převedeme na kg.

Jedna čokoláda váží 200 g a v jedné krabičce je 15 čokolád. Jestliže vynásobíme váhu jedné čokolády s množstvím čokolády v jedné krabičce, získáme hmotnost čokolády v jedné krabičce. Tedy: $15 \cdot 200 = 3000$ g. Známe hmotnost čokolády v jedné krabičce, pro zjednodušení dalších výpočtů můžeme už nyní převést gramy na kilogramy, tedy 3000 g = 3 kg.

Dále ze zadání víme, že v jedné krabici je po šesti krabičkách. Abychom zjistili váhu čokolády v jedné krabici, vynásobíme mezi sebou počet krabiček v jedné krabici s hmotností čokolády v krabičce. Výpočet: $3 \cdot 6 = 18$ kg. Vypočítali jsme hmotnost čokolády v jedné krabici.

V bedně je celkem naskládáno pět krabic. Potřebujeme tedy zjistit, kolik kg čokolády je v bedně, a to dostaneme tak, že vynásobíme hmotnost čokolády v jedné krabici s počtem krabic v bedně. Dostáváme tedy výpočet: $18 \cdot 5 = 90$ kg.

V bedně je 90 kg čokolády.

4.1.4 Čtvrtý příklad

Zadání

Honza vypsál postupně od nejmenšího k největšímu všechna prvočísla menší jak 100. Které číslo napsal jako osmé?

Řešení

Abychom mohli vypsát postupně všechna prvočísla od nejmenšího po největší, musíme nejdřív vědět, jak vlastně poznáme prvočíslo.

Prvočíslo je číslo, které je dělitelné pouze jedničkou a samo sebou. Ale pozor na čísla 0 a 1. Číslo 0 není prvočíslo protože $\frac{0}{0}$ je zakázaná operace (nesmíme dělit nulou) a číslo 1, ačkoliv splňuje obě podmínky, nebere se jako prvočíslo.

Ted' už umíme rozpoznat prvočíslo, takže budeme postupně vypisovat prvočísla, dokud nenajdeme prvočíslo, které je osmé.

První číslo které vezmeme je 2, ta nám splňuje definici prvočísla. Další v pořadí máme číslo 3. Takže zatím jsme našli dvě prvočísla a to 2 a 3. Po čísle tři se dostáváme na číslo 4, které ale není prvočíslo, jelikož je dělitelné navíc číslem 2. Další prvočíslo je číslo 5. Tímto způsobem budeme pokračovat, dokud nenajdeme osmé prvočíslo.

Po nalezení desátého prvočísla, dostáváme řadu prvočísel, které jsou seřazeny v pořadí od nejmenšího po největší: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29. Vidíme, že osmé číslo v pořadí je 19.

Honza napsal jako osmé číslo prvočíslo 19.

4.1.5 Pátý příklad

Zadání

Vilém zaokrouhlil desetiné číslo na setiny, dostal tak 6,46. Zapište nejmenší a největší možnou hodnotu čísla (s přesností na tři desetinná čísla), které Vilém zaokrouhloval.

Řešení

Ze zadání víme, že po zaokrouhlení čísla, které si můžeme označit jako číslo X, jsme dostali hodnotu 6,46. Naším úkolem je zjistit, jaká je nejmenší a největší možná hodnota čísla X.

Připomene si, jak zaokrouhluje číslo. Pokud na pozici zaokrouhlované jednotky jsou čísla 0, 1, 2, 3 a nebo 4, zaokrouhluje směrem dolů, tedy z těchto čísel se nám stane číslo 0. Ale jestliže na pozici zaokrouhlované jednotky se nacházejí čísla 5, 6, 7, 8 nebo 9, zaokrouhluje směrem nahoru, tedy z těchto čísel se nám stane číslo 10. Na pozici zaokrouhlované jednotky se nám také objeví číslo 0, ale pozice před zaokrouhlovanou jednotkou se nám zvýší o jedna. Můžeme zaokrouhlovat na jednotky: desetiny, setiny, tisíciny ale i na desítky, stovky, tisíce atd.

Například číslo 8,755 zaokrouhlíme na setiny: 8,76, na desetiny: 8,8 nebo na desítky: 10.

Nejdřív vezmeme v úvahu, že Vilém zaokrouhloval dolu. Tedy mohl zaokrouhlovat čísla: 6,460 až 6,464. Ale také mohl zaokrouhlovat nahoru, a číslo mohlo být od 6,455 až do 6,459.

V tuto chvíli jsme našli všechna možná čísla, která po zaokrouhlení na setiny, dají číslo 6,46. Stačí nám již vybrat nejmenší a největší možnou hodnotu.

Nejmenší a největší možná čísla, která mohl Vilém vzít, jsou 6,455 a 6,464.

4.2 Analytické řešení úloh

4.2.1 První příklad

Zadání

Od součinu čísel 3,6 a 2,5 (v tomto pořadí) odečti podíl čísel 0,4 a 0,05 (v tomto pořadí). Zapište výsledek.

Řešení

Nejdříve uděláme součin čísel 3,6 a 2,5 tj. $3,6 \cdot 2,5 = 9,0 = 9$. Zjistili jsme součin těchto čísel, takže můžeme vypočítat podíl čísel 0,4 a 0,05 tj. $0,4 : 0,05 = 40 : 5 = 8$. Známe hodnotu součinu i podílu, můžeme tyto hodnoty mezi sebou odečíst: $9 - 8 = 1$.

Výsledek tohoto matematického příkladu je 1.

4.2.2 Druhý příklad

Zadání

Vypočítej, výsledek zapiš zlomkem v základním tvaru: $\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 0,5}{1\frac{5}{6} - 1,5}$.

Řešení

V této úloze je důležité si uvědomit, které matematické operace mají přednost před ostatními. Například násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním. Připomněli jsme si tedy toto pravidlo a můžeme se vrhnout do upravování. Jako první si můžeme upravit číselník zadaného zlomku.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 0,5 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Číselník jsme si upravili, můžeme se pustit do upravování jmenovatele.

$$\frac{11}{6} - 1,5 = \frac{11 - 6 \cdot 1,5}{6} = \frac{11 - 9}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Nyní už stačí čísla mezi sebou vydělit. Dělit zlomkem znamená násobit jeho převrácenou hodnotou. Tedy:

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{1} = \frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Výsledek zlomku je $\frac{1}{2}$.

4.2.3 Třetí příklad

Zadání

Průměrná výška tří chlapců je 156 cm. Nejmenší z nich je o 8 cm menší než největší, prostřední je o 4 cm větší než nejmenší. Určete výšky jednotlivých chlapců.

Řešení

Výšku největšího chlapce si označíme jako x . Ze zadání víme, že nejmenší z chlapců je o 8 cm menší, než největší. Jeho výška bude: $x - 8$. Prostřední chlapec je o 4 cm větší než nejmenší. Jelikož jsme si vyjádřili výšku nejmenšího z chlapců, můžeme výšku prostředního zapsat do tvaru $x - 8 + 4 = x - 4$. Vyjádřili jsme si výšky jednotlivých chlapců. Průměrnou výšku 156 cm vypočítáme tak, že sečteme výšky chlapců a vydělíme jejich počtem. Tedy: $\frac{x + (x-8) + (x-4)}{3} = 156$. Teď už stačí dopočítat neznámou x .

$$\frac{x + (x - 8) + (x - 4)}{3} = 156,$$

$$x + x - 8 + x - 4 = 468,$$

$$3x = 480,$$

$$x = 160.$$

Zjistili jsme, že největší chlapec měří 160 cm. Dopočítáme výšky nejmenšího a prostředního: $160 - 8$ a $160 - 4$ a dostaneme, že nejmenší měří 152 cm a prostřední 156 cm.

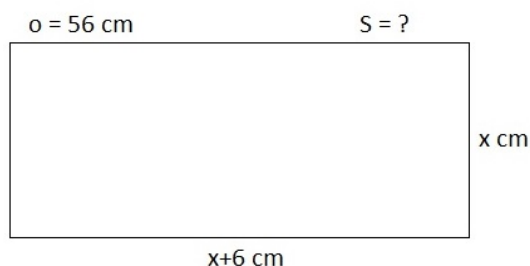
Výška největšího chlapce je 160 cm, prostředního 156 cm a nejmenšího 152 cm.

4.2.4 Čtvrtý příklad**Zadání**

Vypočítejte obsah obdélníka, jehož obvod je 56 cm a délka je o 6 cm delší než šířka.

Řešení

Obsah obdélníka spočítáme jako délka obdélníka krát šířka obdélníka. Hodnoty šířky a délky neznáme, jen víme, že délka je o šest cm delší než šířka. Šířku obdélníka si označíme jako x . Potom jeho délka bude $x + 6$. V zadání nám říkají, že obvod obdélníka je 56. Můžeme si v tuto chvíli načrtnout obdélník a zapsat si do náčrtku, co víme.



Vzoreček pro vypočítání obvodu obdélníka je: $o = 2 \cdot (a + b)$. Obvod známe, délky stran máme vyjádřené pomocí neznámé x , můžeme tedy do vzorce dosadit a neznámou x vypočítat.

$$2 \cdot (x + x + 6) = 56,$$

$$2 \cdot (2x + 6) = 56,$$

$$4x + 12 = 56,$$

$$4x = 44,$$

$$x = 11.$$

Šířka obdélníka je 11 cm. Snadno dopočítáme délku obdélníka $11 + 6 = 17$ cm. (Můžeme provést zkoušku, že máme správné délky stran. Tu provedeme vypočítáním obvodu obdélníka, který musí být 56. Tedy $o = 2 \cdot (11 + 17) = 2 \cdot 28 = 56$. Zkouška nám potvrdila, že máme správné délky stran). Zbývá jen výpočet obsahu obdélníka:

$$S = a \cdot b = 11 \cdot 17 = 187 \text{ cm}^2.$$

Obsah obdélníka je 187 cm^2 .

4.2.5 Pátý příklad

Zadání

Chladnička stála původně 10000 Kč. Po technickém zdokonalení cenu navýšili o 5%. Po dvou letech pak byla v prodeji zlevněna, a sice o 15%. Určete konečnou cenu chladničky.

Řešení

Původní cena chladničky je 10000 Kč. Po zdokonalení se cena zvedla o 5%. Zjistíme, o jakou částku se tedy zvedla cena. Můžeme tuto úlohu řešit trojčlenkou, ale měli bychom si uvědomit, zda se jedná o přímou nebo nepřímou úměru (viz vysvětlení v př. 3.2.4).

Čím vyšší budou procenta po zdokonalení chladničky, tím vyšší bude konečná cena chladničky. Jedná se tedy o přímou úměru. Částka, o kterou se zvedla cena si označíme jako neznámou x a sestavíme trojčlenku:

$$10000 \text{ Kč} \dots\dots\dots 100\%$$

$$x \text{ Kč} \dots\dots\dots 5\%$$

$$\frac{x}{10000} = \frac{5}{100},$$

$$x = \frac{5 \cdot 10000}{100},$$

$$x = 500.$$

Cena, o kterou se zvedla cena chladničky, je 500 Kč. Chladnička po navýšení ceny stála $10000 + 500 = 10500$ Kč.

Po dvou letech byla chladnička zlevněna o 15%. Opět můžeme použít na tento výpočet trojčlenku, jen musíme si dát pozor, z jaké ceny budeme počítat 15%. Ačkoliv původně chladnička stála 10000 Kč, v předcházejícím výpočtu jsme dostali cenu, za kterou se prodávala po vylepšení, tedy 10500 Kč. A právě z této ceny

vypočítáme, o kolik Kč byla zlevněna. Částka, o kterou se chladnička zlevnila si označíme jako y a sestavíme trojčlenku:

$$10500 \text{ Kč} \dots\dots\dots 100\%$$

$$y \text{ Kč} \dots\dots\dots 15\%$$

$$\frac{y}{10500} = \frac{15}{100},$$

$$y = \frac{15 \cdot 10500}{100},$$

$$y = 1575.$$

Cena, o kterou byla chladnička zlevněna je 1575 Kč. Abychom zjistili konečnou cenu chladničky, odečteme cenu chladničky po zdokonalení od částky, o kterou byla zlevněna. Tedy: $10500 - 1575 = 8925$ Kč.

Konečná cena chladničky je 8925 Kč.

5 Pythagoriáda 2013/2014

5.1 Logické řešení

5.1.1 První příklad

Zadání

Jana má šest kartiček označených číslicemi 0, 1, 2, 3, 4, 5. Sestavuje z nich trojčíferná čísla větší než 400, která jsou násobkem tří a jsou také dělitelná čtyřmi. Napiš všechna čísla, která můžeš najít.

Řešení

Budeme tedy hledat čísla, která mají tři cifry, jsou větší než 400 a jsou dělitelné čtyřmi a třemi. Čísla jsou napsána na kartičkách, tedy každé číslo můžeme vzít pouze jednou.

Číslo je dělitelné třemi, jestliže ciferný součet je dělitelný třemi.

Číslo je dělitelné čtyřmi, jestliže poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi.

Aby bylo číslo větší než 400, musí začínat číslem 4 nebo 5 ($\overline{4xy}$ nebo $\overline{5xy}$).

Jako první si vezmeme možnost $\overline{4xy}$. Zbudou nám číslice 0, 1, 2, 3, 5. Budeme se snažit nejprve splnit dělitelnost čtyřmi. Hledané číslo musí být určitě sudé, tj. $y = 0$ nebo $y = 2$. Když bude $y = 0$ je $x = 2$ a když $y = 2$, pak x může být 3 nebo 5. V úvahu přicházejí čísla 420, 432 nebo 452. Vidíme ale, že jejich ciferné součty jsou po řadě 6, 9 a 11. Číslo 452 tedy není současně dělitelné 9, a proto není řešením naší úlohy.

Jako druhou možnost si vezmeme číslo $\overline{5xy}$. Zbudou nám číslice 0, 1, 2, 3, 4. Stejnou úvahou, jako u čísla $\overline{4xy}$, získáme čísla 504 a 540.

Jana může vytvořit čísla 420, 432, 504 a 540.

5.1.2 Druhý příklad

Zadání

Z 800 žáků střední školy tvoří dívky 65%. Vyznamenání mělo 52 dívek a 15% chlapců. Kolik žáků školy mělo vyznamenání?

Řešení

Známe celkový počet žáků střední školy. Víme, že 65% žáků jsou dívky. Vyjádříme si tedy, kolik dívek navštěvuje tuto školu (na výpočet použijeme trojčlenku, jde o přímou úměru). Jejich počet si označíme jako d :

$$800 \dots\dots\dots 100\%$$

$$d \dots\dots\dots 65\%$$

$$\frac{d}{800} = \frac{65}{100},$$

$$d = \frac{65 \cdot 800}{100},$$

$$d = 520.$$

Zjistili jsme, že na škole je 520 dívek. Můžeme dopočítat, kolik chlapců je na této škole: $800 - 520 = 280$. Na škole je 520 dívek a 280 chlapců. Ze zadání víme, že 15% chlapců mělo vyznamenání. Zjistíme si tedy, kolik chlapců mělo vyznamenání, počet chlapců si označíme jako ch :

$$280 \dots\dots\dots 100\%$$

$$ch \dots\dots\dots 15\%$$

$$\frac{ch}{280} = \frac{15}{100},$$

$$ch = \frac{15 \cdot 280}{100},$$

$$ch = 42.$$

Vyznamenání mělo 42 chlapců. Ze zadání víme, že dívek s vyznamenáním je 52. Abychom zjistili kolik žáků střední školy mělo vyznamenání, sečteme počet chlapců s vyznamenáním s počtem dívek, které měly vyznamenání. Tedy: $52 + 42 = 94$.

Vyznamenání mělo 94 žáků.

5.1.3 Třetí příklad

Zadání

Kolik procent dne tvoří 3 hodiny a 20 minut? Vyjádři s přesností na celá procenta.

Řešení

Den má 24 hodin. Můžeme si tento časový údaj převést na minuty ($1h = 60min$): $24h = 24 \cdot 60 = 1440$ min. V zadání se nás ptají, kolik % dne tvoří 3 hodiny a 20 minut. I tento údaj si převedeme na minuty: $3h 20m = 3 \cdot 60 + 20 = 200$ min. Vyjádřili jsme si oba údaje v minutách, můžeme je tedy dosadit do trojčlenky, pomocí které zjistíme, kolik % tvoří 200 min z 1440 min. Tedy:

$$1440 \text{ min} \dots\dots\dots 100\%$$

$$200 \text{ min} \dots\dots\dots a\%$$

$$\frac{200}{1440} = \frac{a}{100},$$

$$a = \frac{200 \cdot 100}{1440},$$

$$a = 14.$$

3 hodiny a 20 minut tvoří 14% dne.

5.2 Analytické řešení

5.2.1 První příklad

Zadání

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ je velikost vnitřního úhlu při vrcholu A $56^\circ 31'$, při vrcholu B $132^\circ 47'$, při vrcholu C $78^\circ 27'$. Urči velikost vnitřního úhlu při vrcholu D , je-li $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.

Řešení

Stačí nám pouze dosadit do zadané rovnice a vypočítat velikost úhlu delta. Tedy:

$$\begin{aligned} 56^\circ 31' + 132^\circ 47' + 78^\circ 27' + \delta &= 360^\circ, \\ 267^\circ 45' + \delta &= 360^\circ, \\ \delta &= 92^\circ 15'. \end{aligned}$$

Velikost vnitřního úhlu při vrcholu D je $92^\circ 15'$.

5.2.2 Druhý příklad

Zadání

Kolik různých čísel je dále uvedeno? Zapiš je jako celá čísla nebo zlomkem v základním tvaru:

$$\frac{120}{96}; 1,25; 0,375; \frac{48}{128}; \frac{81}{216}.$$

Řešení

Desetinná čísla převedeme na zlomek. Postupně vezmeme každé číslo a budeme se ho snažit zkrátit a to až na základní tvar. Po uvedení všech čísel na základní tvar se podíváme, kolik různých čísel jsme dostali.

První číslo můžeme zkrátit čtyřmi, poté šesti. Dostali jsme v čitateli a jmenovateli nesoudělná čísla, takže zlomek je v základním tvaru.

$$\frac{120}{96} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}.$$

Tímto způsobem upravíme i následující čísla:

$$1,25 = \frac{125}{100} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4},$$

$$0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{75}{200} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8},$$

$$\frac{48}{128} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8},$$

$$\frac{81}{216} = \frac{27}{72} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

Jsou uvedena dvě různá čísla, a to $\frac{5}{4}$ a $\frac{3}{8}$.

Úlohu bychom mohli řešit i druhým způsobem, a to všechna čísla převést na desetinná. Tedy: $\frac{120}{96} = 1,25$; $1,25$; $0,375$; $\frac{48}{128} = 0,375$; $\frac{81}{216} = 0,375$. Řešení je stejné.

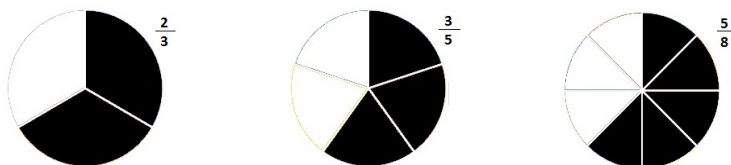
5.2.3 Třetí příklad

Zadání

Od největšího z čísel $\frac{5}{8}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}$ odečti součin zbývajících dvou. Výsledek zapiš jako desetinné číslo zaokrouhlené na setiny.

Řešení

Nejdříve musíme zjistit, které číslo je největší. Můžeme to zjistit buď pomocí výsečového grafu nebo po vydělení čísel. Uvedu zde oboje možnosti:



$$\begin{aligned}\frac{2}{3} &= 0,66667, \\ \frac{3}{5} &= 0,6, \\ \frac{5}{8} &= 0,625.\end{aligned}$$

Z výsečového grafu moc dobře nevidíme, které číslo je větší, ale po vydělení vidíme, že dvě třetiny jsou největší. Nyní provedeme součin nejmenších čísel, potom odečteme od dvou třetin a výsledek převedeme na desetinné číslo zaokrouhlené na setiny. Tedy:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} &= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}, \\ \frac{2}{3} - \frac{3}{8} &= \frac{16 - 9}{24} = \frac{7}{24}, \\ \frac{7}{24} &= 0,29.\end{aligned}$$

Výsledek tohoto příkladu je číslo 0,29.

5.3 Geometrické řešení

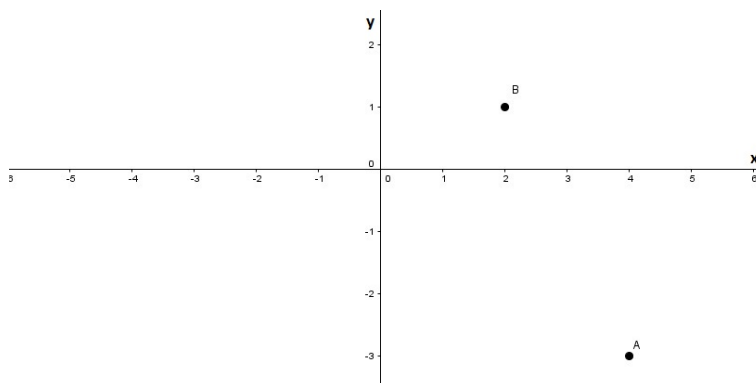
5.3.1 První příklad

Zadání

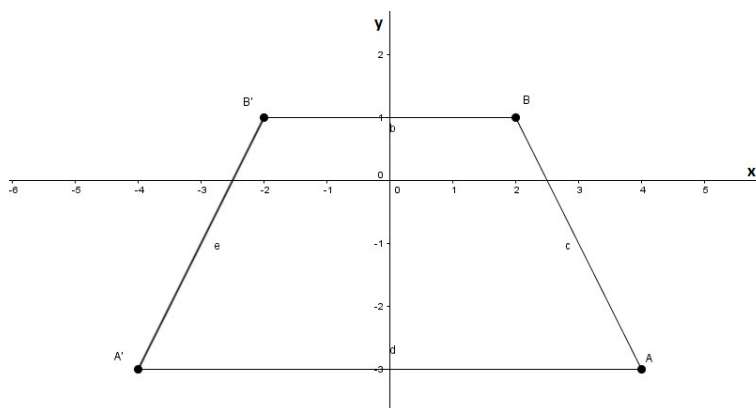
V pravoúhlé soustavě souřadnic jsou dány body $A[4;-3]$, $B[2;1]$. Urči obsah čtyřúhelníka $ABB'A'$, jsou-li body A' , B' obrazy bodů A , B v osově souměrnosti podle osy y . Za jednotkovou délku považuj 1 cm.

Řešení

Nejdříve si zobrazíme body A a B v pravoúhlé soustavě souřadnic:



Vytvoříme obrazy A' a B' bodů A a B podle osy y . Potom si tyto body spojíme a dostaneme čtyřúhelník:



Vidíme, že vzniklý čtyřúhelník je lichoběžník. Obsah lichoběžníka je: $S = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$. Velikost horní, dolní podstavy a výšku si zjistíme, jelikož víme, že velikost jednoho dílku je 1 cm. Tedy dostáváme, že $a = 8$ cm, $c = 4$ cm a $v = 4$ cm. Dosadíme do vzorečku a zjistíme obsah lichoběžníka:

$$S = \frac{(8 + 4) \cdot 4}{2},$$

$$S = 12 \cdot 2,$$

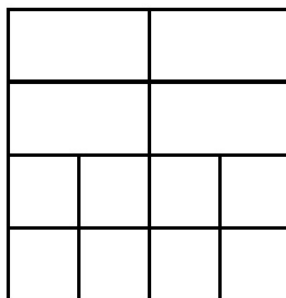
$$S = 24.$$

Obsah čtyřúhelníka (lichoběžníka) je 24 cm^2 .

5.3.2 Druhý příklad

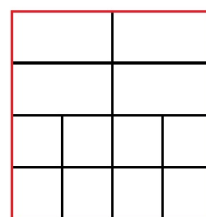
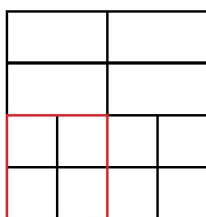
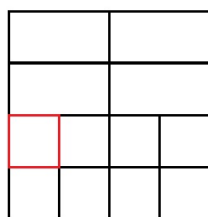
Zadání

Kolik čtverců různých velikostí je na obrázku?



Řešení

Naším úkolem je najít počet různých čtverců, které jsou na obrázku. Tyto čtverce si vyznačíme v obrázku a potom spočítáme, kolik jich je.



Na obrázku jsou tři různé čtverce.

6 Závěr

Cílem této bakalářské práce je srozumitelné vypočítání příkladů z Pythagoriád. Příklady jsou rozděleny do logického, analytického a geometrického řešení. V logickém řešení kladu důraz na představivost a logické uvažování, které může usnadnit žákovi počítání nebo sestavení rovnice. V analytickém příkladu je ukázán postup, jak správně sestavit rovnici a vyřešit ji. V posledním geometrickém řešení je kladen důraz na rýsování nebo načrtnutí obrázku, který může usnadnit řešení příkladu.

Doufám, že tyto úlohy napomohou žákům objasnit metody řešení příkladů, při přípravě na tuto matematickou soutěž. Tyto příklady jsou také určeny pro učitele, kteří připravují žáky na tuto matematickou soutěž.

7 Použitá literatura a zdroje

- [1] BĚLOUN, František. Sbírka úloh z matematiky pro základní školu. 8. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-104-8.
- [2] BĚLOUN, František a kolektiv. Tabulky pro základní školu. 10. vyd. Praha: Prometheus, 2007. ISBN 8071963461.
- [3] HERMAN, Jiří. Matematika: racionální čísla, procenta. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2004. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-238-0.
- [4] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. Matematika pro 7. ročník základní školy. 3., přeprac. vyd. Ilustrace Martin Mašek. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-427-8.
- [5] PROKEŠOVÁ, Emilie a Jaroslav KRČMÁŘ. 5 až 9: sbírka úloh z matematiky pro přípravu k přijímacím zkouškám, určená žákům 5., 7. a 9. tříd ZŠ. Vyd. 2., přeprac. Praha: Sobotáles, 2004. ISBN 80-86817-01-6.
- [6] PŮLPÁN, Zdeněk, Jitka BOUŠKOVÁ, Milena BRZOŇOVÁ a Josef TREJBAL. Matematika 7 pro základní školy: geometrie. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2008. ISBN 978-80-7235-399-6.
- [7] Přímá úměrnost. *Wikipedia* [online]. [cit. 2016-03-29]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/P%C5%99%C3%ADm%C3%A1_%C3%BAm%C4%9Brnost
- [8] Pythagoriáda 6. - 8. ročníků. Základní škola a Mateřská škola [online]. [cit. 2016-04-08]. Dostupné z: [http://www.zsbnpl.cz/?p=clanky/pythagoriada-6.—8.-rocniku](http://www.zsbnpl.cz/?p=clanky/pythagoriada-6.-8.-rocniku)
- [9] Starší zadání soutěží. ZŠ Milady Horákové [online]. [cit. 2016-03-29]. Dostupné z: <http://www.zshorakhk.cz/matematika/starsi-zadani-soutezi>