



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Kombinatorika na prvním stupni ZŠ

Vypracoval: Markéta Tůmová
Vedoucí práce: RNDr. Marika Hruběšová, Ph.D.

České Budějovice 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Kombinatorika na prvním stupni ZŠ jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

.....

Poděkování

Tímto bych ráda poděkovala vedoucí mé bakalářské práce RNDr. Marice Hrubéšové, Ph. D. za cenné rady, ochotu při spolupráci a poskytnutí materiálních podkladů k práci.

Anotace práce

Tato bakalářská práce se zabývá úlohami kombinatorického rázu v učivu pro první stupeň základních škol. Práce je systematicky rozdělena do dvou částí. Teoretická část obsahuje první dvě kapitoly práce: první kapitola je věnována historii kombinatoriky, druhá kapitola pak uvádí základní kombinatorická pravidla a pojmy. Praktická část se věnuje analýze učebnic pro druhý až pátý ročník základní školy od dvou různých nakladatelství z hlediska výskytu kombinatorických úloh. Poslední a nejobsáhlejší kapitolou mé práce je kapitola čtvrtá, ve které jsem vytvořila sbírku řešených kombinatorických úloh pro žáky prvního stupně základní školy.

Abstract

This bachelors thesis is dedicated to tasks with combinatorial character in the first grade of elementary school. This work is systematically divided into two parts. The theoretical part contains two first chapters of the work: first chapter is dedicated to the history of combinatorics, second chapter introduces the basic combinatorial rules and concepts. The practical part includes an analysis of textbooks for second to fifth grade of elementary school, in terms of occurrence of combinatorial tasks. The last and the most comprehensive chapter of my thesis is the fourth chapter, where I create a collection of solved tasks for pupils of first grade of elementary school.

Obsah

1 Úvod	6
2 Historie kombinatoriky	7
3 Základní kombinatorická pravidla a pojmy	14
3.1 Základní kombinatorická pravidla	14
Kombinatorické pravidlo součtu	14
Kombinatorické pravidlo součinu	15
3.2 Základní kombinatorické pojmy	16
Variace bez opakování	16
Permutace bez opakování	18
Kombinace bez opakování	20
Variace s opakováním	22
Permutace s opakováním	23
Kombinace s opakováním	25
4 Analýza a srovnání dvou učebnic matematiky pro první stupeň ZŠ	28
4.1 Učebnice pro druhý ročník ZŠ	28
4.1.1 Učebnice nakladatelství Fraus	28
4.1.2 Učebnice nakladatelství ALTER	29
4.2 Učebnice pro třetí ročník ZŠ	30
4.2.1 Učebnice nakladatelství Fraus	30
4.2.2 Učebnice nakladatelství ALTER	31
4.3 Učebnice pro čtvrtý ročník ZŠ	31
4.3.1 Učebnice nakladatelství Fraus	31
4.3.2 Učebnice nakladatelství ALTER	32
4.4 Učebnice pro pátý ročník ZŠ	33
4.4.1 Učebnice nakladatelství Fraus	33
4.3.2 Učebnice nakladatelství ALTER	34
Shrnutí analýzy:	34
5 Sbírka kombinatorických úloh pro 2. - 5. ročník ZŠ	36
5.1 sbírka úloh pro druhý ročník	36
5.2 Sbírka úloh pro třetí ročník	43
5.3 Sbírka úloh pro čtvrtý ročník	54
5.4 Sbírka úloh pro pátý ročník	63
6 Závěr	72
Seznam použité literatury	73

1 Úvod

S kombinatorikou se každý z nás setkává celý život. Ve většině případů si tuto skutečnost ale ani neuvědomíme. S kombinatorickými situacemi se setkávají již děti od nejútlejšího věku, kdy si například vybírají, se kterou hračkou si chtějí hrát nyní a se kterou později, když staví komínky z barevných kostek a rozhodují se, kterou kostičku použít na které místo nebo pokud malují obrázek a rozmýšlejí se, kterou barvu vybrat. Příkladů bychom našli jistě nemalé množství. Starší děti se s kombinatorikou setkávají ve výuce na prvním stupni základní školy, kdy se v učebnicích objevují první jednodušší kombinatorické úlohy, ovšem bez toho, aby děti věděli, že se o kombinatoriku jedná. I v běžném životě se děti na prvním stupni setkávají s kombinatorickými situacemi. Při vybírání oblečků pro panenky, stavení autíček do řady a prostřednictvím nejrozličnějších her a soutěží. Na druhém stupni už jsou v učebnicích matematiky kombinatorické úlohy o něco složitější. Děti už se samy rozhodují, co si každé ráno obléčou na sebe, kterými autobusy se dostanou do školy, s kým utvoří dvojice při hodině tělocviku. Všechny tyto situace můžeme považovat za kombinatorické. Až na středních školách se žáci setkávají s pojmem kombinatorika, která se stává nedílnou součástí výuky matematiky.

Kombinatorické úlohy a rozvíjení kombinatorického myšlení je velmi důležité již od dětství. V mnoha případech nám může kombinatorika pomoci při lepším rozhodování. Pokud budeme schopni určit, kolik existuje možností našeho výběru, může nám to při samotnému výběru pomoci. Kombinatorika nepochybně rozvíjí i logické myšlení a schopnost samostatného přemýšlení a řešení příkladů.

Cílem teoretické části mé bakalářské práce je stručný popis historie a vývoje kombinatoriky, uvedení základních kombinatorických pravidel, kterými je pravidlo součtu a součinu a také uvedení kombinatorických pojmů, kterými jsou variace, permutace a kombinace bez opakování, i s opakováním. Cílem praktické části práce je analýza a srovnání učebnice matematiky pro druhé, třetí, čtvrté a páté ročníky od dvou různých nakladatelství z hlediska výskytu kombinatorických úloh a vytvoření sbírky kombinatorických úloh pro tyto ročníky.

2 Historie kombinatoriky

Počátek vzniku a následného rozvoje kombinatoriky není možné s přesností určit. O jejích počátcích se dočteme v dílech mnoha autorů ze sedmnáctého století, její původ je ale jistě mnohem starší. Kořeny kombinatoriky sahají až do roku 2000 př. n. l., kdy se o ní ve svých textech zmiňují autoři v Indii a Číně. I přesto, že většina děl těchto autorů se nedochovala, víme, že se základní pravidla kombinatoriky používala ještě dříve, aniž by o tom jedinci věděli a uvědomovali si, že ve skutečnosti počítají podle těchto pravidel. V té době byla úroveň kombinatoriky velmi nízká, tudíž její použití bylo jednoduché. (Kafková, 2011, str. 10)

V Knize proměn, napsané v roce 2200 př. n. l. v Číně, je možné nalézt první příklady, které kombinatoriky využívají. Autoři v ní chtěli zjistit, kolik možných skupin po třech (trigramů) či po šesti (hexagramů) je možné získat skládáním znaků Jang (-) a Jin (--). Můžeme tak Knihu proměn považovat za nejstarší dochovaný text užívající kombinatoriku. (Král, 1995, str. 15)

Ze 17. století př. n. l. se dochoval další matematický spis nalezený v Egyptě, který jistě stojí za zmínku. Jedná se o Rhindův papyrus. Typ úloh, které jsou v něm uvedeny, se stal předlohou pro pozdější autory. Například italský autor Leonardo Pisanský¹, nazývaný Fibonacci, ve svém díle z roku 1202 uvádí příklady, které jsou jistě obdobou úloh právě z Rhindova papyrusu. Můžeme zde uvést jeden takový příklad, který zní:

*„Sedm starých mužů jde do Říma;
každý vede sedm mezků;
každý mezek nese sedm pytlů;
v každém pytli je sedm bochníků;
pro každý bochník je sedm nožů;
každý nůž má sedm pouzder.
Jaký je celkový počet všech uvedených věcí?“*

(Kafková, 2011, str. 10)

¹ Leonardo Pisanský (1170 - 1250) byl italský matematik, cestovatel a obchodník. Je známý pod přezdívkou Fibonacci, neboli syn Bonacciův. Jeho kniha Liber Abaci, kterou napsal roku 1202, se stala významnou pomůckou pro rozšíření indicko-arabského způsobu psaní čísl do západní Evropy. Je mu připisován objev posloupnosti 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., kde každý člen je součtem dvou předchozích členů. Posloupnost se dnes nazývá Fibonacciho a je výsledkem jeho úlohy o rozmnožování králíků. (Struik, str. 80)

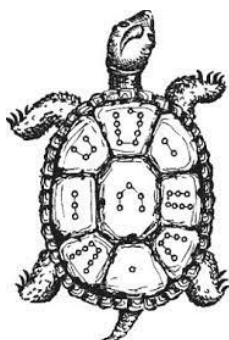
Jak bylo již zmíněno, v historii užívali kombinatoriky také indiští myslitelé. Prvním důkazem této skutečnosti je spis z 6. století, ve kterém nalezneme vypsane všechny možné kombinace složené ze šesti chutí – sladké, slané, hořké, kyselé, ostré a trpké. Také indiští básníci užívali kombinatoriky pro svá díla. Dalším důkazem může být správný výsledek astronoma jménem Varahamihiru, který nejspíše využil dnes známého vzorce pro výpočet k-prvkových podmnožin množiny n-prvkové. Jeho n-prvkovou množinou byla množina 16 jednotlivých vůní, ze kterých skládal všechny možné 4-prvkové podmnožiny, tedy vždy nové a odlišné vůně. Ve svém díle však neuvádí vypsane všechny možnosti, pouze jejich správný počet, tedy 1820. Z tohoto faktu je možné se tedy domnívat, že k výsledku použil výpočet. (Kafková, 2011, str. 11)

V sedmém století se indickým myšlenkám a spisům věnovali arabští autoři, kteří mimo jiné obohacují teorii magických čtverců, která ale historicky sahá mnohem hlouběji. (Kafková, 2011, str. 11)

Magické čtverce

Vznik magického čtverce souvisí s čínskou legendou z roku 2200 př. n. l., která praví, že tehdejší císař našel magický čtverec na krunýři želvy během velké potopy a řešení tohoto čtverce vedlo k odhalení potřebného počtu obětí, který byl potřeba poskytnout Bohu k jejímu odvrácení. Tento první magický čtverec na krunýři želvy, nazývaný Lo Shu, a jeho přepis můžeme vidět na obrázku níže. (Kafková) (Fuchs)

Obr. 1.1: Magický čtverec na krunýři želvy



Zdroj: <http://www.formation-fengshui-romandie.ch/historique-loshu.html>

Obr. 1.2: přepis magického čtverce

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Luos_hu_Square

Tomáš Roskovec ve svém textu uvádí tuto definici magického čtverce:

„Magický čtverec je čtvercová tabulka čísel, která má v každém řádku, sloupci i na obou diagonálách členy se stejným součtem. Obvykle se každé číslo smí vyskytovat v tabulce pouze jednou.“ (Roskovec, str. 41)

Vidíme tedy, že magický čtverec Lo Shu je čtvercem třetího řádu a součet čísel ve všech sloupcích, řádcích i diagonálách je roven patnácti. V sedmém století, právě díky arabským matematikům, kteří již byli schopni konstruovat čtverce pátého i šestého řádu, se dostává povědomí o magických čtvercích do Evropy. (Roskovec, str. 42)

Legendu o želvě s magickým čtvercem Lo Shu nalezneme v knize I-ťing, neboli Knize proměn, která je posvátnou knihou Taoismu. Byla napsána přibližně v roce 2200 př. n. l.. Tato legenda ale není jedinou zmínkou o kombinatorice, která se v této knize nachází. Druhá pověst se opět týká obrazce z krunýře želvy, která v tomto případě vylézala z řeky Ho. Pokud toto schéma znázorníme čísly, dostaneme:

*Obr. 2: magický čtverec
z krunýře želvy v řece Ho*

		7		
		2		
	10		10	
8	3	5	4	9
	10		10	
		1		
		6		

Zdroj: Fuchs, 2001, str. 9

V tomto schématu můžeme pozorovat „středovou symetrii“ a platí například:

$$5 + 3 = 8, 5 + 1 = 6, 5 + 4 = 9, 5 + 2 = 7$$

$$3 + 10 + 2 = 8 + 7, 3 + 10 + 1 = 8 + 6, 1 + 10 + 4 = 6 + 9, 4 + 10 + 2 = 9 + 7$$

(Fuchs, 2001, str. 9)

Nové poznatky o magických čtvercích ve 14. století přinášejí Řekové, kteří popisují pravidla pro tvorbu čtverců lichého stupně a stupňů dělitelných čtyřmi. Dále můžeme nalézt magické čtverce také v umění a architektuře. Jako příklad můžeme uvést magický čtverec, který se nachází na stěně kostela Sagrada Família v Barceloně. (Kafková, 2011, str. 13)

Obr. 3: Magický čtverec na stěně kostela v Barceloně

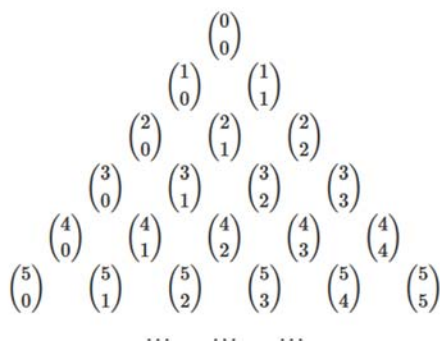


Zdroj: <https://staybarcelonaapartments.com/blog/magic-square-sagrada-familia>

Aritmetický trojúhelník

Aritmetický trojúhelník, nebo také Pascalův trojúhelník, pojmenovaný po Blaise Pascalovi² je schéma tvaru trojúhelníku obsahující takzvaná kombinační čísla. Přestože víme, že Pascal nebyl prvním, kdo aritmetický trojúhelník ve svém díle uvedl, je s jeho jménem spojován proto, jak srozumitelně ho ve své knize *Traité du triangle arithmétique*, kterou můžeme přeložit jako Pojednání o aritmetickém trojúhelníku, popisuje. (Kafková, 2011, str. 13)

Obr. 4: Pascalův trojúhelník



Zdroj: <https://matematika.9e.cz/binomicka-veta/>

Pro nás je aritmetický trojúhelník užitečný, počítáme-li binomický rozvoj, neboť právě jednotlivá kombinační čísla tohoto trojúhelníka tvoří jeho koeficienty.

Moderní kombinatorika

Kombinatorika v historii nebyla považována za samostatné odvětví matematiky. Až v 17. století se se vznikem teorie pravděpodobnosti začíná vyčleňovat. Počátky obou

² Blaise Pascal (1623-1662) byl francouzský matematik, fyzik, spisovatel, teolog a náboženský filozof. Jeho učitelem mu byl jeho otec Etienne Pascal. V pouhých šestnácti letech objevil větu o šestiúhelníku vepsaném kuželosečce. Je mu připisován objev počítačícího stroje. Jeho díla následně ovlivnila řadu autorů, jako byl například G. W. Leibniz. (Struik, str. 105)

těchto disciplín souvisí s hazardními hrami, tedy předpovídáním možných výsledků. V tomto století se kombinatorice věnovali především Blaise Pascal, G. W. Leibniz, Jakob Bernoulli a také Leonhard Euler, ten se ale řadí až k matematikům století osmnáctého. (Příhonská)

V již zmíněné Pascalově knize Pojednání o aritmetickém trojúhelníku se objevuje úloha o spravedlivém rozdělení sázky. Můžeme si představit dva hráče házející mincí. Vyhraje ten, kterému jako prvnímu padne jeho strana mince šestkrát. Pascal zde ukazuje problém, který nastane, pokud je hra předčasně ukončena. Tzn., pokud je hra ukončena ve chvíli, kdy hráči A padla jeho strana mince pětkrát, hráči B čtyřikrát a nyní není jasné, jak rozdělit výhru. (Příhonská) Pascal situaci popsal takto:

„Dva hráči hrají sérii her o nějakou částku C ; tuto částku získá ten hráč, který jako první vyhraje k her (lidově se někdy říká, že hráči hrají na k vítězných her). Pravděpodobnost výhry v každé jednotlivé hře je pro oba hráče stejná (oba hráči jsou „stejně dobří“). Série her je předčasně ukončena ve chvíli, kdy jednomu hráči chybí do výhry m her, druhému hráči chybí do výhry n her. Jak má být spravedlivě rozdělena částka C mezi hráče?“ (Kafková, 2011, str. 14)

Gottfried Wilhelm Leibniz³ byl prvním autorem, který v jednom ze svých děl uvádí pojem kombinatorika. Tento spis z roku 1666 se nazývá *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Leibniz v něm opět nezávisle na ostatních autorech uvádí Pascalův trojúhelník, ale i jiné kombinatorické pojmy. Je mu připisováno značné množství matematických termínů, jako například „funkce“, „souřadnice“, „oskulace“ nebo „diferenciální“ a „integrální počet“, ale také užívání symbolu „=“ ke značení rovnosti, nebo symbol „.“, pro násobení. (Voglová) (Struik, str. 113)

Dalším autorem ze 17. století věnující se kombinatorice byl Švýcar Jakob Bernoulli⁴. Jeho dílo *Ars conjectandi* je často považováno za vrcholné dílo formování kombinatoriky jako samostatné matematické disciplíny. Bernoulli spis dělí na čtyři

³Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) byl německý filosof, vědec a také matematik. Několik let sloužil na hannoverském dvoře a jako diplomat napomáhal jednotě Německa. Byl silně ovlivněn katolicismem. Jeho snaha nalézt tzv. „univerzální metodu“ ho dovedla k teorii permutací, kombinací a symbolické logice. Vli Pascala, Descarta a dalších můžeme vidět na jeho objevu infinitesimálního počtu, který měl na rozdíl od Newtona geometrický charakter. (Struik, str. 113-114)

⁴Jakob Bernoulli (1654-1705) byl spolu s jeho bratrem Johannem studentem G. W. Leibnize. Mezi jeho nejvýznamnější objevy patří např.: použití polárních souřadnic, studium logaritmické spirály, objev izochronu, neboli křivky, po níž padá těleso rovnoměrnou rychlostí. Jako jeden z prvních matematiků se zabýval teorií pravděpodobnosti. (Struik, str. 119-120)

části. První část, stejně jako Pascalovo *Traité du triangle arithmétique*, se věnuje hazardním hrám. Část druhá je učebnice kombinatoriky, která je velmi podobná

Obr. 5: Bernoulliho *Ars conjectandi*



Zdroj:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086014000482>

učebnicím dnešním. Následuje ji sbírka kombinatorických úloh s herní tematikou. Ve čtvrté části jako první autor uvádí definici zákona velkých čísel.

Dalším velmi významným matematikem pro rozvoj kombinatoriky a pravděpodobně neplodnějším autorem 18. století byl Leonhard Euler⁵. Za svého života sepsal 886 prací

a výrazně jimi přispěl do všech oblastí matematiky. (Struik, str. 121, 122) Je mu připisován symbol pro kombinační číslo. V jeho spisech nalezneme dvě slavné úlohy. První z nich je „úloha o 36 důstojnících“. Euler se úlohu pokoušel řešit pomocí latinských čtverců. Přišel na to, že řešení této úlohy neexistuje, ale sám toto tvrzení nikdy nedokázal. Úloha zní takto:

„Sestavte 36 důstojníků 6 různých hodnotí ze šesti různých pluků do čtverce tak, aby v žádné řadě ani v žádném zástupu nestáli dva důstojníci stejné hodnoti ani dva důstojníci ze stejného pluku.“ (Kafková, str. 16)

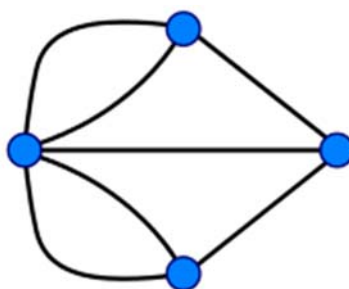
Druhou úlohou je „úloha o sedmi mostech města Královec“:

⁵ Leonhard Euler (1707-1783) byl švýcarský matematik a fyzik. Studoval matematiku u Johanna Bernoulliho. 25 let pracoval pod záštitou Friedricha II., následně 17 let až do své smrti pod záštitou carevny Kateřiny. I přes to, že roku 1735 přišel o oko a roku 1766 o druhé, jeho výkonnost to nijak neovlivnilo. Mezi jeho významné objevy patří např.: trigonometrie, ustálení symboliky algebry a infinitesimálního počtu, výklad nekonečných řad, rozvoj funkce e^x , $\sin x$ a $\cos x$, algebraické vyšetření křivky a plochy, elementární diferenciální a integrální počet a mnoho dalších.

„Městem Königsberg (česky Královec) teče řeka Pregel. V této řece jsou dva ostrovy, které byly s pevninou a vzájemně propojeny sedmi mosty. Úkolem je zjistit, zda je možné vyjít z jednoho místa, projít po každém mostě právě jednou a skončit procházku ve výchozím bodě.“ (Fuchs, str. 97)

Při zjednodušení této úlohy do grafického znázornění šlo tedy o to, zda je možné graf nakreslit jedním tahem. V tomto případě již Euler sám dokázal, že to možné není.

Obr. 6: sedm mostů města Královec - graficky



Zdroj: <https://cs.alegsaonline.com/art/89192>

Autorů, kteří se zabývali kombinatorikou, byl v této době nespočet, za zmínku však dále stojí například francouzský matematik Abrahama de Moivre (1667-1754) a jeho objev inkluze a exkluze, později také německý matematik Eugen Netto (1848-1919), který publikoval učebnici, ve které se nacházelo vše, co tehdejší autoři o kombinatorice věděli. (Kafková, str. 17)

Největším rozvojem prošla kombinatorika především v posledních 30 letech 20. století, neboť dochází k rozvoji výpočetní techniky a tzv. diskrétní matematiky, jejíž významnou součástí je právě kombinatorika. (Fuchs, str. 10)

3 Základní kombinatorická pravidla a pojmy

3.1 Základní kombinatorická pravidla

Velké množství kombinatorických úloh lze řešit pouze za pomoci jejích dvou základních pravidel. Těmi je pravidlo součtu a pravidlo součinu.

Kombinatorické pravidlo součtu

Definice:

Nechť $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ jsou podmnožiny konečné množiny A , které jsou po dvou disjunktní (tedy pro každé $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ platí $A_i \cap A_j = \{\}$, kdykoliv $i \neq j$) a jejichž sjednocením je celá množina A ($A = \bigcup_{i=1}^n A_i$). Pak platí

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

Důkaz:

Každý prvek $a \in A$ patří dle předpokladu do jedné z podmnožin A_i ($i = 1, 2, \dots, n$), proto se na každé straně rovnosti vyskytuje právě jednou.

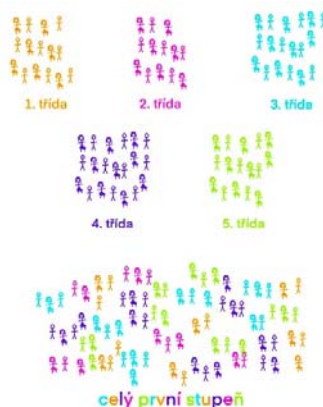
(Herman, Kučera, Šimša, str. 6)

Řešený příklad:

Na prvním stupni základní školy je v první třídě 15 žáků, ve druhé třídě 13 žáků, ve třetí třídě 18 žáků, ve čtvrté třídě 20 žáků a v páté třídě 16 žáků. Kolik žáků je na celém prvním stupni této ZŠ dohromady?

Řešení:

Tyto množiny jsou konečné (každá třída má konečný počet žáků) a zároveň jsou disjunktní (není možné, aby jeden žák navštěvoval více ročníků najednou). Celkový počet žáků prvního stupně je tedy $15 + 13 + 18 + 20 + 16 = 82$



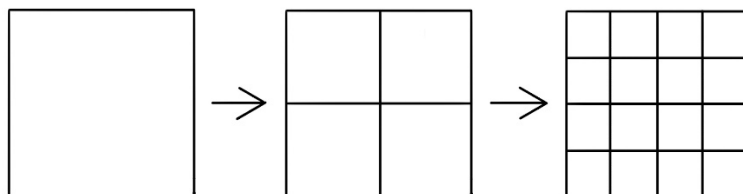
Obr. 7: sčítání žáků prvního stupně

Řešený příklad:

Čtverec rozdělte na 4 menší čtverce a ty zase rozdělte na 4 menší. Kolik je na obrázku všech čtverců?

Řešení:

Nejprve si úlohu nakreslíme.



Obr. 8: rozdělení čtverce

Vidíme, že poslední čtverec se skládá z 16 čtverců. Každý z nich můžeme popsat jako čtverec 1×1 . Dále vidíme také čtverce, které bychom mohli popsat jako 2×2 , kterých je v tomto čtverci 9. Dále pak čtverec obsahuje 4 čtverce 3×3 a nakonec jeden původní a největší čtverec 4×4 . Sečteme tedy všechny čtverce 1×1 , 2×2 , 3×3 a 4×4 a vyjde nám $16 + 9 + 4 + 1 = 30$.

Kombinatorické pravidlo součinu

Definice:

Počet všech uspořádaných k -tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k -tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

(Calda, Dupač, str. 9)

Řešený příklad:

Mám pět různých triček a dvoje kalhoty. Kolika způsoby si mohu obléct tričko a kalhoty, abych pokaždé vypadala jinak?

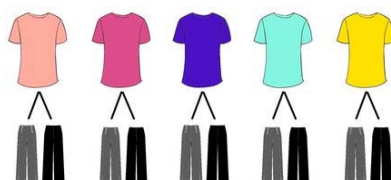
Řešení:

Vždy budu vybírat jedno z pěti triček a jedny ze dvou kalhot.

Jedno tričko tedy můžeme vybrat z pěti možností.

Ke každému tričku vždy vybíráme jednu ze dvou možností kalhot.

Výsledek je tedy $5 \cdot 2 = 10$



$$\begin{array}{ccc} 5 & \bullet & 2 \\ \text{možností} & & \text{možností} \\ \text{tričko} & & \text{kalhoty} \end{array}$$

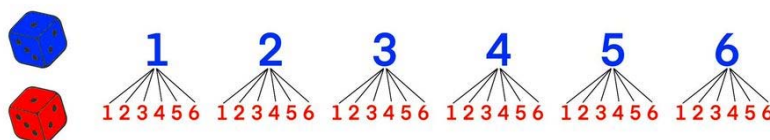
Obr. 9: různé kombinace pěti triček a dvou párů kalhot

Řešený příklad:

Hodíme dvěma hracími kostkami. Kolik různých uspořádaných dvojic čísel můžeme dostat?

Řešení:

Na všech hracích kostkách máme čísla od 1 do 6. Při hodu na každé jedné z nich tak může padnout právě 6 možných výsledků. Počet různých trojic je tedy $6 \cdot 6 = 36$



Obr. 10: dvojice výsledků hodů dvěma kostkami

3.2 Základní kombinatorické pojmy

Variace bez opakování

Definice:

Nechť $k \leq n$ a necht' A je konečná n -prvková množina. Libovolné pořadí z některé k -prvkové podmnožiny množiny A nazveme k -prvkovou variací z prvků n -prvkové množiny A (stručně k -prvkovou variací z n prvků). Je to tedy uspořádaná k -tice $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ prvků z A , kde se každý prvek množiny A vyskytuje nejvýše jednou.

(Herman, Kučera, Šimča, str. 11)

Počet všech k -členných variací z n prvků značíme symbolem $V(k, n)$.

Věta:

Počet $V(k, n)$ všech k -členných variací z n prvků je

$$V(k, n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

(Calda, Dupač, str. 14)

Řešený příklad:

Uveďte všechny tříčlenné variace bez opakování ze čtyř prvků a, b, c, d :

Řešení:

Řešení jednoduchých příkladů je možné rozepsáním všech možností, avšak tento postup je velmi nepraktický, pokud budeme řešit příklady, kde bude výsledný počet variací vyšší.

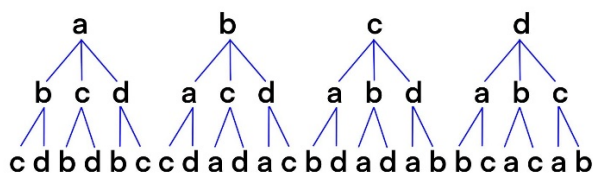
$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a),$

$(a, b, d), (a, d, b), (b, a, d), (b, d, a), (d, a, b), (d, b, a),$

$(a, d, c), (a, c, d), (d, a, c), (d, c, a), (c, a, d), (c, d, a),$

$(b, c, d), (b, d, c), (c, b, d), (c, d, b), (d, b, c), (d, c, b).$

$$V(3, 4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$



Obr. 11: stromový graf řešení úlohy

Příklad:

V obchodním domě hledají brigádníky na pozice: prodavač, uklízeč, skladník a pracovník v lahůdkách. Na brigádu se přihlásilo 5 uchazečů a 8 uchazeček. Určete, kolika způsoby z nich lze vybrat tyto brigádníky?

Řešení:

Na brigádu se přihlásilo 5 mužů + 8 žen = 13 osob celkem.

Pro výběr prodavače máme 13 možností, poté pro uklízeče 12 možností, pro skladníka 11 možností a nakonec pro pracovníka v lahůdkách 10 možností.

Výsledek: $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17160$.

Jednoduše lze tedy variace popsat jako uspořádané k -tice (termínem uspořádané myslíme to, že záleží na pořadí jejich prvků), v nichž se zároveň jednotlivé prvky nesmí opakovat.

Permutace bez opakování

Definice:

Permutace z n prvků je každá n -členná variace z těchto prvků.

Definice:

Permutace z n prvků je uspořádaná n -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

(Calda, Dupač, str. 17)

Počet permutací z n prvků odvodíme ze vzorce pro počet k -členných variací z n prvků, do kterého dosadíme $k = n$

$$P(n) = V(n, n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - n + 1)$$

Tento výsledek upravíme zavedením symbolu $n!$ (n faktoriál)

Pro každé přirozené číslo n definujeme:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

Věta:

Počet $P(n)$ všech permutací z n prvků je

$$P(n) = n!$$

(Calda, Dupač, str. 18)

Definice:

$$0! = 1$$

(Calda, Dupač, str. 19)

Řešený příklad:

Uveďte všechny permutace ze tří prvků a, b, c .

Řešení:

Počet prvků dané množiny je 3. Budeme proto počítat $P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Stejně jako v případě variací, i zde můžeme v tomto případě pro názornost rozepsat všechny možnosti.

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$$

Řešený příklad:

Maminka na jaře vysazuje do truhlíku s pěti květináči pět květin – kopretiny, máky, zvonečky, růže a pomněnky. Kolika možnými způsoby je může rozmístit, má-li od každého druhu pouze jeden kus.

Řešení:

Celkem máme tedy rozmístit pět květin na pět volných míst: _ _ _ _ _.



Obr. 12.1: okno s květináči a pět možných květin

Na první místo můžeme dosadit kteroukoli z pěti možností. Vybereme například máky. Dostaneme $5 \cdot$ _ _ _ _.



Obr. 12.2: květináče a zbylé možnosti po vysazení první květiny

Na místo druhé už nemůžeme použít máky, zbyly nám tedy možnosti čtyři. Pro znázornění si vybereme kopretinu. Nyní máme tedy $5 \cdot 4 \cdot$ _ _ _.



Obr. 12.3: květináče zbylé možnosti po vysazení druhé květiny

Na třetí místo již nesmíme zvolit ani máky ani kopretiny, máme tak již jen tři možnosti. Vybrali jsme růže a dostáváme $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot$ _ _.



Obr. 12.4: květináče a zbylé možnosti po vysazení třetí květiny

Na místo čtvrté nám zbyly již jen dvě možnosti, a to zvonečky a pomněnky. V našem příkladně jsme vybrali růže a dostáváme $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot _$



Obr. 12.5: květináče a zbylé možnosti po vysazení čtvrté květiny

Poslední místo obsadíme naší poslední možností, a tou jsou zvonečky.



Obr. 12.6: květináče po vysazení poslední páté květiny

Výsledkem je tedy:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$$

Nyní, když jsme se seznámili s pojmem faktoriál, můžeme se ještě vrátit ke vzorci pro výpočet k -členných variací z n prvků $V(k, n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$. Pokud jej vyjádříme pomocí faktoriálu, a vezmeme v úvahu $0! = 1$, pak pro všechna přirozená čísla n, k ; $k \leq n$ platí:

$$\begin{aligned} V(k, n) &= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \\ &= \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \cdot (n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n - k)!} \end{aligned}$$

(Calda, Dupač, str. 18)

Kombinace bez opakování

Definice:

k -členná kombinace z n prvků je neuspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Definice:

k -členná kombinace z n prvků je k -prvková podmnožina množiny těchto n prvků určené.

(Calda, Dupač, str. 25)

Věta:

Pro všechna celá nezáporná čísla $n, k; k \leq n$, platí:

$$K(k, n) = \frac{V(k, n)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

(Calda, Dupač, str. 27)

Řešený příklad:

Uveďte všechny tříčlenné kombinace ze čtyř prvků a, b, c, d .

Řešení:

Na rozdíl od variací, kombinace jsou neuspořádané k -tice, což jinými slovy znamená, že nám nezáleží na pořadí jednotlivých prvků. Po dosazení do vzorce tedy dostáváme rovnici:

$$K(3, 4) = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

Pro názornost opět můžeme všechna řešení vypsát:

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$$

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ tak určuje počet k -prvkových podmnožin množiny n -prvkové.

Řešený příklad:

Určete, kolika způsoby je možno ze sedmi bonbonů a čtyř lízátek poskládat balíček, ve kterém bude celkem šest sladkostí, a alespoň dvě z nich budou lízátko.

Řešení:

Budeme vybírat balíček šesti sladkostí, ve které budou alespoň dvě lízátko. To tedy znamená, že v balíčku mohou být právě 2 lízátko, nebo 3 lízátko, nebo 4 lízátko.

Pokud dáme do balíčku dvě lízátka, zbytek balíčku budou bonbony, tedy čtyři. Vybíráme tak dvě lízátka ze čtyř možností: $\binom{4}{2}$ a k tomu čtyři bonbony ze sedmi možností: $\binom{7}{4}$.

Pokud do balíčku dáme tři lízátka, pak tam budou také tři bonbony. Stejným způsobem tedy vybereme tři lízátka ze čtyř možných: $\binom{4}{3}$ a k nim tři bonbony ze sedmi: $\binom{7}{3}$.

Poslední možností je, že dáme do balíčku lízátka čtyři: $\binom{4}{4}$ a dva bonbony: $\binom{7}{2}$.

Všechny výsledky sečteme dohromady. Dostáváme:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4} + \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{3} + \binom{4}{4} \cdot \binom{7}{2}$$

Věta:

Pro všechna celá nezáporná čísla n, k ; $k \leq n$, platí:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

(Calda, Dupač, str. 28)

Variace s opakováním

Definice:

k -členná variace s opakováním z n prvků je uspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k -krát.

(Calda, Dupač, str. 35)

Věta:

Počet $V(k, n)$ všech k -členných variací s opakováním z n prvků je

$$V(k, n) = n^k$$

(Calda, Dupač, str. 37)

Příklad:

Uveďte všechny tříčlenné variace s opakováním ze dvou prvků a, b .

Řešení:

$(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)$

Při použití vzorce pro výpočet počtu variací s opakováním by řešení vypadalo takto:

$$V^*(3, 2) = 2^3 = 8$$

Řešený příklad:

Na letním táboře si děti malovaly pruhy na obličej. Měli k dispozici 5 barev: bílou, červenou, žlutou, zelenou a modrou. Každé dítě si mělo na tvář nakreslit tři pruhy, na obě tváře stejně. Každou barvu mohly použít vícekrát. Kolika způsoby si pruhy mohly nakreslit?

Řešení:

Pro horní pruh máme možnost vybrat z pěti barev. Stejně tak máme pět možností i pro prostřední a i pro dolní pruh, neboť se mohou barvy opakovat.

Dostaneme tedy výpočet $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$



Obr. 13: dítě s barevnými pruhy

Permutace s opakováním

Definice:

Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.

(Calda, Dupač, str. 41)

Věta:

Počet $P^*(k_1, k_2, \dots, k_n)$ permutací z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \dots, k_n$ -krát, je

$$P^*(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$$

Řešený příklad:

Určete počet způsobů, kterými je možné přemístit písmena slova INDIÁNI.

Řešení:

Vidíme, že ve slově se opakují čtyři písmen – I, N, D a Á. U každého z nich určíme, kolikrát se ve slově nachází. Tedy máme třikrát I, dvakrát N, jednou D a jednou Á. Můžeme tedy dosadit do vzorce. Vyjde nám

$$P^*(3, 2, 1, 1) = \frac{(3 + 2 + 1 + 1)!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$$

Příklad lze řešit i bez toho, abychom tento vzorec znali. Řekneme si, že máme 7 volných pozic, na která lze dosazovat jednotlivá písmena. Na tři z těchto pozic budeme dosazovat písmeno I. Vybíráme tedy tři možnosti ze sedmi $\rightarrow \binom{7}{3}$.

Nyní máme již tři pozice obsazeny, zbývají tedy čtyři volné. Na dvě z těchto čtyř posadíme písmeno N $\rightarrow \binom{4}{2}$.

Dále nám zbývají volné již jen dvě pozice, na jednu z nich dosadíme písmeno D $\rightarrow \binom{2}{1}$

A na poslední volnou pozici nám zbylo písmeno Á $\rightarrow \binom{1}{1}$.

Tím jsme již vyčerpali všechna písmena. Dáme to tedy všechno dohromady:

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 420$$

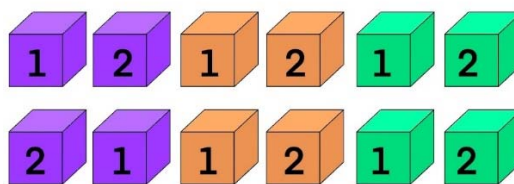
Řešený příklad:

Kolika způsoby můžeme rozestavit do řady dvě stejné fialové kostky, dvě stejné oranžové kostky a dvě stejné zelené kostky?

Řešení:

Dohromady budeme do řady stavět šest kostek. Jejich pořadí můžeme vybrat 6! způsoby.

Může se nám ale stát, že v řadě prohodíme dvě kostky stejné barvy mezi sebou, viz obrázek. Dostaneme tak stejnou řadu jako před prohozením.



Obr. 14: prohození dvou kostek stejné barvy

Musíme tedy počet všech možností vydělit počtem takových možností, které i při prohození kostek mezi sebou dají stejnou řadu. Pokud spolu prohodíme dvě fialové, řada se nezmění. Pro fialové kostky je to tedy $2!$. To samé platí i pro oranžové i pro zelené kostky. Dostaneme tedy $2! \cdot 2! \cdot 2!$.

Po vydělení tedy máme:

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

Kombinace s opakováním

Definice:

k -členná kombinace s opakováním z n prvků je neuspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k -krát.

(Calda, Dupač, str. 47)

Věta:

Počet $K'(k, n)$ všech k -členných kombinací s opakováním z n prvků je

$$K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k}$$

(Calda, Dupač, str. 48)

Řešený příklad:

Určete, kolika způsoby je možné rozmístit šest stejných červených kuliček do tří krabiček.

Řešení:

V tomto případě se jedná o šestičlennou kombinaci s opakováním složenou ze tří prvků. Po dosazení dostáváme tento vztah:

$$K'(6, 3) = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = 28$$

Řešený příklad:

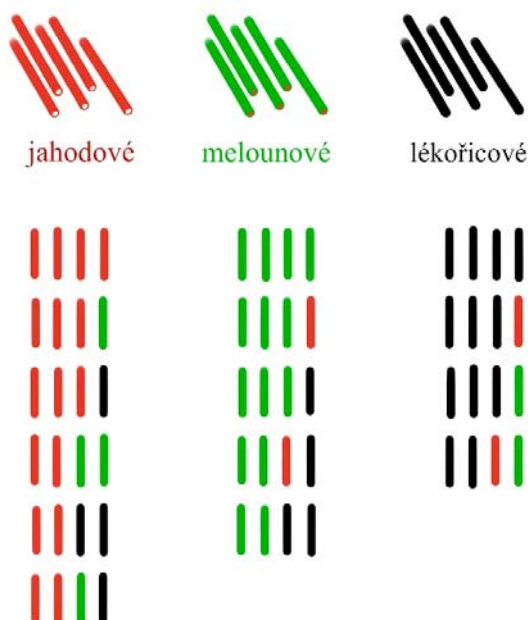
Na pouti jsme měli na výběr ze tří druhů ovocných pendreků: jahodové, melounové a lékořicové. Kolika způsoby si mohu vybrat čtyři pendreky?

Řešení:

Pendreky jednoho druhu od sebe nejsme schopni rozlišit a je jisté, že od jednoho nebo více druhů budeme muset vybrat více než jeden kus, neboť máme pouze tři možnosti a chceme čtyři kusy.

Budeme tedy vybírat 4 pendreky ze tří druhů:

$$K'(3, 4) = \binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$$



Obr. 15: kombinace pendreků

Příklad lze řešit i bez použití vzorce. Můžeme si každou možnost zašifrovat pomocí oranžových puntíků, které budou představovat počet pendreků jednotlivých příchutí a modrých puntíků, které budou oddělovat příchutě od sebe. Tedy např. možnost 1 jahodový, 1 melounový a 2 lékořicové pendreky by vypadala takto:



I pokud bychom vybrali jakoukoli jinou možnost, dostali bychom vždy celkem 6 puntíků, 4 z nich by byly žluté a 2 modré. Tím jsme v podstatě příklad kombinace

s opakováním předělali na příklad permutace s opakováním, neboť nás nyní zajímá, kolika způsoby můžeme tyto puntíky seřadit a puntíky stejné barvy mezi sebou neodlišujeme. Dostáváme tedy vztah pro výpočet permutace s opakováním:

$$\frac{6!}{2! \cdot 4!}$$

4 Analýza a srovnání dvou učebnic matematiky pro první stupeň ZŠ

V druhé části mé bakalářské práce se budu věnovat analýze učebnic matematiky pro druhý až pátý ročník základní školy od dvou různých nakladatelství. Tato analýza spočívá ve vyhledávání úloh týkajících se kombinatoriky. Pro srovnání jsem zvolila jednu řadu učebnic s tradičním pojetím výuky matematiky od nakladatelství ALTER. Za druhou sadu učebnic jsem zvolila učebnice od nakladatelství Fraus, v nichž autoři využívají metodu profesora Hejného.

Pro každý ročník jsem vytvořila tabulku s počtem úloh v jednotlivých učebnicích. Dále uvádím vždy příklad jedné úlohy s číselným a geometrickým charakterem a jednu nezařaditelnou úlohu.

4.1 Učebnice pro druhý ročník ZŠ

	Číselné úlohy	Geometrické úlohy	Ostatní úlohy	Celkem:
Fraus 1. díl	2	3	1	6
Fraus 2. díl	4	1	1	6
Fraus 3. díl	3	3	11	17
ALTER 4/B	0	0	1	1
ALTER 5	0	0	0	0
ALTER 6	0	0	1	1
ALTER 7	0	0	1	1

Tabulka 1: počet kombinatorických úloh v učebnicích pro druhý ročník

Tabulka popisuje, kolik se v jednotlivých učebnicích matematiky pro druhou třídu od dvou nakladatelství vyskytuje kombinatorických úloh, které mají číselný či geometrický charakter nebo mají takovou podobu, že je nelze zařadit ani mezi číselné ani mezi geometrické úlohy. Dále je pak v tabulce uvedeno, kolik se v dané učebnici vyskytuje kombinatorických úloh celkem.

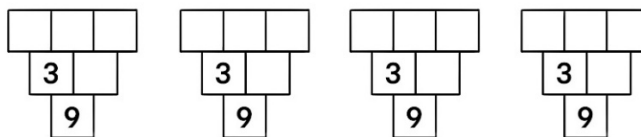
4.1.1 Učebnice nakladatelství Fraus

Učebnice pro druhou třídu od nakladatelství Fraus je rozdělena na tři díly. Vyskytuje se v nich značné množství úloh, ve kterých autoři užívají jednoduché kombinatoriky.

Číselná úloha:

Úloha číslo 1 ze strany 25 (3. díl):

Najdi všechna řešení.

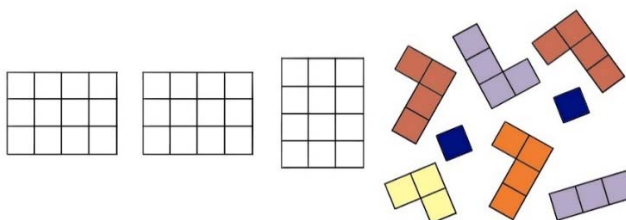


Obr. 16: obrázek k úloze 1 ze strany 25

Geometrická úloha:

Úloha ze strany 15 (1. díl):

Pokryj obdélníkovou podlahu parketami, hledej více řešení.



Obr. 17: obrázek k úloze ze strany 15

Ostatní:

Úloha číslo 3 ze strany 16 (1. díl):

Písmena D, R, A, K se vozila na pouti po dvojicích v autíčkách. Napiš všechny možnosti.

4.1.2 Učebnice nakladatelství ALTER

Učebnice matematiky pro druhou třídu od nakladatelství ALTER je rozdělena na čtyři díly (4/B, 5, 6, 7). Celkem jsem v nich našla pouze tři kombinatorické úlohy, všechny s velmi podobným zadáním i postupem řešení.

Úloha číslo 1 ze strany 11 (díl 4/B):

Ve výloze obchodu s hračkami děti viděly:

míč – 60 Kč, stavebnice – 70 Kč, panenka – 60 Kč, medvídek – 50 Kč, autíčko – 80 Kč, ptáček – 10 Kč, buben – 30 Kč, trubka – 40 Kč, vláček – 90 Kč

Klárka měla vybrat dárky pro brášku v hodnotě 70 Kč. Které hračky mohla vybrat? Zapiš do sešitu všechny možnosti.

4.2 Učebnice pro třetí ročník ZŠ

	Číselné úlohy	Geometrické úlohy	Ostatní úlohy	Celkem
Fraus	4	6	5	15
ALTER 1. díl	2	0	2	4
ALTER 2. díl	1	0	4	5
ALTER 3. díl	0	0	2	2

Tabulka 2: počet kombinatorických úloh v učebnicích pro třetí ročník

Tabulka opět popisuje počet číselných, geometrických a ostatních úloh a celkový počet kombinatorických úloh, nyní v učebnicích pro třetí ročník.

4.2.1 Učebnice nakladatelství Fraus

Pro analýzu učebnice matematiky pro 3. ročník základní školy od nakladatelství Fraus jsem zvolila jednodílnou učebnici, ke které mají děti k dispozici ještě pracovní sešity. Není v ní tedy tolik prostoru pro kombinatorické úlohy, jako v porovnání s pracovními sešity z předešlého ročníku, ve kterém děti učebnici k dispozici nemají. Přesto jich zde ale najdeme značné množství.

Číselná úlohy:

Z číslic 3, 4, 5 vyber dvě různá a slož z nich číslo, po jehož zaokrouhlení na desítky dostaneme: a) 30; b) 40; c) 50. Najdi všechna řešení.

Geometrická úloha:

Úloha číslo 2 ze strany 9:

Jan má 3 krychle: modrou, červenou a bílou. Katka má 2 modré a 2 červené krychle. Lenka jednu krychli červenou a 5 krychlí modrých. Jan už postavil tři různé věže. Může jich postavit ještě více? Kolik různých věží může postavit Katka? Kolik Lenka?

Ostatní:

Úloha číslo 4 ze strany 9:

Kolika různými způsoby zaplatíš 25 Kč pomocí: a) tří; b) čtyř; c) pěti; d) šesti mincí?

Budeme používat mince v hodnotách 1, 2, 5, 10 a 20 Kč.

4.2.2 Učebnice nakladatelství ALTER

Učebnice je rozdělena do tří dílů. Na konci každého dílu se nachází tři stránky, které jsou nazvány „tři oříšky“. Všechny kombinatorická úlohy, které se v učebnicích pro třetí ročník od nakladatelství ALTER objevují, jsou právě na těchto třech stránkách každého dílu. Ve zbytku učebnice nenajdeme žádnou.

Číselná úloha:

Úloha číslo 11 ze stránky 61 (1. díl):

Rozmístěte čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 do devíti čtverečků ve čtverci tak, aby součet v každém řádku i sloupečku byl 15.

Ostatní:

Úloha číslo 9 ze stránky 61 (1. díl):

Šachisté Marek, Kamil, Tomáš, Viktor a Radek hráli na turnaji partii každý s každým. Kolik partií sehráli celkem?

4.3 Učebnice pro čtvrtý ročník ZŠ

	Číselné úlohy	Geometrické úlohy	Ostatní úlohy	Celkem
Fraus	8	3	11	22
ALTER 1. díl	1	1	3	5
ALTER 2. díl	1	0	1	2
ALTER 3. díl	3	0	0	3

Tabulka 3: počet kombinatorických úloh v učebnicích pro čtvrtý ročník

Tabulka popisuje počet číselných, geometrických, ostatních úloh a celkový počet kombinatorických úloh ve vybraných učebnicích pro čtvrtou třídu.

4.3.1 Učebnice nakladatelství Fraus

K analýze jsem vybrala jednodílnou učebnici pro čtvrtý ročník, ve které opět najdeme velké množství kombinatorických úloh.

Číselná úloha:

Úloha číslo 8 ze strany 15:

Kolik různých trojmístných čísel můžeme utvořit z číslic a) 3, 4, 5; b) 5, 7, 9? Kolik z nich je lichých? Kolik z nich je sudých?

Geometrická úloha:

Úloha číslo 2 ze strany 48:

Vymodeluj co nejvíce různých trojúhelníků, které mají obvod:

- a) 3 dřívka; b) 4 dřívka; c) 5 dřívek; d) 6 dřívek; e) 7 dřívek;
f) 8 dřívek; g) 9 dřívek; h) 10 dřívek; i) 11 dřívek; j) 12 dřívek.

Ostatní:

Úloha číslo 1 ze strany 77:

Kolika způsoby je možné na tabulce přečíst jméno DARINA? Stejnou úlohu řeš i pro další jména.

D	A	R	I	N
A	R	I	N	A

E	R	I
R	I	K
I	K	A

S	A	B	I
A	B	I	N
B	I	N	A

M	I	K	U	L
I	K	U	L	Á
K	U	L	Á	Š

J	A	R	O	M	Í			
A	R	O	M	Í	R			
P	E	T	R	O	N	E	L	
E	T	R	O	N	E	L	A	
B	A	R	T	O	L	O	M	Ě
A	R	T	O	L	O	M	Ě	J

Obr. 18: obrázek k úloze 1 ze strany 77

4.3.2 Učebnice nakladatelství ALTER

Učebnice nakladatelství ALTER pro třetí ročník je opět rozdělena do tří dílů. Stejně jako v učebnicích pro předchozí ročník, i zde se několik kombinatorických úloh nachází v sekci „tři oříšky“. V prvním díle se v této sekci vyskytují všechny kombinatorické úlohy. Ve druhém a ve třetím díle jich ale většinu najdeme v průběhu učebnice.

Číselná úlohy:

Úloha číslo 1 ze strany 57 (1. díl):

Pomocí číslic 2, 5, 6, 9 zapiš:

- a) všechna dvojčíselná čísla,

b) největší a nejmenší čtyřciferné číslo (každou číslici můžeš použít jen jednou).

Geometrická úlohy:

Úloha číslo 1 ze strany 59 (1. díl):

Vyznač čtyři různé body. Sestroj všechny přímky, které procházejí vždy dvěma z těchto bodů. Kolik přímek jsi narysoval?

Ostatní:

Úloha číslo 21 ze strany 28 (2. díl):

Jitka měla v pokladničce pouze dvacetikoruny a padesátikoruny. Honzík se jí zeptal, kolik má padesátikorun a kolik dvacetikorun. Jitka odpověděla: „Vypočítej si to. Řeknu ti jenom, že mám celkem 300 korun.“ Porad' Honzovi. Kolik možností objevíš?

4.4 Učebnice pro pátý ročník ZŠ

	Číselné úlohy	Geometrické úlohy	Ostatní úlohy	Celkem
Fraus	16	7	15	38
ALTER	0	1	0	1

Tabulka 4: počet kombinatorických úloh v učebnicích pro pátý ročník

Tabulka popisuje počet číselných, geometrických a ostatních úloh a také celkový počet kombinatorických úloh v učebnicích pro pátý ročník.

4.4.1 Učebnice nakladatelství Fraus

Učebnice pro pátý ročník od nakladatelství Fraus je opět pouze jednodílná.

Číselná úloha:

Úloha číslo 16 ze strany 9:

Z číslic 2, 3, 5, 6 a 8 vyberu tři a vytvořím z nich jedno dvojciferné číslo tak, aby součin tohoto čísla se zbylým jednociferným byl a) co největší, b) co nejmenší. Každou číslici mohu použít jen jednou.

Geometrická úloha:

Úloha číslo 22 ze strany 10:

Kolik různých kvádrů lze postavit ze: a) 4, b) 6, c) 12 krychlí? Postavím je, zapíšu plánem

a u každého kvádru určím jeho povrch.

Ostatní:

Úloha číslo 8 ze strany 69:

V tělocvičně je a) 12, b) 13, c) 17 sportovců. Do kolika stejně početných družstev se mohou rozdělit? Vysvětlím.

4.3.2 Učebnice nakladatelství ALTER

K analýze jsem zvolila již pouze jednodílnou učebnici.

Nalezla jsem v ní pouze jednu úlohu kombinatorického charakteru:

Úloha číslo 6 ze strany 148:

Sestav kvádry z:

- 54 krychlíček (např. $3 \cdot 3 \cdot 6$ nebo $2 \cdot 3 \cdot 9$)
- 60 krychlíček (např. $2 \cdot 6 \cdot 5$ nebo $3 \cdot 5 \cdot 4$)

Shrnutí analýzy:

Učebnice	Počet kombinatorických úloh
Učebnice Fraus pro 2. ročník	29
Učebnice ALTER pro 2. ročník	3
Učebnice Fraus pro 3. ročník	15
Učebnice ALTER pro 3. ročník	11
Učebnice Fraus pro 4. ročník	22
Učebnice ALTER pro 4. ročník	10
Učebnice Fraus pro 5. ročník	38
Učebnice ALTER pro 5. ročník	1

Tabulka 5: tabulka znázorňující počet kombinatorických úloh ve všech učebnicích pro daný ročník od nakladatelství Fraus a ALTER

V této tabulce již nenajdeme jednotlivé učebnice. Pro každý ročník jsme sečetla celkový počet kombinatorických úloh ve všech učebnicích pro daný ročník od jednotlivých nakladatelství. Je patrné, že v učebnicích od nakladatelství Fraus se

s úlohami kombinatorického charakteru setkáme častěji, než v učebnicích od nakladatelství ALTER.

5 Sbírka kombinatorických úloh pro 2. - 5. ročník ZŠ

5.1 sbírka úloh pro druhý ročník

Příklad 1

Malujeme obrázek, ale máme pouze 4 tempery: červenou, žlutou, modrou a bílou. Kolik nových barev můžeme dostat, pokud pokaždé smíme smíchat pouze dvě tempery?

Řešení:

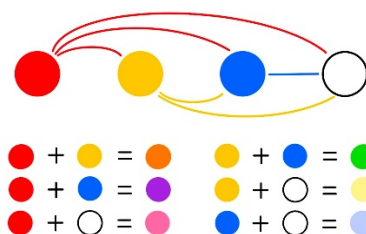
Začneme červenou barvou. Tu smícháme postupně se žlutou, poté s modrou a nakonec s bílou. Tím jsme ji smíchali se všemi barvami.

V dalším kroku uděláme to stejné s barvou žlutou. Smícháme ji nejprve s modrou barvou a následně s bílou. Tím jsme žlutou také smíchali se všemi barvami, neboť s červenou jsme ji smíchali již v prvním kroku.

Následuje barva modrá. Tu jsme v prvním kroku již smíchali s červenou, ve druhém se žlutou a už zůstala pouze poslední možnost, a to smíchat ji s bílou.

Bílou barvu jsme již v předešlých krocích smíchali se všemi ostatními barvami.

Úlohu si můžeme nakreslit:



Obr. 19: obrázek k řešení úlohy číslo 1 pro druhý ročník

Máme tak 6 nových barev.

Příklad 2

Maminka věšela prádlo. Vedle sebe na jednu šňůru pověsila dvě modré a jednu růžovou osušku. Kolika různými způsoby je může maminka pověsit? Osušky stejné barvy od sebe nerozlišujeme.



Obr. 20: Obrázek k zadání úlohy číslo 2 pro druhý ročník

Řešení:

Úlohu budeme řešit tak, že budeme určovat polohu jedné růžové osušky a na ostatní volná místa pověsíme modré osušky.

Růžovou osušku můžeme pověsit buď doleva, dostaneme možnosti RMM, nebo doprostřed a dostaneme možnost MRM, nebo doprava a dostaneme poslední možnost MMR.

Maminka má tedy celkem tři možnosti, jak osušku na šňůru pověsit.

Příklad 3

Tři papoušci seděli na větvi. Jeden byl modrý, jeden zelený a jeden červený. Jak se mohli posadit?



Obr. 21: obrázek k zadání úlohy číslo 3 pro druhý ročník

Řešení:

Máme tři papoušky: modrého M, zeleného Z a červeného Č. Budeme postupovat tak, že nejdříve určíme místo modrého papouška a následně dvou zbývajících.

Pokud modrého posadíme doleva, může vedle něj sedět buď zelený papoušek a tím pádem červený bude vpravo, nebo vedle modrého posadíme červeného a tak by zelený seděl vpravo. Dostali jsme tak tyto dvě možnosti: M Z Č a M Č Z.

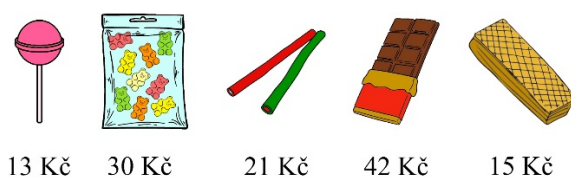
Pokud bychom modrého papouška posadili doprostřed, můžeme pak buď posadit zeleného doleva, a tak bude červený sedět vpravo, nebo posadíme zeleného doprava a červený tak bude vlevo. Dostaneme: Z M Č a Č M Z.

Nakonec posadíme modrého papouška doprava. Zeleného můžeme posadit buď doprava a červený tak zůstane uprostřed, nebo posadíme zeleného doprostřed a červený tak bude vlevo. Dostaneme možnosti: Z Č M a Č Z M.

Našli jsme 6 možností, jak si mohou papoušci sednout.

Příklad 4

Přišli jsme do obchodu a chceme si koupit sladkosti. Lízátko stojí 13 korun, balíček gumových medvídků 30 korun, pendrek 21 korun, tabulka čokolády stojí 42 korun a jedna sušenka stojí 15 korun. Které sladkosti si mohu koupit, pokud mám na útratu 50 korun? Od každého druhu si mohu vzít pouze jeden kus. Vypiš všechny možnosti.



Obr. 22: obrázek k zadání úlohy číslo 4 pro druhý ročník

Řešení:

K řešení úlohy nám pomůže tabulka:

lízátko	balíček medvídků	pendrek	tabulka čokolády	sušenka	zaplatím celkem
X					13 Kč
	X				30 Kč
		X			21 Kč
			X		42 Kč
				X	15 Kč
X	X				43 Kč
X		X			34 Kč

X				X	28 Kč
X		X		X	49 Kč
	X			X	45 Kč
		X		X	36 Kč

Tabulka 6: tabulka znázorňuje možná řešení úlohy číslo 4 pro druhý ročník

Celkem tedy dostáváme 11 možností, jak si sladkosti nakoupit.

Příklad 5

Určete všechna možná řešení následujícího příkladů. Nezapomeňte, že můžete pracovat i s 0.

$$\text{žluté} \leq \text{zelené} < \text{modré}$$

$$\text{žluté} + \text{zelené} + \text{modré} = 10$$

Řešení:

Začneme si tím, že na žluté místo dosadíme 0. Víme, že na zelené místo můžeme dosadit číslo stejné jako žluté, nebo větší. Nejprve tedy také dosadíme 0 a následně budeme po jedné přidávat a vždy dopočítáme zbylé modré číslo, které musí být větší, než zelené. Vyjdou nám tyto možnosti:

$$0+0+10 \quad 0+1+9 \quad 0+2+8 \quad 0+3+7 \quad 0+4+6$$

Dále už pokračovat nebudeme, neboť bychom porušili podmínku $\text{zelené} < \text{modré}$

Stejným způsobem budeme pokračovat i pro číslo 1. Dostaneme tyto možnosti:

$$1+1+8 \quad 1+2+7 \quad 1+3+6 \quad 1+4+5$$

$$\text{Stejným způsobem i pro číslo 2:} \quad 2+2+6 \quad 2+3+5$$

$$\text{A pro číslo 3:} \quad 3+3+4$$

Pokud bychom pokračovali a na žluté místo dosadili 4, pak by nejmenší možné číslo na zelené místo byla také 4 a na modré by zbyla 2, což by opět nesplňovalo podmínku $\text{zelené} < \text{modré}$

Příklad má 12 řešení.

Příklad 6

Na den matek chceme mamince koupit tulipány. Máme dostatek peněz na 5 tulipánů, všechny barvy stojí stejně. V květinářství mají žluté a fialové tulipány. Jak je můžeme zkombinovat? Určete všechny možnosti.



Obr. 23: obrázek k zadání úlohy číslo 6 pro druhý ročník

Řešení:

Budeme postupovat tak, že si nejprve vybereme kytici pouze žlutých tulipánů, a následně budeme vždy jeden žlutý ubírat a jeden fialový přidávat, až se dostaneme k tomu, že nám zbydou jen samé fialové tulipány.

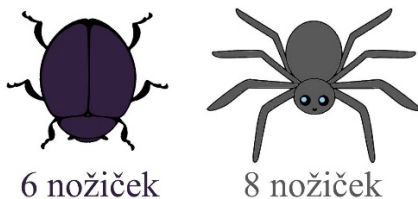
Opět budeme žluté označovat písmenem Ž, fialové písmenem F. Dostaneme tyto možnosti:

ŽŽŽŽŽ ŽŽŽŽF ŽŽŽFF ŽŽFFF ŽFFFF FFFFF

Dostáváme celkem šest možností, jak tulipány mamince vybrat.

Příklad 7

Na procházce lesem jsme zahlédli několik pavouků a brouků. Cestou jsme jim počítali nožičky. Na konci procházky jsme napočítali celkem 46 nožiček, ale zapomněli jsme, kolik jsme potkali pavouků a kolik brouků. Kolik brouků a pavouků jsme mohli vidět?



Obr. 24: obrázek k zadání úlohy číslo 7 pro druhý ročník

Řešení:

Připomeneme si, že brouci mají 6 nožiček a pavouci 8 nožiček. Budeme postupovat tak, že nejprve začneme s počtem pavouků 1, postupně budeme po jednom přidávat a dopočítávat počet brouků. Nemůžeme mít takovou možnost, ve které by nebyl ani jeden brouk, nebo ani jeden pavouk, neboť ze zadání víme, že jsme potkali oboje.

Pokud jsme potkali pouze jednoho pavouka, pak nám zbyde $46 - 8 = 38$ nožiček. Pokud bychom 38 nožiček chtěli rozdělit mezi brouky, počítali bychom $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36$ a dvě nožičky by nám zbyly. Můžeme tedy říct, že pouze jednoho pavouka jsme potkat nemohli.

Pokud bychom potkali dva pavouky, měli bychom dohromady $8 + 8 = 16$ nožiček. Tak na brouky zbyde $46 - 16 = 30$ nožiček, a to po dopočítání $6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$ víme, že bude 5 brouků.

Pokud bychom potkali tři pavouky, měli by dohromady $8 + 8 + 8 = 24$ nožiček. Na brouky by zbylo $46 - 24 = 22$ nožiček, což není možné.

Pokud bychom potkali 4 pavouky, dostaneme $8 + 8 + 8 + 8 = 32$ nožiček a na brouky nám zbyde $46 - 32 = 14$ nožiček, což opět není možné.

Pokud bychom potkali 5 pavouků, dostali bychom $8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$ nožiček, zbývá $46 - 40 = 6$ nožiček, tj. jeden brouk.

Tím jsme dopočítali všechny možnosti. Pro přehlednost si je ještě vypíšeme. Mohli jsme potkat: dva pavouky a šest brouků nebo pět pavouků a jednoho brouka.

Příklad 8

Kolik různých obdélníkových jednopodlažních staveb můžeme postavit z 12 kostek? Na stavbu se díváme pouze z jednoho směru.

Řešení:

Začneme tak, že všech 12 kostek postavíme do jedné řady vedle sebe.

Dále můžeme kostky postavit do dvou řad za sebe a tak budeme mít 6 kostek vedle sebe.

Také můžeme kostky postavit do tří řad a vedle sebe budeme mít 4 kostky.

Pokud postavíme kostky do čtyř řad, budou vedle sebe vždy 3 kostky.

Do pěti řad kostky postavit nemůžeme, neboť by nám některé kostky zbyly.

Kostky můžeme postavit do šesti řad a budou vždy 2 kostky vedle sebe.

Nemůžeme kostky postavit do sedmi, osmi, devíti, desíti ani jedenácti řad, protože by nám opět kostky zbyly.

Poslední možností je všechny kostky za sebe do dvanácti řad.

Máme tedy 6 možností, jak postavit obdélníkovou jednopodlažní stavbu.

Příklad 9

Jaké částky můžeme beze zbytku zaplatit, když máme dvě pětikoruny, dvě dvoukoruny a jednu korunu?



Obr. 25: obrázek k zadání úlohy číslo 9 pro druhý ročník

Řešení:

Začneme tak, že použijeme pouze jednu minci. Tak mohu beze zbytku zaplatit:

1 Kč 2 Kč 5 Kč

Dále pokud bychom použili mince dvě, dostali bychom tyto možnosti:

$1 + 2 = 3 \text{ Kč}$ $2 + 2 = 4 \text{ Kč}$ $5 + 5 = 10 \text{ Kč}$

$1 + 5 = 6 \text{ Kč}$ $2 + 5 = 7 \text{ Kč}$

Pokud použijeme tři mince, dostaneme tyto možnosti:

$1 + 2 + 2 = 5 \text{ Kč}$ (tuto částku jsme schopni zaplatit i pomocí jedné pětikorunové mince)

$1 + 2 + 5 = 8 \text{ Kč}$

$$2 + 2 + 5 = 9 \text{ Kč}$$

$$1 + 5 + 5 = 11 \text{ Kč}$$

$$2 + 5 + 5 = 12 \text{ Kč}$$

Pokud budeme používat čtyři mince, dostaneme tyto možnosti:

$$1 + 2 + 2 + 5 = 10 \text{ Kč (tuto částku jsme schopni zaplatit i pomocí dvou pětikorunových mincí)}$$

$$1 + 2 + 5 + 5 = 13 \text{ Kč}$$

$$2 + 2 + 5 + 5 = 14 \text{ Kč}$$

A nakonec použijeme všech pět mincí:

$$1 + 2 + 2 + 5 + 5 = 15 \text{ Kč.}$$

Celkem dostáváme 15 možností.

Příklad 10

V neděli jsme jeli k babičce na oběd. K omáčce uvařila dva druhy knedlíků – houskové a bramborové. Jak si knedlíky můžu zkombinovat, pokud vím, že sním 4 knedlíky?

Řešení:

Začneme tak že si dáme všechny čtyři knedlíky houskové H a budeme postupně přidávat jeden bramborový B a jeden houskový ubírat, až se dostaneme k tomu, že budeme mít všechny bramborové. Naše možnosti budou vypadat takto:

HHHH HHHB HHBB HBBB BBBB

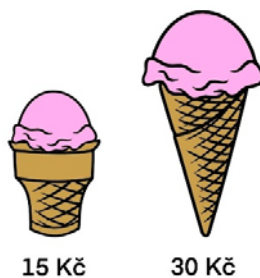
Máme tedy pět možností, jak si knedlíky zkombinovat.

5.2 Sbíрка úloh pro třetí ročník

Příklad 1

U stánku se zmrzlinou stojí malý kopeček 15 Kč, velký stojí 30 Kč. Kolika způsoby mohu za zmrzlinu zaplatit, pokud si dám a) jeden malý kopeček; b) jeden

velký kopeček? Částku chceme zaplatit přesně. Budeme používat mince v hodnotách 5 Kč, 10 Kč a 20 Kč.



Obr. 25: obrázek k zadání úlohy číslo 1 pro třetí ročník

Řešení:

K řešení nám pomůže tabulka. Do první řádky zapíšeme hodnoty mincí, které máme k dispozici. Do dalších řádků budeme zapisovat počty mincí, které můžeme použít.

a) kupujeme si jeden malý kopeček

5 Kč mince	10 Kč mince	20 Kč mince
1x	1x	
3x		

Tabulka 7: tabulka znázorňuje možná řešení příkladu číslo 1a) pro druhý ročník

Dostáváme dvě možnosti, jak za malý kopeček zaplatit.

b) kupujeme si jeden velký kopeček

5 Kč mince	10 Kč mince	20 Kč mince
6x		
4x	1x	
2x	2x	
2x		1x
	3x	
	1x	1x

Tabulka 8: tabulka znázorňuje možná řešení příkladu číslo 1b) pro druhý ročník

Dostáváme šest možností, jak za velký kopeček můžeme zaplatit.

Příklad 2

Jaké částky můžeme beze zbytku zaplatit, když máme jednu dvěstěkorunu, dvě stokoruny, jednu padesátikorunu a jednu desetikorunu?

Řešení:

Máme tedy tyto bankovky: 200 Kč, 100 Kč, 100 Kč, 50 Kč, 10 Kč

Nejprve použijeme každou bankovku samostatně a získáme tyto částky: 200 Kč, 100 Kč, 50 Kč a 10 Kč.

Pokud bychom použili dvě bankovky, můžeme je zvolit takto:

$$200 + 100 = 300 \text{ Kč} \quad \cancel{100 + 100 = 200 \text{ Kč}} \quad \cancel{100 + 50 = 150 \text{ Kč}} \quad 50 + 10 = 60 \text{ Kč}$$

$$\cancel{200 + 100 = 300 \text{ Kč}} \quad 100 + 50 = 150 \text{ Kč} \quad \cancel{100 + 10 = 110 \text{ Kč}}$$

$$200 + 50 = 250 \text{ Kč} \quad 100 + 10 = 110 \text{ Kč}$$

$$200 + 10 = 210 \text{ Kč}$$

Vyškrtli jsme částky, které se nám opakují. Ani možnost $100 + 100$ nemusíme vypisovat, protože bychom dostali částku 200 Kč, kterou jsme ale schopni zaplatit i jednou dvěstěkorunovou bankovkou.

Dále budeme používat tři bankovky:

$$200 + 100 + 100 = 400 \text{ Kč} \quad \cancel{100 + 100 + 50 = 250 \text{ Kč}} \quad \cancel{100 + 50 + 10 = 160 \text{ Kč}}$$

$$200 + 100 + 50 = 350 \text{ Kč} \quad \cancel{100 + 100 + 10 = 210 \text{ Kč}}$$

$$200 + 100 + 10 = 310 \text{ Kč} \quad 100 + 50 + 10 = 160 \text{ Kč}$$

$$\cancel{200 + 100 + 50 = 350 \text{ Kč}}$$

$$\cancel{200 + 100 + 10 = 310 \text{ Kč}}$$

$$200 + 50 + 10 = 260 \text{ Kč}$$

Také můžeme použít čtyři bankovky:

$$200 + 100 + 100 + 50 = 450 \text{ Kč}$$

$$200 + 100 + 100 + 10 = 410 \text{ Kč}$$

$$200 + 100 + 50 + 10 = 360 \text{ Kč}$$

$$200 + 100 + 50 + 10 = 360 \text{ Kč}$$

$$100 + 100 + 50 + 10 = 260 \text{ Kč}$$

A nakonec použijeme všechny bankovky:

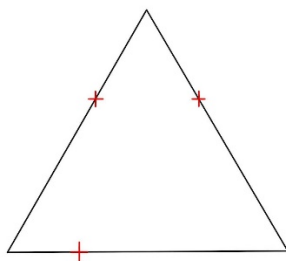
$$200 + 100 + 100 + 50 + 10 = 460 \text{ Kč}$$

Po vyškrtání všech hodnot, které se nám opakují, zjistíme, že jsme schopni zaplatit 19 částek.

K úloze můžeme vymyslet i druhý způsob řešení, kdy již nebudeme postupovat podle počtu vybraných bankovek, ale rovnou budeme hledat možné částky od nejmenší. Najdeme částky: 10, 50, 60, 100, 110, 150, 160, 200, 210, 250, 260, 300, 310, 350, 360, 400, 410, 450 a 460 Kč.

Příklad 3

Máme daný rovnostranný trojúhelník se třemi body. Tyto tři body spojíme. Vznikne nám obrazec, který budeme chtít vybarvit tak, aby prostřední trojúhelník měl vždy jinou barvu než ostatní trojúhelníky. Barva tří ostatních trojúhelníků se může opakovat. Kolika způsoby mohu obrazec vybarvit, pokud mám k dispozici žlutou, modrou a fialovou pastelku?

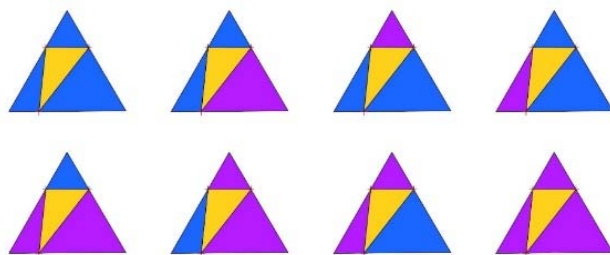


Obr. 26: obrázek k zadání úlohy číslo 3 pro třetí ročník

Řešení:

Nejprve si určíme, kolik dostaneme trojúhelníků, pokud pro prostřední trojúhelník použijeme např. žlutou barvu. Na ostatní trojúhelníky nám tedy zbyde barva modrá a fialová a ty různě zkombinujeme.

Všechna možná řešení nám ukazuje obr. č. 27:



Obr. 27: obrázek k řešení úlohy číslo 3 pro třetí ročník

Pokud za prostřední barvu zvolíme žlutou, dostáváme 8 možností, jak obrazec vybarvit.

Dále si uvědomíme, že pokud bychom za prostřední barvu zvolili modrou nebo fialovou, možností by bylo stejně.

Celkem máme tedy $3 \cdot 8 = 24$ možností.

Příklad 4

Balíme si svačinu na výlet. Doma máme dva banány, dvě jablka, dvě hrušky a dvě broskve. Kolika způsoby mohu ovoce vybrat, pokud si chci vzít k svačině dva kusy? Jak se počet způsobů změní, pokud nechci, aby oba kusy ovoce byly stejné?



Obr. 28: obrázek k zadání úlohy číslo 4 pro třetí ročník

Řešení:

Budeme vybírat dvojice ovoce tak, že začneme od leva a budeme se posouvat směrem doprava. Vždy k ovoci budeme moct vybrat buď druhé od stejného druhu, nebo jedno z dvojice jiného druhu.

Začneme tedy u banánů. K banánu si mohu vybrat: druhý banán, jablko, hrušku nebo broskev.

Posuneme se k jablkům. K jablku si mohu dále vybrat: druhé jablko, hrušku nebo broskev.

Dále se posuneme ke hruškám. Ke hrušce mohu zvolit: druhou hrušku nebo broskev.

Nakonec se dostaneme k broskvím. Již nám zbyla poslední možnost, co k broskvi zvolit, a to je druhá broskev.

Máme tedy 10 možností, jak si ovoce vybrat.

Pokud nás zajímá, kolik existuje možností, kdy nebudu chtít, aby ovoce byla stejná, stačí od počtu všech možností odečíst ty, které nechceme. Takové možnosti jsou čtyři: dva banány, dvě jablka, dvě hrušky a dvě broskve. Odečteme tedy tyto čtyři možnosti od všech deseti možností a dostáváme šest možností.

Příklad 5

Na den dětí uspořádala škola akci pro děti z prvního stupně. Dorazilo 18 dětí z první třídy, 24 dětí z druhé třídy, 25 dětí ze třetí třídy, 20 dětí ze čtvrté třídy a 21 dětí z páté třídy.

a) Do kolika stejně početných skupin se mohly rozdělit děti z každé třídy samostatně?

b) Do kolika stejně početných skupin se mohly rozdělit děti ze všech tříd dohromady?

Řešení:

Vypočítáme nejdříve příklad za a).

Začneme rozdělením první třídy do stejně početných skupin. V první třídě je 18 žáků. První možnost by byla nechat třídu jako jednu velkou skupinu osmnácti dětí. Také bychom mohli každého nechat samostatně, a dostali bychom 18 skupin po jednom dítěti.

Pokud bychom třídu chtěli rozdělit na dvě skupiny, vydělili bychom $18 : 2 = 9$. Můžeme tedy třídu rozdělit na dvě skupiny po devíti dětech. V tuto chvíli se také můžeme uvědomit, že bychom mohli výpočet pozměnit a řekneme si, že dvojka představuje počet dětí a devítka počet skupin. Tudíž bychom dostali devět skupin po dvou dětech.

Stejným způsobem budeme pokračovat i nadále. Pokud budeme chtít z osmnácti dětí utvořit tři skupiny, vydělíme $18 : 3 = 6$. Opět tedy můžeme dostat tři skupiny dětí po šesti, nebo šest skupin po čtyřech.

Pokračovali bychom vydělením čtyřmi a pěti, zjistili bychom, že 18 není dělitelná těmito čísly beze zbytku. Následně bychom vydělili šesti, ale tuto možnost máme již v předešlém výpočtu. Dostaly jsme tedy všechny možnosti. Řešením úlohy je počet všech dělitelů čísla 18.

Stejně budeme postupovat u všech dalších tříd. Pro kratší zápis budu následující třídy vypisovat pomocí vzoru: počet skupin x počet dětí.

Druhá třída (24 dětí)

1 x 24 24 x 1

2 x 12 12 x 2

3 x 8 8 x 3

4 x 6 6 x 4

Třetí třída (25 dětí)

1 x 25 25 x 1

5 x 5

Čtvrtá třída (20 dětí)

1 x 20 20 x 1

2 x 10 10 x 2

5 x 4 4 x 5

Pátá třída (21 dětí)

1 x 21 21 x 1

3 x 7 7 x 3

Dostaneme: pro první třídu šest možností, pro druhou třídu osm možností, pro třetí třídu tři možnosti, pro čtvrtou třídu šest možností a pro pátou třídu čtyři možnosti.

V příkladu b) nejprve sečteme počet všech dětí: $18 + 24 + 25 + 20 + 21 = 108$. Zbytek řešení bude stejný, jako v předešlém případě. Opět vypíši již pouze možnosti ve tvaru počet skupin x počet dětí:

1 x 108 2 x 54 3 x 36 4 x 27 6 x 18 9 x 12

108 x 1 54 x 2 36 x 3 27 x 4 18 x 6 12 x 9

Je dvanáct možností, jak děti ze všech tříd dohromady rozdělit.

Příklad 6

Kolik trojčiferných čísel můžeme dostat z číslic 1, 2, 3, 4 pokud žádnou číslici nesmíme použít vícekrát? Všechna trojčiferná čísla vypiš od nejmenšího k největšímu.

Řešení:

Vybereme si 3 číslice a kombinujeme jejich pořadí, dostaneme 6 možností. Pro další jinou trojici číslic dostaneme opět 6 různých možností, atd. Tři číslice můžeme vybrat čtyřmi způsoby, neboli vždy jednu číslici z nabídky vynecháme a zbylé tři budeme kombinovat. Celkem dostaneme $4 \cdot 6 = 24$ trojčiferných čísel.

Všechny čísla vypsaná od nejmenšího k nejvyššímu vidíme zde:

123	213	312	412
124	214	314	413
132	231	321	421
134	234	324	423
142	241	341	431
143	243	342	432

Příklad 7

Kolik nových slov může vzniknout přeházením písmen slova a) PES; b) SLON?

Řešení:

a) PES

Budeme se na slovo PES nyní dívat jako na naši nabídku písmenek. Na první místo postupně postavíme každé z písmenek a můžeme si ho v naší nabídce zakrýt prstem. Zbylá dvě písmenka nejprve zapíšeme v pořadí, ve kterém jsou, a poté je prohodíme, dostaneme nejprve ES a následně SE. Tak dostaneme jedno nové slovo PSE. Pokud zakryjeme písmenko E, ze zbylých písmenek můžeme utvořit PS a SP. Takže vzniknou

slova EPS a ESP. Nakonec si zakryjeme písmenko S a dostaneme PE a EP, takže máme nové slova SPE a SEP. Vytvořili jsme pět nových slov.

b) SLON

Pokud bychom v předchozím úkolu zahrnuli do našich možností i původní slovo PES, zjistili bychom, že ze tří různých písmenek můžeme vytvořit šest různých třípísmenkových slov. Nyní máme písmenka čtyři a budeme vytvářet čtyřpísmenková slova. Můžeme si ale jednoduše pomoci tak, že opět jedno písmenko zakryjeme prstem, postavíme ho na první místo a ze zbylých tří písmenek budeme tvořit třípísmenkové slovo. Těch již víme, že utvoříme šest. Prstem si můžeme zakrýt vždy jedno ze čtyř písmen a ke každému z nich vytvoříme šest třípísmenkových slov. Dostaneme tedy výpočet $4 \cdot 6 = 24$ čtyřpísmenkových slov ze čtyř různých písmenek. Jedno z nich ale bude naše původní slovo SLON, proto ho od možností odečteme a dostáváme 23 nových čtyřpísmenkových slov.

Příklad 8

Narýsujeme si čtverec a popíšeme vrcholy ABCD. Následně spojíme vrchol A s vrcholem C a vrchol B s vrcholem D a dostaneme tak úhlopříčky čtverce. Představíme si, že každá ze stran čtverce a jeho úhlopříčky jsou nyní silnice. Jakými způsoby je možné se dostat z vrcholu D k vrcholu B? Po žádné z cest nemůžeme jet dvakrát. Pokud se vydáme po úhlopříčce, musíme ji vždy přejít celou. Určete všechny možnosti. Která z cest je nejkratší? Která je nejdelší?

Řešení:

Začínáme v bodě D. Z bodu D vedou tři cesty: doprava do bodu C, dolů doprava do bodu B a dolů do bodu A. Postupně se vydáme po všech těchto cestách.

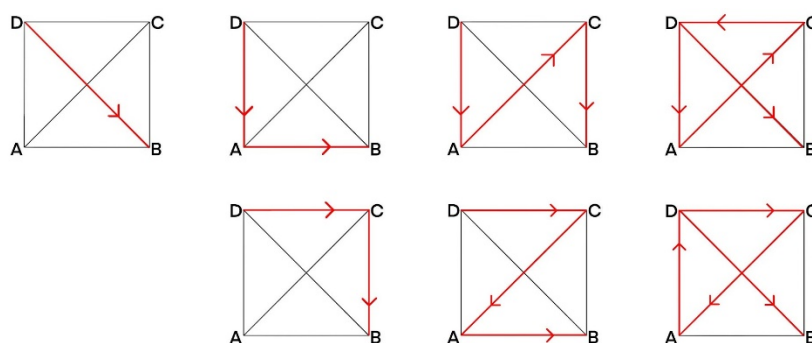
Můžeme se rovnou vydat šikmo dolů doprava a dostaneme se do bodu B, což je první a nejkratší z našich cest: $D \rightarrow B$.

Pokud bychom se vydali dolů do bodu A, zjistíme, že z bodu A vedou další dvě cesty: jedna doprava do bodu B a druhá šikmo doprava nahoru do bodu C (cestou do bodu D již zpátky nemůžeme, po této cestě jsme již šli). Vydáme-li se doprava do bodu B, našli jsme druhou cestu, jak se z bodu D do bodu B dostat: $D \rightarrow A \rightarrow B$. Pokud bychom

se z bodu A vydali druhou cestou šikmo doprava nahoru a dostali se do bodu C, opět uvidíme, že z bodu C povedou dvě cesty: dolů do bodu B a doleva zpět do bodu D. Pokud půjdeme dolů, našli jsme třetí cestu, kterou se můžeme z bodu D do bodu B dostat: $D \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B$. Pokud se z bodu C vydáme do bodu D, nyní už z něj vede pouze jediná cesta, a to šikmo dolů doprava do bodu B. Tak jsme našli další cestu: $D \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$.

Stejně budeme postupovat, pokud se na začátku cesty vydáme doprava do bodu C. První cesta povede z C do bodu B: $D \rightarrow C \rightarrow B$, druhá by z C vedla do bodu A, kde bychom se mohli vydat buď do bodu B: $D \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B$, nebo nahoru do bodu D, odkud jediná cesta opět povede do bodu B: $D \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B$.

Našli jsme tak všechny cesty. Je jich sedm, nejkratší cesta vede přímo z bodu D do bodu B. Nejdelší cesty jsou dvě. Poznáme je tak, že se v jejich zápisu vyskytuje nejvíce šipek. Jsou to cesty: $D \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ a $D \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B$.



Obr. 29: obrázek k řešení úlohy číslo 8 pro třetí ročník

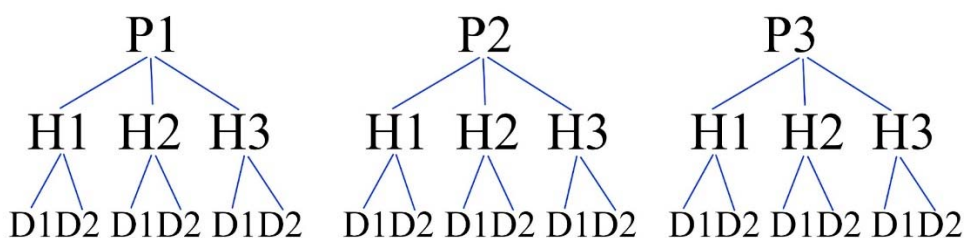
Příklad 9

V restauraci měli na výběr ze tří druhů polévek, tří druhů hlavního chodu a dvou dezertů. Kolik nejvíce hostů by mohlo přijít, pokud by číšníci měli za úkol každému naservírovat takový oběd, jaký nemá nikdo jiný?

Řešení:

Polévky si označíme jako P1, P2 a P3, hlavní chody jako H1, H2 a H3 a dezerty jako D1 a D2.

K řešení úlohy si pomůžeme stromovým grafem:



Obr. 30: obrázek k řešení úlohy číslo 9 pro třetí ročník

Ke každé z polévek budeme nejprve vybírat jeden ze tří hlavních chodů, dostaneme $3 \cdot 3 = 9$ možností. Ke každé dvojici polévky a oběda pak ještě přiřadíme jeden ze dvou dezertů, dostáváme $9 \cdot 2 = 18$ možností.

Do restaurace tak může přijít 18 lidí a každý by dostal originální oběd.

Příklad 10

Často se nám stává, že nám pračka „sežere“ jednu ponožku. Proto teď máme šuplík pro opuštěné ponožky. Najdeme v něm jednu modrou, jednu černou, jednu bílou, jednu zelenou, jednu fialovou a jednu žlutou ponožku. Kolik párů mohu z těchto ponožek poskládat, pokud mi nevadí, že budu mít každou ponožku jinou? Najděte všechny možnosti.



Obr. 31: obrázek k zadání úlohy číslo 10 pro třetí ročník

Řešení:

Budeme postupně utvářet dvojice ponožek.

K modré ponožce můžeme přidat buď černou, nebo bílou, nebo zelenou, nebo fialovou, nebo žlutou ponožku. Tak nám může vzniknout pět párů.

Dále budeme utvářet páry s černou ponožkou. Modrou ponožku vynecháme, tato možnost se nám již objevila. Můžeme k ní přidat bílou, nebo zelenou, nebo fialovou, nebo žlutou ponožku. Tak máme další čtyři možnosti.

K bílé ponožce nebudeme přidávat modrou a černou ponožku, tyto páry jsme již dostali. Můžeme přidat zelenou, nebo fialovou, nebo žlutou ponožku. Máme nové tři možnosti.

K zelené ponožce můžeme přidat již pouze fialovou, nebo žlutou ponožku a dostáváme dvě nové možnosti.

Poslední možnost, která nám zbývá, je pár fialové a žluté ponožky.

Všechny možnosti nyní sečteme a dostaneme: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ možností, jak poskládat ponožky do párů.

5.3 Sbírka úloh pro čtvrtý ročník

Příklad 1

Jak zaplatíš v obchodě 2700 korun, pokud u sebe máš pouze 500 Kč bankovky a 200 Kč bankovky a chceš platit přesně? Najdi všechny možnosti.

Řešení:

K řešení příkladu nám pomůže tabulka. Do prvního řádku zapíšeme hodnoty bankovek, které můžeme použít. Do dalších řádků budeme zapisovat, kolikrát danou bankovku použijeme.

500 Kč bankovky	200 Kč bankovky
1x	11x
3x	6x
5x	2x

Tabulka 9: tabulka popisuje možnosti, kterými lze zaplatit částku 2700 Kč pomocí bankovek v hodnotách 500 Kč a 200 Kč

Máme tři možnosti, jak částku přesně zaplatit.

Příklad 2

Máme čísla 9, 8, 7, 6. Kolik a) trojčiferných, b) čtyřčiferných čísel je možné z těchto číslic dostat? Žádnou z číslic nesmíme opakovat.

Řešení:

a) tvoříme trojčiferná čísla

Vynecháme ze zápisu číslu 9 a zbývající tři číslice můžeme uspořádat následujícím způsobem: 876, 867, 786, 768, 687, 678. Postupně vynecháme i číslice 8, 7 a 6 a zbývající číslice uspořádáme šesti způsoby. Dostaneme tedy $4 \cdot 6 = 24$ trojčiferných čísel.

b) čtyřčiferná čísla

Na první pozici vložíme číslu 9 a na zbývajících pozicích opět můžeme číslice uspořádat šesti způsoby. Postupně vložíme na první pozici číslice 8, 7 a 6 a zbývající číslice uspořádáme. Dostaneme tedy $4 \cdot 6 = 24$ čtyřčiferných čísel.

(9) 876 (8) 976 (7) 986 (6) 987

(9) 867 (8) 967 (7) 968 (6) 978

(9) 786 (8) 796 (7) 896 (6) 897

(9) 768 (8) 769 (7) 869 (6) 879

(9) 687 (8) 697 (7) 698 (6) 798

(9) 678 (8) 679 (7) 689 (6) 789

Příklad 3

Kolik nových slov můžeme dostat, pokud změníme pořadí písmen ve slově a) KRK; b) KOLO?

Řešení:

a) KRK

Ve slově KRK se nám dvakrát opakuje písmenko K. Je důležité si říci, že stejná písmenka od sebe nebudeme odlišovat. To znamená, že slovo **KRK** a **KRK** jsou stejná, i pokud jsme písmenka K prohodili.

Budeme se tedy soustředit na písmenko R, které máme pouze jednou. To můžeme umístit buď na první místo a zbytek obsadí písmenko K: RKK, nebo ho umístit doprostřed a zbytek obsadí písmenko K: KRK, nebo ho umístit doprava a zbytek obsadí písmenko K: KKR. Vznikly nám tak dvě nová slova, neboť slovo KRK je stejné, jako původní slovo, proto ho do nových slov nepočítáme.

b) KOLO

Připomeneme si, že dvě písmenka O od sebe nebudeme odlišovat. Slovo má čtyři místa a dvě z nich obsadí právě písmenka O. Pojdme nejprve udělat tento krok:

O O _ _ O _ O _ O _ _ O _ O O _ _ O _ O _ _ O O

Na volná místa budeme dále obsazovat písmenka K a L, nejprve v tomto pořadí, poté je prohodíme:

O O K L O K O L O K L O K O O L ~~K O L O~~ K L O O
O O L K O L O K O L K O L O O K L O K O L K O O

Dostali jsme dvanáct slov, z toho jedenáct nových.

Příklad 4

Děláme si ke svačině toasty. Máme možnost přidat tyto ingredience: kečup, šunku, sýr, slaninu a rajčata. Každou z ingrediencí můžeme přidat, ale nemusíme. Musíme vždy přidat alespoň jednu z ingrediencí. Kolik různých toastů můžeme udělat?



Obr. 32: obrázek k zadání úlohy číslo 4 pro čtvrtý ročník

Řešení:

Začneme tak, že si do toastu dáme pouze jednu z ingrediencí. Dostaneme tedy tyto možnosti: toast pouze s kečupem, nebo pouze se šunkou, nebo pouze se sýrem, nebo pouze se slaninou, nebo pouze s rajčaty.

Pokud přidáme dvě ingredience, můžeme je zkombinovat takto:

kečup + šunka	šunka + sýr	sýr + slanina	slanina + rajčata
kečup + sýr	šunka + slanina	sýr + rajčata	
kečup + slanina	šunka + rajčata		

kečup + rajčata

Pokud budeme chtít tři ingredience, počet možností bude stejný, jako kdybychom vždy dvě ingredience vynechali. Dostaneme tyto možnosti:

Pro zjednodušení označíme kečup K, šunku Š, sýr Sý, slaninu Sl a rajčata R.

K Š Sý K Sý Sl K Sl R Š Sý Sl Š Sl R Sý Sl R

K Š Sl K Sý R Š Sý R

K Š R

Pokud použijeme čtyři ingredience, dostaneme stejný počet možností, jako kdybychom vždy jednu vynechali, tedy pět možností:

K Š Sý Sl K Š Sý R K Š Sl R K Sý Sl R Š Sý Sl R

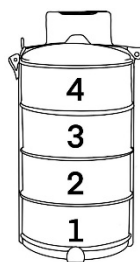
Nakonec použijeme všechny ingredience a dostaneme jednu jedinou možnost.

Všechny možnosti sečteme: $5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$ možností, jak připravit toasty.

5) Babička si chodila každý den do jídelny pro oběd s ešusem. Její ešus má čtyři díly na čtyři části obědu – jedna část na polévku, jedna část na přílohu, jedna část na maso a jedna část na dezert. Díly do sebe pasují libovolně, to znamená, že je můžeme proházet a ešus bude stále možné složit. Kolika způsoby mohou ešus v jídelně poskládat, pokud a) mohou prohazovat všechny díly; b) bude studený dezert, a proto ho budou chtít nechat vždy vespod, aby se nezahříval teplým jídlem?

Začneme příkladem a), kdy můžeme prohazovat všechny díly.

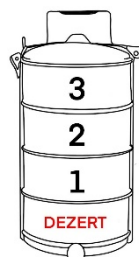
Již u příkladu s vytvářením čtyřciferných čísel ze čtyř číslic jsme si vysvětlili, jak můžeme výpočet provést jednodušeji a bez vypisování všech možností. Stejný postup můžeme použít i zde. Místo čtyř volných míst v čtyřciferném čísle budeme nyní obsazovat čtyři volné díly ešusu a na místo čtyř číslic v nabídce nám nyní poslouží čtyři součásti oběda.



Obr. 33: obrázek k řešení úlohy číslo 5a) pro čtvrtý ročník

Do horního dílu ešusu můžeme umístit jakékoliv ze čtyř částí oběda, proto si můžeme zapsat do horního dílu 4. Do druhého dílu nám zbyly už jen tři možnosti, první už jsme umístili nahoru. Zapišeme do druhého dílu ešusu 3 možnosti. Do třetího dílu máme na výběr pouze ze dvou částí obědu, proto zapišeme 2. Na poslední místo nám zbyla poslední část oběda a zapišeme jedničku. Čísla mezi sebou vynásobíme: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ možností. S dětmi je možné si všechny možnosti systematicky vyjádřit.

b) v dolním díle bude dezert



Obr. 34: obrázek k řešení úlohy číslo 5b) pro čtvrtý ročník

Máme tedy jedinou možnost do spodního dílu, kam zapišeme 1. Do horního dílu nám tak zbyly už jen tři možnosti, neboť dezert bude v dolním díle. Do horního dílu tedy zapišeme 3. Do druhého dílu nám zbyly již jen dvě možnosti, zapišeme 2 a do třetího dílu poslední část oběda, zapišeme 1. Čísla opět vynásobíme a dostaneme: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ možností.

Pokud si oba výpočty dáme dohromady a zamyslíme se, zjistíme, že dezert bude ve spodním díle v jedné čtvrtině případů.

Příklad 6

Kolika způsoby můžeme vedle sebe postavit do řady dva chlapce a dvě děvčata? Chlapce mezi sebou nerozlišujeme a děvčata také ne. Rozlišujeme od sebe pouze chlapce od děvčat.

Řešení:

Dostaneme tato pořadí:

Ch Ch D D

D Ch Ch D

D D Ch Ch

Ch D Ch D

D Ch D Ch

Ch D D Ch

Je tedy šest možností, jak dva chlapce a dvě děvčata do řady postavit.

7) Chci letět na dovolenou z Prahy do Istanbulu, ale všechny přímé lety jsou již vyprodané. Najděte všechny způsoby, kterými se mohu do Istanbulu z Prahy dostat letadlem. Do žádného města se nebudeme létat dvakrát. Kolik km bude mít každá z tras? Která cesta je nejkratší, která je nejdelší a o kolik km je delší, než přímá cesta z Prahy do Istanbulu?



Obr. 35: obrázek k zadání úlohy číslo 7 pro čtvrtý ročník

Z Prahy vede jedna přímá cesta do Istanbulu a dalších sedm cest, po kterých se následně vydáme.

Z Prahy bychom mohli letět do Helsinek. Z Helsinek následně vede jedna jediná cesta, a to cesta do Istanbulu. Tato cesta je dlouhá $1303 \text{ km} + 2149 \text{ km} = 3452 \text{ km}$.

Podobně tomu bude, když se rozhodneme letět nejprve do Varšavy, odkud vede jediná cesta opět do Istanbulu. Cesta je dlouhá $521 \text{ km} + 1385 \text{ km} = 1906 \text{ km}$.

Další cesta z Prahy povede do Budapeště, odkud opět vede jediná cesta, a to do Istanbulu. Cesta je dlouhá $450 \text{ km} + 1063 \text{ km} = 1513 \text{ km}$.

Pokud poletíme z Prahy do Sofie, pak nám ze Sofie zbyde jediná možnost, a to letět do Atén. V Aténách máme tři možnosti, kam se dále vydat. Pokud bychom se rozhodli letět do Lublaně nebo Madridu, všechny naše další cesty by vedli buď zpět do Prahy, nebo zpět do Atén, což nechceme. Jediná možná cesta z Atén tedy vede do Istanbulu. Dostali jsme tak cestu Praha $\rightarrow$ Sofie $\rightarrow$ Atény $\rightarrow$ Istanbul, která je dlouhá $1066 \text{ km} + 526 \text{ km} + 562 \text{ km} = 2154 \text{ km}$.

Další možná cesta z Prahy je do Lublaně. V Lublani se můžeme vydat dvěma cestami. Pokud zvolíme cestu do Atén, již víme, že jediná možná cesta z Atén vede do Istanbulu. Dostali jsme tedy cestu Praha $\rightarrow$ Lublaň $\rightarrow$ Atény $\rightarrow$ Istanbul a cesta je dlouhá: $448 \text{ km} + 1177 \text{ km} + 562 \text{ km} = 2187 \text{ km}$.

Z Lublaně ale také můžeme letět do Paříže. Z Paříže pak vede jedna cesta do Prahy, kterou se vydávat nebudeme a druhá cesta do Madridu. Jediná cesta z Madridu vede do Atén a z Atén víme, že můžeme jediné do Istanbulu. Dostali jsme tedy cestu Praha $\rightarrow$ Lublaň $\rightarrow$ Paříž $\rightarrow$ Madrid $\rightarrow$ Atény $\rightarrow$ Istanbul a je dlouhá: $448 \text{ km} + 967 \text{ km} + 1052 \text{ km} + 2371 \text{ km} + 562 \text{ km} = 5400 \text{ km}$.

Další možná cesta z Prahy je do Madridu. Z Madridu vedou dvě možné cesty. První je do Atén a z Atén do Istanbulu. Cesta Praha $\rightarrow$ Madrid $\rightarrow$ Atény $\rightarrow$ Istanbul je dlouhá: $1773 \text{ km} + 2371 \text{ km} + 562 \text{ km} = 4706 \text{ km}$.

Z Madridu ale můžeme letět i do Paříže, odkud nepoletíme zpět do Prahy, ale můžeme letět do Lublaně. Z Lublaně pak již pouze do Atén a z Atén do Istanbulu. Dostali jsme cestu Praha $\rightarrow$ Madrid $\rightarrow$ Paříž $\rightarrow$ Lublaň $\rightarrow$ Atény $\rightarrow$ Istanbul. Tato cesta je dlouhá: $1773 \text{ km} + 1052 \text{ km} + 967 \text{ km} + 1177 \text{ km} + 562 \text{ km} = 5531 \text{ km}$.

Poslední možná cesta z Prahy vede do Paříže. Z Paříže můžeme do Lublaně, z Lublaně jen do Atén a z Atén jen do Istanbulu. Cesta Praha $\rightarrow$ Paříž $\rightarrow$ Lublaň $\rightarrow$ Istanbul je dlouhá: $885 \text{ km} + 967 \text{ km} + 1177 \text{ km} + 562 \text{ km} = 3591 \text{ km}$.

Z Paříže také můžeme letět do Madridu, z Madridu do Atén a z Atén do Istanbulu. Cesta Praha → Paříž → Madrid → Atény → Istanbul je dlouhá: $885 \text{ km} + 1052 \text{ km} + 2371 \text{ km} + 562 \text{ km} = 4870 \text{ km}$.

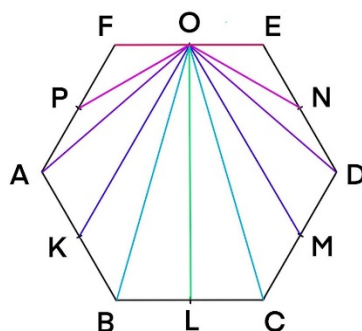
Našli jsme tedy 10 cest.

Nejkratší cesta je cesta Praha → Budapešť → Istanbul, která je o 1 km delší než přímá cesta do Istanbulu.

Nejdelší je cesta Praha → Madrid → Paříž → Lublaň → Atény → Istanbul, a je o 4019 km delší než přímá cesta.

Příklad 8

Máme daný pravidelný šestiúhelník ABCDEF a středy jeho stran KLMNOP. Z bodu O povedu úsečku do všech zbývajících bodů. Kolik jsme vytvořili trojúhelníků?



Obr. 36: Obrázek k řešení úlohy číslo 8 pro čtvrtý ročník

Řešení:

Bod O se tak stane jedním vrcholem všech trojúhelníků, které můžeme v obrázku najít.

Podíváme se nejprve na trojúhelníky AOP a POF. Pokud bychom trojúhelníky spojily v jeden, dostaneme třetí trojúhelník AOF. Dále můžeme vidět trojúhelníky KOA a BOK. Opět je můžeme spojit ve trojúhelník BOA.

Můžeme si všimnout, že bod O s každou stranou šestiúhelníku (kromě strany EF) vytvoří tři trojúhelníky.

Najdeme tedy 15 trojúhelníků.

Příklad 9

Maminka věšela prádlo. Vedle sebe na jednu šňůru pověsila dvě modré a tři růžové osušky. Kolika různými způsoby je může maminka pověsit? Osušky stejné barvy od sebe nerozlišujeme.



Obr. 37: obrázek k zadání úlohy číslo 9 pro čtvrtý ročník

Řešení:

Úlohu budeme řešit tak, že budeme určovat polohu dvou modrých osušek, na ostatní pozice nám tak zbydou tři růžové. Modré osušky budeme označovat M, růžové budeme označovat R.

Začneme tak, že jednu modrou osušku pověsíme na první místo, a další modrou osušku budeme postupně posouvat směrem doprava, tedy nejprve ji dáme na druhé místo, poté doprostřed, poté na předposlední místo a nakonec na poslední místo úplně doprava. Dostaneme tak tyto možnosti:

M M R R R M R M R R M R R M R M R R R M

Dále umístíme jednu modrou osušku na druhé místo a další modrou osušku doprava vedle ní, tedy doprostřed a opět ji budeme posouvat směrem doprava, tedy nejprve na předposlední místo a na poslední místo. Dostaneme tyto možnosti:

R M M R R R M R M R R M R R M

Nyní dáme jednu modrou osušku doprostřed, další modrou osušku opět doprava vedle té první, tedy na předposlední místo a v dalším kroku ji opět posuneme doprava na poslední místo. Máme tak tyto možnosti:

R R M M R R R M R M

Posledním krokem bude jednu modrou osušku umístit na předposlední místo a další modrou osušku doprava od ní, tedy na místo poslední. Dostaneme tak tuto jednu možnost:

R R R M M

Dostali jsme tak 10 možných způsobů, jak můžeme osušky pověsit.

Příklad 10

Kolik čtyřciferných čísel můžeme dostat z číslic 0, 2, 4 a 6?

Řešení:

V naší nabídce máme číslici 0. Musíme si uvědomit, že pokud bychom ji dosadili na první místo (řád tisíců), nedostali bychom čtyřciferné číslo, ale pouze tříciferné. Např. číslo $0246 = 246$.

Na první místo tedy můžeme použít pouze tři číslice: 3 _ _ _.

Na druhé místo už ale nulu použít můžeme, proto máme na druhé místo opět k dispozici tři číslice: 3 3 _ _.

Na třetí místo nám zbyla jedna ze dvou číslic a na poslední místo pouze jedna číslice: 3 3 2 1.

Možnosti vynásobíme a dostaneme $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ čtyřciferných čísel.

Pro děti na prvním stupni může být toto řešení velmi obtížné, bylo by vhodnější si všechny možnosti vypisovat či pracovat s kartičkami s číslicemi a čísla si stavět a ukazovat.

5.4 Sběrka úloh pro pátý ročník

Příklad 1

Jakými způsoby se mohou Pavlík, Ondra, Eliška a Maruška postavit do řady vedle sebe? Najděte všechny možnosti.

Řešení:

Příklad budeme řešit podobně, jako utváření čtyřciferných čísel. Budeme se zajímat nejprve pouze o polohu chlapců. Pavlíka postavíme nejdříve na první místo a budeme přemísťovat jen ostatní děti. Ondru postavíme nejdříve vedle něj a děvčata postavíme v pořadí Eliška a Maruška, poté se děvčata prohodí. Pavlík stále zůstane na prvním místě, Ondru přesuneme na třetí místo a děvčata udělají to samé, nejprve Eliška pak

Maruška, následně se prohodí. Poté stále necháme Pavlíka na místě, Ondru postavíme na poslední místo, děvčata udělají to samé, jako v předešlých krocích.

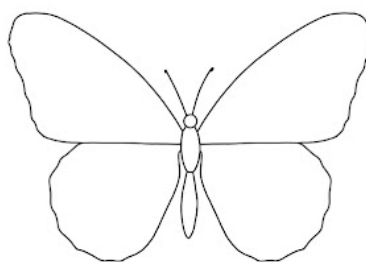
Stejný postup provedeme s každým z dětí. Postavíme každého postupně na první místo, druhého budeme posouvat na druhé, třetí a čtvrté místo a zbytek dětí necháme nejprve v jednom pořadí, nakonec je prohodíme.

P O E M	O P E M	E P O M	M P O E
P O M E	O P M E	E P M O	M P E O
P E O M	O E P M	E O P M	M O P E
P M O E	O M P E	E M P O	M E P O
P E M O	O E M P	E O M P	M O E P
P M E O	O M E P	E M O P	M E O P

Celkem jsme našli 24 možností.

Příklad 2

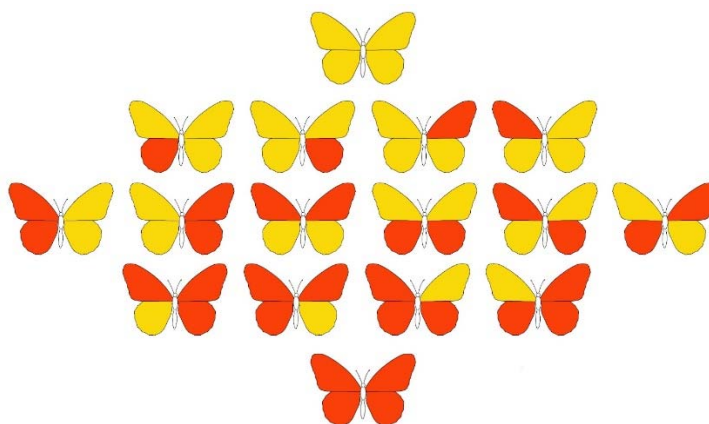
Vybarvujeme obrázek motýlka. Na jeho tělo můžeme použít hnědou, šedivou nebo černou barvu. Na jeho křídla máme k dispozici červenou a žlutou barvu. Barvy, které použijeme na křídla, můžeme opakovat. Kolik různých motýlků můžeme dostat?



Obr. 38: obrázek k zadání úlohy číslo 2 pro pátý ročník

Řešení:

Systematicky si ukážeme všechny možnosti – viz obrázek č. 39:



Obr. 39: obrázek k řešení úlohy číslo 2 pro pátý ročník

Budeme určovat, kolika způsoby můžeme červenou barvou vybarvit nejprve žádné z křídel, následně jedno křídlo, dvě křídla, tři křídla a nakonec čtyři křídla.

Na vybarvení žádného křídla červenou barvou máme jednu jedinou možnost.

Pokud budeme chtít červenou barvou vybarvit jedno křídlo, budeme mít čtyři možnosti, jak to udělat.

Dvě křídla červeně můžeme vybarvit šesti různými způsoby.

Čtyřmi způsoby můžeme vybarvit tři křídla červenou barvou.

Pokud budeme chtít mít čtyři křídla červenou barvou, máme na to pouze jeden způsob.

Všechny možnosti sečteme. Celkem je 16 možností.

Nyní přidáme ještě barvy tělíček. Ke všem možnostem křídel můžeme přidat jedno ze tří těl. Proto je celkový počet možností, jak můžeme motýlka vybarvit. $3 \cdot 16 = 48$.

Příklad 3

Máme dány body A, B, C, D, E, F a G. Kolik je různých a) šestic bodů; b) pětic bodů.

Řešení:

a) šestice bodů

Celkem máme v zadání sedm bodů. Šest z nich můžeme vybrat tak, že vždy jeden bod zakryjeme. Počet možností vybírání šestic se tedy bude rovnat počtu možností, jak vybrat jeden bod, který zakryjeme. Můžeme zakrýt bod A, B, C, D, E, F, nebo G.

Můžeme tedy najít sedm způsobů, jak jeden bod zakrýt, a proto i sedm způsobů, jak vybrat šestici.

b) pětice bodů

podobně jako v předchozím úkolu, i nyní pro nás bude jednodušší určit počet možností, kdy budeme překrývat dvojice písmen. Dvojice si vypíšeme:

AB BC CD DE EF FG

AC BD CE DF EG

AD BE CF DG

AE BF CG

AF BG

AG

Našli jsme dvacet jedna možností, jak překrýt dvě písmenka. Je tedy 21 způsobů, jak vybrat pětici bodů.

Příklad 4

Na zahrádce nám vykvetly dvě červené, dvě růžové a jedna žlutá růže. Jak mohu růže natrhat, pokud chci do vázy utrhnout alespoň tři. Mohu trhat i růže stejné barvy. Nezáleží nám na pořadí trhání růží, pouze na tom, jak bude nakonec kytice vypadat.



Obr. 40: obrázek k zadání úlohy číslo 4 pro pátý ročník

Řešení:

Nejprve si řekneme, co to znamená „alespoň tři“. Znamená to, že chceme natrhat tři, nebo více růží. V tomto případě máme celkem pět růží, chceme tedy natrhat tři, čtyři, nebo pět růží.

Budeme nyní počítat počet možností, jak můžeme natrhat tři růže.

Pokud utrhneme žlutou růži, kterou máme jen jednu, můžeme k ní buď utrhnout dvě červené, nebo dvě růžové, nebo jednu červenou a jednu růžovou. To jsou všechny trojice, které budou obsahovat žlutou růži. Nyní máme ještě dvě možnosti, a to utrhnout dvě červené a jednu růžovou, nebo utrhnout dvě růžové a jednu červenou.

Máme pět možností, jak poskládat kytici ze tří květů.

Nyní vyřešíme, kolik máme možností, jak natrhat čtyři růže.

Pokud utrhnou jednu žlutou růži, mohou k ní utrhnout dvě červené a jednu růžovou, nebo jednu červenou a dvě růžové. To jsou dvě možnosti obsahující žlutou růži. Poslední možností je utrhnout dvě červené a dvě růžové.

Máme tak tři možnosti, jak sestavit kytici ze čtyř květů.

Nakonec máme jednu možnost, jak utrhnout všech pět růží.

Pokud chceme natrhat alespoň tři růže, máme tedy celkem devět možností.

Příklad 5

Kolik pěticiferných čísel můžeme dostat z číslic 0, 1, 2, 3 a 4?

Řešení:

Pěticiferné číslo má pět volných míst: _ _ _ _ _.

Na první místo nemůžeme dosadit nulu, číslo by pak nebylo pěticiferné ale čtyřiciferné. Proto nám zbydou pouze čtyři možnosti, které můžeme dosadit na první místo. Na první místo tak napíšeme 4. Na druhé místo už můžeme dosadit nulu a další tři zbylá čísla, máme tedy opět čtyři možnosti a na druhé místo napíšeme 4. Na třetí místo máme již jen tři možnosti, na předposlední místo máme dvě možnosti a na poslední místo nám zbyde poslední jedna číslice. Dostaneme tedy výpočet: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$.

Příklad 6

Z papíru si vystříháme šest obdélníků o rozměrech 4 cm x 3 cm. Kolik obdélníků z nich dokážeme poskládat? Obdélníky nebudeme otáčet a musíme použít všech šest obdélníků. Zapište jejich rozměry.

Řešení:

Nejprve můžeme všechny položit do jedné řady. Buď položíme šest obdélníků do jedné řady vedle sebe a vždy je přiložíme kratší stranou k sobě. Dostaneme obdélník o stranách 24 cm x 3 cm. Nebo je můžeme položit do jedné řady za sebe. Přikládáme je delší stranou k sobě. Dostaneme obdélník o stranách 4 cm x 18 cm.

Můžeme je taky položit do dvou řad vedle sebe, nebo za sebe a dostaneme obdélníky. Dostaneme obdélníky o stranách 8 cm x 9 cm a 12 cm x 6 cm.

Příklad 7

Máme 216 krychliček. Jaké a kolik větších krychlí z nich dokážeme postavit? Žádné krychle nesmí zůstat.

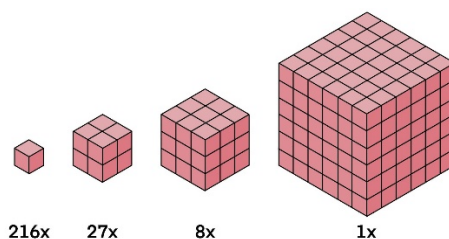
Nejprve si řekneme, kolik krychliček budeme potřebovat na postavení větší krychle. Nejmenší možná krychle, která je větší než jedna samostatná krychlička, je krychle $2 \cdot 2 \cdot 2$. Na tuto krychli tedy potřebujeme 8 menších krychliček. Vydělíme $216 : 8 = 27$. Můžeme tedy postavit dvacet sedm krychlí o straně dvě malé krychle.

Na krychli o straně tři krychličky budeme potřebovat $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ krychlí. Pokud vydělíme $216 : 27 = 8$. Můžeme tedy postavit osm krychlí o straně tři malé krychle.

Na krychli o straně čtyři krychličky bychom potřebovali $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Pokud vydělíme $216 : 64 = 3$ (24), to znamená, že bychom postavili tři takové krychle, ale ještě by nám zbylo 24 krychliček. To ale nechceme, proto tato možnost není vhodná.

Podobně tomu bude u krychle $5 \cdot 5 \cdot 5$, na tu potřebujeme 125 krychliček. Po vydělení dostaneme: $216 : 125 = 1$ (91), postavili bychom tedy jednu takovou krychli, ale zbylo by nám 91 krychliček a to opět nechceme.

Pokud bychom stavěli krychli o stranách $6 \cdot 6 \cdot 6$, budeme na ni potřebovat 216 krychliček, což jsou tedy všechny krychličky, které máme k dispozici. Můžeme tedy postavit jednu velkou krychli o straně šest malých krychlí.



Obr. 41: obrázek k řešení úlohy číslo 7 pro pátý ročník

Příklad 8

Mezi kolik dětí mohu spravedlivě a beze zbytku rozdělit 120 bonbónů?

Řešení:

Můžeme dát jednomu dítěti 120 bonbónů, stejně tak jako můžeme dát sto dvaceti dětem každému jeden bonbón. Možnosti zapíšeme jako $1 \cdot 120$ a $120 \cdot 1$.

Dále bychom mohly dát dvěma dětem každému 60 bonbónů, stejně tak jako bychom mohli dát šedesáti dětem každému dva bonbóny. Tyto možnosti zapíšeme jako $2 \cdot 60$ a $60 \cdot 2$. Pro kontrolu víme, že nám vždy po vynásobení musí vyjít zpět 120.

Stejným způsobem budeme pokračovat dále, už pouze číselnými zápisy. Dostaneme možnosti:

$3 \cdot 40$ a $40 \cdot 3$; $4 \cdot 30$ a $30 \cdot 4$; $6 \cdot 20$ a $20 \cdot 6$; $8 \cdot 15$ a $15 \cdot 8$; $10 \cdot 12$ a $12 \cdot 10$.

Našli jsme 14 možností.

Příklad 9

Na parkovišti mohly parkovat koloběžky, tříkolky a čtyřkolky. Dohromady jsme napočítali 20 koleček. Kolik tam mohlo být koloběžek, tříkolek a čtyřkolek? Najděte všechny možnosti.

Řešení:

Nejprve budeme počítat s tím, že na parkovišti stáli pouze koloběžky a tříkolky. Poté spojením dvou koloběžek budeme dostávat možnosti se čtyřkolkami.

První možností bude, že na parkovišti stály jen samé koloběžky. Vypíšeme si koloběžky pomocí součtu:

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20 \text{ koleček}$$

Nyní budeme vždy dvě spojovat a tvořit možnosti se čtyřkolkami. Spojíme první dvě a dostaneme možnost: jedna čtyřkolka a osm koloběžek. Spojíme i další dvě dvojky a dostaneme možnost: dvě čtyřkolky a šest koloběžek. Dále spojíme další dvě dvojky a dostaneme možnost: tři čtyřkolky a čtyři koloběžky. Poté spojíme další dvě dvojky a dostaneme možnost: čtyři čtyřkolky a dvě koloběžky. Nakonec spojíme i poslední dvě dvojky a dostaneme možnost: pět čtyřkolek.

Opět se vrátíme k určování pouze počtu koloběžek a tříkolek. Pokud bychom přidali jednu tříkolku, zbylo by nám na koloběžky 17 koleček, což není možné. Stejně tomu bude, i pokud bychom přidali tři a pět tříkolek. Musí jich být vždy sudý počet. Přidáme tedy dvě tříkolky, zbytek koleček zůstane pro koloběžky. Dostaneme tuto možnost:

$$3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20 \text{ koleček}$$

Přidáme stejným způsobem, jako v předešlém výpočtu, do tohoto výpočtu čtyřkolky. Dostaneme tyto možnosti:

dvě tříkolky, jedna čtyřkolka a pět koloběžek;

dvě tříkolky, dvě čtyřkolky a tři koloběžky;

dvě tříkolky, tři čtyřkolky a jedna koloběžka.

Pokud se opět vrátíme pouze k určování tříkolek a koloběžek, budeme nyní počítat se čtyřmi koloběžkami. Dostaneme tuto možnost:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 20 \text{ koleček}$$

Do tohoto výpočtu můžeme přiřadit pouze jednu čtyřkolku a získáme tuto možnost: čtyři tříkolky, jedna čtyřkolka a jedna koloběžka.

Našli jsme tak všechny možnosti a je jich 12.

Příklad 10

Kolik různých částek mohu zaplatit přesně, pokud mám tři dvoutisícové bankovky, tři dvěstěkorunové bankovky, tři dvacetikoruny a tři dvoukoruny?

Řešení:

Příklad si upravíme tak, aby byl pro nás jeho výpočet jednodušší.

Nejdříve si určíme, které čísla můžeme dostat na místo tisíců. Pokud žádnou dvoutisícikorunu nepoužijeme, na místo tisíců dostaneme 0. Pokud použijeme jednu, na místo tisíců dostaneme 2, pokud dvě, tak na místo tisíců dostaneme 4 a pokud tři, tak na místo tisíců dostaneme 6. Na místo tisíců mám tedy čtyři možnosti.

Stejně to bude vypadat i pro místo stovek, desítek i jednotek. Na všechny budeme mít čtyři možnosti: 0, 2, 4 a 6.

Na každé místo tedy máme čtyři možnosti. Tyto možnosti spolu vynásobíme a dostaneme $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ možností.

Nesmíme ale zapomenout na to, že jednou z možností bude částka, která bude mít na všech místech samé nuly. Proto tuto jednu možnost odečteme.

Máme tak 255 možných částek, které můžeme přesně zaplatit.

6 Závěr

V první kapitole jsem stručně popsala historii a vývoj kombinatoriky, což bylo jedním z mých cílů. Dále jsem uvedla definice dvou základních kombinatorických pravidel (kombinatorické pravidlo součtu a kombinatorické pravidlo součinu) a ke každému pravidlu dva řešené příklady. Stejně jsem postupovala i u kombinatorických pojmů, kterými jsou variace, permutace a kombinace bez opakování, i s opakováním.

V praktické části jsem analyzovala a srovnala patnáct učebnic matematiky pro první stupeň ZŠ od dvou nakladatelství, a to od nakladatelství Fraus, které užívají Hejného metody, a od nakladatelství ALTER, které jsou tradičnějšího charakteru. Mezi učebnicemi těchto nakladatelství je velký rozdíl, a to nejen z kombinatorického hlediska. Velké množství úloh v učebnicích nakladatelství ALTER má velmi podobné zadání i postupy řešení. Děti u řešení těchto úloh pravděpodobně přemýšlí pouze chvíli, do té doby, než zjistí, že většina úloh se bude řešit stejným způsobem, jako úloha předchozí. Z hlediska kombinatoriky se v učebnicích od nakladatelství ALTER vyskytuje značně méně úloh v porovnání s učebnicemi od nakladatelství Fraus. Učebnice nakladatelství Fraus nutí žáky pomocí více kreativního zadání úloh samostatně přemýšlet a hledat nové způsoby řešení.

Poté jsem vytvořila sbírku řešených kombinatorických úloh pro druhý, třetí, čtvrtý a pátý ročník základních škol, pro každý ročník 10 úloh. Celkem jsme tedy vytvořila sbírku čtyřiceti řešených kombinatorických úloh. Mým cílem bylo vytvořit takové úlohy, které by byly pro děti zajímavé a rozvíjely by jejich snahu při hledání nových řešení. Dalším z mých cílů bylo volit úlohy tak, aby byly vhodně zadány pro daný ročník z hlediska obtížnosti a aby byl mezi každým ročníkem znatelný posun v náročnosti řešení. Zadání i postupy řešení úloh jsem se snažila popsat srozumitelně, často s pomocí obrázků či tabulek. Pro děti na prvním stupni je důležité názorné řešení úloh, s použitím různých pomůcek, modelů, grafů, atd. Dále je důležité s dětmi všechny možnosti vypisovat a učit je systematickosti.

Toto téma jsem si pro svou bakalářskou práci vybrala právě kvůli možnosti vytvoření vlastní sbírky úloh z kombinatoriky. Kombinatorika je velmi důležitá pro rozvoj logického myšlení, který je potřeba podporovat i u dětí na prvním stupni.

Seznam použité literatury

- [1] BLAŽKOVÁ, Růžena, VAŇUROVÁ, Milena, MATOUŠKOVÁ, Květoslava, STAUDKOVÁ, Hana. *Matematika pro 3. ročník základních škol, 1. díl*. 4. vyd. Všeň: ALTER s.r.o., 2018. ISBN 978-80-7245-232-3.
- [2] BLAŽKOVÁ, Růžena, VAŇUROVÁ, Milena, MATOUŠKOVÁ, Květoslava, STAUDKOVÁ, Hana. *Matematika pro 3. ročník základních škol, 2. díl*. 4. vyd. Všeň: ALTER s.r.o., 2018. ISBN 978-80-7245-233-0.
- [3] BLAŽKOVÁ, Růžena, VAŇUROVÁ, Milena, MATOUŠKOVÁ, Květoslava, STAUDKOVÁ, Hana. *Matematika pro 3. ročník základních škol, 3. díl*. 4. vyd. Všeň: ALTER s.r.o., 2018. ISBN 978-80-7245-234-7.
- [4] BLAŽKOVÁ, Růžena, MATOUŠKOVÁ, Květoslava, VAŇUROVÁ, Milena. *Matematika pro 4. ročník základních škol, 1. díl*. 5. vyd. Všeň: ALTER s.r.o., 2018. ISBN 978-80-7245-216-3.
- [5] BLAŽKOVÁ, Růžena, MATOUŠKOVÁ, Květoslava, VAŇUROVÁ, Milena. *Matematika pro 4. ročník základních škol, 2. díl*. 5. vyd. Všeň: ALTER s.r.o., 2018. ISBN 978-80-7245-217-0.
- [6] BLAŽKOVÁ, Růžena, MATOUŠKOVÁ, Květoslava, VAŇUROVÁ, Milena. *Matematika pro 4. ročník základních škol, 3. díl*. 5. vyd. Všeň: ALTER s.r.o., 2018. ISBN 978-80-7245-218-7.
- [7] CALDA, Emil, DUPAČ, Václav. *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2022. ISBN 978-80-7196-365-3.
- [8] EICHLEROVÁ, Marie, STAUDKOVÁ, Hana, VLČEK, Ondřej. *Matematika pro 2. ročník ZŠ, sešit č. 6*. 11. vyd. Všeň: ALTER s.r.o., 2021. ISBN 978-80-7245-367-2.
- [9] EICHLEROVÁ, Marie, STAUDKOVÁ, Hana, VLČEK, Ondřej. *Matematika pro 2. ročník ZŠ, sešit č. 7*. 10. vyd. Všeň: ALTER s.r.o., 2022. ISBN 978-80-7245-383-2.
- [10] FUCHS, Eduard. *Diskrétní matematika pro učitele*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2703-7.
- [11] HEJNÝ, Milan, JIROTKOVÁ, Darina, SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Matematika 2/1 – Pracovní učebnice pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus s.r.o., 2008. ISBN 978-80-7238-768-7.

- [12] HEJNÝ, Milan, JIROTKOVÁ, Darina, SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Matematika 2/2 – Pracovní učebnice pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus s.r.o., 2008. ISBN 978-80-7238-769-4.
- [13] HEJNÝ, Milan, JIROTKOVÁ, Darina, SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Matematika 2/3 – Pracovní učebnice pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus s.r.o., 2008. ISBN 978-80-7238-770-0.
- [14] HEJNÝ, Milan, JIROTKOVÁ, Darina, SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana, MICHNOVÁ, Jitka. *Matematika - učebnice pro 3. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus s.r.o., 2009. ISBN 978-80-7238-824-0.
- [15] HEJNÝ, Milan, JIROTKOVÁ, Darina, BOMEROVÁ, Eva. *Matematika - učebnice pro 4. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus s.r.o., 2010. ISBN 978-80-7238-940-7.
- [16] HEJNÝ, Milan, JIROTKOVÁ, Darina, BOMEROVÁ, Eva, MICHNOVÁ, Jitka. *Matematika - učebnice pro 5. ročník základní školy*. 2. vyd. Plzeň: Fraus s.r.o., 2022. ISBN 978-80-7489-782-5.
- [17] HERMAN, Jiří, KUČERA Radan, ŠIMŠA, Jaromír. *Metody řešení matematických úloh II*. 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2004. ISBN 80-210-3528-5.
- [18] JUSTOVÁ, Jaroslava. *Matematika pro 5. ročník základních škol*. 2. vyd. Všeň: ALTER s.r.o., 2021. ISBN 978-80-7245-297-2
- [19] KAFKOVÁ, Marika. *Kombinatorika na interaktivní tabuli*. [online]. Brno, 2011. Dostupné z: http://ucitele.sci.muni.cz/materialy/200_1.pdf
- [20] KRÁL, Oldřich. *I-ťing: Kniha proměn*. 1. vyd. Praha: Maxima, 1995. ISBN 80-901333-2-0.
- [21] LANDOVÁ, Vlasta, STAUDKOVÁ, Hana, TŮMOVÁ, Věra. *Matematika pro 2. ročník ZŠ, sešit č. 4/B*. 3. vyd. Všeň: ALTER s.r.o., 2019. ISBN 978-80-7245-372-6.
- [22] LANDOVÁ, Vlasta, STAUDKOVÁ, Hana, TŮMOVÁ, Věra. *Matematika pro 2. ročník ZŠ, sešit č. 5*. 11. vyd. Všeň: ALTER s.r.o., 2022. ISBN 978-80-7245-381-8.
- [23] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorika, jak ji možná neznáme*. [online]. Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická TUL v Liberci. Dostupné z:

<https://docplayer.cz/132840800-Kombinatorika-jak-ji-mozna-nezname-doc-rndr-jana-prihonska-ph-d-kmd-fp-tul-v-liberci.html>

- [24] STRUIK, Dirk. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1993. 256 s.
- [25] VOGLOVÁ, Zuzana. *Historie kombinatoriky In 27. mezinárodní konference Historie matematiky*. 2006. Dostupné z: https://kdm.karlin.mff.cuni.cz//sborniky/sbornik-27.pdf?fbclid=IwAR0ckDh1jfZP7cxFZ5Sd_66v5EBoXZWfsWKS0Vy1ZN-5Z0fQgRSImaJRTQo
- [26] ROSKOVEC, Tomáš. *Magické čtverce*. [online]. Dostupné z: https://prase.cz/library/MagickeCtverceTR/MagickeCtverceTR.pdf?fbclid=IwAR2Ef4QyR297YOYI5nnTogl-oXIYPetnwSeABQY_hbAFP8YldkmRXxGJwV0