

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Zpracování témat v oblasti finanční matematiky pro výuku matematiky na základní škole

Milada Sedláčková

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Helena Binterová , Ph.D.

České Budějovice 2008

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně, pouze za odborného vedení vedoucí bakalářské práce RNDr. Heleny Binterové, Ph.D. a s využitím uvedené literatury.

V Českých Budějovicích dne 20. dubna 2008

.....

Poděkování

Děkuji RNDr. Heleně Binterové, Ph.D. za odborný dozor a rady, které mi při zpracování bakalářské práce poskytovala.

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

Sedláčková Milada, České Budějovice : Katedra matematiky, Pedagogická fakulta České Budějovice, 2008. 41s. Bakalářská práce, vedoucí RNDr. Helena Binterová, Ph.D.

Bakalářská práce se zabývá výukou finanční matematiky na druhém stupni základních škol. V úvodu jsou nastíněny učební osnovy žáků sedmých a devátých tříd a srovnány současné učebnice pro základní školy, zabývající se finanční matematikou. Stěžejní část práce tvoří metodický návrh pracovních listů pro výuku finanční matematiky na základních školách.

ANNOTATION OF THESIS

Sedláčková Milada, České Budějovice : Department of mathematics, College of Education České Budějovice, 2008. 41st. Thesis of bachelor, supervisor RNDr. Helena Binterová, Ph.D.

The thesis of bachelor is engaged in financial mathematics education on the second-degree on the elementary school. In introduction is foreshadowed curriculum for pupils of seventh and ninth school years and comparison of school book for the elementary schools, which are engaged in financial mathematics. Pivotal part of the thesis is formed by methodical draft of working papers for teaching of financial mathematics on the elementary schools.

ÚVOD.....	6
1. UČEBNÍ OSNOVY.....	7
1.1.1. finanční matematika na 2.stupni ZŠ.....	7
2. HODNOCENÍ UČEBNIC.....	8
3. FINANČNÍ MATEMATIKA – PRACOVNÍ LISTY	
3.1. Procenta.....	11
3.1.1.Rozdělení čísla v daném poměru.....	11
3.1.2.Rozdělení čísla v postupném poměru.....	13
3.1.3.Jak určit stan. počet % přes 1%	14
3.1.4.Jak zjistit, kolik % tvoří část celku.....	16
3.1.5.Slovní úlohy.....	21
3.2. ÚROK.....	25
3.2.1. Chci si půjčit peníze, zatím jen návrh.....	28
3.2.2. Chci si uložit peníze, zatím jen návrh.....	29
3.2.3. Chci si zakoupit obligace.....	30
3.2.4. Co to je depozitní certifikát.....	32
3.3. JEDNODUCHÉ ÚROKOVÁNÍ.....	33
3.4. SLOŽENÉ ÚROKOVÁNÍ.....	38
4. ZÁVĚR.....	44
4.2. Souhrn vzorců.....	45
4.3. Literatura.....	48

*Nesnadné je pracovat , ještě nesnadnější šetřit. Nejsme národ chudý,
ale marnotratný. A přece není jiné cesty : Ne násilím, ale úsilím, ne
mečem, ale pluhem, ne krví, ale prací – umět čestným způsobem peníze
vydělávat a šetrným způsobem jich užívat.*

T.G.Masaryk

Úvod

Čím jsme starší, tím častěji se setkáváme v praxi s pojmy z oblasti finanční matematiky a financí obecně. Vše to začíná, když rodiče založí dětem vkladní knížku a pravidelně i nepravidelně jim tam ukládají peněžní vklady, které děti dostanou k narozeninám či za pěkné vysvědčení. Studentům středních škol rodiče zakládají účty v bankách, určené právě pro studenty. Tyto „studentské účty“ jsou často lépe úročeny než běžné účty. Studenti jsou tak nuceni učit se hospodařit s penězi. Dále pokračujeme sepsáním smlouvy o stavebním spoření, které nám později umožní lépe financovat stavbu či koupi například rodinného domu. Takhle bychom mohli pokračovat dále přes užívání běžných účtů, různých druhů úvěrů až k pravidelným výplatám penzijního připojištění.

Tato práce je rozdělena do několika kapitol. Na začátku každé kapitoly je uvedena potřebná teorie ke studiu, následuje několik řešených a neřešených příkladů k procvičení učiva.

1. Učební osnovy

1.1.1. Finanční matematika na 2. stupni ZŠ

Finanční matematika se vyučuje v 7. a 9. ročníku základní školy. K základnímu učivu v osnovách na 2. stupni patří:

- pro 7. ročník - procenta, úroky, řešení slovních úloh
- pro 9. ročník – jednoduché a složité úrokování, řešení slovních úloh z praxe.

Učivo je možné dále doplnit i výukou kombinovaného úrokování, základních pojmů z bankovníctví a řešením konkrétních problémů z praktického života.

Obecně se žáci učí základní pojmy z finanční matematiky – jistina, úroková míra, daň atp.

Žáci se motivují k uvědomování si vztahů a vazeb mezi matematikou a dalšími vzdělávacími oblastmi, k pochopení možností využití matematického aparátu.

Vyučující vede žáky k rozvíjení dovedností pracovat s tabulkami, grafy a diagramy, s kalkulačkou a počítačem. Vede k pochopení vztahu mezi problémem z reality a jeho matematickým modelem, k úspěšnému řešení aplikačních úloh. Zároveň ukazuje žákům na konkrétních příkladech význam matematiky pro praxi.

2. Hodnocení učebnic

Matematika pro 7. ročník – Jana Müllerová

Základy finanční matematiky můžeme najít v 6. kapitole, kde se věnují jednotlivým tématům: Opakování zlomků, procenta (výpočet procentové části, výpočet základu, výpočet počtu procent), užití trojčlenky v procentech počtu, růst a pokles hodnoty v %, promile, úrok.

Každá podkapitola je sestavena ze 3-4 vzorových řešených příkladů. Mezi jednotlivými příklady jsou zvýrazněny různé definice a poučky důležité k zapamatování. Poté následuje asi 10 příkladů k procvičení jednotlivých podkapitol. Většina těchto příkladů jsou slovní úlohy. Na konci celé šesté kapitoly jsou souhrnná cvičení, která obsahují několik desítek příkladů. Myslím, že tato učebnice je velice dobrým studijním materiálem pro žáky 7. ročníků ZŠ.

Matematika 2. díl pro 9. ročník – Josef Trejbal

7. kapitola – Základy finanční matematiky

Na úvod autor seznamuje žáky s nejběžněji užívanými pojmy z této oblasti. Kapitola je rozdělena do dvou částí: části povinné a části rozšiřující učivo.

V části první se autor věnuje jednoduchému a složenému úrokování. Teorii potřebnou k dalšímu studiu uvede na začátku podkapitol a poté ji podrobněji vysvětlí na několika řešených příkladech, ve kterých odvodí i vzorce pro usnadnění dalších počtů.

V druhé části – části rozšiřující učivo se věnuje kombinovanému úrokování, měnám, valutám, devizám a dalším důležitým ekonomickým pojmům.

Matematika II. díl 9. ročník – Šarounová, Bušek

5. kapitola – Základy finanční matematiky

Na začátku kapitoly se věnuje opakování ze 7. ročníku. Počítání s procenty a úroky. Při výpočtu procentové části použili autoři vzorový výpočet pomocí trojčlenky , použití vzorce či kalkulačky. Jsou zde použity názorné tabulky či grafy.

Na několika vyřešených příkladech vysvětlují použití vzorců. Celkem pěkně zde představují použití funkcí v ekonomii na praktickém příkladu o výši telefonního účtu.

Poté následuje kapitola o úročení. Na několika řešených příkladech je zde srozumitelně představeno jednoduché i složené úrokování.

Na konci kapitoly je i malý ekonomický slovníček vysvětlující některé dříve použité ekonomické pojmy.

Základy finanční matematiky jsou zde nastíněny celkem vyčerpávajícím způsobem, jen učebnice sama o sobě je jaksi nevýrazná. Také zde postrádám kapitolu o penězích a finančnictví jako takovém.

Matematika pro 9. ročník – Odvárko, Kadleček

5. kapitola – Základy finanční matematiky

Studium této kapitoly začíná opakováním procent a úroků .

Kapitola obsahuje na jedné straně řešené příklady, na nichž je vysvětlena teorie, a na straně druhé velké množství příkladů k procvičení jednotlivých částí. Příklady jsou doplněny obrázky kreslenými, ale také skenovanými vzory různých certifikátů používaných v praxi. Ve velkém množství se tu objevují příklady z praxe. Autor se věnuje i v několika případech spoření či úvěrům.

Řekla bych, že tato učebnice patří ke zdařilým a dokáže výborně vysvětlit problematiku základů finanční matematiky.

Matematika pro každý den – Oldřich Odvárko

Sbírka úloh nejen pro žáky 5. až 9. ročníků základních škol

V této knize najdete úlohy, se kterými se můžete často setkávat v běžném životě. Učí, jak rozumně hospodařit s penězi, jak zbytečně neutrácet a jak umět najít tu nejlepší možnost výdaje peněz. Slouží k procvičování a opakování učiva matematiky i k přípravě k přijímacím zkouškám na střední školy.

Učebnice velmi srozumitelně popisuje užítí finanční matematiky v praxi. Je prakticky použitelná i pro rodiče žáků.

Matematika 9 – Josef Molnár a spol.

V deváté kapitole se tato učebnice zabývá finanční matematikou.

Na úvod se v krátkosti zmiňuje o penězích a inflaci. Nabádá vyučující, aby téma peníze rozvedli a diskutovali s žáky. Ti sami mohou zjistit, za jakých podmínek půjčují peníze banky v jejich okolí a s tímto tématem pak pracovat.

Na dalších stránkách je přehledně vysvětleno jednoduché úrokování s řešenými i neřešenými příklady, určování počtu dní úrokové doby a složené úrokování.

Na závěr této kapitoly v krátkosti seznamují autoři žáky se způsoby úhrady zboží a služeb, a to od směnného obchodu po kreditní karty a směnky.

Učebnice působí dobře graficky i obsahově, jen by měla tématu finanční matematiky věnovat více prostoru.

3. Finanční matematika – pracovní listy

Celá kapitola popisuje mnou vytvořené pracovní listy, jejichž součástí je CD s vytvořenými příklady. Řešení těchto příkladů je provedeno v Excelu, kde lze libovolně měnit dané hodnoty. Nastínila jsem zde na jednoduchých příkladech, jak spolu s žáky vytvořit v Excelu tabulky s výpočty.

Pro sestavení pracovních listů jsem prostudovala výše zmíněné učebnice matematiky pro základní školy. Sama nemám pedagogické vzdělání, proto přistupuji k této práci spíše intuitivně a s použitím vlastních zkušeností, získaných při výchově mých vlastních dětí.

3.1 Procenta

Slovo „procento“ je převzato z latiny „Pro cento“, což znamená „ze sta“.

Na výpočet určité části z celku se můžeme dívat z pohledu poměrné části, proto jsem na začátek této kapitoly zařadila příklady na rozdělení čísla v daném poměru a na rozdělení čísla v postupném poměru.

3.1.1 Rozdělení čísla v daném poměru

Př. : Rozděli číslo 80 na dvě části v poměru 3 : 5.

1. krok

Poměr 3 : 5 čteme jako tři stejné díly ku pěti stejným dílům. Díly sečteme:

$$3 \text{ díly} + 5 \text{ dílů} = 8 \text{ dílů}$$

2. krok

Číslo představuje počet dílů určený součtem:

$$3 \text{ díly} + 5 \text{ dílů} = 8 \text{ dílů}$$

$$8 \text{ dílů} \dots 80$$

3. krok

Dělením určíme velikost jednoho dílu:

$$3 \text{ díly} + 5 \text{ dílů} = 8 \text{ dílů}$$

$$8 \text{ dílů} \dots 80$$

$$1 \text{ díl} \dots 80 : 8 = 10$$

4. krok

Násobením určíme velikost 3 dílů a 5 dílů:

$$3 \text{ díly} + 5 \text{ dílů} = 8 \text{ dílů}$$

$$8 \text{ dílů} \dots 80$$

$$1 \text{ díl} \dots 80 : 8 = 10$$

$$3 \text{ díly} \dots 10 \cdot 3 = 30$$

$$5 \text{ dílů} \dots 10 \cdot 5 = 50$$

5. krok

Provedeme zkoušku a napíšeme odpověď:

$$3 \text{ díly} + 5 \text{ dílů} = 8 \text{ dílů}$$

$$8 \text{ dílů} \dots 80$$

$$1 \text{ díl} \dots 80 : 8 = 10$$

$$3 \text{ díly} \dots 10 \cdot 3 = 30$$

$$5 \text{ dílů} \dots 10 \cdot 5 = 50$$

$$\text{Zkouška: } 30 + 50 = 80, 30 : 50 = 3 : 5$$

Číslo 80 rozdělíme na čísla 30 a 50.

Př. : Rozděl číslo 13 332 na dvě části v poměru 1 : 3.

Řešení:

$$1 \text{ díl} + 3 \text{ díly} = 4 \text{ díly}$$

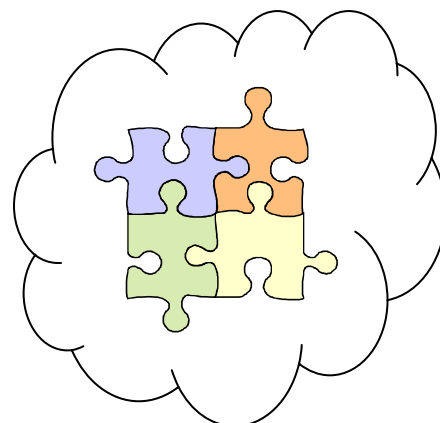
$$4 \text{ díly} \dots 13\,332$$

$$1 \text{ díl} \dots 13\,332 : 4 = 3\,333$$

$$3 \text{ díly} \dots 3\,333 \cdot 3 = 9\,999$$

$$\text{Zkouška: } 3\,333 + 9\,999 = 13\,332, 3\,333 : 9\,999 = 1 : 3$$

Číslo 13 332 rozdělíme na čísla 3 333 a 9 999.



3.1.2 Rozdělení čísla v postupném poměru

Př. : Rozděli číslo 104 v poměru 1 : 3 : 4 : 5.

1. krok

Poměr 1 : 3 : 4 : 5 čteme jako jeden díl ku třem stejným dílům ku čtyřem stejným dílům ku pěti stejným dílům. Díly sečteme.

$$1 \text{ díl} + 3 \text{ díly} + 4 \text{ díly} + 5 \text{ dílů} = 13 \text{ dílů}$$

2. krok

Číslo představuje počet dílů určený součtem:

$$13 \text{ dílů} \dots 104$$

3. krok

Dělením určíme velikost jednoho dílu:

$$13 \text{ dílů} \dots 104$$

$$1 \text{ díl} \dots 104 : 13 = 8$$

4. krok

Násobením hodnoty jednoho dílu určíme velikost všech částí:

$$1 \text{ díl} \dots 104 : 13 = 8$$

$$3 \text{ díly} \dots 8 \cdot 3 = 24$$

$$4 \text{ díly} \dots 8 \cdot 5 = 32$$

$$5 \text{ dílů} \dots 8 \cdot 5 = 40$$

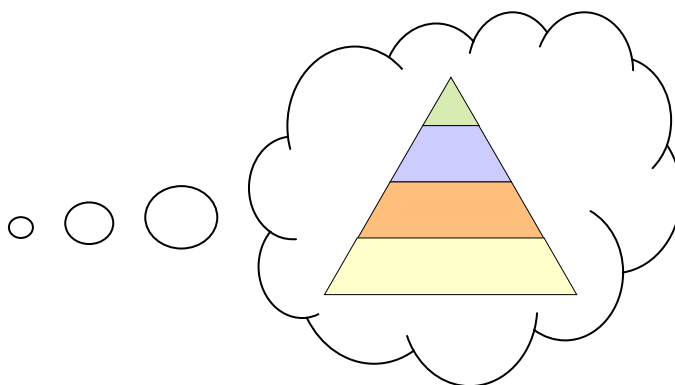
5. krok

Zkouška:

$$8 + 24 + 32 + 40 = 104$$

$$8 : 24 : 32 : 40 = 1 : 3 : 4 : 5$$

Číslo 104 rozdělíme na čísla 8, 24, 32 a 40.



Příklady, které se ve škole procvičují, se dají v podstatě shrnout do tří skupin :

- určení počtu procent z celku
- stanovení procentové části z daného celku
- určení základu (tato úloha je ale víceméně umělá, proto ji ve své práci neuvádím)

Pro **procento** používáme značku %.

Základem procentového počtu je skutečnost, že velikost dané veličiny neuvádíme absolutně v daných jednotkách, ale relativně (poměrně). Poznamená, že uvedeme její poměr k velikosti odpovídající veličiny (vyjádřené ve stejných jednotkách), kterou jsme zvolili za základ.

Pro jedno procento potom platí : $1\% = \frac{1}{100}$, tzn.

Jedno procento je jedna setina ze základu = 0,01 základu ; potom :

$$100\% = 1 \text{ celek} = \text{celý základ}$$

3.1.3 Jak určit stanovený počet procent přes jedno procento

Př. : Urči 22 % z čísla 850.

1. krok

Zadané číslo je základ a základ představuje 100 % (100 setin):

100 % ... 850

2. krok

Velikost jednoho procenta zjistíme vydělením stem:

100 % ... 850
1 % ... 8,5

3. krok

Stanovenou hodnotu 22 % vypočteme vynásobením velikosti jednoho procenta číslem 22:

100 % ... 850
1 % ... 8,5
22 % ... $8,5 \cdot 22 = 187$

22 % z čísla 850 je 187.

Př.: Urči 15 % z čísla 960.

Řešení:

100 % ... 960
1 % ... 9,6
15 % ... $9,6 \cdot 15 = 144$

15 % z čísla 960 je 144.

Př. : Urči 70 % z čísla 95.

Řešení:

100 % ... 95
1 % ... 0,95
70 % ... $0,95 \cdot 70 = 66,5$

70 % z čísla 95 je 66,5.

Př. : Urči 29 % z čísla 4 400.

Řešení:

100 %... 4 400
1 % ... 44
29 % ... $44 \cdot 29 = 1 276$

29 % z čísla 4 400 je 1 276.

Př. : Urči 1,2 % z čísla 12 500.

Řešení:

100 % ... 12 500

1 % ... 125

1,2 % ... $125 \cdot 1,2 = 150$

1,2 % z čísla 12 500 je 150.

3.1.4 Jak zjistit kolik procent tvoří část z celku

Př. : Kolik procent činí číslo 108 z čísla 450?

1. krok

Základem je 450. Toto číslo představuje 100 % (100 setin):

100 % ... 450

2. krok

Velikost jednoho procenta zjistíme vydělením stem:

100 % ... 450

1 % ... 4,5

3. krok

Číslo 108 tvoří neznámý počet procent, označme ho jako x:

100 % ... 450

1 % ... 4,5

x % ... 108

4. krok

Počet procent stanovíme dělením. Číslo 108 dělíme velikostí jednoho procenta (číslem 4,5):

100 % ... 450

1 % ... 4,5

x % ... 108

$x = 108 : 4,5 = 24$

5. krok

Už víme, kolik procent tvoří 108 z 450 a doplníme výpočet odpovědí:

$$\begin{array}{l}
 100 \% \dots 450 \\
 1 \% \dots 4,5 \\
 \underline{x \% \dots 108} \\
 x = 108 : 4,5 = 24
 \end{array}$$

Číslo 108 je 24 procent z čísla 450.

Př. : Kolik procent činí číslo 720 z čísla 960?

Řešení:

$$\begin{array}{l}
 100 \% \dots 960 \\
 1 \% \dots 9,6 \\
 \underline{x \% \dots 720} \\
 x = 720 : 9,6
 \end{array}$$

$$x = 75\%$$

Číslo 720 je 75 procent z čísla 960.

Př. : Kolik procent činí číslo 210 z čísla 840?

Řešení:

$$\begin{array}{l}
 100 \% \dots 840 \\
 1 \% \dots 8,4 \\
 \underline{x \% \dots 210} \\
 x = 210 : 8,4
 \end{array}$$

$$x = 25\%$$

Číslo 210 je 25 procent z čísla 840.

Př. : Kolik procent činí číslo 1 896 z čísla 2 400?

Řešení:

100 % ... 2 400

1 % ... 24

x % ... 1 896

$x = 1\,896 : 24$

$x = 79\%$

Číslo 1 896 je 79 procent z čísla 2 400.

Př. : Kolik procent činí číslo 2 205 z čísla 10 500?

Řešení:

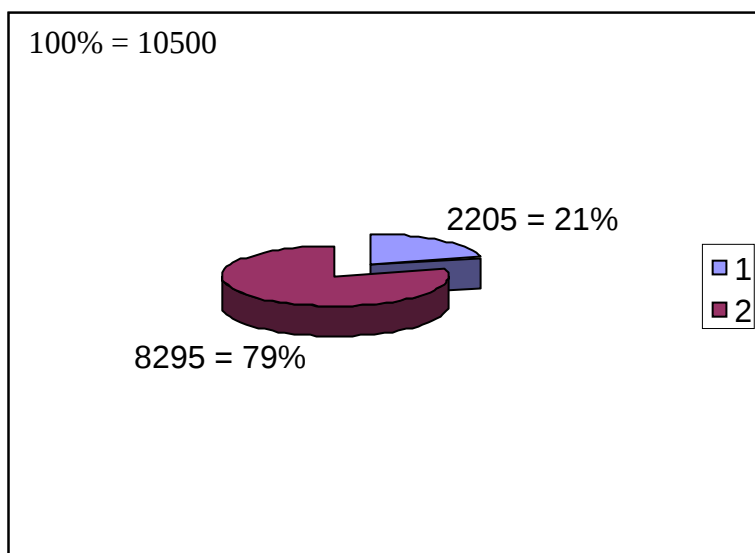
100 % ... 10 500

1 % ... 105

x % ... 2 205

$x = 2\,205 : 105 = 21$

Číslo 2 205 je 21 procent z čísla 10 500.



V jednoduchých úlohách s procenty se objevují tři základní veličiny :

- ° **základ** (budeme označovat ***z***);
- ° **počet procent** (budeme označovat ***p***);
- ° **procentová část, která je vyjádřením části, odpovídající počtu procent v absolutních jednotkách** (budeme označovat ***x***);

Při výpočtu známe dva údaje a třetí údaj počítáme. Podle toho rozlišujeme tři základní typy úloh :

1. výpočet procentové části ***x*** ;
2. výpočet základu ***z*** ;
3. výpočet počtu procent ***p*** ;

Výpočet neznámé v jednotlivých typech úloh provádíme podle následujících vzorců :

$$x = z \cdot \frac{p}{100}$$

kde ***x*** je procentová část

$$z = \frac{x \cdot 100}{p}$$

kde ***z*** je základ

$$p = \frac{x \cdot 100}{z}$$

kde ***p*** je počet procent

~ možností výpočtu neznámého údaje v úlohách s procenty je použití
úměry, čili trojčlenky ~

Trojčlenka je (praktický) matematický postup používaný při výpočtech přímé a nepřímé úměrnosti.

Jedná se o mnemotechnický postup, který se učili žáci na základních školách do reformy českého školství na přelomu 80 a 90 let. Ačkoliv je dnešní mládež (zřejmě) nezná, toto slovo se stalo nedílnou součástí českého jazyka a starší generace je pravidelně používá.

Žáci nejprve zapíšou:

a.....b

c.....x

Uvědomí si, že jednotky zapsané pod sebou musejí mít stejnou „jakost“.

Poté zváží, zda úloha, kterou řeší, je na přímou, nebo nepřímou úměrnost.

Dále si žáci nakreslí vpravo od zápisu šipku směrem nahoru (↑). Jde-li o úlohu na přímou úměrnost, nakreslí si vlevo od zápisu šipku souhlasným směrem (↑), jde-li o úlohu na nepřímou úměrnost, bude levá šipka směrem opačným (↓). Pak sestaví zlomky po směru šipek od čitatele ke jmenovateli a položí mezi nimi rovnost (k na levé straně se ihned vykrátí).

Vzniklou rovnici pak vyřeší běžným způsobem.

Namísto kreslení šipek si lze také zapamatovat jednoduché „vzorečky“:

- **Přímá úměrnost:**

$$x = b \cdot \frac{c}{a}$$

- **Nepřímá úměrnost:**

$$x = b \cdot \frac{a}{c}$$

V případě počítání s procenty se jedná vždy o přímou úměru, vzorec pro nepřímou úměru jsem zde zařadila pouze pro úplnost.

3.1.5 Slovní úlohy

Při počítání úloh na stanovení procentové části přes jedno procento postupujeme následovně : z celku, tedy ze 100% určíme 1% a to tak, že celek dělíme 100 nebo vynásobíme 0,01, tedy setinou. Zadaný počet procent pak vynásobíme hodnotou, odpovídající 1% a získáme tak procentovou část.

Př. : Zimní bundy byly zlevněny na 65 % původní ceny, která byla 1 450 Kč. Jaká je jejich nová cena ?

původní cena.....1 450 Kč

1 % z původní ceny.....0,01 . 1 450 Kč = 14,50 Kč

65% z původní ceny.....**65 . 14,50 Kč = 942,50 Kč**

- příklad můžeme spočítat i pomocí vzorce : $x = z \cdot \frac{p}{100}$

$$x = 1450 \cdot \frac{65}{100}$$

$$x = 942,50$$

Nová cena zimní bundy je 942,50 Kč .

Př.: Prodejna s oděvy se ruší a zboží je vyprodáváno za **40%** původní ceny. Adam si vybral kalhoty (původní cena **2 300 Kč**) a tričko (původní cena **480 Kč**).
Kolik za zboží Adamova maminka zaplatí u pokladny ?

[**1 112 Kč**]



POZOR SLEVA !!!
ZBOŽÍ ZA 40%
PŮVODNÍ CENY

Př.: Supermarket vyhlásil povánoční slevy a mimo jiné zlevnil mikrovlnné trouby za **1 400 Kč** na **60%** z původní ceny. Odhadněte, zda některá z částek

600 Kč

400 Kč

800 Kč

je zlevněnou cenou. Tento odhad pak ověřte výpočtem.

Kolik korun zaplatíte za toto zboží u pokladny?

[**840 Kč**]

Př.: Knihkupectví provedlo slevu vybraných titulů knih o **20% - 40%**. Jana si vybrala Velkou encyklopedii zvířat, která byla označena původní cenou **1 380 Kč**, ale nebyla zde vyznačena sleva. **Kolik za knihu zaplatí Jana po slevě ?**

- tento příklad budeme počítat stejným způsobem jako příklady předcházející, jen s tím rozdílem, že vypočítáme procentovou část pro 20% a pro 40%. Protože Jana nezná přesnou cenu, bude se výsledek pohybovat mezi těmito hodnotami.

[828 – 1104 Kč]

Př.: Pekárkovi si vytáhli z poštovní schránky leták z obchodu s elektronikou, kde bylo uvedeno : **SLEVY AŽ O 30%** . Klára velmi touží po hi-fi věži, jejíž původní cena je **3 999 Kč** a v letáku není uvedena konkrétní sleva. **Kolik zaplatí ?**

„Sleva až o 30%“ znamená, že jednotlivé druhy zboží mohou být zlevněny nejvýše o 30%. Tzn. že některé zboží může být zlevněno o 30% (to je maximum), jiné o 20%, nebo o 11%, ale taky může být sleva 0%, což znamená, že zboží není zlevněno vůbec.

Sleva o 30%.....nejnižší cena zboží.....	1% z 3999.....	3 999 . 0,01 = 39,99
	30%.....	39,99 . 30 = 1 199,70
	nejnižší cena zboží.....	3 999 – 1 199,70 = 2 799,30 Kč
Sleva o 0%.....nejvyšší cena.....		3 999 Kč

V našem případě to znamená, že cena věže se může pohybovat v rozmezí od 2 799,30 Kč do 3 999 Kč.



Př.: Paní Vytlačilová prodává kosmetiku a na tuto činnost má živnostenský list.

Z peněz, které získá prodejem svého zboží, pak po odečtení nákladů
(tedy částky, za kterou sama zboží pořídila), musí odvést tzv. daň z příjmu.

Tato daň činí **27,5%**. Paní Vytlačilová zaplatila na dani **1 170 Kč**.

Jaký měla tedy příjem za prodej kosmetiky ?

- použijeme úměru, neboli trojčlenku :

27,5 % 1 170 Kč
100 % z Kč

Sestavíme rovnost : $\frac{z}{1170} = \frac{100}{27,5}$

$$z = \frac{100}{p} \cdot 1170 = 4254,54$$

- příklad můžeme spočítat pomocí vzorce :

$$z = \frac{x \cdot 100}{p}$$

$$z = \frac{1170 \cdot 100}{27,5}$$

$$z = 4\,254,54 \text{ Kč}$$

Hrubý příjem paní Vytlačilové z prodeje kosmetiky byl 4 255 Kč.

Př. : Od 1.ledna 1993 je u nás zavedena pro koupi zboží

tzv. **daň z přidané hodnoty (DPH)** :

a) u některého zboží (zejména potravin) je její sazba **5%** původní ceny

b) u ostatního (zejm. průmyslového) zboží je **19%**

Řešte následující úlohy o DPH :

a) Kilo salámu je prodáváno za cenu (i s DPH 5%) 126 Kč.

Kolik Kč z této ceny činí DPH ? Kolik by kg uzeniny stál bez DPH ?

b) Cena plazmové televize bez DPH je 23 900 Kč.

Kolik Kč je jeho cena s DPH (ve výši 19%).

3.2 Úrok

Úrok je částka, kterou věřitel od dlužníka získá jako odměnu za půjčení peněz.

Dlužník je osoba nebo instituce, která **si** peníze půjčuje.

Věřitel je osoba nebo instituce, která peníze **někomu** půjčuje.

Úrok [u] (před zdaněním) udává, o kolik korun vzroste částka, kterou vkladatel uloží do banky. Je to částka, kterou by měla připsat (přičíst) banka k *jistině* na účtu klienta (věřitele nebo dlužníka) po předem dohodnutém časovém období.

Jistina [J] je finanční částka, kterou má v bance její klient na svém kontu (účtu) v jistém okamžiku. Jde buď o *vložené částky (vklady)*, kdy klient je vkladatelem, nebo o *půjčky (peněžní úvěry)*, kdy je klient dlužníkem.

Čistý úrok [u*] (tedy po zdanění) se vypočítá tak, že od úroku se odečte tzv. **daň z úroku**, kterou pak banka odvede státu za vkladatele. Tato daň se po výpočtu zaokrouhluje *na celé koruny nahoru*.

Úrokovací období jsou dohodnutá časová období, po jejichž uplynutí se vždy pravidelně připisuje úrok k jistině. Tato úrokovací období mohou být :

roční – značí se p.a. (z latinského per annum – za rok)

pololetní – značí se p.s. (per semestre – za pololetí)

čtvrtletní – značí se p.q. (per quartale – za čtvrtletí)

měsíční – značí se p.m. (per mensem – za měsíc)

Úrokovací doba [t] je celková doba vkladu, resp. půjčky, za kterou je vypočítáván úrok.

Může být rovna celému násobku *úrokovacích období* (speciálně právě jednomu), anebo necelému násobku úrokovacích období.

Je-li úrokovací doba nebo její část právě n let, pak při ročních úrokovacích obdobích se připisují úroky n – krát, při pololetních $2n$ –krát, při čtvrtletních $4n$ –krát a při měsíčních $12n$ –krát.

Pro necelou část úrokovací doby se počítají úroky za všechny její dny, přičemž k určení počtu úrokovacích dnů se v praxi používají tato zjednodušující pravidla:

1. Každý úrokovací měsíc se bere po 30 dnech, a tedy každý úrokovací rok se bere o 360 dnech.
2. Ze dvou krajních bodů časového intervalu, ve kterém se vypočítává úrok, se bere právě jeden den (obvykle den výběru vkladu, resp. den splatnosti půjčky).

Úroková míra (úroková sazba) [**p %**] udává, že úrok **u** za jedno celé úrokové období činí $p\%$ jistiny J (jež je konstantní v průběhu úrokovacího období).

Je-li tedy zadána úroková míra roční (p.a.) $p\%$, pak úrok za rok bude činit $p\%$ jistiny, úrok za pololetí (p.s) $p_s\% = \frac{1}{2} p \%$ jistiny, úrok za čtvrtletí (p.q.) $p_q\% = \frac{1}{4} p\%$ jistiny a úrok za měsíc (p.m.) $p_m = \frac{1}{12} p \%$ jistiny.

.

$$u = J \cdot i \cdot t$$

$$u = \frac{J \cdot p \cdot d}{100 \cdot 360}$$

J – peněžní částka (kapitál, jistina)

u – úrok

p – roční úroková sazba v %

d – doba splatnosti kapitálu ve dnech

poznámka: Od 1.1.1993 platí občané našeho státu daně z úroků ve výši 15 % p.a. jejich hodnoty. Tyto daně, které se zaokrouhlují při výpočtu podle potřeby vždy jen nahoru, plynou do příjmové složky státního rozpočtu jako daně z příjmu.



Př. : Andrea měla k 1. 1. 2007 na účtě v bance **28 400 Kč**. Vypočtěte hodnotu úroku z tohoto vkladu za úrokovací období 1 rok, při úrokové míře **1,40 %**.

VkladJ = 28 400 Kč

Úroková sazba..... i = 0,014

Úrok..... u = x

$$u = K \cdot i$$

$$u = 28400 \cdot 0,014$$

$$u = 397,60 \text{ Kč}$$

Výše úroku k 31.12.2007 bude 397,60 Kč (před zdaněním).

3.2.1 Chci si půjčit peníze, zatím jen na rok

Př.: Banka poskytla panu Pekárkovi na dobu jednoho roku *úvěr* (půjčku) ve výši 50 000 Kč. Po roce pan Pekárek půjčenou částku vrátí a podle smlouvy zaplatí bance navíc 14% z této částky.

1. Kolik korun navíc bance zaplatí ?
2. Kolik korun zaplatí bance celkem ?

banka půjčila.....50 000 Kč

pan Pekárek zapl. navíc.....14% z 50 000 Kč $\rightarrow (0,14 \cdot 50\,000)$ Kč = 7 000 Kč

p.Pekárek zapl. celkem.....50 000 Kč + $(0,14 \cdot 50\,000)$ Kč =
 $= 50\,000 \cdot (1 + 0,14)$ Kč = 57 000 Kč

Zadání můžeme spočítat i pomocí Excelu – v něm vytvoříme tabulku, do které dosadíme dané hodnoty. Námi požadované hodnoty pak získáme tím, že příklad potřebný k výpočtu zadáme do řádku hodnot (viz.násl.vzor, kde jsou tyto příklady zapsány v řádku C5 a C6 modře). Můžeme pak libovolně obměňovat zadané hodnoty.

Vzor :

	A	B	C	
JISTINA (půjčka) - vyplň pole C1	J=	50000	1	
ÚROKOVÁ MÍRA - vyplň pole C2	p%=	14	2	
zaplatí navíc	$J \cdot p / 100$	$=C1 \cdot (C2 / 100)$	7000	5
celkem zaplatí	$J \cdot (1 + p / 100)$	$=C1 + C5$	57000	6

Vyučující může žáky seznámit s prací v *Excelu* :

- zadávání základních funkcí, když žáci sami mohou vytvořit tabulku na výpočet jednoduchých příkladů

3.2.2 Chci si uložit peníze, zatím jen na rok

Př.: Tomáš si na brigádě vydělal 4200 Kč, za které si chce koupit za rok nové lyže.

Chce si peníze uložit na ten rok do banky. V bance mu poradili, aby si peníze uložil na vkladní knížku s výpovědní lhůtou 12 měsíců, na kterou se poskytuje roční úroková sazba 11,75% .

Výpovědní lhůta 12 měsíců znamená, že za 12 měsíců ode dne, kdy vkladatel oznámí výpověď uložených peněz, banka vyplatí vloženou částku spolu s čistým úrokem. Úrok se přičítá jedenkrát ročně.

Tomáš dal bance výpověď ihned po vložení peněz a přesně za jeden rok si šel peníze vyzvednout. Kolik korun mu banka vyplatila ?

Připomínám, že úrok je daněn 15%.

Vklad.....4200 Kč

Roční úroková sazba.....11,75%

úrok před zdaněním.....(0,1175 . 4200)...493,50 Kč

daň z úroku.....(0,15 . 493,50).... 74,025 Kč

daň zaokrouhlená na celé koruny nahoru.....75 Kč

čistý úrok.....(493,50 – 75).....418,50 Kč

k výplatě.....(4200 + 418,50)...4618,50 Kč

Banka vyplatila Tomášovi 4618,50 korun.

Vzor pro výpočet předcházejícího příkladu v Excelu

A	B	C :
JISTINA (vklad)	J = (zadej částku)	4200
ÚROKOVÁ SAZBA	p%	11,75
úrok před zdaněním	u = J . p/100	=C1*(C2/100) 493,5
daň z úroku (15%)		=C4*0,15 74,025
zaokrouhleno nahoru		=ZAOKR.NAHORU(C5;1)75
čistý úrok		=C4-C6 418,5

K VÝPLATĚ		=C1+C7	4618,5
-----------	--	--------	--------

V tabulce je názorně předvedeno, jak ji spolu s žáky v **Excelu** vytvořit.

Modře vyznačené jsou příkazy, které zadáme do řádku hodnot.

Př.: Pan Sýkora si uložil 8000 Kč na vkladní knížku s 3% roční úrokovou sazbou.

Ve stejný den uložila paní Brabcová stejnou částku na vkladní knížku s výpovědní lhůtou 12 měsíců a ihned dala na tuto částku výpověď. (Pro tento typ vkladní knížky je úroková sazba 11,75%.) Přesně za rok si přišli své vklady vyzvednout. Kolik korun každému z nich banka vyplatila ?

	<u>p.Sýkora</u>	<u>p.Brabcová</u>
vklad (jistina).....	8000 Kč	8000 Kč
roční úroková sazba.....	3%	11,75%

úrok před zdaněním.....	$(8000 \cdot 0,03) = 240 \text{ Kč}$	$(8000 \cdot 0,1175) = 940 \text{ Kč}$
daň z úroku.....	$240 \cdot 0,15 = 36 \text{ Kč}$	$940 \cdot 0,15 = 141 \text{ Kč}$
čistý úrok.....	$240 - 36 = 204 \text{ Kč}$	$940 - 141 = 799 \text{ Kč}$
 k výplatě.....	 <u>8204 Kč</u>	 <u>8799 Kč</u>

Panu Sýkorovi banka vyplatila 8204 korun a paní Brabcové 8799 korun .

3.2.3 Chci si zakoupit obligace

Obligace (dluhopis) je cenný papír, který vyjadřuje závazek dlužníka (emitenta) vůči majiteli dluhopisu (věřiteli). Dluhopisy vydává stát, obce a města, banky, podniky.

Dluhopisy mohou být členěny podle mnoha charakteristik, za nejdůležitější lze považovat dobu splatnosti. V době splatnosti dochází ke splacení jmenovité hodnoty dluhopisu, z hlediska délky doby do **splatnosti** potom můžeme rozlišovat dluhopisy :

- **Krátkodobé**, které mají splatnost stanovenou do jednoho roku
- **Střednědobé** se splatností jeden až čtyři roky
- **Dlouhodobé** se splatností delší než čtyři roky

Př.: Pan Svoboda zakoupil u banky dluhopis za 30000 Kč s dobou splatnosti pět let a s roční úrokovou mírou 5,8%. Po dobu pěti let dostával vždy po uplynutí jednoho roku úrok z částky 30000 Kč – daň z úroku byla 25%.

*Jde o takzvané **jednoduché úrokování**. To znamená, že úrok se každý rok počítá z vložené částky 30 000 Kč.*

Po pěti letech mu banka vyplatila zpět částku 30000 Kč spolu úroky

1. vypočítej úrok za jeden rok (před zdaněním)
2. vypočítej úrok za jeden rok (po zdanění)
3. kolik korun získá pan Svoboda na úrocích celkem?

[1740 Kč, 1305 Kč, 6525 Kč]

Vzor pro výpočet předcházejícího příkladu v Excelu:

A	B	C
CENA DLUHOPISU	jistina (Kč)	30000
ROČNÍ ÚROKOVÁ MÍRA	p (%)	5,8
DAŇ Z ÚROKU	daň (%)	25
DOBA SPLATNOSTI	x (let)	5
ÚROK ZA 1 ROK (PO ZDANĚNÍ)	u (Kč)	$= (C1 * (C2 / 100)) * ((100 - C3) / 100)$ 1305
ZISK CELKEM ZA X LET	Kč	$= C6 * C4$ 6525

3.2.4 Co to je depozitní certifikát ?

Depozitní certifikát je písemné potvrzení banky o přijetí vkladu za podmínek dohodnutých mezi bankou a vkladatelem.

V některých bankách jsou tyto depozitní certifikáty označovány také jako **vkladové certifikáty**, **vkladové listy** nebo **depozitní listy**.

Osoba, která bance předloží certifikát k proplacení se nazývá **doručitel**. Certifikát můžeme prodat, či někomu darovat – nový majitel je pak doručitelem.

Zakoupíme-li vkladový certifikát s dobou splatnosti jeden rok, banka vyplatí peníze za jeden rok ode dne, kdy jste certifikát koupil.

Úroková sazba je nastavena podle doby splatnosti vkladových listů – čím je delší doba splatnosti, tím je vyšší úrok.

Př.: Pan Veselý si chce uložit do banky **10 000** korun. Zde mu nabídli jako jednu z možností nákup **vkladového certifikátu** v hodnotě 10 000 Kč. Pan Veselý se rozhodl pro certifikát s **dobou splatnosti půl roku** s roční úrokovou sazbou **12,5%**. **Vypočítej, kolik banka vyplatila panu Veselému za tento depozitní certifikát.**
(Nezapomeň na daň z úroku !)

Základní cena certifikátu.....	10 000 Kč
Roční úroková sazba.....	12,5%
Úrok ze zákl.ceny za rok.....	$0,125 \cdot 10\,000 = 1\,250$
Úrok ze zákl.ceny za půl roku.....	$1\,250/2 = 625$
Daň z úroku (25%).....	$0,25 \cdot 625 = 156,25 \Rightarrow 157$
Čistý úrok (po zdanění).....	$625 - 157 = 468$
K výplatě celkem.....	$10\,000 + 468 = \mathbf{10\,468}$

Panu Veselému banka vyplatila po půl roce 10 468 korun.

3.3 Jednoduché úrokování

O **jednoduchém úročení** hovoříme tehdy, jestliže se vyplácené úroky k původnímu kapitálu nepřičítají a dále se neúročí – tedy, úroky se počítají stále z původního kapitálu. U tohoto typu úročení se úročí stále pouze základní částka, vyplácené úroky se k ní nepřičítají, nevznikají tedy tzv. „**úroky z úroků**“. Úroky jsou vypláceny po uplynutí úrokového období, ke kterému se vztahují.

Jednoduché úročení se používá nejčastěji v situacích, kdy doba půjčky (vkladu, investice apod.) není delší než jeden rok.

V této kapitole nám nejde pouze o zjištění výše úroku za určité období, často máme zjistit jaký budeme mít kapitál včetně úroků za určité období.

Úrok nejčastěji vypočítáme podle vzorce :

$$u = \frac{J \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

Kde : J = peněžní částka (jistina)

p = roční úroková sazba v procentech

t = je doba splatnosti kapitálu v dnech (obvykle $0 < t < 360$)

u = úrok

Jestliže vyjádříme v našem vzorci úrokovou sazbu jako desetinné číslo a splatnost v letech, dostaneme vzorec pro výpočet úroku ve tvaru : $u = K \cdot i \cdot n$

kde $i = p / 100 \Rightarrow$ úroková sazba vyjádřená jako desetinné číslo (značí úrok z 1 koruny za jeden rok)

$n = t / 360 \Rightarrow$ doba splatnosti vyjádřená v letech (obvykle $0 < n < 1$)

Délku roku jsme ve vzorci uvedli jako 360 dní. Vyjádření doby splatnosti n není těžké – dělíme počet dní t , tedy dobu splatnosti ve dnech touto délkou roku také ve dnech. Pro určení tohoto podílu existuje několik možností :

- ° **ACT** – započítává se skutečný počet dní smluvního vztahu a nepočítá se první den
- ° **30E** – celé měsíce se započítávají prostě jako 30 dní
- ° **30A** – liší se od 30E maximálně o jeden den, který je započten pouze v případě, že konec smluvního vztahu připadne na 31. den v měsíci a současně začátek vztahu není 30. nebo 31. den v měsíci

Délka roku je tedy ve jmenovateli uvedena jako a)365 dní (příp.366 v přestupném roce)
b)360 dní

Kombinací uvedených možností dostáváme různé standardy pro stanovení doby splatnosti. V praxi nejužívanější kombinace jsou :

° standard **ACT/365** (anglická metoda) je založen na skutečném počtu dní úrokového období (čítatel) a délce roku 365 (resp. 366) dní.

° standard **ACT/360** (francouzská či mezinárodní metoda) je založen opět na skutečném počtu dní v čitateli zlomku, ale délka roku (ve jmenovateli) se započítává jako 360 dní.

° standard **30E/360** (německá či obchodní metoda) je založen na kombinaci započítávání celých měsíců jako 30 dní (v čitateli) a délky roku (ve jmenovateli) jako 360 dní.

Tento takzvaný evropský standard se při našich výpočtech používá pro svou jednoduchost nejčastěji.

1 rok.....	360 dní
1 měsíc.....	30 dní.....1/12 roku
1 den.....	1/360 roku

V evropském standardu se započítává pro výpočet úroku den výběru, nezapočítává se ale den uložení peněz.

Daň z úroků stanovuje stát, a proto je u všech bank stejná. Vkladní knížky, termínované vklady a běžné účty se úročí **15%** .

Př. : Termínovaný vklad na 10 dní (s dobou splatnosti 10 dní) od 16.3. do 26.3. :

16.3.**den vkladu**.....nezapočítává se pro úrok
 17.3. – 26.3.....**10 dní**, po které se úrok započítává
 26.3.....**den splatnosti vkladu**

Př. : Pan Smažený neuhradil fakturu za zboží ve výši **843 600 Kč** splatnou 6.3.2006.

Podle smlouvy účtuje dodavatel penále ve výši **0,07 % za každý den** prodlení. Jaká bude výše dluhu k 16.8.2006? **O kolik pan Smažený zaplatil navíc?**

-při výpočtu použijeme evropský standard-

$$t = (30 - 6) + (4 \cdot 30) + 16 = 160 \text{ dní}$$

počáteční dluh..... $J_0 = 843\,600 \text{ Kč}$

úroková míra..... $i = 0,0007 \text{ p.d. (denně)}$

počet dní..... $t = 160$

zaplatil navíc..... $938\,083 - 843\,600 = 94\,483 \text{ Kč}$

Spočítej si příklad v excelu :

VÝŠE DLUHU	$K_n = ? \text{ Kč}$	843600
ÚROK Z PRODLENÍ	$i = ? \% \text{ za den}$	0,0007
POČET DNÍ PRODLENÍ	$t = ? \text{ počet dní}$	160
VÝŠE DLUHU PŘI SPLACENÍ		=C1*(1+C2*C3)938083,2

Pan Smažený uhradil (za 160 dní zpoždění platby) navíc **94 483** korun, celkem tedy penále i s úhradou za fakturu **938 083** korun.

Př.: Paní Stará si půjčila v bance 173 000 Kč na 7 měsíců při úrokové míře 12,8 % p.a..
Kolik korun uhradí bance po pěti měsících ?

půjčka (jistina)..... $J_0 = 173\,000$ Kč

dobu splatnosti..... $t = 7/12$

úroková míra..... $i = 0,128$

Paní Stará vrátila bance za pět měsíců 185 917 korun.

Př.: Pan Morous vložil do banky na vkladní knížku s výpovědní lhůtou 12 měsíců částku 12 000 korun. Ale už za 4 měsíce nutně potřeboval 5000 korun. Banka mu sice peníze vyplatí, ale za nedodržení výpovědní lhůty je nutno zaplatit jistý poplatek. Ten činí (dle sazebníku) 4,5% z vybírané částky.

Jak vysoký poplatek musí pan Morous zaplatit?

vybíraná částka.....5 000 Kč

poplatek.....4,5% z 5 000 Kč

$$\Rightarrow 5\,000 \cdot 0,045 = \mathbf{225\,Kč}$$

Pan Morous zaplatí 225 korun.

Př. : Petr má na hotovosti 819 000 korun. Právě si pořizuje nový byt, jehož cena je ale 840 000 korun. Současní majitelé toho bytu mu navrhli, že může složit na místě 400 000 Kč a zbytek za rok. Petr této nabídky využil a rozhodl se uložit zbylé peníze na termínovaný vklad s výpovědní lhůtou 1 rok do banky. Jak vysoký musí být úrok, aby Petr svůj nový byt po roce doplatil? Nebudeme brát v úvahu daň z úroků.

Vzorový příklad pro výpočet v Excelu:

HOTOVOST	Kč		819000
CENA BYTU	Kč		840000
ZÁLOHA	Kč		400000
JISTINA	hotovost - záloha	=C1-C3	419000
KONEČNÁ ČÁSTKA	cena bytu - záloha	=C2-C3	440000
POTŘEBNÁ ČÁSTKA	konečná částka - jistina	=C6-C5	21000
POTŘEBNÝ ÚROK	$(u / J) \cdot 100$	=C7/C5)*100	5,011933174

Petr potřebuje, aby mu banka poskytla úrok 5%.

Př.: Prodejna ELEKTRO vyhlásila akci ; u vybraných druhů zboží nabízí splátkový

prodej – zboží si můžete odebrat nyní a zaplatit bez navýšení za rok. Lenka si vybrala lednici v ceně 51 000 Kč . Následně zjistila, že v internetovém obchodě mají tutéž lednici za 48 500 Kč, ale částku musí složit hned. Jak se má Lenka zachovat, která koupě je výhodnější, pokud můžeme peníze na rok uložit v bance při úrokové míře 4,2% p.a. ?

K výpočtu tohoto příkladu použijeme několik metod :

1. spočítáme, jakou částku bychom měli dnes uložit, abychom měli za rok 51 000 Kč při úrokové sazbě 4,2% p.a. – tento způsob se nazývá „**metoda současné hodnoty**“

$$J_0 = \frac{J_n}{1 + i \cdot n} = \frac{51000}{1,042} = 48944,34$$

Současná hodnota je 48 944,34 Kč, museli bychom tedy uložit tuto částku, abychom získali za rok 51 000 Kč.

2. zjistíme, jakou hodnotu bude mít 48 500 Kč za rok při úrokové sazbě 4,2% p.a.-
-tento způsob výpočtu nazýváme „**metoda budoucí hodnoty**“

$$J_n = J_0 \cdot (1 + i \cdot n) = 48500 \cdot (1 + 0,042 \cdot 1) = 50537 \text{ Kč}$$

Pokud dnes uložíme 48 500 korun (úrok 4,2%), za rok obdržíme od banky 50 537 Kč.

3. vypočteme, na jaký úrok bychom měli uložit 48 500 korun, abychom získali po roce 51 000 korun – tomuto způsobu se říká „**výpočet míry výnosu**“

$$i = \frac{J_n - J_0}{J_0 \cdot n} = \frac{51000 - 48500}{48500 \cdot 1} = 0,0515 \Rightarrow 5,15\%$$

Z našeho výpočtu vyplývá, že bychom částku museli uložit při úrokové sazbě 5,15%.

Všechny použité postupy nám ukázaly, že pro Lenku bude výhodnější, když si lednici objedná v internetovém obchodě a částku 48 500 Kč zaplatí nyní.

3.4 Složené úrokování

Naše dosavadní výpočty vycházely z toho, že úroky narůstají lineárně, neboli počítají se stále ze stejného základu. To znamená, že se nezapočítávají úroky z úroků.

Složené úročení vychází z toho, že vyplacené úroky se připočítávají k původní částce (jistině) a v následujícím úrokovém období se jako základ pro výpočet úroku bere již hodnota jistiny zvýšená o úrok. Úročí se tedy již zúročená částka.

Ukážeme si základní rovnice pro složené úrokování, za předpokladu, že :

1. úrokovací období je roční, to znamená, že úroky jsou pravidelně připisovány vždy na konci roku

2. doba splatnosti jistiny je celé kladné číslo, to znamená (v souladu s předpokladem 1), že jistina je uložena po dobu n let

Na přehledné tabulce si ukážeme způsob, jak vypočítat stav jistiny ke konci jednotlivých let :

rok	jistina na konci roku	
1	$J_1 = J_0 + J_0 \cdot i$	$= J_0 \cdot (1 + i)$
2	$J_2 = J_1 + J_1 \cdot i = J_1 \cdot (1 + i)$	$= J_0 \cdot (1 + i)^2$
3	$J_3 = J_2 + J_2 \cdot i = J_2 \cdot (1 + i)$	$= J_0 \cdot (1 + i)^3$
:		:
n	$J_n = J_{n-1} + J_{n-1} \cdot i = J_{n-1} \cdot (1 + i)$	$= J_0 \cdot (1 + i)^n$

J_0 původní jistina

iúroková sazba (p/100)

ndoba splatnosti (v letech)

J_1 J_n výše částky na

konci 1..... n -tého roku

Z toho vyplývá, že obecně můžeme základní rovnici pro složené úročení napsat ve tvaru:

$$J_n = J_0 \cdot (1 + i)^n$$

Stavy jistiny (kapitálu) na konci jednotlivých let tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem rovným úrokovacímu faktoru $1 + i$ (nazývá se též úročitel). Ten udává, na kolik vzroste jednotkový vklad za rok při úrokové sazbě i .

Konečný úrokový výnos roste : a) u jednoduchého úročení – lineárně

b) u složeného úročení – exponenciálně

Př. 6.1 : Pan Krátký hodlá za tři roky vyměnit střechu na svém domě. V současné době má uspořeno 120 000 korun. Rozhodl se tuto částku uložit v bance. Kolik korun dostane vyplaceno po třech letech při složeném úročení , jestliže je úrokové období roční a úroková sazba je 1,5% p.a. ? (nebudeme brát v úvahu daň z úroků)

$$J_0 = 120\,000 \text{ Kč}$$

$$i = 0,015$$

$$n = 3$$

$$J_n = J_0 \cdot (1 + i)^n = 120000 \cdot (1,015)^3 = 125481,405$$

Vzorový příklad pro výpočet v Excelu:

ZÁVISLOST VÝŠE JISTINY NA DOBĚ SPLATNOSTI			
ÚROKOVÁ SAZBA	i	0,015	- zadej úrok/100
DOBA SPLATNOSTI	n	3	- zadej počet let splatnosti
ZÁKLADNÍ JISTINA	J₀	120000	- zadej výši vkladu
VÝŠE JISTINY PO 1. ROCE	J₁	121800	
VÝŠE JISTINY PO 2. ROCE	J₂	123627	
VÝŠE JISTINY PO 3. ROCE	J₃	125481,405	
VÝŠE JISTINY NA KONCI	J_n	125481,405	

Panu Krátkému bude vyplacena částka 125 481 korun.

Př. 6.2 : Andrea dostala k vánocům od babičky vkladní knížku s 25 000 korun. Teď se nechává v bance informovat o podmínkách pro *ukládání peněz na vkladní knížky s výpovědní lhůtou 24 měsíce*, neboť se rozhodla, že pojede za dva roky do Thajska a tyto peníze na svoji cestu použije.

V bance se Andrea dozvěděla : Na vklad na své vkladní knížce *může dát kdykoli výpověď*. Za dva roky po uplynutí výpovědi jí bude vložená částka spolu s čistým úrokem vyplacena. Roční úroková sazba je 12,5%.Úroky se připisují jednou ročně, přičemž jde o *složené úrokování* – tedy: Na konci prvního roku vypočítáme úrok z částky 25 000 Kč, daň z úroku odvede banka státu a klientovi (Andree) připíše čistý úrok. Na konci druhého roku bude počítat úrok z částky, která bude na knížce po prvním roce, to znamená původní vklad plus čistý úrok za první rok.

Tento příklad vyřešíme přehledně :

Vklad.....25 000 Kč

Roční úroková sazba.....12,5%

Doba splatnosti.....2 roky

Úrok za 1.rok (před zdaněním)..... $0,125 \cdot 25\,000 = 3\,125$ Kč

Daň z úroku.....	0,15 . 3 125 = 468,75 Kč
Čistý úrok za 1.rok.....	3 125 – 469 = 2 656 Kč

Částka na vkladní knížce na začátku 2.roku.....	$25\,000 + 2\,656 = 27\,656$ Kč
Úrok za 2.rok(před zdaněním).....	$0,125 \cdot 27\,656 = 3\,457$ Kč
Daň z úroku.....	$0,15 \cdot 3\,457 = 518,55$ Kč
(nezapomeň zaokrouhlit nahoru na celé koruny).....	$= 519$ Kč
čistý úrok za 2.rok.....	$3\,457 - 519 = 2\,938$ Kč

částka k výplatě : vložená částka.....	25 000 Kč
čistý úrok za 1.rok.....	2 656 Kč
čistý úrok za 2.rok.....	2 938 Kč
celkem.....	30 594 Kč

Andrea bude mít za dva roky na cestu 30 594 korun.

Pro zjednodušení můžeme příklad vypočítat podle vzorce : $J_n = J_0 \cdot (1 + 0,85 \cdot i)^n$

J_0 počáteční kapitál vložený k 31.12.
 iroční úroková míra vyjádřená desetinným číslem
 npočet let, po který je vklad úročen
 J_n částka vyplacená po n letech

Ve vzorci předpokládáme, že jde o složené úročení, úrokovací období je 1 rok a úroky se vypočítávají vždy k 31.12., daň z úroku je 15%.

V praxi se často setkáváme s případy, že **úrokové období je kratší než jeden rok**. Tedy : výplata nebo připisování úroků probíhá častěji než jedenkrát za rok. To znamená, že úrokové období již není roční, ale například pololetní, čtvrtletní či měsíční.

Předpokládejme, že k připisování úroků dochází m -krát do roka. Jaká bude výše vkladu na konci prvního roku ?

Tabulka nám ukáže postup výpočtu stavu kapitálu v rámci jednoho roku :

rok	jistina na konci roku	
1	$J_{1/m} = J_0 + J_0 \cdot \frac{i}{m}$	$= J_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})$
2	$J_{2/m} = J_{1/m} + J_{1/m} \cdot \frac{i}{m} = J_{1/m} \cdot (1 + \frac{i}{m})$	$= J_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^2$
3	$J_{3/m} = J_{2/m} + J_{2/m} \cdot \frac{i}{m} = J_{2/m} \cdot (1 + \frac{i}{m})$	$= J_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^3$
:		:
n	$J_{m/m} = J_{m-1/m} + J_{m-1/m} \cdot \frac{i}{m} = J_{m-1/m} \cdot (1 + \frac{i}{m})$	$= J_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^m$

J_0 původní jistina

iroční úroková sazba

i/m úroková sazba za 1 m -tinu roku

$J_{1/m}$ $J_{m/m}$ výše částky na konci 1... m -té části roku

mpočet úrokových období za rok

Výše jistiny na konci m -té části roku $J_{m/m}$ je rovna kapitálu na konci roku J_1 .

Velikost jistiny za n let (připisujeme-li úrok m -krát do roka) vypočítáme pomocí vzorce:

$$J_n = J_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{m \cdot n}$$

Banka nabízí termínované vklady na půl roku s roční úrokovou sazbou 12%.

Založení termínovaného vkladu pro vkladatele znamená, že vložené peníze nebude po dobu sjednaného termínu z banky vybírat.

Termínované vklady banka úročí čtvrtletně. Čistý úrok je možné po prvním čtvrtletí vyzvednout. Pokud se úrok nevybere, úrokuje se na konci druhého čtvrtletí vložená částka spolu s čistým úrokem, který byl ke vkladu připsán na konci prvního čtvrtletí. Jde tedy o *složené úrokování*. *Úroky z termínovaných vkladů se zdaňují 15%.*

Př. 6.3 : Paní Vítová si uložila 2.ledna na termínovaný vklad 100 000 korun. Úroky za první čtvrtletí si nevybrala. Vypočítejte, kolik korun obdrží klientka po půl roce od banky.

Vklad.....100 000 Kč

Roční úroková sazba..... 12%

úrok za rok $100\,000 \cdot 0,12 = 12\,000$ Kč

úrok za 1.čtvrtletí(před zdaněním)..... $12\,000 : 4 = 3\,000$ Kč

daň z úroku..... $3\,000 \cdot 0,15 = 450$ Kč

čistý úrok za 1.čtvrtletí..... $3\,000 - 450 = 2\,550$ Kč

vklad na začátku 2.čtvrtletí..... $100\,000 + 2\,550 = 102\,550$ Kč

úrok za rok z částky..... $0,12 \cdot 102\,550 = 12\,306$ Kč

úrok za 2.čtvrtletí..... $12\,306 : 4 = 3\,076,50$ Kč

daň z úroku..... $3\,076,50 \cdot 0,15 = 461,475$ Kč

čistý úrok za 2.čtvrtletí..... $3\,076,50 - 462 = 2\,614,50 \Rightarrow 2\,615$

k výplatě : Vklad.....100 000 Kč

čistý úrok za 1.čtvrtletí.....2 550 Kč

čistý úrok za 2.čtvrtletí.....2 615 Kč

celkem.....105 165 Kč

Banka vyplatí paní Vítové po půl roce 105 165 korun.

4. Závěr

Lidé dělají mnoho finančních rozhodnutí každý den. Plánují, kolik peněz mohou utratit a kolik peněz by měli ušetřit, přemýšlejí, kam a jak své peníze investovat. Rozhodují se pro půjčky a úvěry z bank či jiných institucí na pokrytí svých výdajů. Tato všechna rozhodnutí jistě potřebují alespoň minimální znalost finanční matematiky.

Dělat správná finanční rozhodnutí hraje velkou roli v životě člověka. Dobře informovaný člověk je schopen předvídat a korigovat svoji finanční situaci lépe než někdo bez těchto znalostí. Finanční vzdělání nám dává schopnost usměrňovat svůj rozpočet, umět rozumněji investovat a hlavně odhadnout svoje finanční možnosti tak, abychom se nerozumným hospodařením nedostali do problémů.

Finanční vzdělávání je tedy důležitým bodem v ochraně spotřebitele. Mělo by nás vést k pochopení a přijetí osobní odpovědnosti za finanční zajištění své i našich blízkých. V širším kontextu má toto vzdělávání význam i pro státní ekonomiku. Měli bychom si uvědomovat důsledky socioekonomického vývoje společnosti, zvláště v oblasti prevence předluženosti.

Finančně gramotný člověk by měl být schopen vypočítat si zisk z investic a úrokovou sazbu z půjček a úvěrů. Měl by rozumět výhodám, ale i případným rizikům jednotlivých finančních rozhodnutí. Zároveň by měl v souladu s právními normami znát svoje práva i povinnosti a vědět, kam se v případě potíží obrátit o pomoc.

Finanční gramotnost je součástí ekonomické gramotnosti, jenže navíc zahrnuje schopnost najít si pracovní uplatnění a tím si zajistit dostatek finančních prostředků a zároveň být zodpovědný za svá rozhodnutí v souvislosti se získáváním či výdaji peněz.

Součástí finančních znalostí jsou mimo jiné i makroekonomické aspekty, jako je hrubý domácí produkt a daňová politika. Finanční gramotnost je vlastně jedna z klíčových kompetencí, kterou by měl občan mít, aby uspěl v současné společnosti.

Souhrn vzorců

Procenta		
1	P – počet procent	$p = \frac{x}{z} \cdot 100$
2	x – procentová část	$x = \frac{p}{100} \cdot z$
3	z - základ	$z = \frac{x}{p} \cdot 100$
Úroky		
	ACT – skutečný počet dní v měsíci	
	30E – celé měsíce se berou jako 30 dní	
4	Anglická norma	ACT/365
5	Francouzská (mezinárodní) norma	ACT/360
6	Německá (obchodní) norma	30E/360
7	Úrok - při zdanění 15%	$u = K \cdot i \cdot t = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{360}$ $u = K \cdot i \cdot t \cdot 0,85$
8	Úroková míra	$i = \frac{u}{K \cdot t}$
9	Základní kapitál	$K = \frac{u}{i \cdot t}$
10	Doba půjčky	$t = \frac{u}{K \cdot i}$
Jednoduché úročení		
11	Konečný kapitál při jednoduchém polhůtním úročení	$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$
12	Konečný kapitál – modifikovaná rovnice	$K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{p \cdot d}{100 \cdot 360})$
13	Konečný kapitál polhůtní při 15% zdanění úroků	$K_t = K_0 \cdot (1 + 0,85 \cdot i \cdot t)$
14	Počáteční kapitál při jednoduchém polhůtním úročení	$K_0 = \frac{K_t}{1 + i \cdot t}$
15	Doba splatnosti při jednoduchém polhůtním úročení	$t = \frac{K_t - K_0}{K_0 \cdot i}$

16	Konečný kapitál při jednoduchém předlhučném úročení	$K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{I}{1-I} \cdot t)$
17	Vztah mezi předlhučným a polhučným úrokovou sazbou	$I = \frac{i}{1+i}$
18	Vztah mezi polhučným a předlhučným úrokovou sazbou	$i = \frac{I}{1-I}$
19	Doba splatnosti při jednoduchém předlhučném úročení	$t = \frac{K_t - K_0}{K_0} \cdot \frac{1-I}{I}$
Složené úročení		
20	Základní rovnice při složeném polhučném úročení konečný kapitál, $t \in N$, úročení p.a.	$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$
21	Konečný kapitál, $t \in N$, úročení je mkrát za rok	$K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{t \cdot m}$
22	Konečný kapitál, $t \notin N$, úročení p.a.	$K_t = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+R \cdot i)$
23	Konečný kapitál, $t \notin N$, úročení je mkrát za rok	$K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{n_0} \cdot (1+R \cdot i)$
24	Výpočet doby splatnosti pro $t \in N$, úročení p.a.	$t = \frac{\ln K_t - \ln K_0}{\ln(1+i)}$
25	Výpočet doby splatnosti pro $t \in N$, úročení mkrát	$t = \frac{\ln K_t - \ln K_0}{m \cdot \ln(1 + \frac{i}{m})}$
26	Výpočet zbytku doby splatnosti pro $t \notin N$, úročení p.a.	$R = \frac{\frac{K_t}{K_0} - (1+i)^n}{i \cdot (1+i)^n}$
27	Výpočet zbytku doby splatnosti pro $t \notin N$, úročení je mkrát za rok	$R = \frac{\frac{K_t}{K_0} - (1 + \frac{i}{m})^{n_0}}{i \cdot (1 + \frac{i}{m})^{n_0}}$
28	Výpočet současné hodnoty pro $t \in N$, úročení p.a.	$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^t}$
29	Výpočet současné hodnoty pro $t \in N$, úročení je mkrát za rok	$K_0 = \frac{K_t}{(1 + \frac{i}{m})^{t \cdot m}}$
30	Výpočet současné hodnoty pro $t \notin N$, úročení p.a.	$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^n \cdot (1+i \cdot R)}$
31	Výpočet současné hodnoty pro $t \notin N$, úročení je mkrát za rok	$K_0 = \frac{K_t}{(1 + \frac{i}{m})^{n_0} \cdot (1+i \cdot R)}$
32	Výpočet úrokové sazby pro $t \in N$, úročení p.a.	$i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1$

33	Výpočet úrokové sazby pro $t \in N$, úročení je mkrát za rok	$i = m \cdot \left(\sqrt[t \cdot m]{\frac{K_t}{K_0}} - 1 \right)$
34	Výpočet úrokové sazby pro $t \notin N$, úročení je mkrát za rok	$i = m \cdot \left(\sqrt[(n+R) \cdot m]{\frac{K_t}{K_0}} - 1 \right)$
35	Výpočet úroku pro $t \in N$, úročení p.a.	$u = K_0 \cdot [(1+i)^t - 1]$
36	Výpočet úroku pro $t \in N$, úročení je mkrát za rok	$u = K_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{t \cdot m} - 1 \right]$
37	Výpočet úroku pro $t \notin N$, úročení p.a.	$u = K_0 \cdot [(1+i)^n \cdot (1+R \cdot i) - 1]$
38	Výpočet úroku pro $t \notin N$, úročení je mkrát za rok	$u = K_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n_0} \cdot (1+R \cdot i) - 1 \right]$

Literatura

- [1] Radová J., Dvořák P. – Finanční matematika pro každého, *Grada* 1993
- [2] Cipra T. – Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou, *Edice HZ Praha* 2001
- [3] Šarounová, Bušek – Matematika II. díl pro 9. roč., *Prométheus* 2002
- [4] Odvárko, Kadleček – Matematika pro 9. ročník, *Prométheus* 2001
- [5] Trejbal J. – Matematika pro 9. ročník 2. díl, *SPN*
- [6] Molnár J., Lepík L., - Matematika 9, *PRODOS s.r.o. Olomouc* 2001
- [7] Kindl K. – Sbírka úloh z aritmetiky pro 5.-7. ročník, *SPN Praha* 1961
- [8] Müllerová J., Braut J. – Matematika pro 7. ročník ZŠ, *Kvarta* 1998
- [9] Kindl K. – Matematika – přehled učiva základní školy, *SPN*
- <http://cs.wikipedia.org/wiki>