

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky



VYUŽITÍ PROGRAMU DERIVE V GEOMETRII

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracovala:

Jana Studničková

Vedoucí práce:

Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

Knihovna JU - PF



3 1 1 5 1 7 2 4 0 7

ANOTACE

Diplomová práce obsahuje úlohy z geometrie, při řešení těchto je vhodné použít matematického programu Derive. Vybavit umění jsou zpracovány a využívám algebraických i grafických prostředků tohoto programu tak, aby výsledek práce byl co nejvíce přesný.

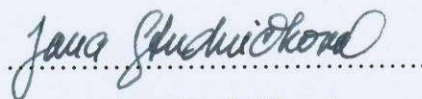
ANNOTATION

Thesis gives some examples of geometry and the solution to those geometrical problems. During the course of finding those solutions, it may be suitable or necessary to use the "Derive" Mathematical Programing, as compared with other methods to find solutions to those problems.

PROHLÁŠENÍ:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně a že jsem uvedla veškerou literaturu, kterou jsem v této práci použila.

V Českých Budějovicích, dne 28. dubna 2006



Jana Studničková

ANOTACE

Diplomová práce obsahuje úlohy a problémy z geometrie, při jejichž řešení je vhodné nebo i nezbytné použití matematického programu Derive. Vybraná témata jsou zpracována s využitím algebraických i grafických prostředků tohoto programu tak, aby vynikl přínos jeho použití.

ANNOTATION

Thesis gives some examples of geometry and the solution to those geometrical problems. During the course of finding those solutions, it may be suitable or necessary to use the "Derive" Mathematical Programme, as compared with other methods to find solutions to those problems.

OBSAH

1. ÚVOD	6
2. PROGRAMOVÁNÍ V DERIVE	7
3. PROGRAM DERIVE	10
3.1. Spuštění programu	10
3.2. Vstup a výstup	10
3.3. Manipulace s výrazy	11
3.4. Tvorba dokumentu	12
3.5. Příklady	12
4. ŘEŠENÉ ÚLOHY	13
5. VZÁJEMNÁ POLOHA PODPROSTORŮ	25
5.1. Vzájemná poloha přímky a roviny	25
5.2. Vzájemná poloha dvou přímek	27
5.3. Vzájemná poloha rovin	29
5.4. Vzájemná poloha obecných podprostorů	31
6. DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE	31
7. GEOMETRIE OBECNÉHO TROJÚHELNÍKA	36
8. GEOMETRIE KUŽELOSEČEK	35
9. ZÁVĚR	38

PODĚKOVÁNÍ:

Děkuji panu Romanu Haškovi, vedoucímu mé diplomové práce, za jeho odborné vedení, cenné rady a připomínky, kterými mi pomohl při jejím vypracování.

Dále bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům za podporu při studiu.

OBSAH

1. ÚVOD	6
2. PROGRAMOVÁNÍ V DERIVE	7
3. PROGRAM DERIVE	10
3.1. Rozhraní programu	10
3.2. Vstup a výstup	10
3.3. Manipulace s výrazy	11
3.4. Tvorba dokumentů	12
3.5. Příkazy	12
4. ŘEŠENÉ ÚLOHY	13
5. VZÁJEMNÁ POLOHA PODPROSTORŮ	25
5.1. Vzájemná poloha přímky a roviny	25
5.2. Vzájemná poloha dvou přímek	33
5.3. Vzájemná poloha rovin	39
5.4. Vzájemná poloha obecných podprostorů	48
6. DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE	52
7. GEOMETRIE OBECNÉHO TROJÚHELNÍKA	56
8. GEOMETRIE KUŽELOSEČEK	75
9. ZÁVĚR	88

1. ÚVOD

Matematický program Derive je program typu CAS (computer algebra system). Jeho historie začíná v roce 1979, kdy byl vydán jeho předchůdce, program muMATH. První verze programu Derive byla vydána roku 1988 a o osm let déle vyšla první verze pro Windows. V roce 2004 vydala firma Texas Instruments verzi 6.1 programu Derive. Pro nás je tato verze zajímavá tím, že to je poprvé, kdy byl program Derive vydán v češtině.

V současné době je program využíván na řadě středních i vysokých škol v USA i Evropě. Dnes je program evaluován, a tak je možné očekávat, že se rozšíří i do škol v České republice. Jeho výhodou je nezvyklá kombinace malé velikosti a velké výpočetní síly. Sympatický je také svou cenou a způsobem ovládání. Lze v něm provádět symbolické i numerické výpočty a kreslit dvourozměrné či třírozměrné grafy. Výhodou použití jakéhokoliv matematického programu, a tedy i Derive, je to, že naše pozornost se tolik neupíná na správnost výpočtů, a proto můžeme svou koncentraci zaměřit na řešení daného problému. Přínosem programu Derive je české prostředí a jeho snadná obsluha pomocí grafického rozhraní, které umožňuje intuitivní ovládání. Uživatel tak může program obsluhovat, aniž by znal příkazy.

Cílem této práce je představit program Derive a poukázat na výhody jeho použití v oblasti geometrie.

K práci jsem přiložila CD s příklady, které je možné otevřít v programu Derive a využít grafického okna. Nevýhodou je, že grafy nezůstanou uloženy a po každém novém spuštění je potřeba z výsledků v algebraickém okně graf znovu vytvořit.

2. PROGRAMOVÁNÍ V DERIVE

CAS program Derive umožňuje programování vlastních funkcí. Této možnosti jsem využila a vytvořila několik vlastních jednoduchých funkcí, které mi posloužily pro jednodušší řešení následujících příkladů a problémů.

Programovací jazyk programu Derive je poměrně jednoduchý a nabízí pouze několik obvyklých příkazů a syntaktických pravidel. Některé funkce můžeme zavést bez použití speciálních příkazů programovacího jazyka. Mezi takové se řadí také funkce *StredUs* (A , B), kterou jsem si vytvořila. Další funkce, které jsem si definovala, již potřebovaly využití příkazu PROG. Tento příkaz se používá pro zápis funkce a uvozuje nám vlastní definování funkce. Jako příklad bychom mohli uvést zápis jedné z mých funkcí.

```
KolmiceBodem(p, A, a, b, s) :=
```

```
  Prog
```

```
    a := POLY_COEFF(p, x, 1)
```

```
    b := POLY_COEFF(p, y, 1)
```

```
    s := [-b, a]
```

```
    s • (A - [x, y]) = 0
```

V každé funkci figurují globální a lokální proměnné. V tomto případě jsou globální proměnné p , A a lokální proměnné a , b , s . Lokální proměnné, které se vztahují pouze pro vyjádření dané funkce, jsou uváděny v závorce za jménem funkce spolu s jejími parametry. Dále se již při výpočtech nemusejí do příkazu lokální parametry vypisovat. Funkce jsem zadávala pro větší přehlednost ve víceřádkovém režimu, do kterého lze přepnout pomocí příkazu *Možnosti > Zobrazení > Zadání víceřádkových výrazů*. Pro přechod na další řádek slouží kombinace kláves ALT+ENTER. Nově vytvořené funkce jsem pomocí příkazu *Soubor > Uložit jako...* ukládala jako Math soubor (s příponou .mth), který lze posléze načíst do paměti příkazem *Soubor > Importovat > Balíček funkcí...* Na pracovní ploše programu Derive se objeví hlášení LOAD(G:\vlastni fce.mth) a příkazem *Průvodce > Definice funkce...* si uživatel může prohlédnout definice funkcí, které jsou k dispozici.

Seznam použitých funkcí, které jsem vytvořila:

1. Funkce *PrimkaBody* (A, B), kde A, B jsou body, kterými přímka prochází a n je normálový vektor této přímky. Rovnici přímky vypočítá v obecném tvaru.

PrimkaBody(A, B, n) :=

Prog

$n := [(A - B)_{\downarrow 2}, (B - A)_{\downarrow 1}]$

$n \cdot (A - [x, y]) = 0$

2. Funkce *KolmiceBodem* (p, A), kde p je přímka, která je kolmá k výsledné přímce, bod A je bod, kterým výsledná přímka prochází. Rovnici přímky vypočítá v obecném tvaru.

KolmiceBodem(p, A, a, b, s) :=

Prog

$a := \text{POLY_COEFF}(p, x, 1)$

$b := \text{POLY_COEFF}(p, y, 1)$

$s := [-b, a]$

$s \cdot (A - [x, y]) = 0$

3. Funkce *KolmiceZBodu* (P, A, B) vypočítá rovnici přímky v parametrickém tvaru. Tato přímka je kolmá na úsečku procházející body A, B a prochází bodem P .

KolmiceZBodu(P, A, B, P, A, B) :=

Prog(

$[P_{\downarrow 1} + (A - B)_{\downarrow 2} \cdot q, P_{\downarrow 2} + (B - A)_{\downarrow 1} \cdot q])$

4. Funkcí *StredUs* (A, B), kde A, B jsou krajní body úsečky, vypočteme její střed.

$A + B$

StredUs(A, B) := $\frac{\quad}{2}$

5. Funkce *Prusecik* (a, d) vypočítá průsečík přímek a, d .

Prusecik(a, d) := (*SOLUTIONS*($[a, d], [x, y]$))

1

3. PROGRAM DERIVE

6. Funkce $VzdBp(B, p)$ vypočítá vzdálenost bodu B od přímky p .

$VzdBp(B, p, m, n, q) :=$

Prog

$m := \text{POLY_COEFF}(p, x, 1)$

$n := \text{POLY_COEFF}(p, y, 1)$

$q := \text{POLY_COEFF}(\text{POLY_COEFF}(p, x, 0), y, 0)$

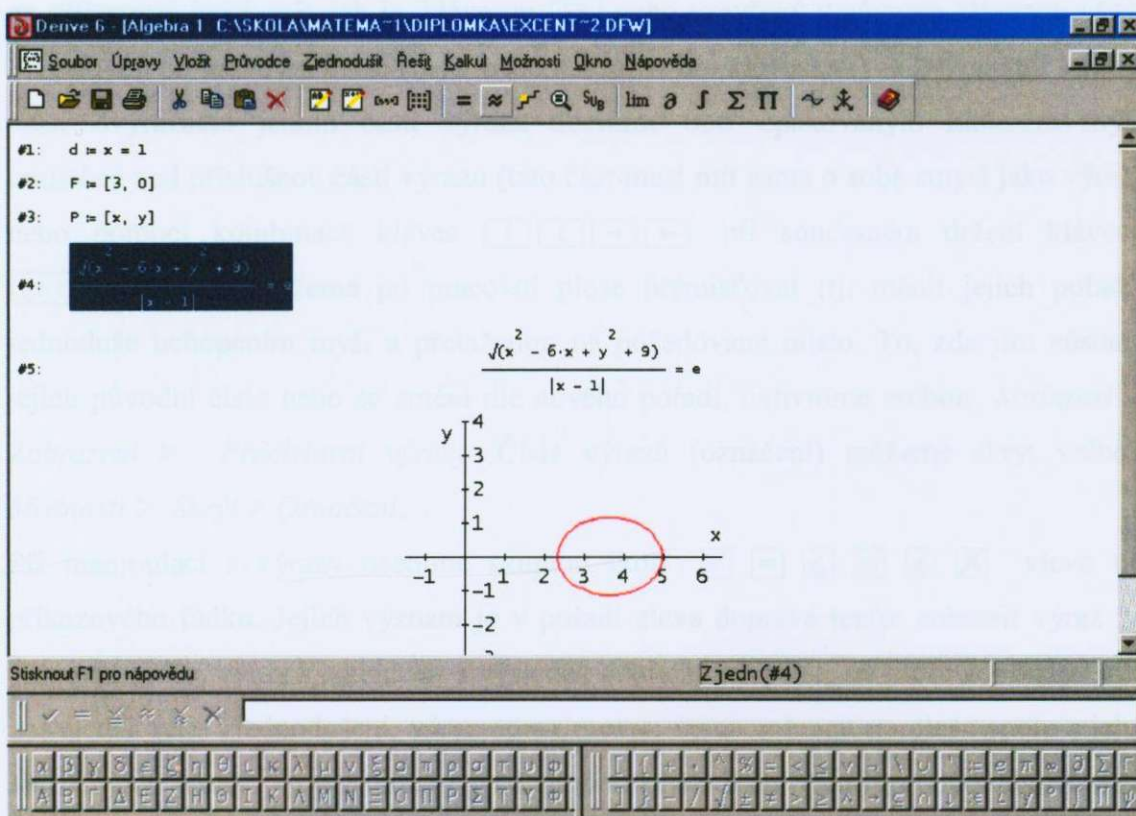
$\text{ABS}(m \cdot B_{\downarrow 1} + n \cdot B_{\downarrow 2} + q) / \sqrt{(m^2 + n^2)}$



3. PROGRAM DERIVE

3.1. Rozhraní programu

S programem komunikujeme prostřednictvím rozhraní (viz Obr.1), které odpovídá standardu programů pracujících pod operačním systémem Windows. Najdeme zde nabídku akcí (Obr.1, druhý řádek), za nimiž se skrývají roletová menu s konkrétními příkazy. Najedeme-li kurzorem myši na příkaz, objeví se v dolní části okna jeho stručná charakteristika. Nechybí ani ikony pro rychlé provádění některých příkazů (Obr.1, třetí řádek). Najdeme zde i panely nástrojů pro rychlé vkládání písmen řecké abecedy či matematických symbolů. Podoba rozhraní se dá změnit (*Okno > Přizpůsobit...*). Roli kompletní uživatelské příručky hraje nápověda programu, která je tradičně přístupná z nabídky *Nápověda* nebo klávesou **F1**.



Obr.1: Rozhraní programu Derive 6

3.2. Vstup a výstup

Výrazy vkládáme do programu prostřednictvím příkazového (vstupního) řádku (Obr.1, úzký bílý řádek v dolní části okna). Po napsání výrazu a stisknutí klávesy Enter

nebo ikony (nalevo od příkazového řádku) se výraz objeví na pracovní ploše (podokno Algebra), která celému oknu dominuje. Každý výraz na pracovní ploše má své číslo (např. #1), které slouží i jako proměnná, pomocí níž se můžeme na výraz odvolávat. Chceme-li například sečíst dva výrazy, které se na pracovní ploše vyskytují pod čísly #5 a #13, stačí na příkazový řádek napsat $\#5 + \#13 =$. Často budeme potřebovat přecházet mezi příkazovým řádkem a pracovní plochou. Můžeme to řešit klikáním myši nebo použitím kláves (nahoru) a (dolů).

3.3. Manipulace s výrazy

Po pracovní ploše se pohybujeme opět pomocí myši nebo pomocí kláves . Zaznamenání historie naší práce na pracovní ploše nám může podstatně ušetřit čas. Potřebujeme-li vložit výraz, který na ploše již je, využijeme jeho číslo (viz. výše) nebo si tento výraz najdeme a zvýrazníme kliknutím myši. Potom ho můžeme přenést na příkazový řádek tak, jak je, klávesou nebo uzavřený v závorce klávesou . Při pohybu po pracovní ploše (myši nebo kurzorovými klávesami) se zvýrazňují výrazy celé. Zvýraznění jenom části výrazu docílíme buď opakovaným klikáním myši umístěné nad příslušnou částí výrazu (tato část musí mít sama o sobě smysl jako výraz) nebo pomocí kombinace kláves při současném držení klávesy . Výrazy můžeme po pracovní ploše přemísťovat (tj. měnit jejich pořadí) jednoduše uchopením myši a přetažením na požadované místo. To, zda jim zůstane jejich původní číslo nebo se změní dle nového pořadí, ovlivníme volbou *Možnosti > Zobrazení > Přečíslovat výrazy*. Čísla výrazů (označení) můžeme skrýt volbou *Možnosti > Skrýt > Označení*.

Při manipulaci s výrazy oceníme skupinu ikon vlevo od příkazového řádku. Jejich význam je v pořadí zleva doprava tento: zobrazit výraz na pracovní ploše, výraz zjednodušit a výsledek zobrazit na ploše, na ploše zobrazit výraz i výsledek jeho zjednodušení, výraz aproximovat, výraz zobrazit na ploše spolu s jeho aproximací. Ikony , najdeme ještě na horní liště ikon nebo jim odpovídající akce můžeme vyvolat posloupnostmi příkazů *Zjednodušit > Základní zjednodušení, Zjednodušit > Aproximovat....* Chceme-li mít výraz i jeho zjednodušení na jednom řádku, napíšeme při vkládání za výraz znaménko $=$ (rovná se) a odešleme stisknutím Enter .

3.4. Tvorba dokumentů

Kromě výrazů a s nimi spojených výpočtů můžeme na pracovní ploše zobrazit text (*Vložit > Text...*), OLE (Object Linking and Embedding) objekty všech myslitelných aplikací (*Vložit > OLE Objekt...*) a samozřejmě grafy vytvořené samotným programem, jak vidíme na Obr.1, (*Vložit > 2D-graf...*, *Vložit > 3D-graf...*). Text můžeme běžným způsobem upravovat (řez, velikost, typ a barva písma, zarovnání, odrážky, apod.) To nám umožňuje vytvářet v programu Derive kompletní dokumenty na úrovni textového editoru, například zadání samostatných prací, podklady pro vyučovací hodinu, vypracování laboratorní práce apod. Dokument můžeme uložit i ve formátu .rtf (Rich Text Format). Tak nejsme vázáni jenom na prostředí Derive, ale můžeme dokument otevřít a dále upravovat třeba ve Wordu případně převést do formátu .pdf apod. Podobně je tomu i u grafů. Ty můžeme uložit v několika grafických formátech a pak je použít v dalších aplikacích.

3.5. Příkazy

Zadání příkazu je v Derive chápáno jako zápis výrazu. Chceme-li, aby program zadaný příkaz vykonal, musíme jemu odpovídající výraz zjednodušit (tj. použijeme $\boxed{=}$ nebo *Zjednodušit* $\rightarrow$ *Základní zjednodušení*). Jak bylo naznačeno výše, program Derive podporuje dvojí způsob zadávání některých příkazů. Buď příkaz zadáme prostřednictvím dialogových oken programu nebo ho napíšeme na příkazový řádek. První možnost je pohodlnější a přibližuje program uživateli. Jak ukazuje následující příklad, nemusíme znát příslušné příkazy. Stačí z nabídky rozhraní vybrat požadovanou akci a program nás sám vede.

4. ŘEŠENÉ ÚLOHY

V této kapitole jsem se zaměřila na středoškolské úlohy, které jsou náročné na výpočty, a proto je výhodné, zpracovat je v Derive. U některých jsem pak použila funkci posuvníku, nástroje vizualizace.

Př.4.1.: V rovnici přímky p zvolte číslo m tak, aby přímka byla rovnoběžná s přímkou q .

$$p: (3-2m)x+(m-4)y+1=0,$$

$$q: -2x+y-1=0$$

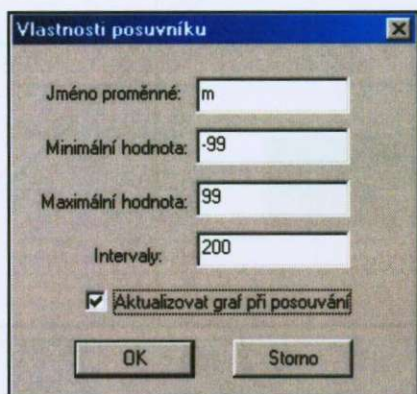
[Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie, Prometheus]

Příklad lze názorně a jednodušeji řešit pomocí matematického programu Derive. Řešení tohoto příkladu bez použití výpočetní techniky by bylo velice zdoluhavé a náročné na výpočty. Derive umožňuje vizualizaci pomocí funkce posuvníku, která je vhodná právě u parametrických úloh.

$$\#1: -2 \cdot x + y - 1 = 0$$

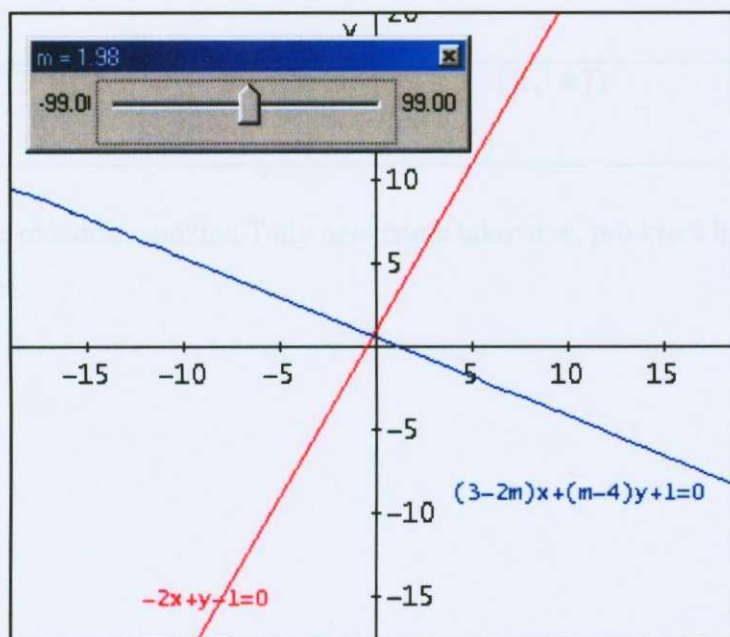
$$\#2: (3 - 2 \cdot m) \cdot x + (m - 4) \cdot y + 1 = 0$$

Graf přímky s parametrem znázorníme pomocí funkce posuvníku, kterou najdeme pod položkou *Vložit > Posuvník*.



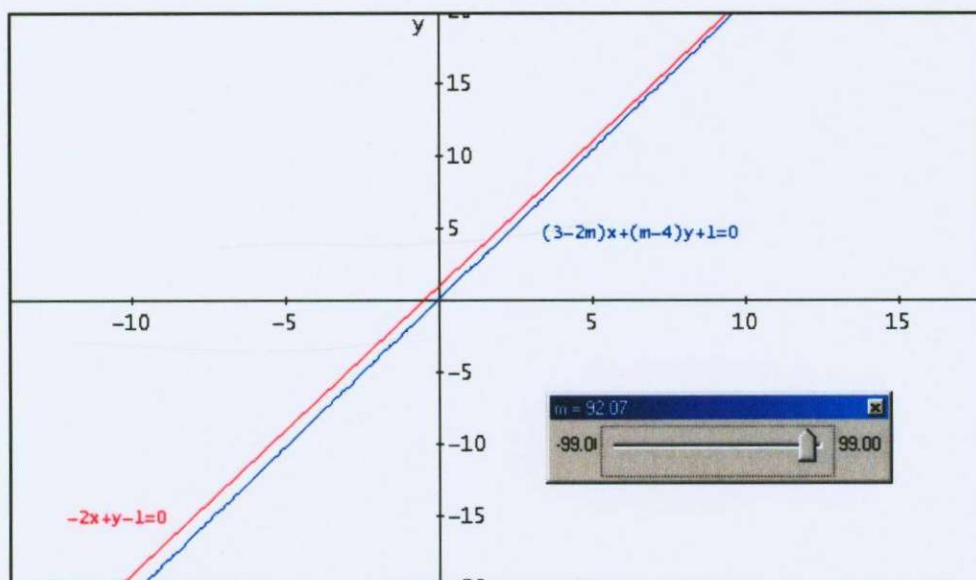
Obr.2

V novém okně (Obr.2) nastavíme jméno proměnné, její maximální a minimální hodnoty, intervaly, ve kterých má změna parametru probíhat, a případnou aktualizaci grafu. Po vložení posuvníku do grafického okna lze vykreslit i příslušnou přímku (Obr.3).



Obr.3

Pokud posuvníkem změníme hodnotu parametru, změní se i graf dané přímky (Obr.4).



Obr.4

$$m-4=k*1$$

#4: []

Př.4.2.: Ověřte, že průsečík výšek trojúhelníka V , průsečík os stran S a těžiště trojúhelníka T leží na přímce. Řešte pro:

a: $x - 2y + 1 = 0$

b: $x - 6y - 12 = 0$

c: $x + 2y + 9 = 0$

[Sbírka úloh z matematiky, Praha Státní pedagogické nakladatelství]

Tento příklad je natolik zdlouhavý, že se určitě vyplatí řešit jej pomocí programu Derive. Uživatel se nemusí zabývat náročností výpočtů a může se zaměřit na postup při řešení úlohy. Tuto úlohu je možné řešit i obecně, pak by byla důkazem.

Do paměti načteme knihovnu funkcí (viz. Programování v Derive), kterou jsme si vytvořili, a pomocí příkazu *Možnosti > Nastavení > Vstup* vybereme *Velikost písmen > Rozlišovat*, což oceníme při řešení delších příkladů, kde se vyskytuje mnoho proměnných. V algebraickém okně se objeví hlášení (#1) a (#2). Zadáme přímky a , b , c . Body trojúhelníka vypočteme jako jejich průsečíky.

#1: LOAD(G:\vlastni fce.mth)

#2: CaseMode := Sensitive

#3: $a := x - 2 \cdot y + 1$

#4: $b := x - 6 \cdot y - 12$

#5: $c := x + 2 \cdot y + 9$

#6: $C := (\text{SOLUTIONS}([a, b], [x, y]))_1$

#7: $C := \left[-\frac{15}{2}, -\frac{13}{4} \right]$

#8: $B := (\text{SOLUTIONS}([a, c], [x, y]))_1$

#9: $B := [-5, -2]$

#10: $A := (\text{SOLUTIONS}([b, c], [x, y]))_1$

#11: $A := \begin{bmatrix} -\frac{15}{4}, & -\frac{21}{8} \end{bmatrix}$

#12: $Tr := \begin{bmatrix} -\frac{15}{4} & -\frac{21}{8} \\ -5 & -2 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{13}{4} \\ -\frac{15}{4} & -\frac{21}{8} \end{bmatrix}$

Pro výpočet těžnic budeme potřebovat středy stran trojúhelníka. Nadefinujeme si tedy funkci `StredUs`, která nám vypočte střed úsečky, pokud zadáme její dva krajní body.

#13: `S_AB := stredUs(A, B)`

#14: $S_{AB} := \begin{bmatrix} -\frac{35}{8}, & -\frac{37}{16} \end{bmatrix}$

#15: `S_AC := stredUs(A, C)`

#16: $S_{AC} := \begin{bmatrix} -\frac{45}{8}, & -\frac{47}{16} \end{bmatrix}$

#17: `S_BC := stredUs(B, C)`

#18: $S_{BC} := \begin{bmatrix} -\frac{25}{4}, & -\frac{21}{8} \end{bmatrix}$

Těžnice vypočteme pomocí příkazu `FIT`, který prokládá body danou funkcí pomocí metody nejmenších čtverců. Pokud takto proložíme přímkou pouze dva body,

dostaneme přímku, jdoucí právě těmito dvěma body. Tato přímka je pak vyjádřena pouze pravou částí směrnicového tvaru rovnice přímky.

#19: $t_a := \text{FIT}([x, d \cdot x + e], [A, S_BC])$

#20:
$$t_a := -\frac{21}{8}$$

#21: $t_b := \text{FIT}([x, d \cdot x + e], [B, S_AC])$

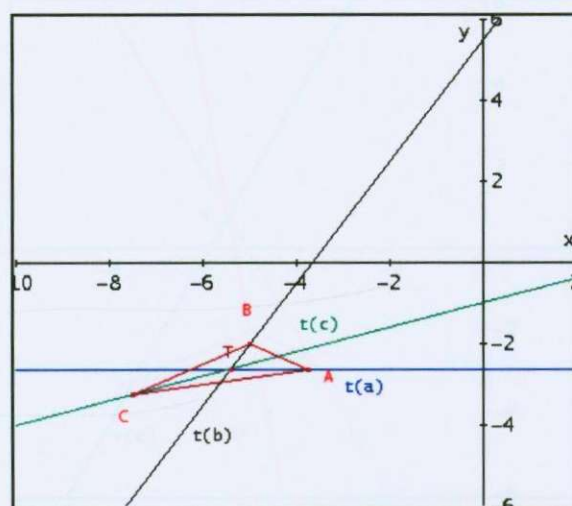
#22:
$$t_b := \frac{3 \cdot x}{2} + \frac{11}{2}$$

#23: $t_c := \text{FIT}([x, d \cdot x + e], [C, S_AB])$

#24:
$$t_c := \frac{3 \cdot x}{10} - 1$$

#25: $T := (\text{SOLUTIONS}([y = t_a, y = t_b, y = t_c], [x, y]))_1$

#26:
$$T := \left[-\frac{65}{12}, -\frac{21}{8} \right]$$



Obr.5: Těžiště trojúhelníku

Pro výpočet os stran a výšek trojúhelníka použijeme funkci, která vypočte obecnou rovnici kolmice k přímce daným bodem. Pro následné použití si takovouto funkci můžeme naprogramovat (viz. Programování v Derive).

#27: $v_a := \text{KolmiceBodem}(a, A)$

#28:
$$v_a := 2 \cdot x + y = -\frac{81}{8}$$

#29: $v_b := \text{KolmiceBodem}(b, B)$

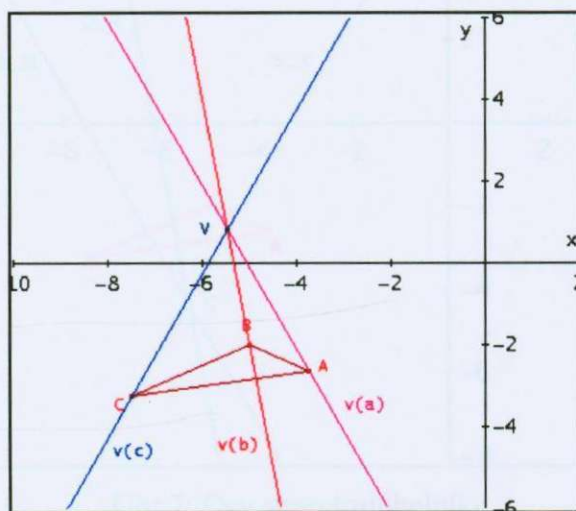
#30:
$$v_b := 6 \cdot x + y = -32$$

#31: $v_c := \text{KolmiceBodem}(c, C)$

#32:
$$v_c := 2 \cdot x - y = -\frac{47}{4}$$

#33:
$$V := (\text{SOLUTIONS}([v_a, v_b, v_c], [x, y]))$$

#34:
$$V := \left[-\frac{175}{32}, \frac{13}{16} \right]$$



Obr.6: Výšky stran trojúhelníku

#35: $o_a := \text{KolmiceBodem}(a, S_BC)$

#36:
$$o_a := 2 \cdot x + y = - \frac{121}{8}$$

#37: $o_b := \text{KolmiceBodem}(b, S_AC)$

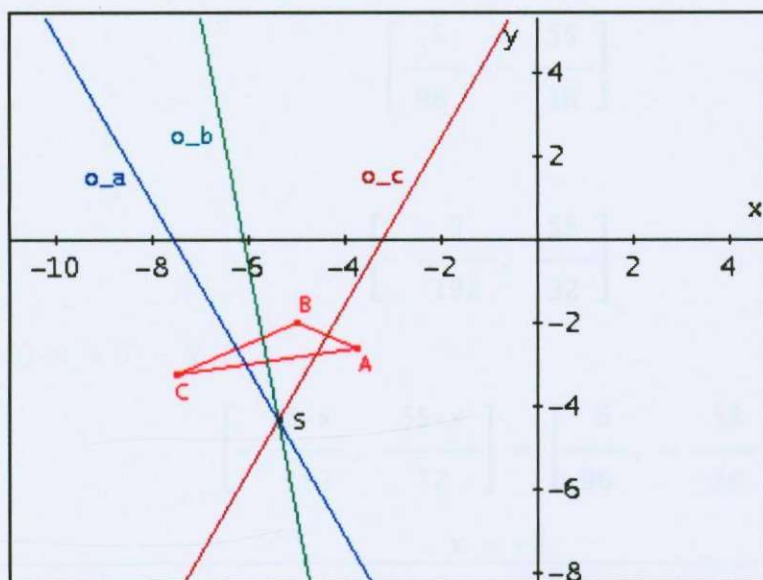
#38:
$$o_b := 6 \cdot x + y = - \frac{587}{16}$$

#39: $o_c := \text{KolmiceBodem}(c, S_AB)$

#40:
$$o_c := 2 \cdot x - y = - \frac{103}{16}$$

#41: $S := (\text{SOLUTIONS}([o_a, o_b, o_c], [x, y]))$ 1

#42:
$$S := \left[-\frac{345}{64}, -\frac{139}{32} \right]$$

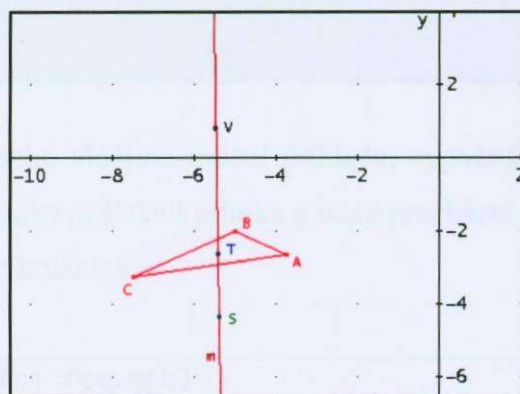


Obr.7: Osy stran trojúhelníku

Přímku proloženou body T , V , S si můžeme vyjádřit a poté vykreslit v grafickém okně (Obr.8).

#43: $m := \text{FIT}([x, p \cdot x + q], [T, V, S])$

#44:
$$m := -66 \cdot x - \frac{2881}{8}$$



Obr.8

Graf přímky procházející body T, V, S (Obr.8) však nemůže být dostatečným důkazem, a proto porovnáme její směrový vektor tvořený body T, V a body T, S .

#45: $T - V$

#46:
$$\left[\frac{5}{96}, -\frac{55}{16} \right]$$

#47: $T - S$

#48:
$$\left[-\frac{5}{192}, \frac{55}{32} \right]$$

#49: $(T - S) \cdot x = T - V$

#50:
$$\left[-\frac{5 \cdot x}{192}, \frac{55 \cdot x}{32} \right] = \left[\frac{5}{96}, -\frac{55}{16} \right]$$

#51:
$$x = -2$$

Body T, V, S trojúhelníku ABC náleží přímce m . Ta je často nazývána Eulerovou přímkou.

Př.4.3.: Přímka p prochází body A, B . Kružnice k se dotýká přímky p v bodě B a její poloměr je 5. Střed kružnice leží v polorovině určené přímkou p a počátkem soustavy souřadné. Určete rovnici kružnice k .

A [1;3]

B [5;0]

Na pracovní plochu vložíme zadání příkladu, vypočítáme rovnici přímky p a rovnici její kolmice, přímky q . Pokud přímka q bude procházet bodem B , víme, že na ní bude ležet střed hledané kružnice.

```
#1:  LOAD(G:\vlastni fce.mth)
#2:  A := [1, 3]
#3:  B := [5, 0]
#4:  p := PrimkaBody(A, B)
#5:                                     p := 3·x + 4·y = 15
#6:  p1 := 3·x + 4·y - 15
#7:  q := KolmiceBodem(p1, B)
#8:                                     q := 4·x - 3·y = 20
```

Nyní jsme našli přímku q , na které leží střed S hledané kružnice k . Víme, že vzdálenost tohoto středu a bodu B je 5. Hledáme tedy všechny body, které mají od bodu B tuto vzdálenost. Množinou těchto bodů je kružnice l .

```
#9:  l := (x - 5)2 + y2 = 25
```

Středy hledané kružnice k leží na průsečíku přímky q a kružnice l .

```

S1 := (SOLUTIONS([q, 1], [x, y]))
#10:                                     1
#11:                                     S1 := [2, -4]
S2 := (SOLUTIONS([q, 1], [x, y]))
#12:                                     2
#13:                                     S2 := [8, 4]

```

Tato úloha lze řešit i elegantnějším způsobem, a to pomocí rovnice kolmice na přímku AB , vedené bodem B , zadané v parametrickém tvaru.

```

#14:  U := [(A - B) / 2, (B - A) / 1]
#15:                                     u := [3, 4]
#16:  b := B + u * t
#17:                                     b := [3 * t + 5, 4 * t]

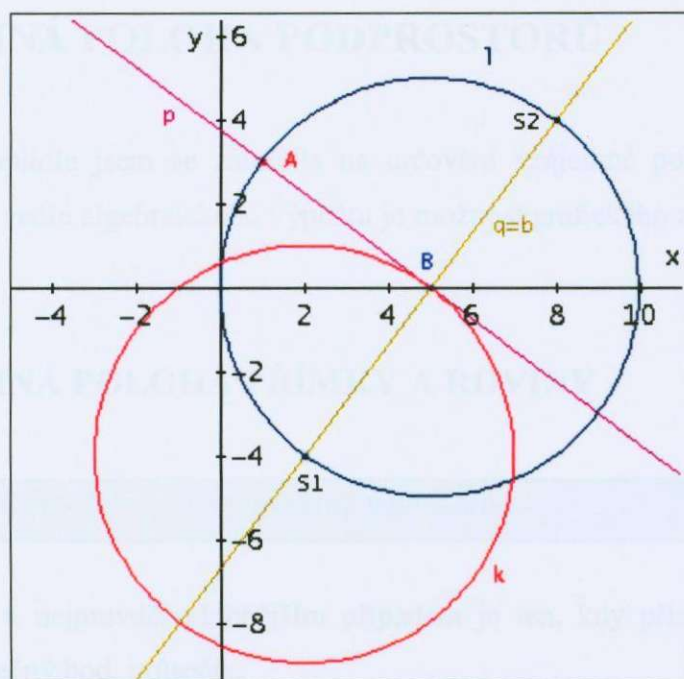
```

Podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů vytvoříme rovnici a vypočteme parametr t pro střed kružnice k . Ten poté dosadíme do parametrické rovnice přímky b , která prochází bodem B a je kolmá na přímku AB .

```

#18:  sqrt((B1 - b1)^2 + (B2 - b2)^2) = 5
#19:                                     5 * |t| = 5
#20:                                     t = -1 v t = 1
#21:  B + u * (-1)
#22:                                     [2, -4]
#23:  S1 := [2, -4]
#24:  B + u * 1
#25:                                     [8, 4]
#26:  S2 := [8, 4]

```

Obr.9

Podle Obr.9 je patrné, že střed S hledané kružnice k je bod S_1 , neboť leží v polorovině ohraničené přímkou AB a počátkem soustavy souřadné. Nyní můžeme zapsat rovnici kružnice k .

#27: $k := (x - 2) + (y + 4) = 5$

#28: $k := (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$

5. VZÁJEMNÁ POLOHA PODPROSTORŮ

V této kapitole jsem se zaměřila na určování vzájemné polohy podprostorů. Hlavní výhodou vedle algebraického výpočtu je možnost grafického znázornění daných podprostorů.

5.1. VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY A ROVINY

Př.5.1.1.: Vzájemná poloha přímky a roviny v prostoru

a) Nejčastějším a nejpravděpodobnějším případem je ten, kdy přímka má s rovinou právě jeden společný bod, průsečík.

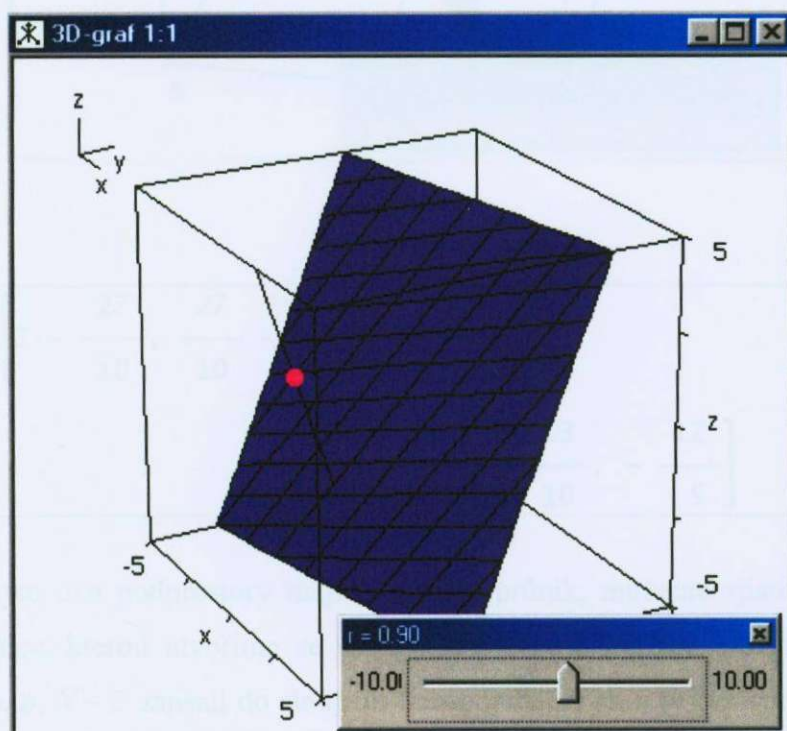
Pro lepší orientaci změním nastavení režimu rozlišení velkých a malých písmen a zapíšeme rovnici přímky danou bodem P a jejím směrovým vektorem m a rovnici roviny α zadanou bodem X a jejími směrovými vektory n a o . Pro ukázkou definice přímky jako množiny bodů závislých na hodnotě parametru zapíšeme bod A .

```
#1: CaseMode := Sensitive
#2: P := [1, -4, 3]
#3: m := [-1, 1, -2]
#4: p := P + m·s
#5:                                     p := [1 - s, s - 4, 3 - 2·s]
#6: A := [1 - r, -4 + r, 3 - 2·r]
#7: X := [1, 1, 2]
#8: n := [3, 1, 1]
#9: o := [1, 1, 2]
#10: α := X + n·t + o·u
#11:                                     α := [3·t + u + 1, t + u + 1, t + 2·u + 2]
#12: SOLVE(p = α, [s, t, u], Real)
```

#13:

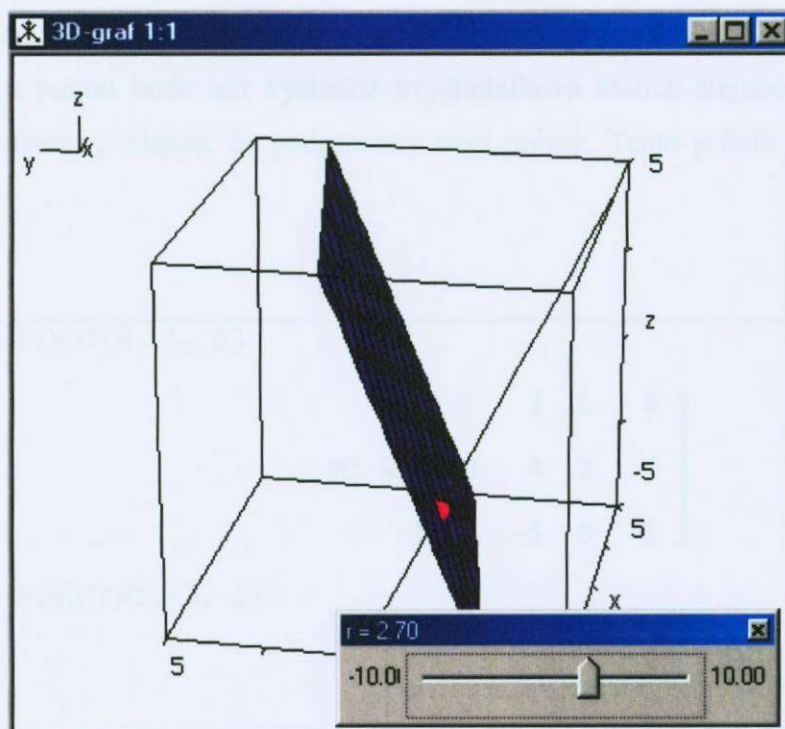
$$s = \frac{27}{10} \wedge t = -\frac{1}{5} \wedge u = -\frac{21}{10}$$

Pokud vypočítáme parametry přímky nebo roviny, je snadné dopočítat pouhým dosazením daného parametru bod, ve kterém se tyto nadroviny protínají. Za pomoci programu Derive lze tento průnik znázornit a s funkcí posuvníku ukázat, jak vypadá množina bodů tvořící danou přímku (Obr.10). Zjistíme, že právě pro hodnotu parametru rovnou $\frac{27}{10}$ neboli 2,7 tento bod náleží také dané rovině (Obr.10).



Obr.10

Pokud na posuvníku nastavíme hodnotu 2,7 a správně natočíme graf, je vidět, že bod náležící přímce prochází rovinou (Obr.11).



Obr.11

#14: $p := \left[1 - \frac{27}{10}, \frac{27}{10} - 4, 3 - 2 \cdot \frac{27}{10} \right]$

#15: $p := \left[-\frac{17}{10}, -\frac{13}{10}, -\frac{12}{5} \right]$

Zda tyto dva podprostory mají či nemají průnik, můžeme zjistit také pomocí hodnoty matice, kterou utvoříme ze směrových vektorů přímky a roviny. Abychom vektory m , n , o , $X - P$ zapsali do sloupců, transponujeme je, a ty pak spojíme do jedné matice příkazem APPEND_COLUMNS.

#16: $M := \text{APPEND_COLUMNS}([m]', [n]', [o]', [X - P]')$

#17: $M := \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Matici M upravíme pomocí příkazu PIVOT tak, aby pod hlavní diagonálou byly pouze nuly, a pokud bude mít výsledná trojúhelníková matice stejnou hodnotu jako matice M , můžeme prohlásit, že podprostory mají průnik. Tento průnik je právě jeden bod.

```
#18: M1 := PIVOT(M, 1, 1)
```

```
#19: M1 := 
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```

```
#20: M2 := PIVOT(M1, 2, 2)
```

```
#21: M2 := 
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{21}{4} \end{bmatrix}$$

```

b) Dalším případem vzájemné polohy přímky a roviny je ten, kdy je přímka s danou rovinou rovnoběžná.

Zapišeme rovnici přímky danou bodem A a jejím směrovým vektorem u a rovnici roviny ρ zadanou bodem B a jejími směrovými vektory v a w . Pro následné vykreslení polohy roviny a přímky v geometrickém okně si obě rovnice vyjádříme číselně.

```
#1: A := [1, -2, 3]
```

```
#2: u := [-4, 1, 3]
```

```
#3: B := [-4, 2, -1]
```

```
#4: v := [1, 0, 1]
```

```
#5: w := [-5, 1, 2]
```

```
#6: p := A + u · t
```

```

#7:      p := [1 - 4·t, t - 2, 3·t + 3]
#8:      ρ := B + v·r + w·s
#9:      ρ := [r - 5·s - 4, s + 2, r + 2·s - 1]
#10:     p = ρ
#11:     SOLVE(p = ρ, [r, s, t], Real)
#12:                                           false

```

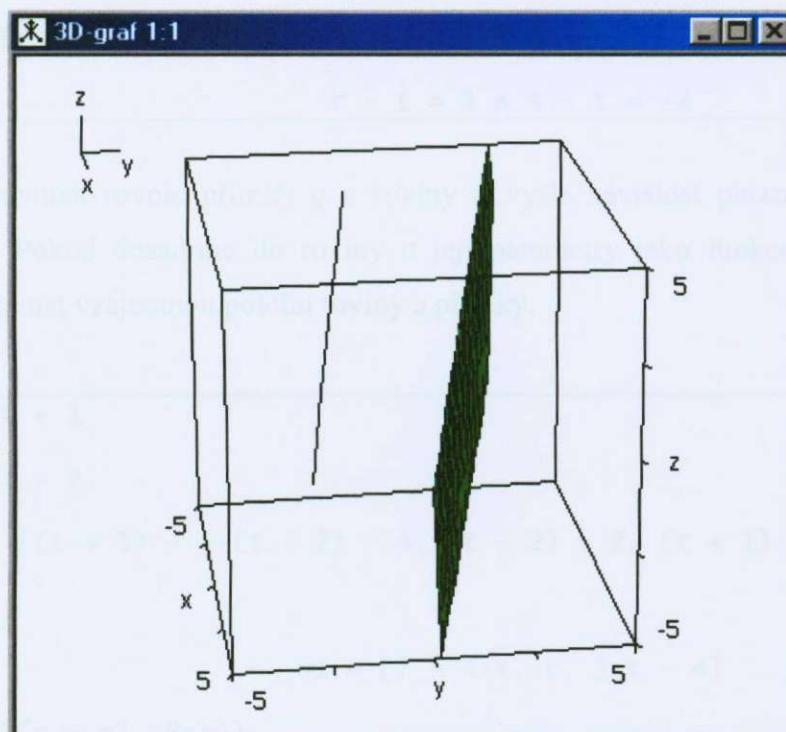
Pro nalezení společného bodu přímky p a roviny ρ musíme porovnat jejich souřadnice. Výsledkem false se rozumí, že daná soustava nemá řešení. V našem případě vyplývá, že přímka nemá s rovinou žádný společný bod.

```

#13:  M := APPEND_COLUMNS([u]', [v]', [w]', [B - A]')
#14:                                     M :=  $\begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ 
#15:  M1 := PIVOT(M, 1, 1)
#16:                                     M1 :=  $\begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{31}{4} \end{bmatrix}$ 
#17:  M2 := PIVOT(M1, 2, 2)
#18:                                     M2 :=  $\begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{bmatrix}$ 

```


Hodnost matice (první tři sloupce matice M_2) a hodnost matice rozšířené (matice M_2) není totožná a tedy podle Frobeniovy věty nemá soustava rovnic řešení. Přímka musí být tedy s rovinou rovnoběžná, jak ukáže následující graf (Obr.12).



Obr.12

c) Poslední možností vzájemné polohy přímky a roviny je ta, kdy přímka dané rovině náleží.

Zadáme rovnici přímky q bodem A a jejím směrovým vektorem u a rovnici roviny σ zadanou bodem B a jejími směrovými vektory v a w .

#1: $A := [7, 0, -4]$

#2: $u := [-4, 1, 3]$

#3: $B := [-4, 2, -1]$

#4: $v := [1, 0, 1]$

#5: $w := [-5, 1, 2]$

#6: $q := A + t \cdot u$

#7: $q := [7 - 4 \cdot t, t, 3 \cdot t - 4]$

```

#8:   $\sigma := B + r \cdot v + s \cdot w$ 
#9:   $\sigma := [r - 5 \cdot s - 4, s + 2, r + 2 \cdot s - 1]$ 
#10:  $q = \sigma$ 
#11: SOLVE( $q = \sigma$ ,  $[r, s, t]$ , Real)
#12:  $r - t = 1 \wedge s - t = -2$ 

```

Pro rovnost rovnic přímky q a roviny σ vyšla závislost parametrů r a s na parametru t . Pokud dosadíme do roviny σ její parametry jako funkce parametru t , můžeme porovnat vzájemnou polohu roviny a přímky.

```

#13:  $r = t + 1$ 
#14:  $s = t - 2$ 
#15:  $\sigma_1 := [(t + 1) - 5 \cdot (t - 2) - 4, (t - 2) + 2, (t + 1) + 2 \cdot (t - 2) - 1]$ 
#16:  $\sigma_1 := [7 - 4 \cdot t, t, 3 \cdot t - 4]$ 
#17: SOLVE( $q = \sigma_1$ , Real)
#18: true

```

Po nahrazení parametrů roviny vidíme, že vyšla stejná rovnice jako zadání přímky q a rovina je tedy s přímkou totožná pro jakoukoliv hodnotu parametru t .

```

#19:  $M := \text{APPEND\_COLUMNS}([u]', [v]', [w]', [B - A]')$ 
#20:  $M := \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 & -11 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 
#21:  $M1 := \text{PIVOT}(M, 1, 1)$ 

```

#22:

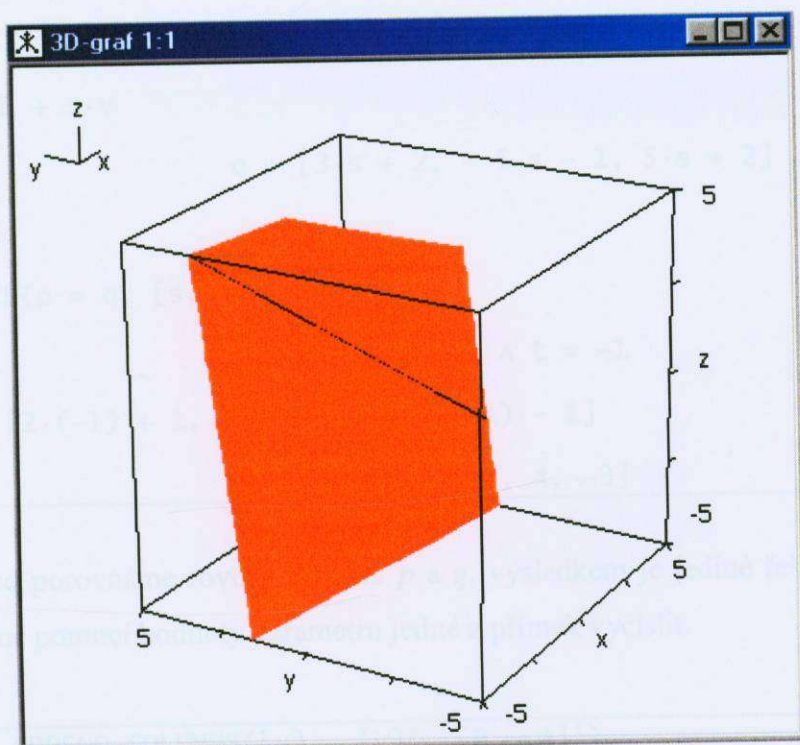
$$M1 := \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 & -11 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{21}{4} \end{bmatrix}$$

#23: $M2 := \text{PIVOT}(M1, 2, 2)$

#24:

$$M2 := \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 & -11 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Řádky matice M jsou lineárně závislé, což je důkaz pro nalezení přímky q rovině σ . To je zřetelné i z následujícího grafu (Obr.13).



Obr.13

5.2. VZÁJEMNÁ POLOHA DVOU PŘÍMEK

Př.5.2.1.: Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru

a) různoběžky

Zapišeme rovnici přímk p danou bodem A a jejím směrovým vektorem u a rovnici přímk q zadanou bodem B a jejím směrovým vektorem v .

```
#1:  A := [1, 2, -1]
#2:  u := [2, -2, 2]
#3:  B := [2, -1, 2]
#4:  v := [3, -5, 5]
#5:  p := A + t·u
#6:                                     p := [2·t + 1, 2 - 2·t, 2·t - 1]
#7:  q := B + s·v
#8:                                     q := [3·s + 2, - 5·s - 1, 5·s + 2]
#9:  p = q
#10: SOLVE(p = q, [s, t], Real)
#11:                                     s = -1 ∧ t = -1
#12:  p := [2·(-1) + 1, 2 - 2·(-1), 2·(-1) - 1]
#13:                                     p := [-1, 4, -3]
```

Pokud porovnáme rovnice přímek p a q , výsledkem je jediné řešení, a to bod, který můžeme pomocí hodnoty parametru jedné z přímek vyčíslit.

```
#14:  M := APPEND_COLUMNS([u]', [v]', [B - A]')
#15:                                     M := 
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

```

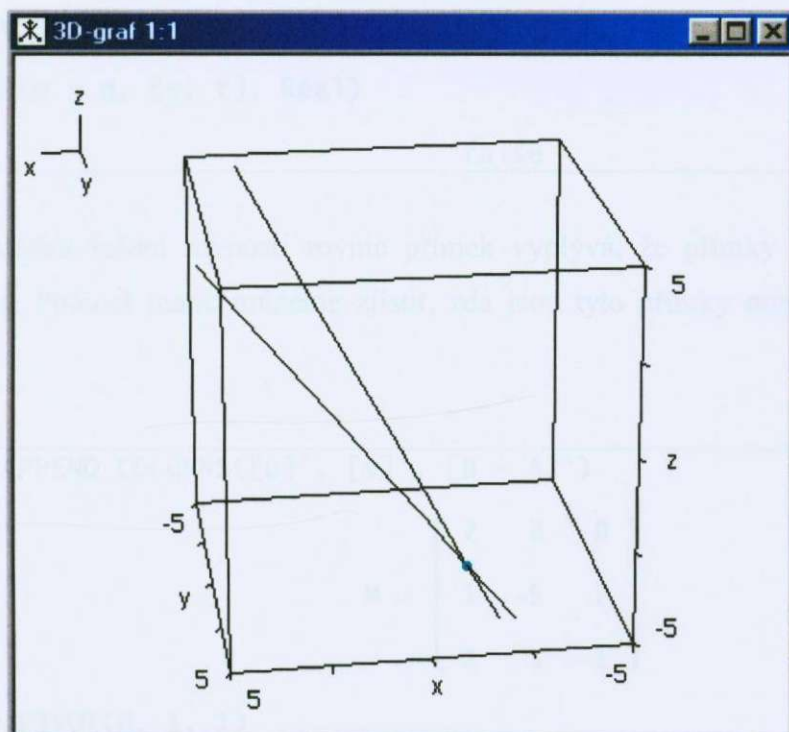
#16: $M1 := \text{PIVOT}(M, 1, 1)$

#17: $M1 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

#18: $M2 := \text{PIVOT}(M1, 2, 2)$

#19: $M2 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Hodnost matice M není totožná s hodnotí matice M_2 , a proto jsou vektory přímek a vektor $B - A$ lineárně závislé. Z pohledu na první dva sloupce matice M_1 , která je tvořena směrovými vektory obou přímek, je zřejmé, že vektory přímek jsou lineárně nezávislé a že vektor $B - A$ je tedy jejich lineární kombinací, z čehož vyplývá, že přímky jsou různoběžné.



Obr.14

b) mimoběžky

Zapišeme rovnici přímky p danou bodem A a jejím směrovým vektorem u a rovnici přímky q zadanou bodem B a jejím směrovým vektorem v .

```
#1: A := [1, 0, -1]
#2: u := [2, 1, 2]
#3: B := [1, 2, -2]
#4: v := [3, -5, 5]
#5: p := A + t·u
#6: p := [2·t + 1, t, 2·t - 1]
#7: q := B + s·v
#8: q := [3·s + 1, 2 - 5·s, 5·s - 2]
#9: p = q
#10: SOLVE(p = q, [s, t], Real)
#11: false
```

Z výsledku řešení rovnosti rovnic přímek vyplývá, že přímky nemají žádný společný bod. Pomocí matic můžeme zjistit, zda jsou tyto přímky mimoběžky nebo rovnoběžky.

```
#12: M := APPEND_COLUMNS([u]', [v]', [B - A]')
#13: M := 
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

#14: M1 := PIVOT(M, 1, 1)
```


#15:

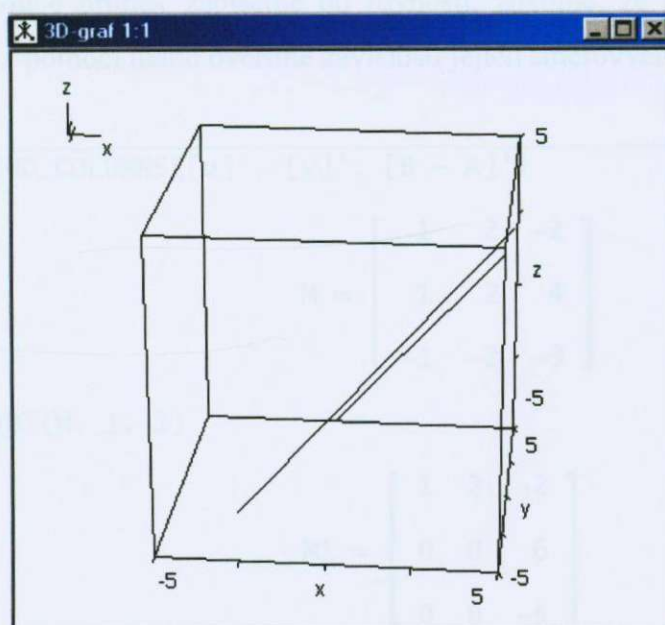
$$M1 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

#16: $M2 := \text{PIVOT}(M1, 2, 2)$

#17:

$$M2 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

Hodnost matice rozšířené (matice M_2) a hodnost matice (matice M_2 bez třetího sloupce) není stejná. Soustava vyjádřená maticí proto podle Frobeniovy věty nemá žádné řešení, přímky jsou proto mimoběžné, jak znázorňuje správně natočený graf (Obr.15). Ten můžeme nechat samovolně otáčet kolem osy z pomocí tlačítka  nebo lze klikáním na , , ,  natočit graf do jakékoliv polohy. Všechna tlačítka najdeme v horní části obrazovky, pokud pracujeme v grafickém okně.



Obr.15

c) rovnoběžky

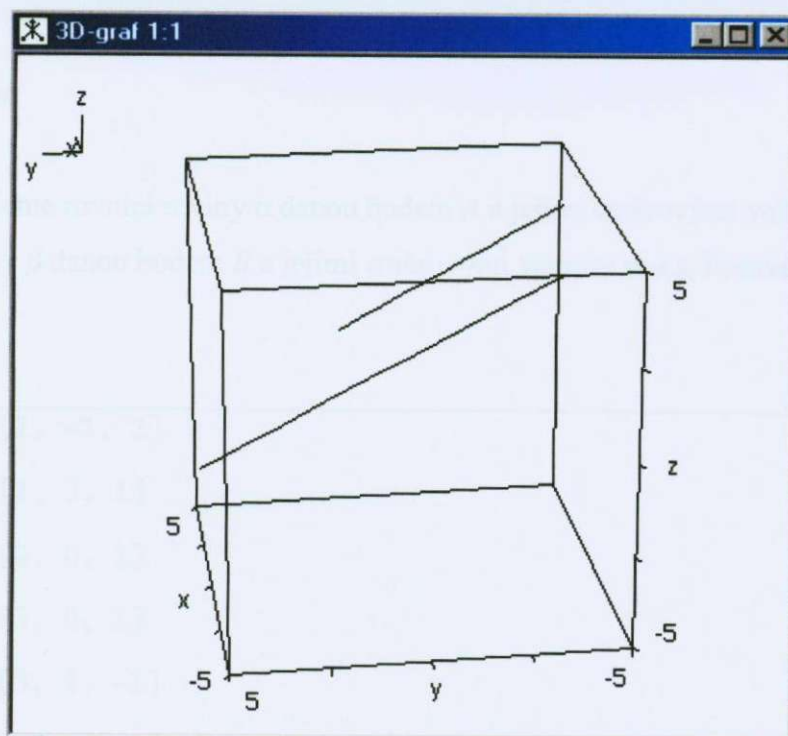
Zadáme rovnici přímky p určenou bodem A a jejím směrovým vektorem u a rovnici přímky q určenou bodem B a jejím směrovým vektorem v .

```
#1:  A := [3, -1, 2]
#2:  u := [1, 1, -1]
#3:  B := [1, 3, -1]
#4:  v := [2, 2, -2]
#5:  p := A + t·u
#6:                                     p := [t + 3, t - 1, 2 - t]
#7:  q := B + s·v
#8:                                     q := [2·s + 1, 2·s + 3, - 2·s - 1]
#9:  p = q
#10: SOLVE(p = q, [s, t], Real)
#11:                                     false
```

Pokud rovnice přímek zapíšeme do rovnosti, zjistíme, že jejich průnikem je prázdná množina a pomocí matic ověříme závislosti jejich směrových vektorů.

```
#12: M := APPEND_COLUMNS([u]', [v]', [B - A]')
#13:                                     M :=  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ 
#14: M1 := PIVOT(M, 1, 1)
#15:                                     M1 :=  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ 
```

Již z prvních dvou sloupců matice M_I je zřejmá lineární závislost směrových vektorů přímek, které tyto sloupce tvoří. Přímky tedy musí být rovnoběžné.



Obr.16

5.3. VZÁJEMNÁ POLOHA ROVIN

Př.5.3.1.: Vzájemná poloha dvou rovin v prostoru

a) různoběžné

Zapíšeme rovnici roviny α danou bodem A a jejími směrovými vektory u a v a rovnici roviny β danou bodem B a jejími směrovými vektory w a z . Porovnáme rovnice obou rovin.

```
#1: A := [1, -1, 2]
#2: u := [1, 3, 1]
#3: v := [2, 0, 1]
#4: B := [3, 0, 1]
#5: w := [3, 2, -1]
#6: z := [-3, 0, 3]
#7:  $\alpha := A + r \cdot u + s \cdot v$ 
#8:  $\alpha := [r + 2 \cdot s + 1, 3 \cdot r - 1, r + s + 2]$ 
#9:  $\beta := B + t \cdot w + x \cdot z$ 
#10:  $\beta := [-3 \cdot x + 3 \cdot t + 3, 2 \cdot t, 3 \cdot x - t + 1]$ 
#11:  $\alpha = \beta$ 
#12: SOLVE( $\alpha = \beta$ , [x, r, s, t], Real)
#13:  $x - \frac{17 \cdot t}{27} = \frac{13}{27} \wedge r - \frac{2 \cdot t}{3} = \frac{1}{3} \wedge s - \frac{2 \cdot t}{9} = \frac{1}{9}$ 
#14:  $x = \frac{13}{27} + \frac{17 \cdot t}{27}$ 
#15:  $\beta := \left[ -3 \cdot \left( \frac{13}{27} + \frac{17 \cdot t}{27} \right) + 3 \cdot t + 3, 2 \cdot t, 3 \cdot \left( \frac{13}{27} + \frac{17 \cdot t}{27} \right) - t + 1 \right]$ 
```

$$\#16: \quad \beta := \left[\frac{2 \cdot (5 \cdot t + 7)}{9}, 2 \cdot t, \frac{2 \cdot (4 \cdot t + 11)}{9} \right]$$

Po dosazení parametru x závislého na parametru t do rovnice roviny β zjistíme, že průsečíkem je přímka.

#17: $M := \text{APPEND_COLUMNS}([u]', [v]', [w]', [B - A]')$

$$\#18: \quad M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

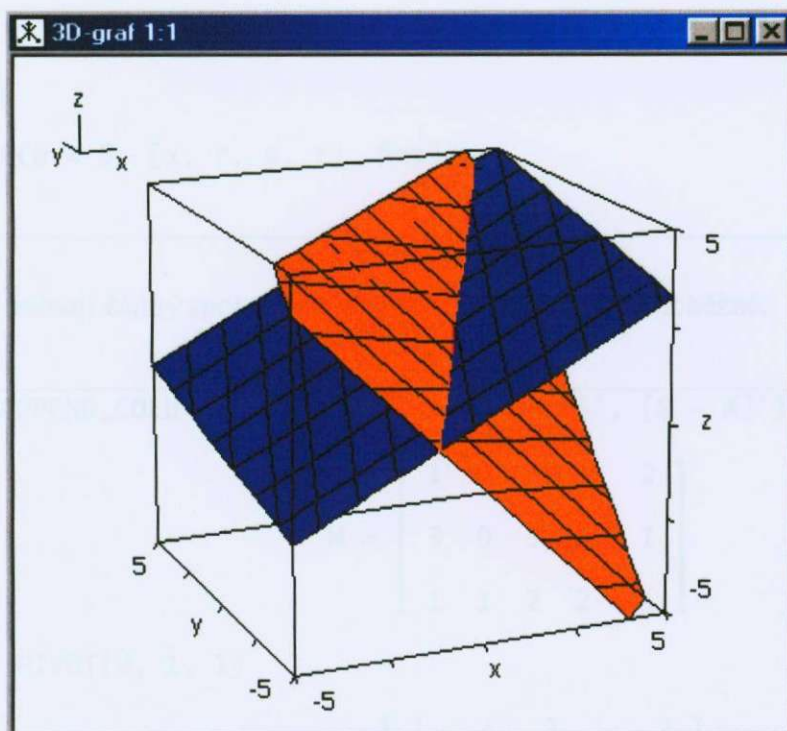
#19: $M1 := \text{PIVOT}(M, 1, 1)$

$$\#20: \quad M1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

#21: $M2 := \text{PIVOT}(M1, 2, 2)$

$$\#22: \quad M2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{6} & -\frac{13}{6} \end{bmatrix}$$

Podle Frobeniovy věty má soustava rovnic daná maticí M řešení, protože hodnost matice je rovna hodnosti matice rozšířené. Můžeme se přesvědčit znázorněním obou rovin v grafickém okně (Obr.17).



Obr.17

b) rovnoběžné

Zadáme rovnici roviny α určenou bodem A a jejími směrovými vektory u a v a rovnici roviny β určenou bodem B a jejími směrovými vektory w a z . Porovnáním rovnic obou rovin zjistíme, zda mají nějaké společné body.

#1: $A := [1, -1, 2]$

#2: $u := [1, 3, 1]$

#3: $v := [2, 0, 1]$

#4: $B := [3, 0, 1]$

#5: $w := [3, 3, 2]$

#6: $z := [1, 9, 2]$

#7: $\alpha := A + r \cdot u + s \cdot v$

#8: $\alpha := [r + 2 \cdot s + 1, 3 \cdot r - 1, r + s + 2]$

#9: $\beta := B + t \cdot w + x \cdot z$


```

#10:           $\beta := [x + 2 \cdot t + 3, 9 \cdot x, 2 \cdot x + t + 1]$ 
#11:   $\alpha = \beta$ 
#12:  SOLVE( $\alpha = \beta$ , [x, r, s, t], Real)
#13:          false

```

Roviny α a β nemají žádný společný bod, pak tedy musí být rovnoběžné.

```

#14:  M := APPEND_COLUMNS([u]', [v]', [w]', [z]', [B - A]')

```

```

#15:          M :=  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ 

```

```

#16:  M1 := PIVOT(M, 1, 1)

```

```

#17:          M1 :=  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -6 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ 

```

```

#18:  M2 := PIVOT(M1, 2, 2)

```

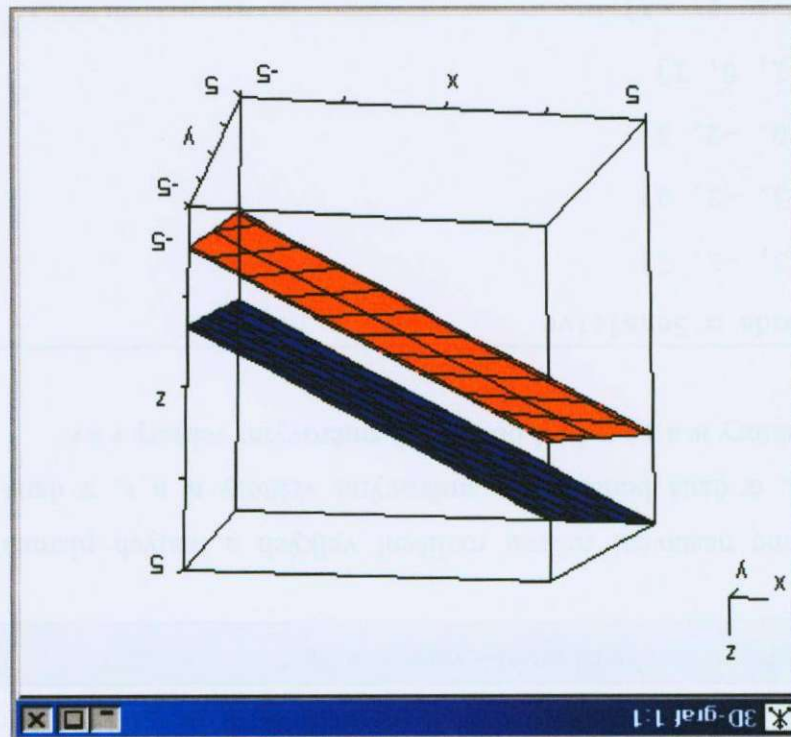
```

#19:          M2 :=  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -6 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{6} \end{bmatrix}$ 

```

Jejich rovnoběžnost je dokázána i pomocí matice M_2 . Hodnosti matice a matice rozšířené si nejsou rovny, a tudíž neexistuje řešení soustavy v matici obsažené. Pokud dvě roviny nemají žádný společný bod, musí být rovnoběžné, o čemž se můžeme opět přesvědčit pomocí grafu (Obr.18).

Obr.18



Př.5.3.2.: Vzájemná poloha tří rovin – svazek rovin

Změníme nastavení režimu rozlišení velkých a malých písmen a zapíšeme rovnice rovin. α daná bodem A a směrovými vektory u a v , π daná bodem P a směrovými vektory w a z a σ daná bodem S a směrovými vektory r a t .

```
#1: CaseMode := Sensitive
#2: A := [3, -1, 3]
#3: P := [3, -2, 0]
#4: S := [0, -2, 3]
#5: u := [1, 0, 1]
#6: v := [-1, 2, -1]
#7: w := [1, -6, 0]
#8: z := [7, 5, 0]
#9: r := [0, -4, 3]
#10: t := [0, 3, -1]
#11:  $\alpha := A + a \cdot u + b \cdot v$ 
#12:  $\alpha := [a - b + 3, 2 \cdot b - 1, a - b + 3]$ 
#13:  $\pi := P + c \cdot w + d \cdot z$ 
#14:  $\pi := [c + 7 \cdot d + 3, -6 \cdot c + 5 \cdot d - 2, 0]$ 
#15:  $\sigma := S + e \cdot r + f \cdot t$ 
#16:  $\sigma := [0, -4 \cdot e + 3 \cdot f - 2, 3 \cdot e - f + 3]$ 
#17:  $\alpha = \pi = \sigma$ 
#18: SOLVE( $\alpha = \pi = \sigma$ , [a, b, c, d, e, f], Real)
#19: 
$$a - \frac{5 \cdot f}{6} = -\frac{3}{2} \wedge b - \frac{5 \cdot f}{6} = \frac{3}{2} \wedge c + \frac{35 \cdot f}{141} = -\frac{43}{47} \wedge d - \frac{5 \cdot f}{141} = -\frac{14}{47} \wedge e - \frac{f}{3} = -1$$

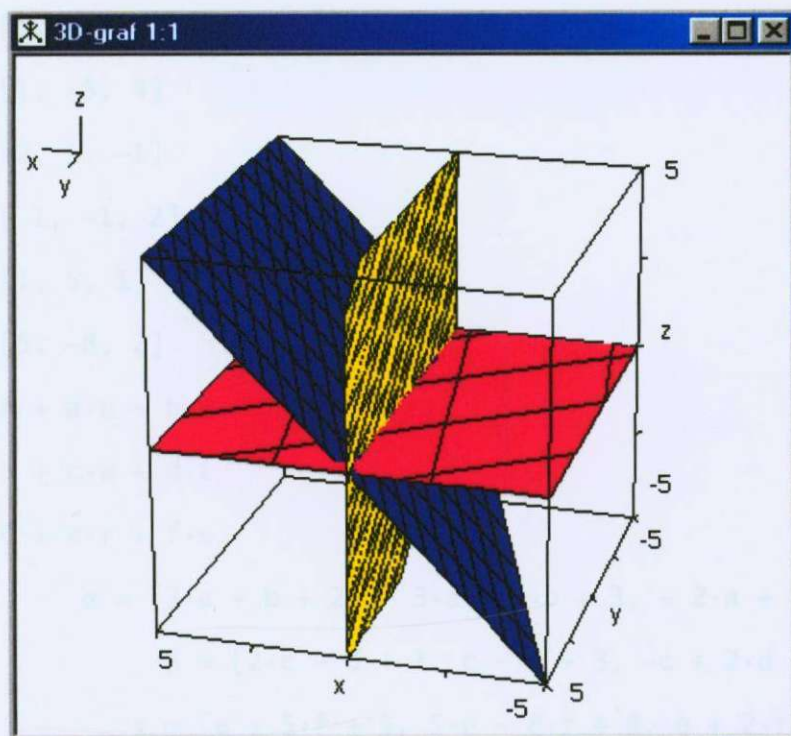
```


Z porovnání rovnic rovin vyplývá závislost všech parametrů na jednom z nich. Po dosazení za parametr e a parametru f do roviny σ zjistíme, že průsečík všech tří rovin je přímka závislá na parametru f .

$$\#20: e = -1 + \frac{f}{3}$$

$$\#21: \sigma := \left[0, -4 \cdot \left(-1 + \frac{f}{3} \right) + 3 \cdot f - 2, 3 \cdot \left(-1 + \frac{f}{3} \right) - f + 3 \right]$$

$$\#22: \sigma := \left[0, \frac{5 \cdot f + 6}{3}, 0 \right]$$



Obr.19

Př.5.3.3.: Vzájemná poloha tří rovin – trs rovin

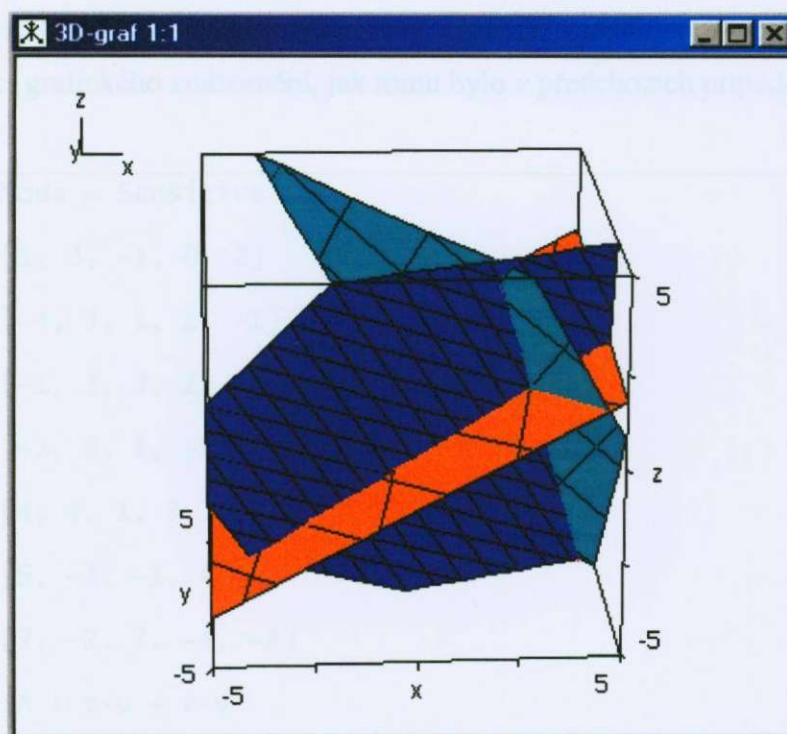
Změníme nastavení režimu rozlišení velkých a malých písmen a zapíšeme rovnice. Rovina α daná bodem A a směrovými vektory u a v , rovina β daná bodem B a směrovými vektory w a t a rovina γ daná bodem C a směrovými vektory r a s .

```
#1: CaseMode := Sensitive
#2: A := [2, 3, -3]
#3: B := [1, -3, 2]
#4: C := [5, 8, 3]
#5: u := [3, -3, -2]
#6: v := [1, -5, 4]
#7: w := [2, 1, -1]
#8: t := [-1, -1, 2]
#9: r := [1, 5, 1]
#10: s := [5, -8, 2]
#11:  $\alpha := A + a \cdot u + b \cdot v$ 
#12:  $\beta := B + c \cdot w + d \cdot t$ 
#13:  $\gamma := C + e \cdot r + f \cdot s$ 
#14:  $\alpha := [3 \cdot a + b + 2, -3 \cdot a - 5 \cdot b + 3, -2 \cdot a + 4 \cdot b - 3]$ 
#15:  $\beta := [2 \cdot c - d + 1, c - d - 3, -c + 2 \cdot d + 2]$ 
#16:  $\gamma := [e + 5 \cdot f + 5, 5 \cdot e - 8 \cdot f + 8, e + 2 \cdot f + 3]$ 
#17:  $\alpha = \beta = \gamma$ 
#18: SOLVE( $\alpha = \beta = \gamma$ , [a, b, c, d, e, f], Real)
#19:  $a = 0 \wedge b = 1 \wedge c = 1 \wedge d = 0 \wedge e = -2 \wedge f = 0$ 
#20:  $\alpha := [3 \cdot 0 + b + 2, -3 \cdot 0 - 5 \cdot b + 3, -2 \cdot 0 + 4 \cdot b - 3]$ 
#21:  $\alpha := [3 \cdot 0 + 1 + 2, -3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 + 3, -2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 3]$ 
```

#22:

$$\alpha := [3, -2, 1]$$

Řešením rovnosti rovin α, β, γ vypočítáme právě jeden bod. To, že všechny tři roviny procházejí jedním bodem lze vykreslit i v grafickém třírozměrném okně CAS programu Derive (Obr.20).



Obr.20

5.4. VZÁJEMNÁ POLOHA OBECNÝCH PODPROSTORŮ

Př.5.4.1.: Vzájemná poloha dvou podprostorů v E_5 .

Vzájemná poloha podprostorů v prostoru větším než třírozměrném již nelze znázornit a nelze si ani představit samotný podprostor vyššího stupně než tři. V tomto případě se proto musíme spoléhat pouze na výpočty a jejich správnost si nemůžeme ověřit pomocí grafického znázornění, jak tomu bylo v předchozích případech.

```
#1: CaseMode := Sensitive
#2: A := [1, 3, -1, 0, 2]
#3: u := [-4, 5, 1, 1, -1]
#4: v := [-1, 3, 3, 2, -3]
#5: T := [-3, 8, 5, -1, -1]
#6: w := [4, 4, 1, 3, -2]
#7: x := [6, -3, -1, 4, 4]
#8: z := [2, -2, 7, -4, -2]
#9: E3 := A + t·u + r·v
#10: E3 := [-r - 4·t + 1, 3·r + 5·t + 3, 3·r + t - 1, 2·r + t, - 3·r
t + 2]
#11: E4 := T + s·w + i·x + j·z
#12: E4 := [6·i + 2·j + 4·s - 3, - 3·i - 2·j + 4·s + 8, -i + 7·j + s
+ 5, 4·i - 4·j + 3·s - 1, 4·i - 2·j - 2·s - 1]
#13: E3 = E4
#14: SOLVE(E3 = E4, [i, j, r, s, t], Real)
#15: i =  $\frac{46}{3437}$  ^ j = -  $\frac{291}{491}$  ^ r =  $\frac{894}{3437}$  ^ s =  $\frac{264}{3437}$  ^ t =
```

557

491

$$\#16: E3 := \left[-\frac{894}{3437} - 4 \cdot t + 1, 3 \cdot \frac{894}{3437} + 5 \cdot t + 3, 3 \cdot \frac{894}{3437} + t - 1, \right. \\ \left. 2 \cdot \frac{894}{3437} + t, -3 \cdot \frac{894}{3437} - t + 2 \right]$$

$$\#17: E3 := \left[-\frac{894}{3437} - 4 \cdot \frac{557}{491} + 1, 3 \cdot \frac{894}{3437} + 5 \cdot \frac{557}{491} + 3, 3 \cdot \frac{894}{3437} \right. \\ \left. + \frac{557}{491} - 1, 2 \cdot \frac{894}{3437} + \frac{557}{491}, -3 \cdot \frac{894}{3437} - \frac{557}{491} + 2 \right]$$

$$\#18: E3 := \left[-\frac{13053}{3437}, \frac{32488}{3437}, \frac{3144}{3437}, \frac{5687}{3437}, \frac{293}{3437} \right]$$

Průnik podprostorů E_3 a E_4 v pětirozměrném prostoru je bod.

$$\#19: M := \text{APPEND_COLUMNS}([u]', [v]', [w]', [x]', [z]', [T - A]')$$

$$\#20: M := \begin{bmatrix} -4 & -1 & 4 & 6 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & 4 & -3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\#21: M1 := \text{PIVOT}(M, 1, 1)$$

$$\#22: M1 := \begin{bmatrix} -4 & -1 & 4 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{7}{4} & 9 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{11}{4} & 2 & \frac{1}{2} & \frac{15}{2} & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & 4 & \frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{11}{4} & -3 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

#23: $M2 := \text{PIVOT}(M1, 2, 2)$

#24: $M2 :=$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 4 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{7}{4} & 9 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{85}{7} & -\frac{46}{7} & \frac{47}{7} & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{78}{7} & \frac{67}{7} & -\frac{12}{7} & -2 \end{bmatrix}$$

#25: $M3 := \text{PIVOT}(M2, 3, 3)$

#26: $M3 :=$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 4 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{7}{4} & 9 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{85}{7} & -\frac{46}{7} & \frac{47}{7} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{63}{17} & -\frac{115}{17} & -\frac{69}{17} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{301}{85} & \frac{378}{85} & \frac{44}{17} \end{bmatrix}$$

#27: $M4 := \text{PIVOT}(M3, 4, 4)$

#28: $M_4 :=$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 4 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{7}{4} & 9 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{85}{7} & -\frac{46}{7} & \frac{47}{7} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{63}{17} & -\frac{115}{17} & -\frac{69}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{491}{45} & \frac{97}{15} \end{bmatrix}$$

Správnost výpočtů lze ověřit pomocí porovnání hodnotí matice soustavy (prvních pět sloupců matice M_4) a matice soustavy rozšířené (M_4). Soustava příslušná matici M má právě jedno řešení.

6. DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE

Zde naleznete příklad z oblasti diferenciální geometrie, který je vyřešen velmi jednoduše, a to díky nabídce akcí v algebraickém okně, která nám umožňuje pracovat bez znalosti příkazů. Opět jsem využila možnost grafického znázornění.

Př.6.1.: Je dána křivka

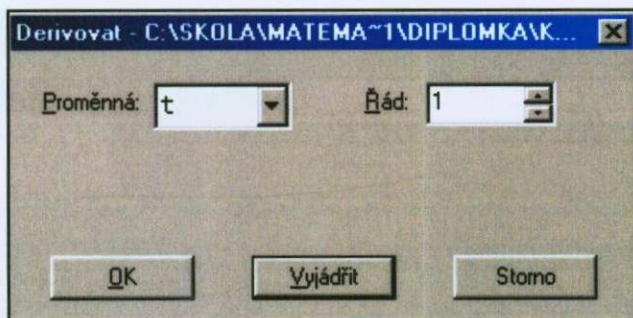
$$\vec{r}(t) = (t; \frac{1+t}{t}; \frac{1-t^2}{t})$$

- a) Určete první křivost v bodě $t = 1$
- b) Zjistěte, zda je daná křivka rovinná.

- a) První křivost, která popisuje zakřivení samotné křivky, lze pomocí programu Derive jednoduše vypočítat podle vzorce :

$$({}^1k)^2 = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}{(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^3}$$

Derivace jakéhokoliv stupně lze vypočítat velmi snadno. Po zvýraznění funkce, kterou budeme derivovat, stačí z nabídky vybrat *Kalkul > Derivace* případně v horní části obrazovky kliknout na ikonu .

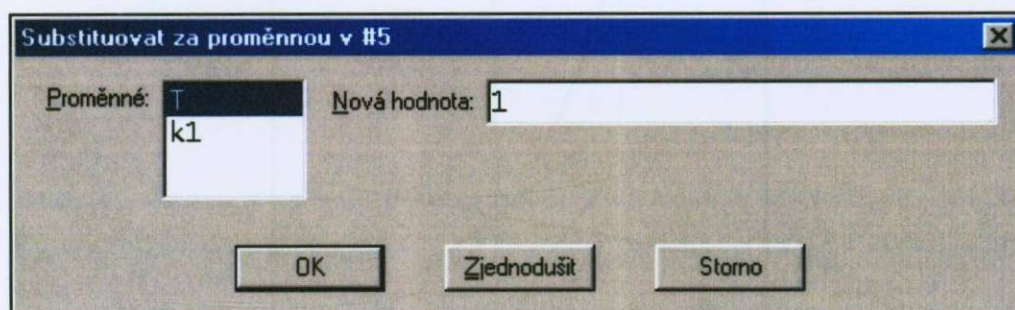


Obr.21

V nabídnutém okně (Obr.21) vybereme proměnnou, podle které budeme derivovat, a zvolíme řád derivace.

$$\begin{aligned}
 \#1: \quad r(t) &:= \left[t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right] \\
 \#2: \quad r'(t) &:= \frac{d}{dt} r(t) \\
 \#3: \quad r''(t) &:= \left(\frac{d}{dt} \right)^2 r(t) \\
 \#4: \quad k1 &:= \sqrt{\frac{|r'(t) \times r''(t)|^2}{(r'(t) \cdot r'(t))^3}} \\
 \#5: \quad k1 &:= \frac{\sqrt{6} \cdot |t|^3}{2 \cdot (t^4 + t^2 + 1)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

První křivost pro parametr $t = 1$ vypočteme snadno pomocí substituce za t . Po probarvení výrazu, který chceme substituovat, vybereme z nabídky možnost *Zjednodušit > Substituce proměnné* případně klikneme na ikonu  a v nově otevřeném okně (Obr.22) potvrdíme proměnnou a zvolíme její hodnotu.



Obr.22

Pokud vybereme OK, funkce se vypíše a místo proměnné vidíme dosazenou hodnotu (#6), pokud chceme výraz rovnou vypočítat (#7), klikneme na Zjednodušit.

$$\#6: \quad k1 := \frac{\sqrt{6} \cdot |1|^3}{2 \cdot (1^4 + 1^2 + 1)^{3/2}}$$

$$\#7: \quad k1 := \frac{\sqrt{2}}{6}$$

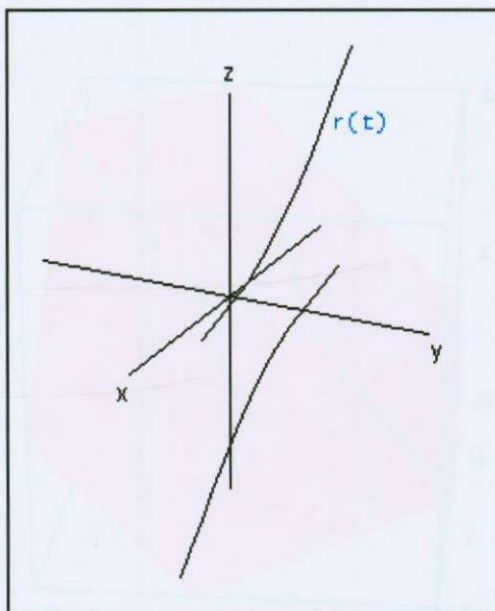
b) Pro výpočet druhé křivosti popisující zakřivení plochy, na které daná křivka leží, použijeme vzorec :

$$^2k = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \ddot{\vec{r}}}{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})^2}$$

$$\#8: \quad \vec{r}'''(t) := \left(\frac{d}{dt} \right)^3 \vec{r}(t)$$

$$\#9: \quad k2 := \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'''(t)}{|\vec{r}''(t)|^2}$$

$$\#10: \quad k2 := 0$$



Obr.23

Z výpočtu je zřejmé, že zakřivení plochy, na níž křivka leží, je nulové a tedy, že křivka leží v rovině, o čemž se můžeme přesvědčit pomocí grafického znázornění (Obr.23) křivky $r(t)$. V programu Derive je možné s touto vyobrazenou křivkou rotovat a tím je její umístění na ploše názornější. Pokud vypočítáme tři body, které náleží dané křivce, můžeme rovinu vypočítat a zobrazit (Obr.24). Body A, B, C roviny α jsem spočítala pro parametr t roven 1, -1, 2.

```
#11: A := [1, 2, 0]
```

```
#12: B := [-1, 0, 0]
```

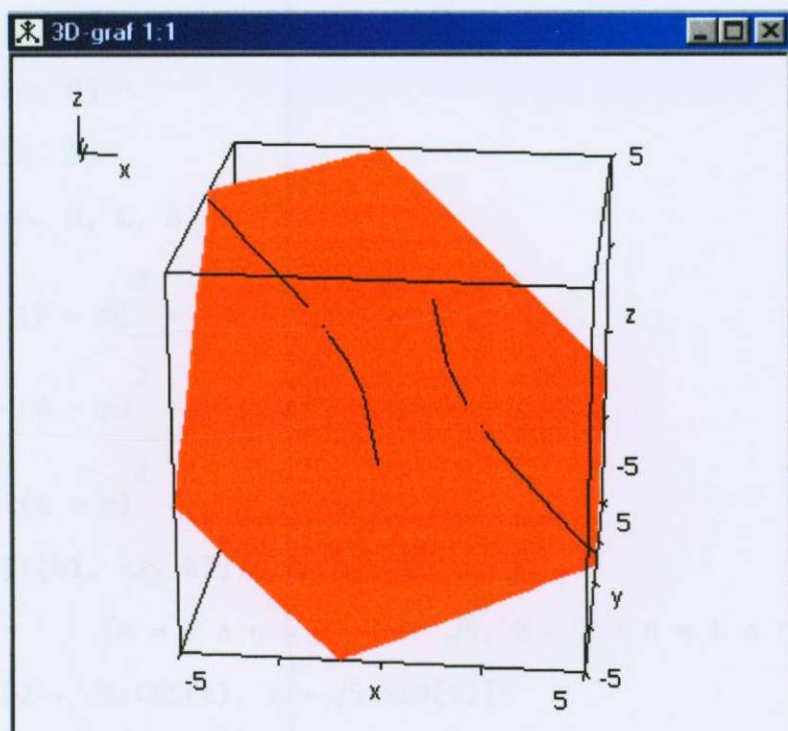
```
#13: C := [2, 3/2, -3/2]
```

```
#14: u := A - B
```

```
#15: v := A - C
```

```
#16:  $\alpha := A + u \cdot w + v \cdot z$ 
```

```
#17:  $\alpha := \left[ -z + 2 \cdot w + 1, \frac{z}{2} + 2 \cdot w + 2, \frac{3 \cdot z}{2} \right]$ 
```



Obr.24

7. GEOMETRIE OBECNÉHO TROJÚHELNÍKA

V této kapitole jsem se zaměřila na interaktivní znázornění matematických teorémů, které platí pro obecné trojúhelníky. V případě Feuerbachovy kružnice jsem pomocí programu Derive provedla důkaz věty.

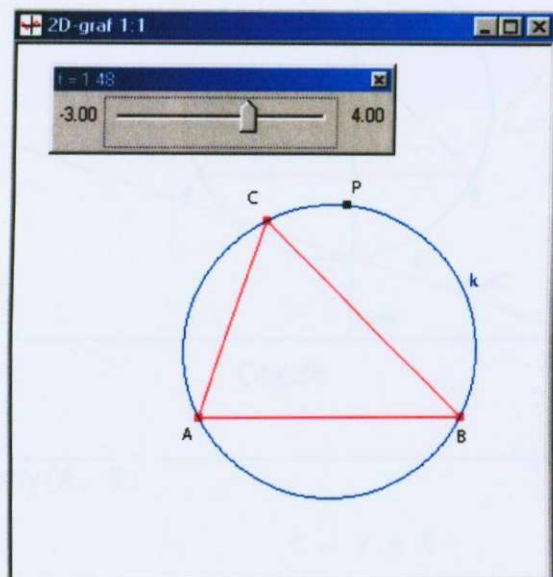
Př.7.1.: Simsonova přímka

Necht' ABC je trojúhelník a P je bod kružnice opsané trojúhelníku ABC . Potom paty kolmic spuštěné z bodu P na strany trojúhelníka ABC leží na jedné přímce.

Příklad lze názorně řešit s využitím funkce posuvníku. Vypočteme tedy kružnici opsanou danému trojúhelníku, po níž se bude pohybovat bod P v závislosti na parametru t .

```
#1:  LOAD(G:\vlastni fce.mth)
#2:  CaseMode := Sensitive
#3:  A := [0, 0]
#4:  B := [4, 0]
#5:  C := [1, 3]
#6:  T := [A, B, C, A]
#7:  k1 := (0 - m)2 + (0 - n)2 = r2
#8:  k2 := (4 - m)2 + (0 - n)2 = r2
#9:  k3 := (1 - m)2 + (3 - n)2 = r2
#10: SOLVE([k1, k2, k3], [m, n, r])
#11:      [m = 2 ∧ n = 1 ∧ r = √5, m = 2 ∧ n = 1 ∧ r = -√5]
#12: k := [2 + √5·COS(t), 1 + √5·SIN(t)]
#13: P := [2 + √5·COS(t), 1 + √5·SIN(t)]
```

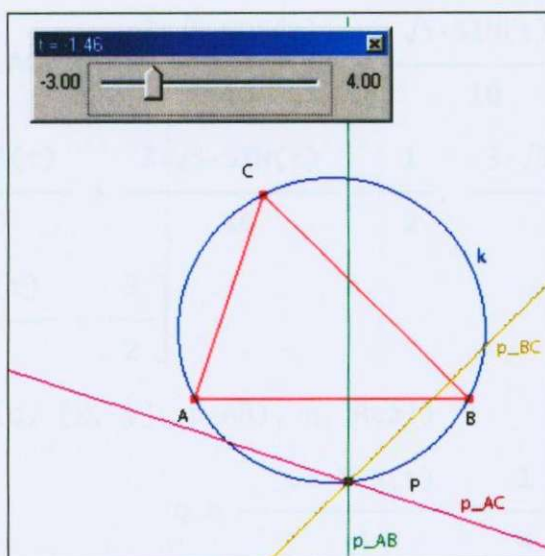

Pokud měníme pomocí posuvníku hodnotu parametru, bod P se pohybuje po kružnici opsané trojúhelníku ABC (Obr.25).



Obr.25

Následně si vyjádříme paty kolmic X , Y , Z na strany trojúhelníku ABC jako průsečíky stran a jejich kolmic vedených z bodu P . Zjistíme, že tyto body leží na přímce (Obr.26).

```
#14: p_AB := KolmiceZBodu(P, A, B)
#15:      p_AB := [ $\sqrt{5} \cdot \cos(t) + 2$ ,  $\sqrt{5} \cdot \sin(t) + 4 \cdot q + 1$ ]
#16: p_AC := KolmiceZBodu(P, A, C)
#17:      p_AC := [ $\sqrt{5} \cdot \cos(t) - 3 \cdot q + 2$ ,  $\sqrt{5} \cdot \sin(t) + q + 1$ ]
#18: p_BC := KolmiceZBodu(P, B, C)
#19:      p_BC := [ $\sqrt{5} \cdot \cos(t) - 3 \cdot q + 2$ ,  $\sqrt{5} \cdot \sin(t) - 3 \cdot q + 1$ ]
```



Obr.26

#20: $c := \text{PrimkaBody}(A, B)$

#21: $c := y = 0$

#22: $b := \text{PrimkaBody}(A, C)$

#23: $b := 3 \cdot x - y = 0$

#24: $a := \text{PrimkaBody}(B, C)$

#25: $a := x + y = 4$

#26: $\text{SOLVE}(\text{SUBST}(a, [x, y], p_{BC}), q, \text{Real})$

#27: $q = \frac{\sqrt{5} \cdot \cos(t)}{6} + \frac{\sqrt{5} \cdot \sin(t)}{6} - \frac{1}{6}$

#28: $X := \text{SUBST}\left(p_{BC}, q, \frac{\sqrt{5} \cdot \cos(t)}{6} + \frac{\sqrt{5} \cdot \sin(t)}{6} - \frac{1}{6}\right)$

#29:

$$X := \left[\frac{\sqrt{5} \cdot \cos(t)}{2} - \frac{\sqrt{5} \cdot \sin(t)}{2} + \frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{5} \cdot \cos(t)}{2} + \frac{\sqrt{5} \cdot \sin(t)}{2} + \frac{3}{2} \right]$$

#30: $\text{SOLVE}(\text{SUBST}(b, [x, y], p_{AC}), q, \text{Real})$

#31: $q = \frac{3 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(t)}{10} - \frac{\sqrt{5} \cdot \sin(t)}{10} + \frac{1}{2}$

$$\#32: Y := \text{SUBST}\left(p_{AC}, q, \frac{3 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(t)}{10} - \frac{\sqrt{5} \cdot \sin(t)}{10} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\#33: Y := \left[\frac{\sqrt{5} \cdot \cos(t)}{10} + \frac{3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(t)}{10} + \frac{1}{2}, \frac{3 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(t)}{10} + \frac{9 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(t)}{10} + \frac{3}{2} \right]$$

$$\#34: \text{SOLVE}(\text{SUBST}(c, [x, y], p_{AB}), q, \text{Real})$$

$$\#35: q = - \frac{\sqrt{5} \cdot \sin(t)}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\#36: Z := \text{SUBST}\left(p_{AB}, q, - \frac{\sqrt{5} \cdot \sin(t)}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\#37: Z := [\sqrt{5} \cdot \cos(t) + 2, 0]$$

$$\#38: X - Y$$

$$\#39: \left[\frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(t)}{5} - \frac{4 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(t)}{5} + 2, - \frac{4 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(t)}{5} - \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(t)}{5} \right]$$

$$\#40: X - Z$$

$$\#41: \left[- \frac{\sqrt{5} \cdot \cos(t)}{2} - \frac{\sqrt{5} \cdot \sin(t)}{2} + \frac{1}{2}, - \frac{\sqrt{5} \cdot \cos(t)}{2} + \frac{\sqrt{5} \cdot \sin(t)}{2} + \frac{3}{2} \right]$$

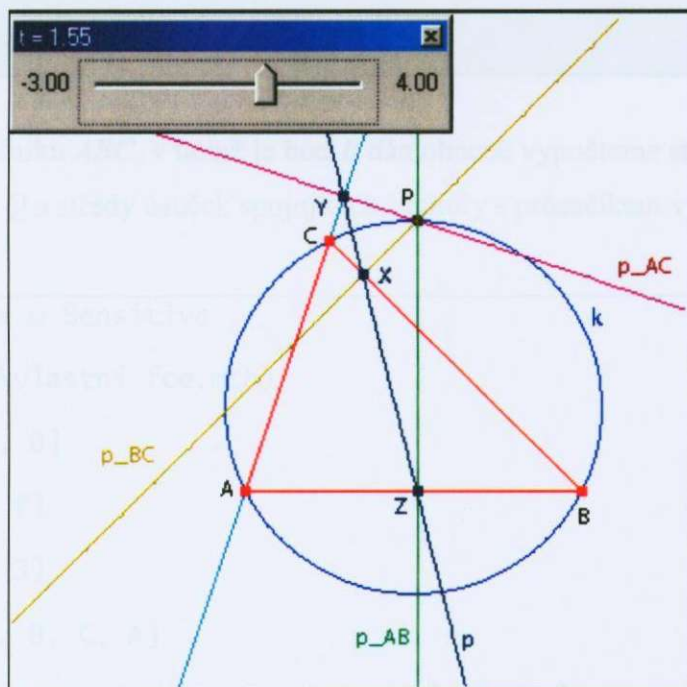
$$\#42: X - Y = f \cdot (X - Z)$$

$$\begin{aligned}
\#43: & \left[\frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(t)}{5} - \frac{4 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(t)}{5} + 2, -\frac{4 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(t)}{5} - \right. \\
& \left. \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(t)}{5} \right] = \left[-\frac{\sqrt{5} \cdot f \cdot \cos(t)}{2} - \frac{\sqrt{5} \cdot f \cdot \sin(t)}{2} + \frac{f}{2}, - \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{5} \cdot f \cdot \cos(t)}{2} + \frac{\sqrt{5} \cdot f \cdot \sin(t)}{2} + \frac{3 \cdot f}{2} \right] \\
\#44: & \text{SOLVE} \left(\left[\frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(t)}{5} - \frac{4 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(t)}{5} + 2, -\frac{4 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(t)}{5} - \right. \right. \\
& \left. \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(t)}{5} \right] = \left[-\frac{\sqrt{5} \cdot f \cdot \cos(t)}{2} - \frac{\sqrt{5} \cdot f \cdot \sin(t)}{2} + \frac{f}{2}, - \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{5} \cdot f \cdot \cos(t)}{2} + \frac{\sqrt{5} \cdot f \cdot \sin(t)}{2} + \frac{3 \cdot f}{2} \right], f, \text{Real} \Big) \\
\#45: & f = \frac{4 \cdot \sqrt{5} \cdot (2 \cdot \cos(t) + \sin(t))}{5 \cdot (\sqrt{5} \cdot \cos(t) - \sqrt{5} \cdot \sin(t) - 3)} \wedge f = - \\
& \frac{4 \cdot \sqrt{5} \cdot (\cos(t) - 2 \cdot \sin(t) + \sqrt{5})}{5 \cdot (\sqrt{5} \cdot \cos(t) + \sqrt{5} \cdot \sin(t) - 1)}
\end{aligned}$$

Po ověření lineární závislosti vektorů $X - Y$ a $X - Z$ můžeme libovolnými dvěma body proložit přímku. Výhodou programu Derive je také to, že se mnohé příkazy zapisují ve tvaru, na který jsme zvyklí z běžné praxe (viz.#42).

$$\begin{aligned}
\#46: & p := \text{PrimkaBody}(X, Z) \\
\#47: & p := \cos(t) \cdot \left(\frac{5 \cdot \sin(t)}{2} + \frac{\sqrt{5} \cdot x}{2} - \frac{\sqrt{5} \cdot y}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) + \frac{5 \cdot \sin(t)^2}{2} - \\
& \left(\frac{\sqrt{5} \cdot x}{2} + \frac{\sqrt{5} \cdot y}{2} - \sqrt{5} \right) \cdot \sin(t) - \frac{3 \cdot x}{2} + \frac{y}{2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Při změnách hodnoty t na posuvníku se bod P posouvá po kružnici, mění se poloha pat kolmic i jejich průsečíků se stranami trojúhelníku, které však stále leží na jedné přímce (Obr.27).



Obr.27

Př.7.2.: Feuerbachova kružnice devíti bodů:

Na Feuerbachově kružnici leží devět významných bodů trojúhelníka. Jsou to středy stran, paty výšek a středy úseček spojujících vrcholy s průsečíkem výšek. Proto se jí také říká kružnice devíti bodů.

V trojúhelníku ABC , v němž je bod B dán obecně vypočteme středy stran R, S, T , paty výšek O, P, Q a středy úseček spojujících vrcholy s průsečíkem výšek K, L, M .

#1: CaseMode := Sensitive

#2: LOAD(G:\vlastni fce.mth)

#3: A := [-1, 0]

#4: B := [e, f]

#5: C := [2, 3]

#6: Tr := [A, B, C, A]

#7:
$$\text{Tr} := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ e & f \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

#8: S := StredUs(A, B)

#9:
$$S := \left[\frac{e-1}{2}, \frac{f}{2} \right]$$

#10: T := StredUs(C, B)

#11:
$$T := \left[\frac{e+2}{2}, \frac{f+3}{2} \right]$$

#12: R := StredUs(C, A)

#13:
$$R := \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

#14: a := PrimkaBody(B, C)

#15: $a := x \cdot (f - 3) + y \cdot (2 - e) + 3 \cdot e - 2 \cdot f = 0$

#16: $a1 := x \cdot (f - 3) + y \cdot (2 - e) + 3 \cdot e - 2 \cdot f$

#17: $b := \text{PrimkaBody}(A, C)$

#18: $b := x - y = -1$

#19: $b1 := x - y + 1$

#20: $c := \text{PrimkaBody}(A, B)$

#21: $c := f \cdot x - y \cdot (e + 1) + f = 0$

#22: $c1 := f \cdot x - y \cdot (e + 1) + f$

#23: $v_a := \text{KolmiceBodem}(a1, A)$

#24: $v_a := x \cdot (e - 2) + y \cdot (f - 3) + e = 2$

#25: $v_b := \text{KolmiceBodem}(b1, B)$

#26: $v_b := x + y - e - f = 0$

#27: $v_c := \text{KolmiceBodem}(c1, C)$

#28: $v_c := x \cdot (e + 1) + f \cdot y - 2 \cdot e - 3 \cdot f = 2$

#29: $0 := \text{Prusecik}(a, v_a)$

#30: $0 := \left[- \frac{e^2 + e \cdot (3 \cdot f - 13) - 2 \cdot (f^2 - 3 \cdot f - 2)}{e^2 - 4 \cdot e + f^2 - 6 \cdot f + 13}, \right.$
 $\left. \frac{3 \cdot (e - 2) \cdot (e - f + 1)}{e^2 - 4 \cdot e + f^2 - 6 \cdot f + 13} \right]$

#31: $P := \text{Prusecik}(b, v_b)$

#32: $P := \left[\frac{e + f - 1}{2}, \frac{e + f + 1}{2} \right]$

#33: $Q := \text{Prusecik}(c, v_c)$

#34:

$$Q := \left[\frac{2 \cdot e^2 + e \cdot (3 \cdot f + 4) - f^2 + 3 \cdot f + 2}{e^2 + 2 \cdot e + f^2 + 1}, \frac{3 \cdot f \cdot (e + f + 1)}{e^2 + 2 \cdot e + f^2 + 1} \right]$$

#35: $V := \text{Prusecik}(v_b, v_c)$

$$\#36: \quad V := \left[\frac{2 \cdot f \cdot (3 - f)}{e - f + 1} - f + 2, \frac{e^2 + e \cdot (f - 1) - 2 \cdot (f + 1)}{e - f + 1} \right]$$

$$\#37: \quad K := V + \frac{1}{2} \cdot (A - V)$$

$$\#38: \quad K := \left[\frac{f \cdot (3 - f)}{e - f + 1} - \frac{f - 1}{2}, \frac{e^2 + e \cdot (f - 1) - 2 \cdot (f + 1)}{2 \cdot (e - f + 1)} \right]$$

$$\#39: \quad L := V + \frac{1}{2} \cdot (B - V)$$

#40:

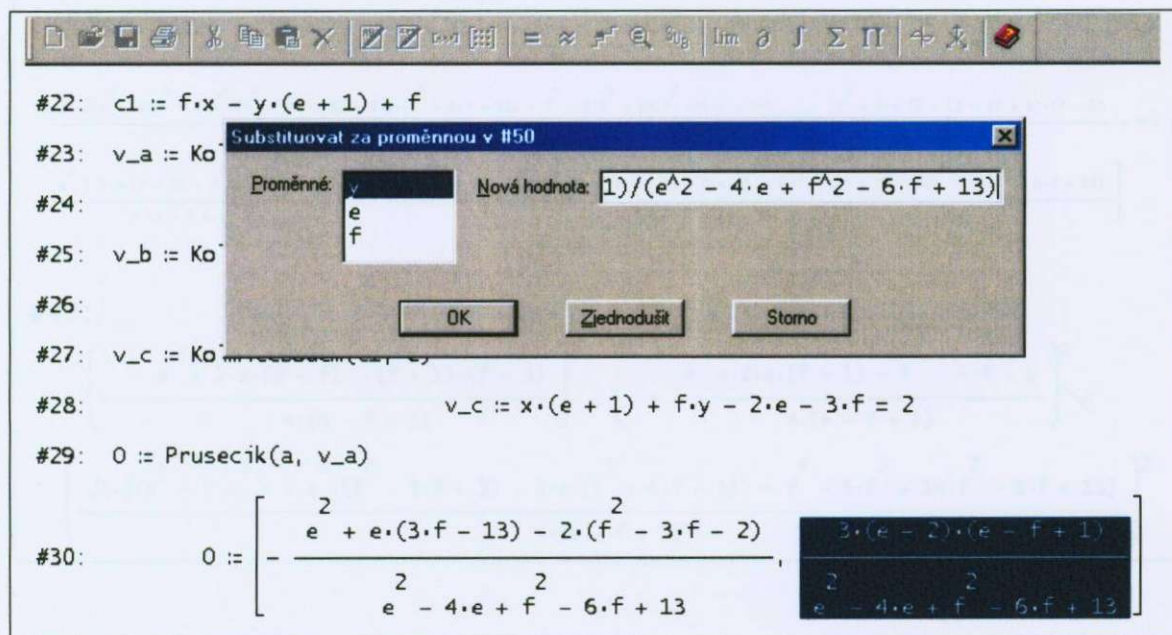
$$L := \left[\frac{f \cdot (3 - f)}{e - f + 1} + \frac{e - f + 2}{2}, \frac{f \cdot (f - 3)}{e - f + 1} + \frac{e + 3 \cdot f - 2}{2} \right]$$

$$\#41: \quad M := V + \frac{1}{2} \cdot (C - V)$$

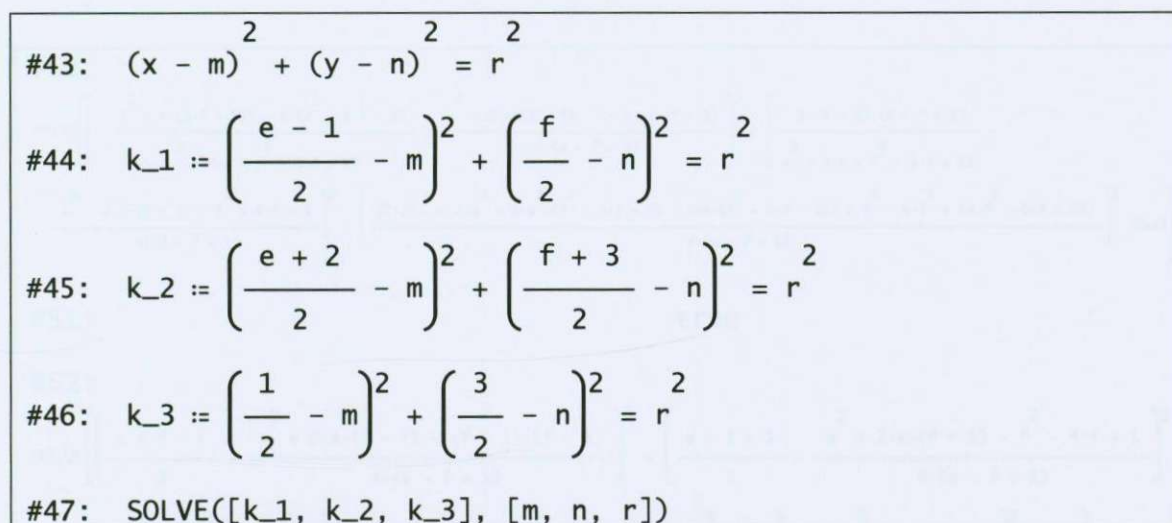
$$\#42: \quad M := \left[\frac{f \cdot (3 - f)}{e - f + 1} - \frac{f}{2} + 2, \frac{f \cdot (f - 3)}{e - f + 1} + \frac{e + 2 \cdot f + 1}{2} \right]$$

Do středového tvaru rovnice kružnice $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, kde m, n jsou souřadnice středu kružnice a r její poloměr, dosadíme například středy stran trojúhelníka, čímž vypočítáme m, n, r , potřebné k zapsání kružnice k procházející právě těmito třemi body. Následným dosazením zbylých šesti bodů do rovnice této kružnice zjistíme, jestli tyto body leží na té samé kružnici. Dosazení těchto bodů si můžeme usnadnit pomocí volby substituce, kterou najdeme pod položkou *Zjednodušit* >

Substitute proměnné... nebo pouhým kliknutím na ikonu Sub v horní části obrazovky. V nově otevřeném okně zvolíme substituovanou proměnnou a z grafického okna přeneseme pomocí klávesy F3 probarvenou hodnotu (Obr.28).



Obr.28



Řešením průniku kružnic k_1, k_2, k_3 jsou konstanty m, n, r , přičemž hodnotu poloměru r uvažujeme pouze větší než nulu.

#48:

$$\left[m = \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (2 - f) - (f + 1) \cdot (f - 3)}{4 \cdot (e - f + 1)} \wedge n = \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (f + 1) - f^2 - 4 \cdot f + 1}{4 \cdot (e - f + 1)} \wedge r = \frac{\sqrt{2 \cdot \sqrt{(e^4 - 2 \cdot e^3 + 2 \cdot e^2 \cdot (f^2 - 3 \cdot f + 3)) - 2 \cdot e \cdot (f^2 + 6 \cdot f - 11) + f^4 - 6 \cdot f^3 + 14 \cdot f^2 - 6 \cdot f + 13}}}{4 \cdot |e - f + 1|}, m = \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (2 - f) - (f + 1) \cdot (f - 3)}{4 \cdot (e - f + 1)} \wedge n = \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (f + 1) - f^2 - 4 \cdot f + 1}{4 \cdot (e - f + 1)} \wedge r = - \frac{\sqrt{2 \cdot \sqrt{(e^4 - 2 \cdot e^3 + 2 \cdot e^2 \cdot (f^2 - 3 \cdot f + 3)) - 2 \cdot e \cdot (f^2 + 6 \cdot f - 11) + f^4 - 6 \cdot f^3 + 14 \cdot f^2 - 6 \cdot f + 13}}}{4 \cdot |e - f + 1|} \right]$$

#49:

$$k := \left(x - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (2 - f) - (f + 1) \cdot (f - 3)}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 + \left(y - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (f + 1) - f^2 - 4 \cdot f + 1}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2 \cdot \sqrt{(e^4 - 2 \cdot e^3 + 2 \cdot e^2 \cdot (f^2 - 3 \cdot f + 3)) - 2 \cdot e \cdot (f^2 + 6 \cdot f - 11) + f^4 - 6 \cdot f^3 + 14 \cdot f^2 - 6 \cdot f + 13}}}{4 \cdot |e - f + 1|} \right)^2$$

Do rovnice kružnice dosadíme zbylých šest bodů, čímž zjistíme, zda tyto body kružnici k náleží.

#50:

$$\text{SOLVE} \left(\left(- \frac{e^2 + e \cdot (3 \cdot f - 13) - 2 \cdot (f^2 - 3 \cdot f - 2)}{e^2 - 4 \cdot e + f^2 - 6 \cdot f + 13} - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (2 - f) - (f + 1) \cdot (f - 3)}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 + \left(\frac{3 \cdot (e - 2) \cdot (e - f + 1)}{e^2 - 4 \cdot e + f^2 - 6 \cdot f + 13} - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (f + 1) - f^2 - 4 \cdot f + 1}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2 \cdot \sqrt{(e^4 - 2 \cdot e^3 + 2 \cdot e^2 \cdot (f^2 - 3 \cdot f + 3)) - 2 \cdot e \cdot (f^2 + 6 \cdot f - 11) + f^4 - 6 \cdot f^3 + 14 \cdot f^2 - 6 \cdot f + 13}}}{4 \cdot |e - f + 1|} \right)^2, \text{Real} \right)$$

#51:

true

#52:

$$\text{SOLVE} \left(\left(\frac{e + f - 1}{2} - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (2 - f) - (f + 1) \cdot (f - 3)}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 + \left(\frac{e + f + 1}{2} - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (f + 1) - f^2 - 4 \cdot f + 1}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2 \cdot \sqrt{(e^4 - 2 \cdot e^3 + 2 \cdot e^2 \cdot (f^2 - 3 \cdot f + 3)) - 2 \cdot e \cdot (f^2 + 6 \cdot f - 11) + f^4 - 6 \cdot f^3 + 14 \cdot f^2 - 6 \cdot f + 13}}}{4 \cdot |e - f + 1|} \right)^2, \text{Real} \right)$$

#53:

true

#54:

$$\text{SOLVE} \left(\left(\frac{2 \cdot e^2 + e \cdot (3 \cdot f + 4) - f^2 + 3 \cdot f + 2}{e^2 + 2 \cdot e + f^2 + 1} - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (2 - f) - (f + 1) \cdot (f - 3)}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 + \left(\frac{3 \cdot f \cdot (e + f + 1)}{e^2 + 2 \cdot e + f^2 + 1} - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (f + 1) - f^2 - 4 \cdot f + 1}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(e^4 - 2 \cdot e^3 + 2 \cdot e^2 \cdot (f^2 - 3 \cdot f + 3) - 2 \cdot e \cdot (f^2 + 6 \cdot f - 11) + f^4 - 6 \cdot f^3 + 14 \cdot f^2 - 6 \cdot f + 13)}}{4 \cdot |e - f + 1|} \right)^2, \text{Real} \right)$$

#55:

true

#56:

$$\text{SOLVE} \left(\left(\left(\frac{f \cdot (3 - f)}{e - f + 1} - \frac{f - 1}{2} \right) - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (2 - f) - (f + 1) \cdot (f - 3)}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 + \left(\frac{e + e \cdot (f - 1) - 2 \cdot (f + 1)}{2 \cdot (e - f + 1)} - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (f + 1) - f^2 - 4 \cdot f + 1}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(e^4 - 2 \cdot e^3 + 2 \cdot e^2 \cdot (f^2 - 3 \cdot f + 3) - 2 \cdot e \cdot (f^2 + 6 \cdot f - 11) + f^4 - 6 \cdot f^3 + 14 \cdot f^2 - 6 \cdot f + 13)}}{4 \cdot |e - f + 1|} \right)^2, \text{Real} \right)$$

#57:

true

#58:

$$\text{SOLVE} \left(\left(\left(\frac{f \cdot (3 - f)}{e - f + 1} + \frac{e - f + 2}{2} \right) - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (2 - f) - (f + 1) \cdot (f - 3)}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 + \left(\left(\frac{f \cdot (f - 3)}{e - f + 1} + \frac{e + 3 \cdot f - 2}{2} \right) - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (f + 1) - f^2 - 4 \cdot f + 1}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(e^4 - 2 \cdot e^3 + 2 \cdot e^2 \cdot (f^2 - 3 \cdot f + 3) - 2 \cdot e \cdot (f^2 + 6 \cdot f - 11) + f^4 - 6 \cdot f^3 + 14 \cdot f^2 - 6 \cdot f + 13)}}{4 \cdot |e - f + 1|} \right)^2, \text{Real} \right)$$

#59:

true

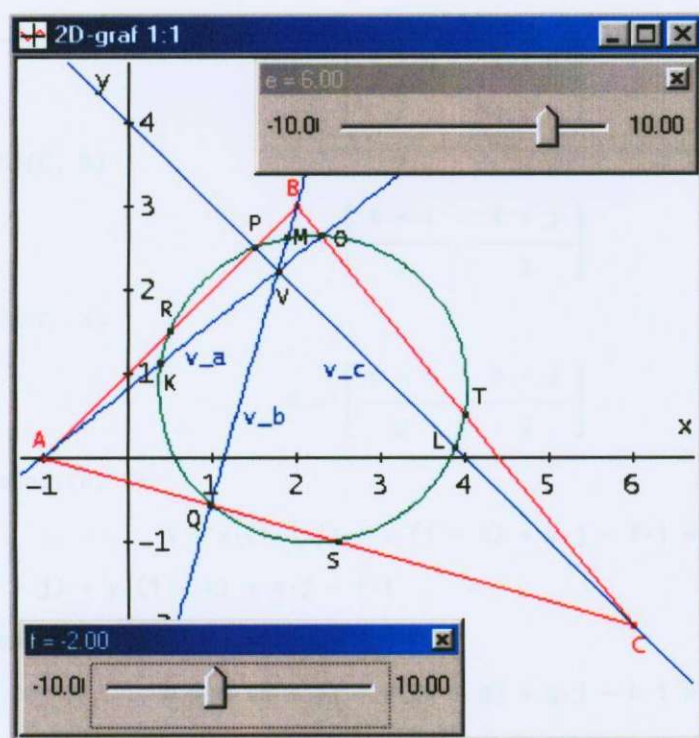
#60:

$$\text{SOLVE} \left(\left(\left(\frac{f \cdot (3 - f)}{e - f + 1} - \frac{f}{2} + 2 \right) - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (2 - f) - (f + 1) \cdot (f - 3)}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 + \left(\left(\frac{f \cdot (f - 3)}{e - f + 1} + \frac{e + 2 \cdot f + 1}{2} \right) - \frac{e^2 + 2 \cdot e \cdot (f + 1) - f^2 - 4 \cdot f + 1}{4 \cdot (e - f + 1)} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(e^4 - 2 \cdot e^3 + 2 \cdot e^2 \cdot (f^2 - 3 \cdot f + 3) - 2 \cdot e \cdot (f^2 + 6 \cdot f - 11) + f^4 - 6 \cdot f^3 + 14 \cdot f^2 - 6 \cdot f + 13)}}{4 \cdot |e - f + 1|} \right)^2, \text{Real} \right)$$

#61:

true

Tím, že jeden z bodů trojúhelníka je závislý na proměnných e, f , lze při grafickém znázornění ukázat za pomoci posuvníku, že pro každý trojúhelník je jeho devět bodů jiných, ale že tyto body stále leží na kružnici (Obr.29).



Obr.29

V programu Derive lze provádět také důkazy. Pokud trojúhelník ABC zadáme obecně, větu o Feuerbachově kružnici tak dokážeme. Důkaz provedu pouze algebraicky, neboť v grafickém okně není dostatek místa pro šest posuvníků. Postup výpočtu se nebude lišit. Opět si vyjádřím devět významných bodů trojúhelníku a pomocí tří z nich (R, S, T) určím rovnici kružnice k , kterou tvoří. Poté dosadím body O, P, Q, K, L, M do rovnice kružnice k a tím zjistím, zda na ní leží.

#1: CaseMode := Sensitive

#2: A := [g, h]

#3: B := [e, f]

#4: C := [i, j]

#5: Tr := [A, B, C, A]

#6:

$$\text{Tr} := \begin{bmatrix} g & h \\ e & f \\ i & j \\ g & h \end{bmatrix}$$

#7: S := StredUs(A, B)


```

#8: S :=  $\left[ \frac{e + g}{2}, \frac{f + h}{2} \right]$ 

#9: T := StredUs(C, B)

#10: T :=  $\left[ \frac{e + i}{2}, \frac{f + j}{2} \right]$ 

#11: R := StredUs(C, A)

#12: R :=  $\left[ \frac{g + i}{2}, \frac{h + j}{2} \right]$ 

#13: a := PrimkaBody(B, C)

#14: a := x·(f - j) + y·(i - e) + e·j - f·i = 0

#15: a1 := x·(f - j) + y·(i - e) + e·j - f·i

#16: b := PrimkaBody(A, C)

#17: b := x·(h - j) + y·(i - g) + g·j - h·i = 0

#18: b1 := x·(h - j) + y·(i - g) + g·j - h·i

#19: c := PrimkaBody(A, B)

#20: c := x·(f - h) + y·(g - e) + e·h - f·g = 0

#21: c1 := x·(f - h) + y·(g - e) + e·h - f·g

#22: v_a := KolmiceBodem(a1, A)

#23: v_a := x·(e - i) + y·(f - j) - e·g - f·h + g·i + h·j = 0

#24: v_b := KolmiceBodem(b1, B)

#25: v_b := x·(g - i) + y·(h - j) + e·(i - g) + f·(j - h) = 0

#26: v_c := KolmiceBodem(c1, C)

#27: v_c := x·(e - g) + y·(f - h) - e·i - f·j + g·i + h·j = 0

#28: O := Prusecik(a, v_a)

#29: O :=  $\left[ \frac{e^2 \cdot g + e \cdot (f \cdot (h - j) - 2 \cdot g \cdot i - j \cdot (h - j)) + i \cdot (f^2 - f \cdot (h + j) + g \cdot i + h \cdot j)}{e^2 - 2 \cdot e \cdot i + f^2 - 2 \cdot f \cdot j + i^2 + j^2}, \right.$ 
 $\left. \frac{e^2 \cdot j + e \cdot (f \cdot (g - i) - j \cdot (g + i)) + f^2 \cdot h - f \cdot (g \cdot i + 2 \cdot h \cdot j - i^2) + j \cdot (g \cdot i + h \cdot j)}{e^2 - 2 \cdot e \cdot i + f^2 - 2 \cdot f \cdot j + i^2 + j^2} \right]$ 

#30: P := Prusecik(b, v_b)

```

$$\#31: P := \left[\frac{e \cdot (g - i)^2 + (h - j) \cdot (f \cdot (g - i) - g \cdot j + h \cdot i)}{g^2 - 2 \cdot g \cdot i + h^2 - 2 \cdot h \cdot j + i^2 + j^2}, \right. \\ \left. \frac{e \cdot (g - i) \cdot (h - j) + f \cdot (h - j)^2 + (g - i) \cdot (g \cdot j - h \cdot i)}{g^2 - 2 \cdot g \cdot i + h^2 - 2 \cdot h \cdot j + i^2 + j^2} \right]$$

$$\#32: Q := \text{Prusecik}(c, v_c)$$

$$\#33: Q := \left[\frac{e^2 \cdot i - e \cdot (f \cdot (h - j) + 2 \cdot g \cdot i - h \cdot (h - j)) + g \cdot (f^2 - f \cdot (h + j) + g \cdot i + h \cdot j)}{e^2 - 2 \cdot e \cdot g + f^2 - 2 \cdot f \cdot h + g^2 + h^2}, \right. \\ \left. \frac{e^2 \cdot h - e \cdot (f \cdot (g - i) + h \cdot (g + i)) + f^2 \cdot j + f \cdot (g^2 - g \cdot i - 2 \cdot h \cdot j) + h \cdot (g \cdot i + h \cdot j)}{e^2 - 2 \cdot e \cdot g + f^2 - 2 \cdot f \cdot h + g^2 + h^2} \right]$$

$$\#34: V := \text{Prusecik}(v_b, v_c)$$

$$\#35: V := \left[- \frac{e \cdot (f \cdot (g - i) - g \cdot h + i \cdot j) + (f^2 - f \cdot (h + j) + g \cdot i + h \cdot j) \cdot (h - j)}{e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i}, \right. \\ \left. \frac{e^2 \cdot (g - i) + e \cdot (f \cdot (h - j) - (g + i) \cdot (g - i)) + f \cdot (i \cdot j - g \cdot h) + (g - i) \cdot (g \cdot i + h \cdot j)}{e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i} \right]$$

$$\#36: K := V + \frac{1}{2} \cdot (A - V)$$

#37:

K :=

$$\left[\frac{f \cdot (g^2 - 2 \cdot g \cdot i + h^2 - 2 \cdot h \cdot j + i^2 + j^2) - f \cdot (g^2 - 2 \cdot g \cdot i + h^2 - 2 \cdot h \cdot j + i^2 + j^2) \cdot (h + j) + g^2 \cdot h \cdot j - 2 \cdot g \cdot h \cdot i \cdot j + h \cdot j \cdot (h^2 - 2 \cdot h \cdot j + i^2 - j^2)}{2 \cdot (j - h) \cdot (e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i)} + \frac{f \cdot (g - i) + g \cdot (j - 2 \cdot h) + i \cdot j}{2 \cdot (j - h)}, \right. \\ \left. \frac{f \cdot (g - i) \cdot (g^2 - 2 \cdot g \cdot i + h^2 - 2 \cdot h \cdot j + i^2 + j^2) - f \cdot (g^3 \cdot (h + j) - 3 \cdot g^2 \cdot i \cdot (h + j) + g \cdot (h^3 - h^2 \cdot j + h \cdot (3 \cdot i^2 - j^2) + j \cdot (3 \cdot i^2 + j^2)) - i \cdot h^3)}{2 \cdot (h - j)^2 \cdot (e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i)} + \frac{e \cdot (g - i)}{2 \cdot (h - j)} + \frac{(h^3 - h^2 \cdot j + h \cdot (i^2 - j^2) + j \cdot (i^2 + j^2)) + h \cdot j \cdot (g - i) \cdot (g^2 - 2 \cdot g \cdot i + h^2 - 2 \cdot h \cdot j + i^2 + j^2)}{2 \cdot (h - j)^2} + \frac{e \cdot (g - i)}{2 \cdot (h - j)} + \frac{f \cdot (g^2 - 2 \cdot g \cdot i + h^2 - 2 \cdot h \cdot j + i^2 + j^2) - g^2 \cdot h + g \cdot i \cdot (h + j) + h^3 - 2 \cdot h^2 \cdot j + h \cdot j^2 - i^2 \cdot j}{2 \cdot (h - j)^2} \right]$$

$$\#44: k_2 := \left(\frac{e + i}{2} - m \right)^2 + \left(\frac{f + j}{2} - n \right)^2 = r^2$$

$$\#45: k_3 := \left(\frac{g + i}{2} - m \right)^2 + \left(\frac{h + j}{2} - n \right)^2 = r^2$$

$$\#46: \text{SOLVE}([k_1, k_2, k_3], [m, n, r])$$

#47:

$$\left[\begin{aligned} n &= \frac{e^2 \cdot (h - j) - 2 \cdot e \cdot (f \cdot (g - i) - g \cdot h + i \cdot j) + f^2 \cdot (j - h) - f \cdot (g^2 - h^2 - i^2 + j^2) + g^2 \cdot j + 2 \cdot g \cdot i \cdot (j - h) - h \cdot (h \cdot j + i^2 - j^2)}{4 \cdot (e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i)} \wedge n = \\ &= \frac{e^2 \cdot (g - i) + e \cdot (2 \cdot f \cdot (h - j) - g^2 + h^2 + i^2 - j^2) + f^2 \cdot (i - g) + 2 \cdot f \cdot (i \cdot j - g \cdot h) + g^2 \cdot i + g \cdot (2 \cdot h \cdot j - i^2 + j^2) - h \cdot i \cdot (h + 2 \cdot j)}{4 \cdot (e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i)} \wedge r = \\ &= \frac{\sqrt{(e^2 - 2 \cdot e \cdot i + f^2 - 2 \cdot f \cdot j + i^2 + j^2)} \cdot \sqrt{(e^2 - 2 \cdot e \cdot g + f^2 - 2 \cdot f \cdot h + g^2 + h^2)} \cdot \sqrt{(g^2 - 2 \cdot g \cdot i + h^2 - 2 \cdot h \cdot j + i^2 + j^2)}}{4 \cdot |e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i|}, m = \\ &= \frac{e^2 \cdot (h - j) - 2 \cdot e \cdot (f \cdot (g - i) - g \cdot h + i \cdot j) + f^2 \cdot (j - h) - f \cdot (g^2 - h^2 - i^2 + j^2) + g^2 \cdot j + 2 \cdot g \cdot i \cdot (j - h) - h \cdot (h \cdot j + i^2 - j^2)}{4 \cdot (e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i)} \wedge n = \\ &= \frac{e^2 \cdot (g - i) + e \cdot (2 \cdot f \cdot (h - j) - g^2 + h^2 + i^2 - j^2) + f^2 \cdot (i - g) + 2 \cdot f \cdot (i \cdot j - g \cdot h) + g^2 \cdot i + g \cdot (2 \cdot h \cdot j - i^2 + j^2) - h \cdot i \cdot (h + 2 \cdot j)}{4 \cdot (e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i)} \wedge r = \\ &= \frac{\sqrt{(e^2 - 2 \cdot e \cdot i + f^2 - 2 \cdot f \cdot j + i^2 + j^2)} \cdot \sqrt{(e^2 - 2 \cdot e \cdot g + f^2 - 2 \cdot f \cdot h + g^2 + h^2)} \cdot \sqrt{(g^2 - 2 \cdot g \cdot i + h^2 - 2 \cdot h \cdot j + i^2 + j^2)}}{4 \cdot |e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i|} \end{aligned} \right]$$

#48:

$$k := \left(x - \frac{e^2 \cdot (h - j) - 2 \cdot e \cdot (f \cdot (g - i) - g \cdot h + i \cdot j) + f^2 \cdot (j - h) - f \cdot (g^2 - h^2 - i^2 + j^2) + g^2 \cdot j + 2 \cdot g \cdot i \cdot (j - h) - h \cdot (h \cdot j + i^2 - j^2)}{4 \cdot (e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i)} \right)^2 + \left(y - \frac{e^2 \cdot (g - i) + e \cdot (2 \cdot f \cdot (h - j) - g^2 + h^2 + i^2 - j^2) + f^2 \cdot (i - g) + 2 \cdot f \cdot (i \cdot j - g \cdot h) + g^2 \cdot i + g \cdot (2 \cdot h \cdot j - i^2 + j^2) - h \cdot i \cdot (h + 2 \cdot j)}{4 \cdot (e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i)} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{(e^2 - 2 \cdot e \cdot i + f^2 - 2 \cdot f \cdot j + i^2 + j^2)} \cdot \sqrt{(e^2 - 2 \cdot e \cdot g + f^2 - 2 \cdot f \cdot h + g^2 + h^2)} \cdot \sqrt{(g^2 - 2 \cdot g \cdot i + h^2 - 2 \cdot h \cdot j + i^2 + j^2)}}{4 \cdot |e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i|} \right)^2$$

#49:

$$\text{SOLVE} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{e^2 \cdot (h - j) - 2 \cdot e \cdot (f \cdot (g - i) - g \cdot h + i \cdot j) + f^2 \cdot (j - h) - f \cdot (g^2 - h^2 - i^2 + j^2) + g^2 \cdot j + 2 \cdot g \cdot i \cdot (j - h) - h \cdot (h \cdot j + i^2 - j^2)}{4 \cdot (e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i)} \right)^2 + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{e^2 \cdot (g - i) + e \cdot (2 \cdot f \cdot (h - j) - g^2 + h^2 + i^2 - j^2) + f^2 \cdot (i - g) + 2 \cdot f \cdot (i \cdot j - g \cdot h) + g^2 \cdot i + g \cdot (2 \cdot h \cdot j - i^2 + j^2) - h \cdot i \cdot (h + 2 \cdot j)}{4 \cdot (e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i)} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{(e^2 - 2 \cdot e \cdot i + f^2 - 2 \cdot f \cdot j + i^2 + j^2)} \cdot \sqrt{(e^2 - 2 \cdot e \cdot g + f^2 - 2 \cdot f \cdot h + g^2 + h^2)} \cdot \sqrt{(g^2 - 2 \cdot g \cdot i + h^2 - 2 \cdot h \cdot j + i^2 + j^2)}}{4 \cdot |e \cdot (h - j) + f \cdot (i - g) + g \cdot j - h \cdot i|} \right)^2$$

#50:

true

#58: true

#59:

SOLVE

$$\left(\frac{e^2 \cdot (h-j) - 2 \cdot e \cdot (f \cdot (g-i) - g \cdot h + i \cdot j) + f^2 \cdot (j-h) - f \cdot (g^2 - h^2 - i^2 + j^2) + g^2 \cdot j + 2 \cdot g \cdot i \cdot (j-h) - h \cdot (h \cdot j + i^2 - j^2)}{4 \cdot (e \cdot (h-j) + f \cdot (i-g) + g \cdot j - h \cdot i)} \right)^2 + \left(\frac{e^2 \cdot (g-i) + e \cdot (2 \cdot f \cdot (h-j) - g^2 + h^2 + i^2 - j^2) + f^2 \cdot (i-g) + 2 \cdot f \cdot (i \cdot j - g \cdot h) + g^2 \cdot i + g \cdot (2 \cdot h \cdot j - i^2 + j^2) - h \cdot i \cdot (h + 2 \cdot j)}{4 \cdot (e \cdot (h-j) + f \cdot (i-g) + g \cdot j - h \cdot i)} \right)^2 =$$

$$\left(\frac{\sqrt{(e^2 - 2 \cdot e \cdot i + f^2 - 2 \cdot f \cdot j + i^2 + j^2)} \cdot \sqrt{(e^2 - 2 \cdot e \cdot g + f^2 - 2 \cdot f \cdot h + g^2 + h^2)} \cdot \sqrt{(g^2 - 2 \cdot g \cdot i + h^2 - 2 \cdot h \cdot j + i^2 + j^2)}}{4 \cdot |e \cdot (h-j) + f \cdot (i-g) + g \cdot j - h \cdot i|} \right)^2$$

#60: true

Vypočítala jsem, že na kružnici k leží všech devět bodů, čímž jsem větu o Feuerbachově kružnici dokázala.

8. GEOMETRIE KUŽELOSEČEK

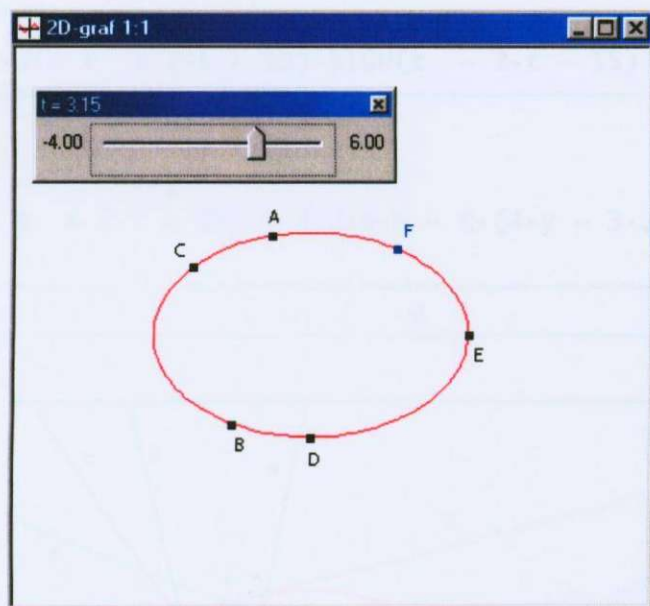
Tato kapitola se zaměřuje na věty platící pro kuželosečky. Je zde opět využita funkce posuvníku, díky němuž si ověříme, že dané věty platí pro kuželosečky obecně. Tyto příklady však nejsou důkazem, slouží pouze k znázornění daného problému.

Př.8.1.: *Pascalova věta*

Mějme na regulární kuželosečce dány různé body A, B, C, D, E, F . Pak existuje přímka m taková, že body $P \in \leftrightarrow AB \cap \leftrightarrow DE$, $Q \in \leftrightarrow BC \cap \leftrightarrow EF$, $R \in \leftrightarrow CD \cap \leftrightarrow FA$ na ní leží.

Pro názornou ukázkou Pascalovy věty jsem zvolila kuželosečku a pět bodů, které dané kuželosečce náleží. Šestý bod kuželosečky jsem volila v závislosti na parametru t tak, aby se po části kuželosečky pohyboval (Obr.30).

```
#1:  LOAD(G:\vlastni fce.mth)
#2:  CaseMode := Sensitive
#3:  k := 9·x2 - 18·x + 16·y2 + 64·y - 71 = 0
#4:  A := [ 0,  $\frac{3 \cdot \sqrt{15}}{4} - 2$  ]
#5:  B := [ -1,  $-\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} - 2$  ]
#6:  C := [ -2,  $\frac{3 \cdot \sqrt{7}}{4} - 2$  ]
#7:  D := [ 1, -5 ]
#8:  E := [ 5, -2 ]
#9:  F := [ t,  $\frac{3 \cdot \sqrt{(-t^2 + 2 \cdot t + 15)} - 8}{4}$  ]
```



Obr.30

Poté jsem vytvořila přímky procházející body A, B ; B, C ; C, D ; D, E ; E, F a F, A (Obr.31).

#10: $a := \text{PrimkaBody}(A, B)$

#11:
$$a := x \cdot \left(\frac{3 \cdot \sqrt{15}}{4} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \right) - \frac{4 \cdot y - 3 \cdot \sqrt{15} + 8}{4} = 0$$

#12: $b := \text{PrimkaBody}(B, C)$

#13:
$$b := 3 \cdot x \cdot (\sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{3}) + 4 \cdot y = -3 \cdot \sqrt{7} - 12 \cdot \sqrt{3} - 8$$

#14: $c := \text{PrimkaBody}(C, D)$

#15:
$$c := x \cdot (\sqrt{7} + 4) + 4 \cdot y = \sqrt{7} - 16$$

#16: $d := \text{PrimkaBody}(D, E)$

#17:
$$d := 3 \cdot x - 4 \cdot y = 23$$

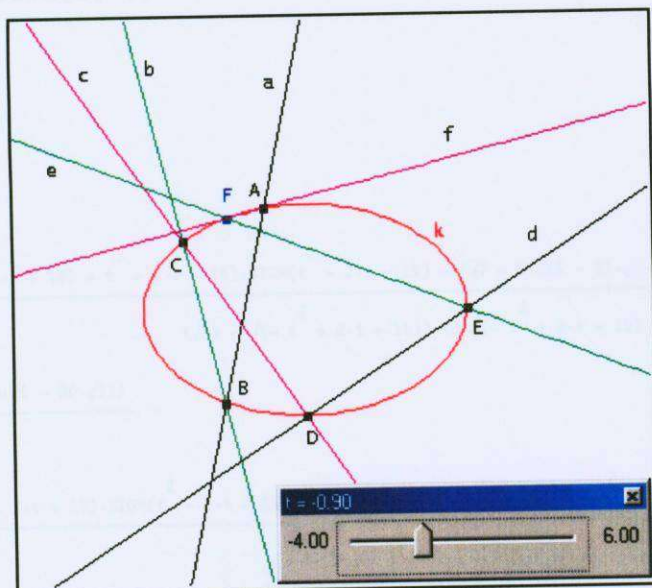
#18: $e := \text{PrimkaBody}(E, F)$

#19:
$$e := \frac{3 \cdot (x - 5) \cdot \sqrt{(-t^2 + 2 \cdot t + 15)}}{4} + (5 - t) \cdot (y + 2) = 0$$

#20: $f := \text{PrimkaBody}(F, A)$

$$\#21: f := \frac{3 \cdot t \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15} \cdot \text{SIGN}(t^2 - 2 \cdot t - 15)}{4} -$$

$$\frac{3 \cdot (x - t) \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15} - 3 \cdot \sqrt{15} \cdot x - t \cdot (4 \cdot y - 3 \cdot \sqrt{15} + 8)}{4} = 0$$



Obr.31

#22: $\text{Prusecik}(a, d) := (\text{SOLUTIONS}([a, d], [x, y]))_1$

#23: $P := \text{Prusecik}(a, d)$

#24:

$$P := \left[\frac{9 \cdot \sqrt{15}}{11} - \frac{21 \cdot \sqrt{5}}{11} - \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{11} + \frac{40}{11}, \frac{27 \cdot \sqrt{15}}{44} - \frac{63 \cdot \sqrt{5}}{44} - \frac{75 \cdot \sqrt{3}}{44} - \frac{133}{44} \right]$$

#25: $Q := \text{Prusecik}(b, e)$

#26:

$$Q := \left[\frac{5 \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15} - (\sqrt{7} + 4 \cdot \sqrt{3}) \cdot (t - 5)}{\sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15} + (\sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (t - 5)}, \right. \\ \left. \frac{4 \cdot (\sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (t - 5) \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15} - t^2 \cdot (9 \cdot \sqrt{7} + 21 \cdot \sqrt{3} + 4) + 2 \cdot t \cdot (9 \cdot \sqrt{7} + 21 \cdot \sqrt{3} + 4) + 135 \cdot \sqrt{7} + 315 \cdot \sqrt{3} + 60}{2 \cdot (5 - t) \cdot ((\sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15} - t - 3)} \right]$$

#27: R := Prusecik(c, f)

#28:

R :=

$$\left[\frac{t \cdot (3 \cdot (\sqrt{15} \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15}) + t^2 - 2 \cdot t - 15) \cdot \text{SIGN}(t^2 - 2 \cdot t - 15) - (\sqrt{7} - 6 \cdot \sqrt{15} - 8) \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15} + \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{15} - \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15})) \cdot (3 \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15} + t \cdot (\sqrt{7} + 4) - 3 \cdot \sqrt{15})}{t^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot t + \sqrt{35} - 8 \cdot \sqrt{5} - 30 \cdot \sqrt{3}} \right] - \\ \frac{3 \cdot t \cdot (\sqrt{7} + 4) \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15} \cdot \text{SIGN}(t^2 - 2 \cdot t - 15) + 3 \cdot (t \cdot (\sqrt{7} + 4) - \sqrt{7} + 16) \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15} - t \cdot (3 \cdot \sqrt{105} - 8 \cdot \sqrt{15})}{4 \cdot (3 \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15} + t \cdot (\sqrt{7} + 4) - 3 \cdot \sqrt{15})} \\ \frac{\sqrt{7} + 12 \cdot \sqrt{15} - 32 + 3 \cdot \sqrt{105} - 48 \cdot \sqrt{15}}{1}$$

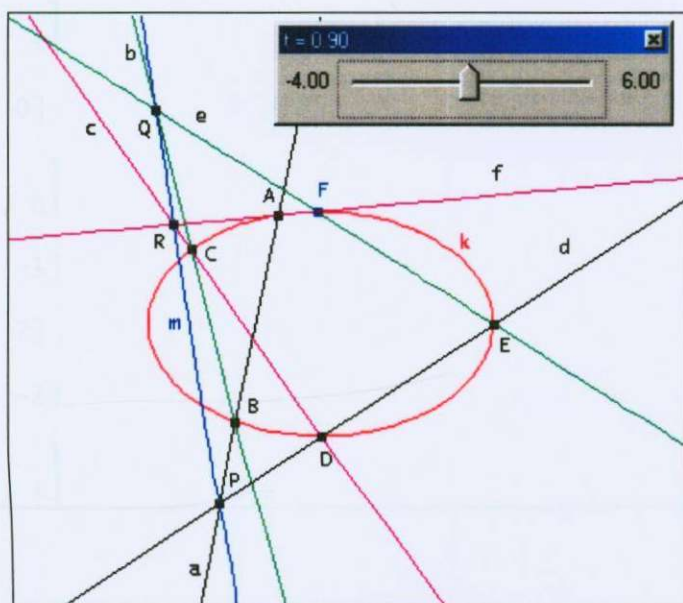
Body P , Q , R jsou průsečíky daných přímek.

#29: $m := \text{PrimkaBody}(P, Q)$

#30:

$m :=$

$$\begin{aligned} & \frac{(3 \cdot x \cdot (t \cdot (18 \cdot \sqrt{105} - 42 \cdot \sqrt{35} - 61 \cdot \sqrt{21} - 30 \cdot \sqrt{7} - 63 \cdot \sqrt{15} + 81 \cdot \sqrt{5} - 45 \cdot \sqrt{3} - 302) - 90 \cdot \sqrt{105} + 210 \cdot \sqrt{35} + 217 \cdot \sqrt{21} + 150 \cdot \sqrt{7} + 343 \cdot \sqrt{15} - 441 \cdot \sqrt{5} + 245 \cdot \sqrt{3} + 994) - 4 \cdot y \cdot (t \cdot (18 \cdot \sqrt{105} - 42 \cdot \sqrt{35} - 50 \cdot \sqrt{21} + 113 \cdot \sqrt{7} - 63 \cdot \sqrt{15} + 81 \cdot \sqrt{5} + 186 \cdot \sqrt{3} - 225) - 90 \cdot \sqrt{105} + 210 \cdot \sqrt{35} + 250 \cdot \sqrt{21} - 565 \cdot \sqrt{7} + 343 \cdot \sqrt{15} - 441 \cdot \sqrt{5} - 910 \cdot \sqrt{3} + 1225) - t \cdot (126 \cdot \sqrt{105} - 228 \cdot \sqrt{35} - 295 \cdot \sqrt{21} + 1264 \cdot \sqrt{7} - 315 \cdot \sqrt{15} + 603 \cdot \sqrt{5} + 2283 \cdot \sqrt{3} - 1290) + 126 \cdot \sqrt{105} - (\sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15}) \cdot ((\sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (t - 5)) \cdot ((\sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15}) - 492 \cdot \sqrt{35} - 515 \cdot \sqrt{21} + 4520 \cdot \sqrt{7} - 707 \cdot \sqrt{15} + 315 \cdot \sqrt{5} + 6755 \cdot \sqrt{3} - 2030) \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t + 15} + (t^2 - 2 \cdot t - 15) \cdot (3 \cdot x \cdot (7 \cdot \sqrt{105} - 9 \cdot \sqrt{35} + 5 \cdot \sqrt{21} - 118 \cdot \sqrt{7} - 18 \cdot \sqrt{15} + 42 \cdot \sqrt{5} - 181 \cdot \sqrt{3} + 30) - y \cdot (28 \cdot \sqrt{105} - 36 \cdot \sqrt{35} - 24 \cdot \sqrt{21} + 100 \cdot \sqrt{7} - 72 \cdot \sqrt{15} + 168 \cdot \sqrt{5} + 200 \cdot \sqrt{3} - 188) + 253 \cdot \sqrt{105} - 693 \cdot \sqrt{35} - 957 \cdot \sqrt{21} + 1210 \cdot \sqrt{7} - 1098 \cdot \sqrt{15} + 1176 \cdot \sqrt{5} + 1895 \cdot \sqrt{3} - 4484)}{t - 3} = 0 \end{aligned}$$



Obr.32

Nakonec jsem body P, Q, R proložila přímkou m , která se mění v závislosti na poloze bodu F , avšak stále přímkou zůstává (Obr.32).

Př.8.2.: Brianchonova věta

Mějme tečny $t_a, t_b, t_c, t_d, t_e, t_f$ regulární kuželosečky. Potom existuje právě jeden bod X takový, že jím procházejí přímky p, r, w . Přičemž přímka p prochází body $P_1 \in t_a \cap t_b, P_2 \in t_d \cap t_e$, přímka r prochází body $R_1 \in t_b \cap t_c, R_2 \in t_e \cap t_f$ a přímka w prochází body $W_1 \in t_c \cap t_d, W_2 \in t_f \cap t_a$.

Jako kuželosečku jsem vybrala parabolu, na které leží šest bodů, z nichž dva jsou pohyblivé v závislosti na změně jejich parametru. Těmito body procházejí tečny k parabole. Podle znění věty jsem vypočítala průsečíky příslušných tečen a z nich jsem vytvořila přímky p, r, w , které se vždy protínají v jednom bodě X , bez závislosti na poloze dvou bodů B, F , jež se po parabole mohou pohybovat (Obr.35).

```
#1:  LOAD(G:\vlastni fce.mth)
```

```
#2:  CaseMode := Sensitive
```

```
#3:  k :=  $\begin{bmatrix} 2 \\ s \end{bmatrix}, s$ 
```

```
#4:  A := [0, 0]
```

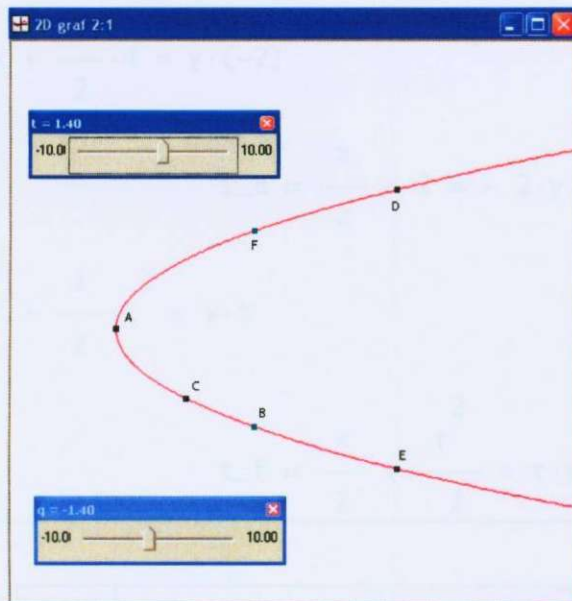
```
#5:  B :=  $\begin{bmatrix} 2 \\ q \end{bmatrix}, q$ 
```

```
#6:  C := [1, -1]
```

```
#7:  D := [4, 2]
```

```
#8:  E := [4, -2]
```

```
#9:  F :=  $\begin{bmatrix} 2 \\ t \end{bmatrix}, t$ 
```

Obr.33

$$\#10: \quad t_a := \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 0 = y \cdot 0$$

$$\#11: \quad t_a := \frac{x}{2} = 0$$

$$\#12: \quad t_b := \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot q^2 = y \cdot q$$

$$\#13: \quad t_b := \frac{x}{2} + \frac{q^2}{2} = q \cdot y$$

$$\#14: \quad t_c := \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} = y \cdot (-1)$$

$$\#15: \quad t_c := \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = -y$$

$$\#16: \quad t_d := \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 4 = y \cdot 2$$

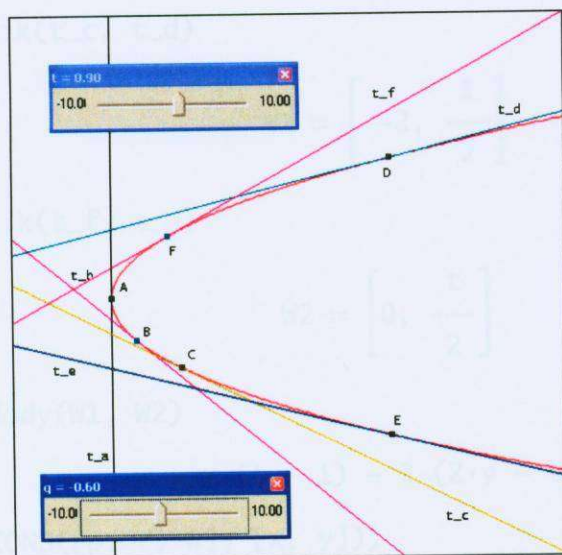
$$\#17: \quad t_d := \frac{x}{2} + 2 = 2 \cdot y$$

$$\#18: t_e := \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 4 = y \cdot (-2)$$

$$\#19: t_e := \frac{x}{2} + 2 = -2 \cdot y$$

$$\#20: t_f := \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot t^2 = y \cdot t$$

$$\#21: t_f := \frac{x}{2} + \frac{t^2}{2} = t \cdot y$$



Obr.34

$$\#22: P1 := \text{Prusecik}(t_a, t_b)$$

$$\#23: P1 := \left[0, \frac{q}{2} \right]$$

$$\#24: P2 := \text{Prusecik}(t_d, t_e)$$

$$\#25: P2 := [-4, 0]$$

$$\#26: p := \text{PrimkaBody}(P1, P2)$$

$$\#27: p := \frac{q \cdot x}{2} - 2 \cdot (2 \cdot y - q) = 0$$

#28: Q1 := Prusecik(t_b, t_c)

#29: $Q1 := \left[-q, \frac{q-1}{2} \right]$

#30: Q2 := Prusecik(t_e, t_f)

#31: $Q2 := \left[-2 \cdot t, \frac{t-2}{2} \right]$

#32: r := PrimkaBody(Q1, Q2)

#33: q :=

#34: $r := x \cdot (q - t + 1) + 2 \cdot y \cdot (q - 2 \cdot t) + q \cdot (t + 2) - 2 \cdot t = 0$

#35: W1 := Prusecik(t_c, t_d)

#36: $W1 := \left[-2, \frac{1}{2} \right]$

#37: W2 := Prusecik(t_f, t_a)

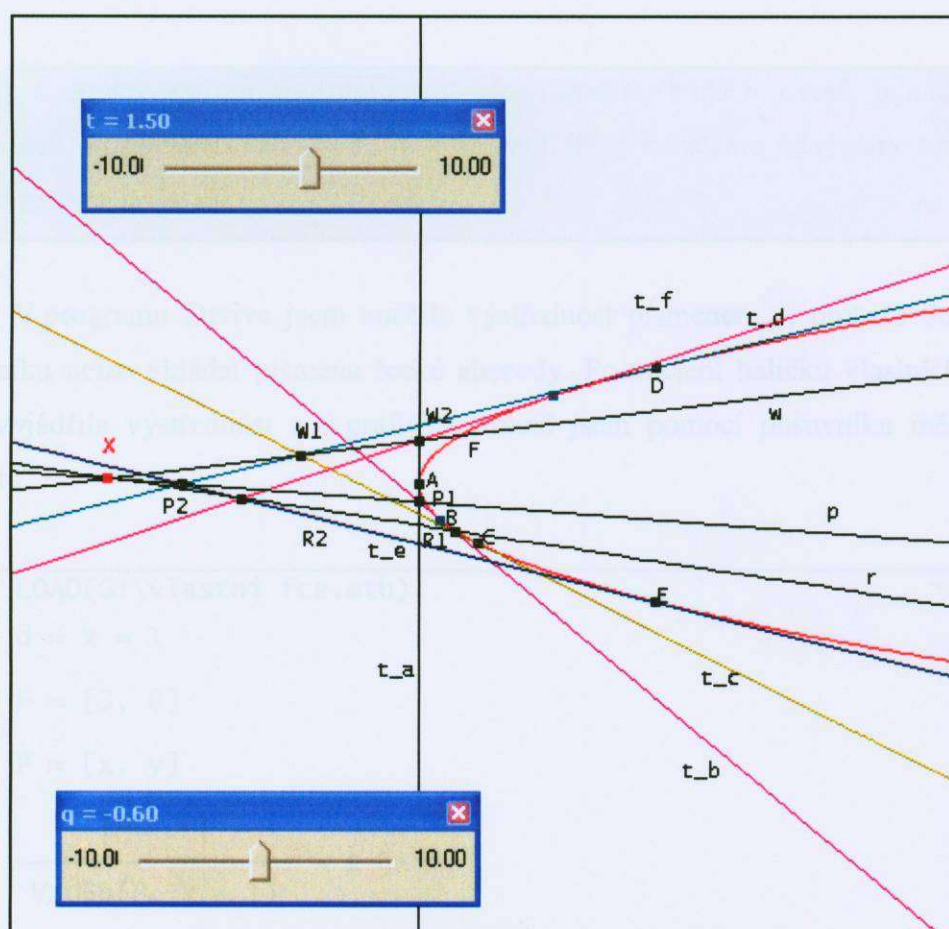
#38: $W2 := \left[0, \frac{t}{2} \right]$

#39: w := PrimkaBody(W1, W2)

#40: $w := x \cdot (t - 1) - 2 \cdot (2 \cdot y - t) = 0$

#41: X := (SOLUTIONS([p, r, w], [x, y]))₁

#42: $X := \left[\frac{4 \cdot (t - q)}{q - 2 \cdot (t - 1)}, \frac{q \cdot (2 - t)}{2 \cdot (q - 2 \cdot (t - 1))} \right]$



Obr.35

Př.8.3.: Kuželosečku můžeme definovat jako množinu bodů v rovině, jejichž poměr vzdálenosti od pevně daného bodu je konstanta. Tuto konstantu nazýváme numerická výstřednost a značíme ji ϵ .

V programu Derive jsem značila výstřednost písmenem e , protože do funkce posuvníku nelze vkládat písmena řecké abecedy. Po načtení balíčku vlastních funkcí jsem vyjádřila výstřednost a v grafickém okně jsem pomocí posuvníku měnila její hodnotu.

#1: LOAD(G:\vlastni fce.mth)

#2: d := x = 1

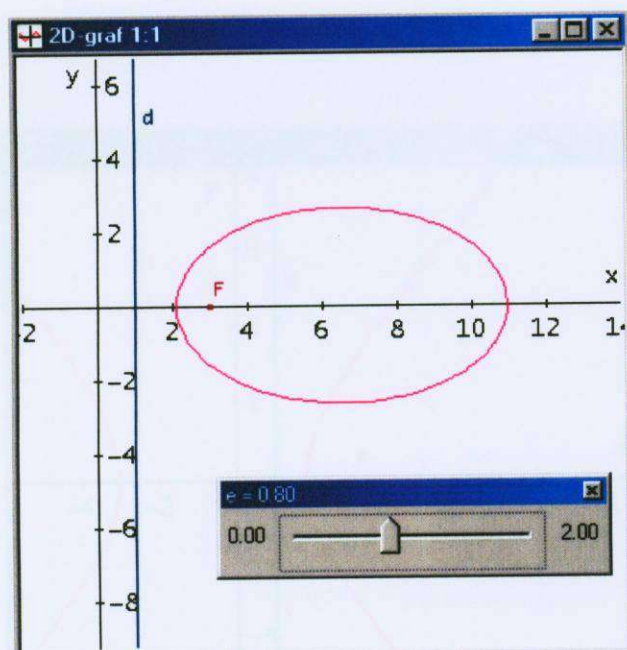
#3: F := [3, 0]

#4: P := [x, y]

#5:
$$\frac{|P - F|}{\text{VzdBp}(P, x - 1)} = e$$

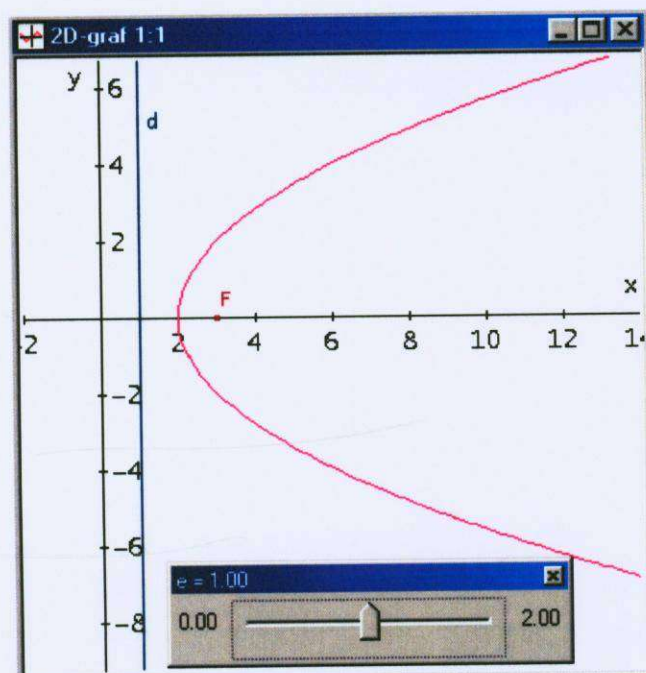
#6:
$$\frac{\sqrt{(x^2 - 6 \cdot x + y^2 + 9)}}{|x - 1|} = e$$

Pokud e náleží intervalu (0,1), kuželosečka je elipsou (Obr.36).



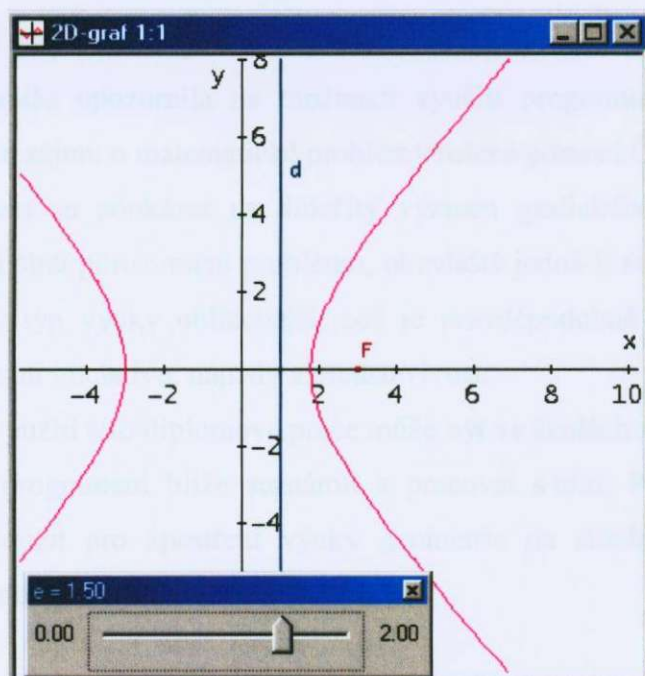
Obr.36

Pro $e = 1$ se kuželosečka stává parabolou (Obr.37).



Obr.37

Jestliže $e > 1$, body kuželosečky tvoří hyperbolu (Obr.38).



Obr.38

9. ZÁVĚR

Předložená diplomová práce nepředstavuje uzavřenou problematiku. Jejím úkolem je, aby spíše upozornila na možnosti využití programu Derive a přispěla k možné inspiraci a zájmu o matematické problémy řešené pomocí CAS.

Snažila jsem se poukázat na důležitý význam grafického znázornění, které mnohdy způsobují širší porozumění problému, obzvláště jedná-li se o graf interaktivní. U žáků je takový typ výuky oblíbenější, což je pravděpodobně způsobeno tím, že mohou zapojit vlastní iniciativu, nápady a představivost.

Praktické využití této diplomové práce může být ve školách nebo pro ty, kteří by se chtěli s tímto programem blíže seznámit a pracovat s ním. Příklady z některých kapitol mohou sloužit pro zpestření výuky geometrie na střední škole nebo jako speciální cvičení pro nadané žáky.

LITERATURA

- [1] Bušek I. a kol.: Sbírká úloh z matematiky, Praha: SPN 1987
- [2] Hašek, R.: Česká lokalizace programu Derive 6, Učitel matematiky, Ročník 13, číslo 4, JČMF, ISSN 1210-9037, 2005, str. 204-217
- [3] Hašek, R.: Programujeme v Derive, Department of Mathematics Report Series, University of South Bohemia, Vol. 13 (2005), ISSN 1214-4681, 2005, pp. 45-50
- [4] Hašek, R.: Využití programu Derive při výuce analytické geometrie, Sborník 25. konference o geometrii a počítačové grafice, Jednota českých matematiků a fyziků, ISBN 80-7015-013-0, Praha 2005, str. 83 – 88
- [5] Kočandrlé M., Boček L.: Matematika pro gymnázia – analytická geometrie, Praha: Prométheus, 1996
- [6] Kutzler B., Kokol-Voljc V.: Indroduction to Derive 6, Dallas: Texas Instruments, Texas, USA, 2001
- [7] Sekanina M.a kol.: Geometrie I, Praha: SPN, 1986