

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

STEINEROVA ÚLOHA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kateřina KOVÁŘOVÁ

České Budějovice, duben 2007

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

V Českých Budějovicích 24.4.2007

Kovářová Kateřina

Děkuji RNDr. Pavlu Leischnerovi za odborné vedení při vypracování bakalářské práce.

Anotace:

Název: Steinerova úloha

Autor: Kateřina Kovářová

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Steinerova úloha spočívá v nalezení nejkratší sítě spojující n daných bodů v rovině. V práci je uveden a rozebrán systém algoritmů pro nalezení sítě v obecném případě, úplné řešení úlohy pro $n = 3$, $n = 4$ a pro pravidelné mnohoúhelníky, uvedení různých přístupů k řešení pro $n = 3$ a některé další zajímavé situace.

Title: Steinerova úloha

Author: Kateřina Kovářová

Leading of thesis: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Steiner's problem consists in location of the shortest net connecting n given points in plain. The thesis brings in and proves system of algorithm for location net in general case, complete solution for $n = 3$, $n = 4$ and for regular polygon, presents various view of solving for $n = 3$ and shows another interesting situation.

Obsah:

1. Úvod	6
2. Některé pojmy z teorie grafů	10
3. Řešení pro $n = 3$	13
3.1 Fermatův bod	13
3.2 Hofmanovo řešení	13
3.3 Fyzikální metody nalezení nejkratší sítě	17
3.3.1 Využití rovnováhy sil	17
3.3.2 Využití mýdlových bublin	18
3.3.3 Využití principu minimální energie	19
3.4 Ptolemaiova nerovnost	21
4. Vlastnosti nejkratší sítě	26
5. Algoritmický postup při obecném řešení úlohy	29
6. Řešení pro konvexní čtyřúhelníky	30
7. Řešení pro pravidelné n -úhelníky	37
7.1 Rovnostranný trojúhelník	37
7.2 Čtverec	38
7.3 Pravidelný pětiúhelník	39
7.4 Pravidelný šestiúhelník	41
Seznam literatury	42

1. Úvod

Jakob Steiner byl Švýcarský matematik (obr. 1). Narodil se 18.3.1796. Číst a psát se učil až ve věku 14 let a do školy začal chodit v 18 letech. Pak si začal přivydělávat jako učitel a přitom studoval univerzitu v Heidelbergu a Berlíně. Přispíval svými články do matematického deníku Crelle. V roce 1834 byl jmenován do rady na univerzitě v Berlíně, kde byl až do své smrti 1.4.1863. Byl jedním z nejúspěšnějších syntetických geometrů, který vyřešil mnoho obtížných konstrukčních úloh a dokázal složité a náročné věty, zabýval se teorií projekce.



Obr. 1 – Jakob Steiner

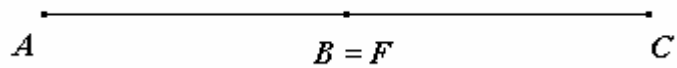
Úloha, kterou se tato práce bude zabývat bývá označována jako *Steinerova úloha*: nalézt nejkratší síť úseček, které spojují n daných bodů v rovině. Snahou matematiků bylo vyřešit problém pomocí analytické geometrie. To však nevedlo v obecném případě k úspěchu. Úlohu je však možno pro většinu konkrétních situací řešit syntetickým postupem pomocí jednoduchého rýsování a trigonometrických výpočtů.

Poněkud méně přesně můžeme tuto úlohu říci takto: v rovinaté krajině se nalézají n vesnic a my máme mezi těmito vesnicemi vystavit cesty tak, abychom se mohli z každé vesnice po těchto cestách dostat do kterékoli jiné vesnice a přitom byla celková délka cest nejkratší.

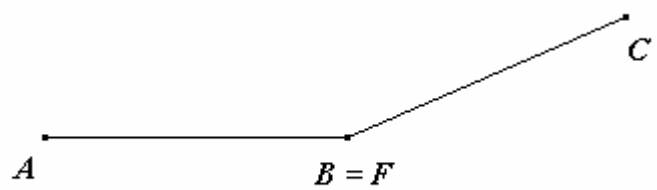
Pro $n = 2$ je řešení triviální, protože spojíme obě vesnice přímou cestou (úsečkou), jak je vidět na obr. 2a. Pro $n = 3$ je situace složitější. Pokud leží všechny tři vesnice v jedné přímce (např. tak, jak je ukázáno na obr. 2b), cesta bude opět přímá. Podobné řešení pravděpodobně uděláme i pro hodně velký úhel, který svírají přímé spojnice vesnic AB a BC (obr. 3). Jestliže se však vesnice A , B , C vyskytují ve vrcholech ostroúhlého trojúhelníku je řešení složitější. Ukážeme si to na příkladě, kdy platí $|AB| = 6 \text{ km}$, $|BC| = 8 \text{ km}$, $|CA| = 8 \text{ km}$. Kdybychom vybudovali síť cest podle obr. 4a, pak bude celková délka cest $s_1 = |AB| + |BC| = 6 + 8 = 14 \text{ km}$. Pokud však vybudujeme cesty s křižovatkou F uvnitř trojúhelníku (obr. 4b – F se nachází na ose úsečky AB a má od této úsečky vzdálenost 4 km) bude jejich celková délka $s_2 = |AF| + |BF| + |CF|$ kratší: pomocí Pythagorovi věty z trojúhelníku AQF , BQF zjistíme $|AF| = |BF| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Navíc $|CF| = \sqrt{8^2 - 3^2} - 4 = 3,42$. Tedy $|AF| + |BF| + |CF| = 5 + 5 + 3,42 = 13,42 \text{ km}$. Z výsledku vidíme, že vzdálenost s_2 je kratší než vzdálenost s_1 . Nemáme však zaručeno, že zvolený bod F odpovídá nejkratšímu součtu $|AF| + |BF| + |CF|$. Je tedy nutno hledat takový bod F uvnitř trojúhelníku ABC , pro nějž je součet $|AF| + |BF| + |CF|$ minimální. Tento bod se označuje jako *Fermatův bod* (Torricelliho bod, Steinerův bod) a jeho vlastnosti budeme analyzovat v kapitole 3. V dalších kapitolách budeme řešit Steinerovu úlohu pro $n = 4$ a pro pravidelné n -úhelníky. V kapitole 2 uvedeme některé základní pojmy potřebné pro další práci.



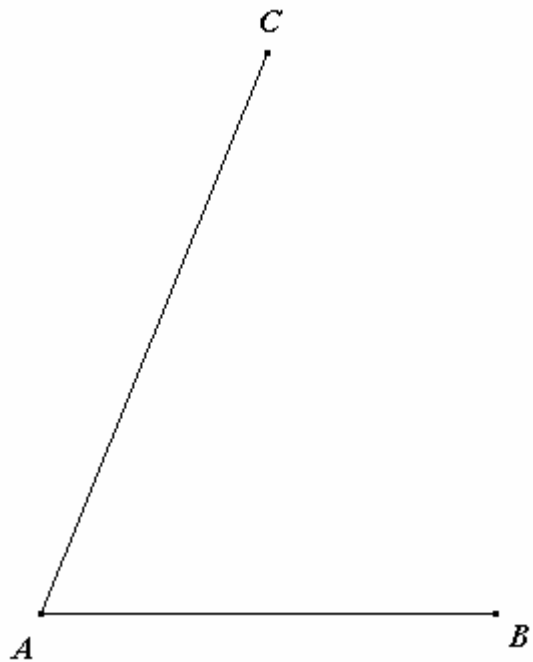
Obr. 2 a



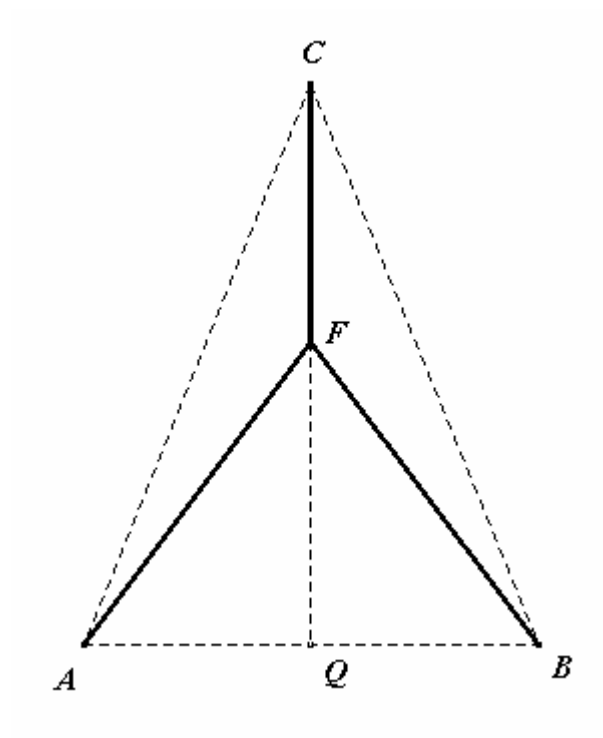
Obr. 2 b



Obr. 3



Obr. 4 a



Obr. 4 b

2. Některé pojmy z teorie grafů

Zde uvedeme některé pojmy z teorie grafů (viz. [5]), jež budou potřebné pro další úvahy. Protože však budeme řešit úlohu, která nepatří pouze do teorie grafů, bude nutno zavést několik nových pojmů.

Graf je uspořádaná dvojice $\langle U, H \rangle$ takových množin, že prvky množiny H jsou neuspořádané dvojice prvků množiny U . Prvky množiny U se nazývají *uzly* (u), zakresluje je jako tečky nebo kolečka a značíme je velkými písmeny latinské abecedy. Prvky množiny H se nazývají *hrany* (h) a jsou to vlastně úsečky či oblouky spojující jednotlivé dvojice uzlů (obr. 5a), každá hrana je incidentní právě se dvěma uzly.

Ohodnocený graf je takový graf, který obsahuje čísla, která jsou připsána k hranám a vyjadřují jejich příslušnou délku. *Souvislý graf* je takový graf, v němž mezi libovolnými uzly existuje cesta. *Cesta* je posloupnost na sebe navazujících hran. Ohodnocený souvislý graf budeme nazývat *sítí*.

Cyklus neboli *kružnice* je souvislý pravidelný graf (obr. 5b). Graf, který neobsahuje žádnou kružnici, se nazývá *les*. Souvislý les se nazývá *strom* (obr. 5c). *Stupeň uzlu* u je počet hran stromu incidentních s uzlem.

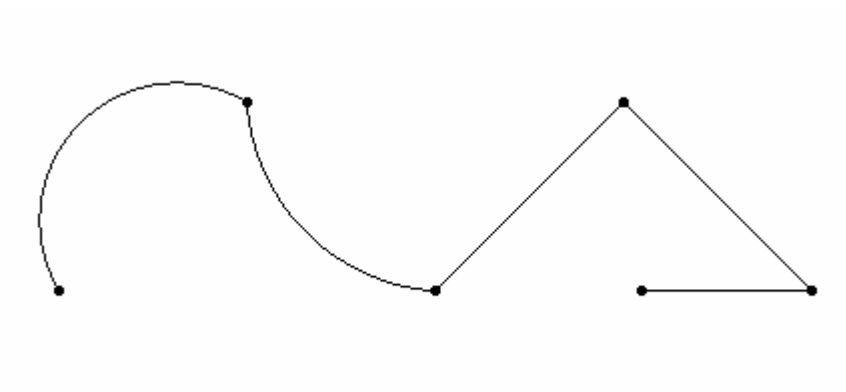
Věta 1 Je-li u počet všech uzlů stromu a h počet všech jeho hran, pak platí:

$$h = u - 1 \quad (1)$$

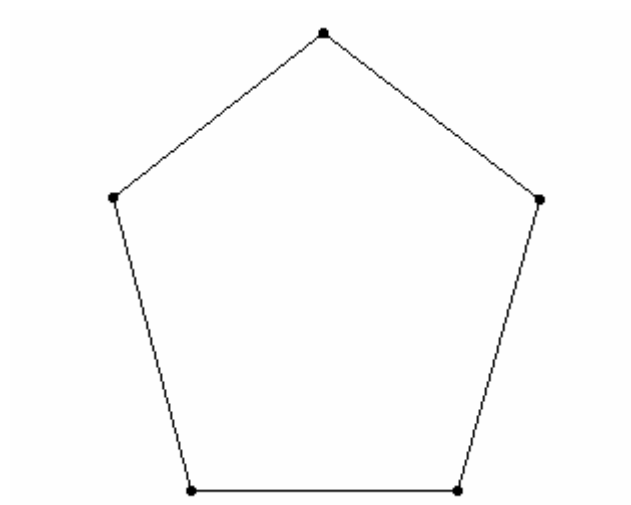
Důkaz: Použijeme metodu matematické indukce, přičemž indukční proměnou bude u , tj. počet uzlů. Má-li strom jeden uzel, pak nemá žádnou hranu, tj. je-li $u = 1$, je $h = 0$ a vztah (1) platí.

Předpokládejme, že vztah (1) platí pro $u = k$ ($k \geq 1$), tj., že libovolný strom s k uzly má $k - 1$ hran. Máme-li strom s $u = k + 1$ uzly, pak v něm nutně existuje aspoň jeden uzel stupně jedna (kdyby tomu tak nebylo, pak by buď nebyl souvislý, nebo by obsahoval kružnici). Jestliže tento uzel a jedinou hranu, na níž leží, vynecháme,

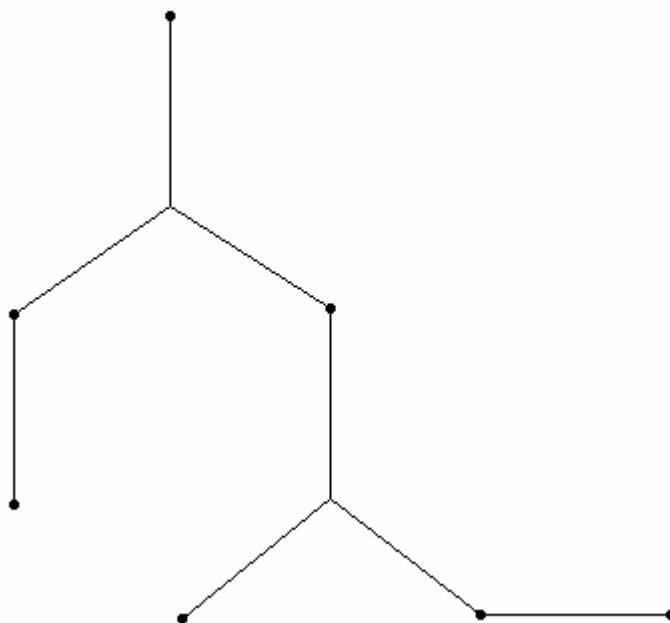
dostaneme strom s $u - 1 = k$ uzly; ten podle indukčního předpokladu má $k - 1 = u - 2$ hran. Původní strom s u uzly měl tedy $u - 1$ hran. Ověřili jsme, že vztah (1) skutečně pro každý strom platí.



Obr. 5 a



Obr. 5 b



Obr. 5 c

Při řešení Steinerovy úlohy budeme tyto některé z uvedených pojmů užívat, ale protože se nebudeme zabývat úvahami, které se týkají pouze grafů, musíme si některé pojmy upřesnit. Upřesněme nejprve text úlohy:

V rovině je dáno n bodů, které budeme nazývat *uzly* a hledáme *síť* úseček, pro nichž bychom se mohli dostat z kteréhokoli uzlu do kteréhokoli jiného uzlu. Přitom má být součet délek všech těchto úseček nejkratší.

Z příkladu, který jsme uvedli v úvodu vyplývá, že tato síť bude obsahovat také „*křižovatky*“, tzn. body v nichž se stýká několik úseček, ale které nejsou uzly ve smyslu naší dohody. Takovéto křižovatky budeme nazývat *vidlice* a značit malými řeckými písmeny. Uzly a vidlice dohromady budeme označovat jako *body* a úsečky dané sítě budeme nazývat *hrany*. *Délkou hrany* rozumíme délku příslušné úsečky. *Délka sítě* je součet délek všech jejích hran.

Je zřejmé, že hledaná síť úseček je graf typu strom. Kdyby totiž obsahoval kružnici (cyklus), můžeme jednu její hranu odebrat a tím zkrátíme celkovou délku sítě aniž bychom porušili podmínky úlohy.

3. Řešení pro $n = 3$

3.1 Fermatův bod

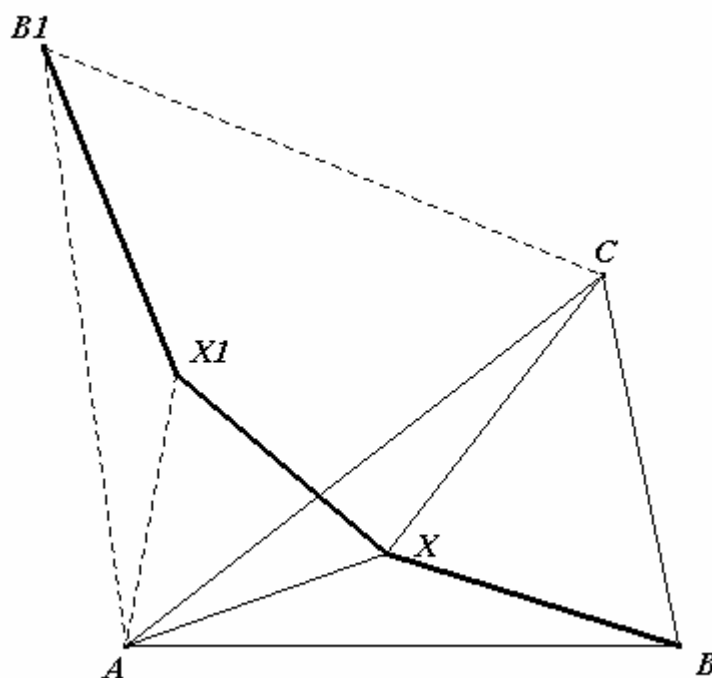
Nejprve budeme uvažovat trojúhelník, v němž každý z vnitřních úhlů má velikost menší než 120° a hledat bod F uvnitř trojúhelníka tak, aby délka $s = |AF| + |BF| + |CF|$ měla minimální hodnotu.

Takovou úlohou se zabýval již Pierre Fermat (1601-1665), který poslal Evangelistu Torricellimu (1608-1647) dopis, v němž předložil výše uvedený úkol. Torricelli našel několik různých řešení. My rovněž uvedeme několik různých řešení. První je považováno za nejznámější a je postaveno na úvaze s otáčením trojúhelníku. Publikoval jej Joseph Ehrenfried Hofmann (1900-1973) a nezávisle na něm jej objevil Tibor Galai. Uvedeme nejprve jeho řešení podle pramenů [1], [7], [8].

3.2 Hofmannovo řešení

Vycházíme z obrázku 6, kde v trojúhelníku ABC zvolíme libovolný bod X . Otočením trojúhelníku AXC kolem bodu A o 60° se bod C přemístí do bodu, který označíme B_1 a bod X se přemístí do bodu, který označíme X_1 . Z konstrukce vidíme, že trojúhelník AX_1X je rovnostranný, $|AX| = |AX_1|$ a $|CX| = |B_1X_1|$. Tak dostaneme $s = |AX| + |BX| + |CX| = |BX| + |X_1X| + |X_1B_1|$. Je tedy $s = |BX_1X_1B_1|$, což je délka lomené čáry $|BX_1X_1B_1|$. Ta je však nejkratší, když není lomená, tedy když spojíme body B a B_1 . Z toho plyne, že pro minimální délku sítě musí ležet bod $X = F$ (Fermatův bod) na úsečce BB_1 (viz. obr. 7).

Pro bod F platí, že úhel $\angle AFB_1 = 60^\circ$, protože trojúhelník AF_1F je rovnostranný a otočením trojúhelníku AFC zjistíme, že úhel $\angle CFB_1 = 60^\circ$ (jde vlastně o úhel, který svírá úsečka CF s přímkou, na níž leží obraz F_1B_1 úsečky CF z otočení o 60°) a po sečení těchto úhlů dostaneme úhel $\angle AFC = 120^\circ$. Stejným způsobem postupujeme i při otočení bodu A i B .

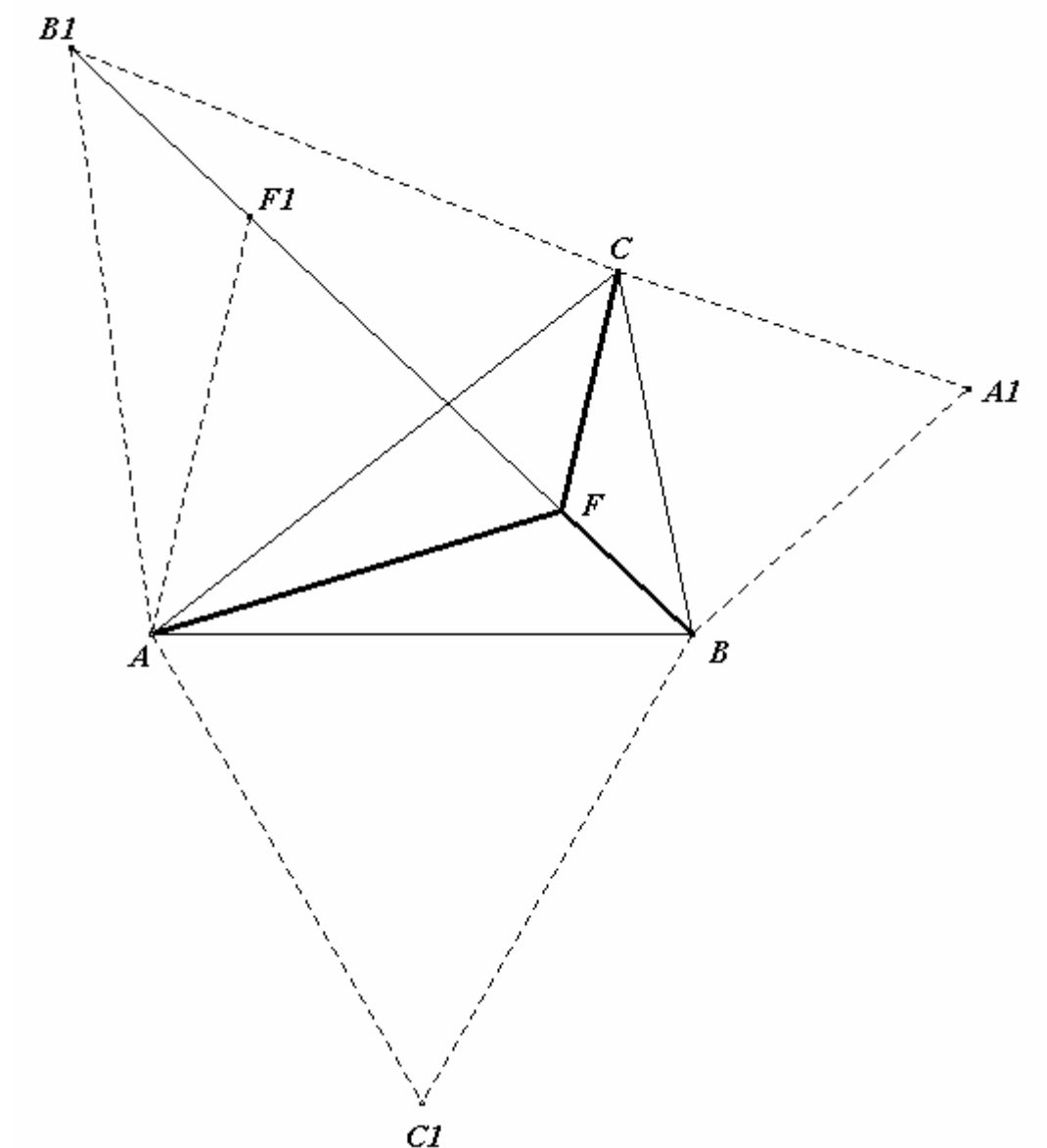


Obr. 6

Jelikož víme, že Fermatův bod musí ležet na úsečce BB_1 nebo AA_1 nebo CC_1 je konstrukce zřejmá. Sestrojíme libovolný trojúhelník ABC , poté vně každé ze stran AB , BC , CA sestrojíme rovnostranný trojúhelník AB_1C , A_1BC , AB_1C a body A_1, B_1, C_1 vedeme úsečky k protějším vrcholům trojúhelníku, tedy k vrcholům A , B , C . Přímky AA_1 , BB_1 , CC_1 se protínají v jediném bodě F (Fermatově bodě).

Platí: $|AF| + |BF| + |CF| = |AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$

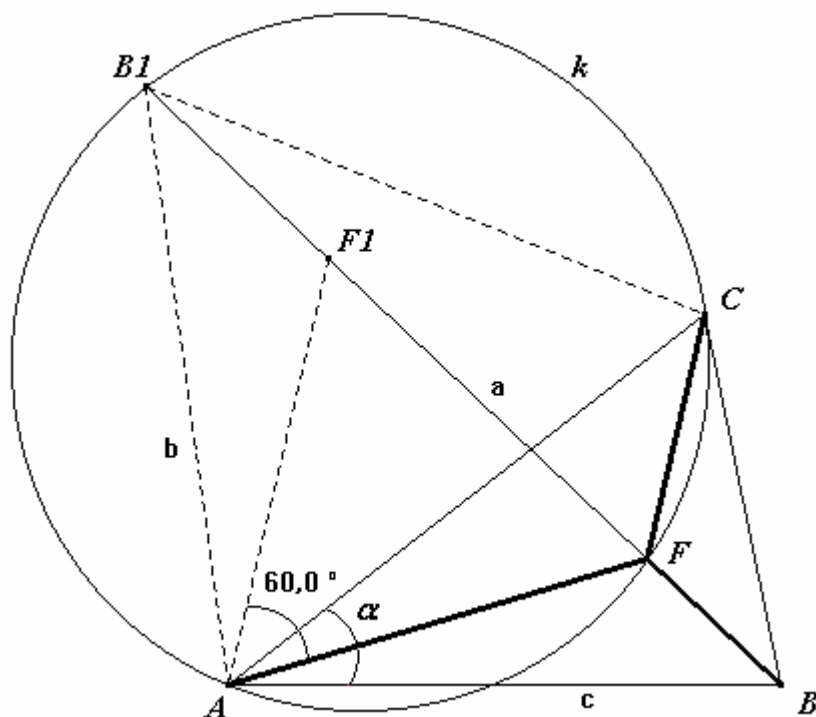
$|\angle AFB| = |\angle BFC| = |\angle CFA| = 120^\circ$.



Obr. 7

V dalších úvahách budeme užívat trochu jinou konstrukci, která využívá toho, že úhel CFA má velikost 120° . Výše uvedeným způsobem sestojíme rovnoramenný trojúhelník AB_1C a opišeme mu kružnici k (obr. 8). Spojíme-li body B a B_1 úsečkou, pak průnik této úsečky a kružnice k je bod F .

Délku úseček BB_1 , CC_1 , AA_1 , které jsou stejně dlouhé a jejich délka je stejná jako je $s_{\min} = |AF| + |BF| + |CF|$, lze najít nejen pomocí konstrukcí, ale i výpočtem a to pomocí kosinové věty, která zní: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$. Pro výpočet použijeme otočeného trojúhelníku AB_1C a původního trojúhelníku ABC (obr. 8).



Obr. 8

Věta 2 Necht' CBA_1 , ACB_1 , BAC_1 jsou rovnostranné trojúhelníky vně připsané trojúhelníku ABC , jehož velikosti vnitřních úhlů jsou menší než 120° . Pak mají úsečky AA_1 , BB_1 , CC_1 i kružnice trojúhelníkům CBA_1 , ACB_1 , BAC_1 opsané, společný právě jeden bod. Označíme-li jej F , pak pro libovolný bod X v rovině trojúhelníku je součet

$$s(X) = |AX| + |BX| + |CX| \quad (2)$$

minimální, právě když $X = F$.

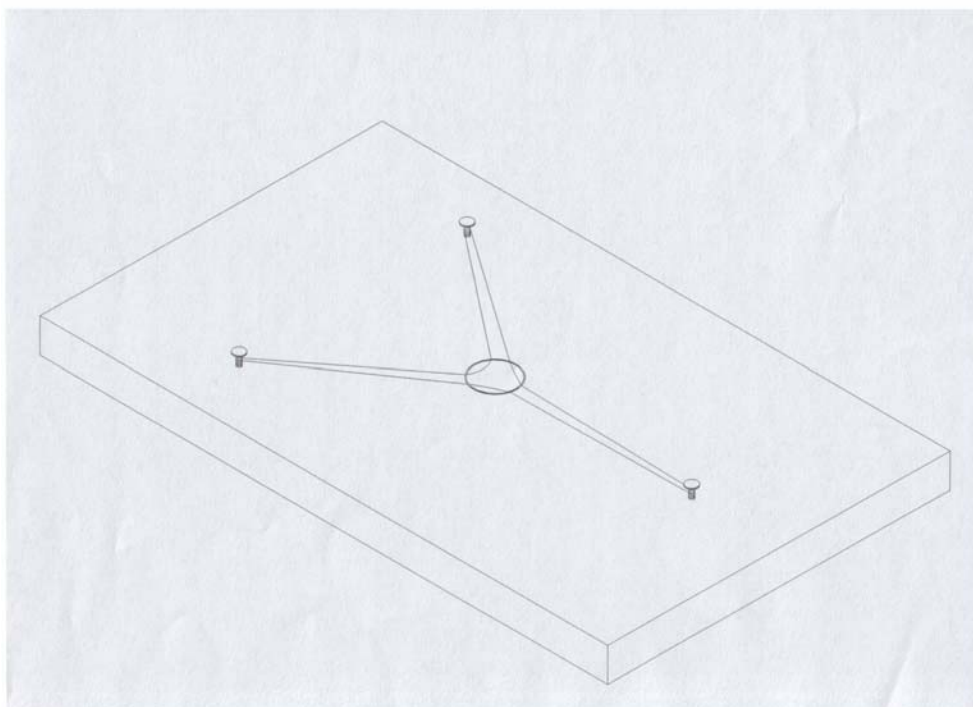
Věta 3 Minimální délku vypočítáme jako

$$s_{\min} = |BB_1| = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha + 60^\circ)}. \quad (3)$$

3.3 Fyzikální metody nalezení Fermatova bodu

3.3.1 Využití rovnováhy sil

Představme si myšlenkový pokus. Daný trojúhelník narýsujeme na vodorovnou desku a do jeho vrcholů zatlučeme tři hřebíčky (A , B , C), které propojíme gumičkou za pomoci malého očka (obr. 9). Pokud zanedbáme tření, očko se bude posunovat po gumičce tak dlouho, dokud se neustálí v určitém bodě a to takovém, ve kterém bude výslednice sil, které působí na gumičku nulová a to bude právě tehdy, když součet každých dvou sil bude roven třetí síle a bude mít opačný směr ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$, $\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -\vec{F}_1$, $\vec{F}_3 + \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$). Gumička bude mít pro rovnovážnou polohu celkovou délku minimální. Proto se bude očko nacházet ve Fermatově bodě. Ve skutečnosti nelze tento pokus provést, protože guma je z materiálu, který má velice velké tření. Lze však realizovat jeho analogii pomocí pokusu s mýdlovou blánou.



Obr. 9

3.3.2 Využití mýdlových bublin

Daný trojúhelník narýsujeme na dvě průhledné plastikové desky stejné velikosti a vrcholy tohoto trojúhelníku provrtáme dírky tak, aby byly na obou deskách zrcadlově stejné a tvořili nám daný trojúhelník. Dále si připravíme tři stejně dlouhé a tlusté drátky jejichž konce ztenčíme. Desky dáme proti sobě a mezi ně vložíme drátky, které provlékneme jednotlivě každým z otvorů a za deskou uděláme očko, aby drátek nevypadl. Takto připravený model vložíme do nádoby s mýdlovou vodou. Po vyjmutí se nám mezi drátky vytvoří mýdlová blána, která se snaží mít co nejmenší plochu, vytváří nejkratší síť (obr. 10 – 11). Tímto řešením se zabýval i Courat [2].



Obr. 10



Obr. 11

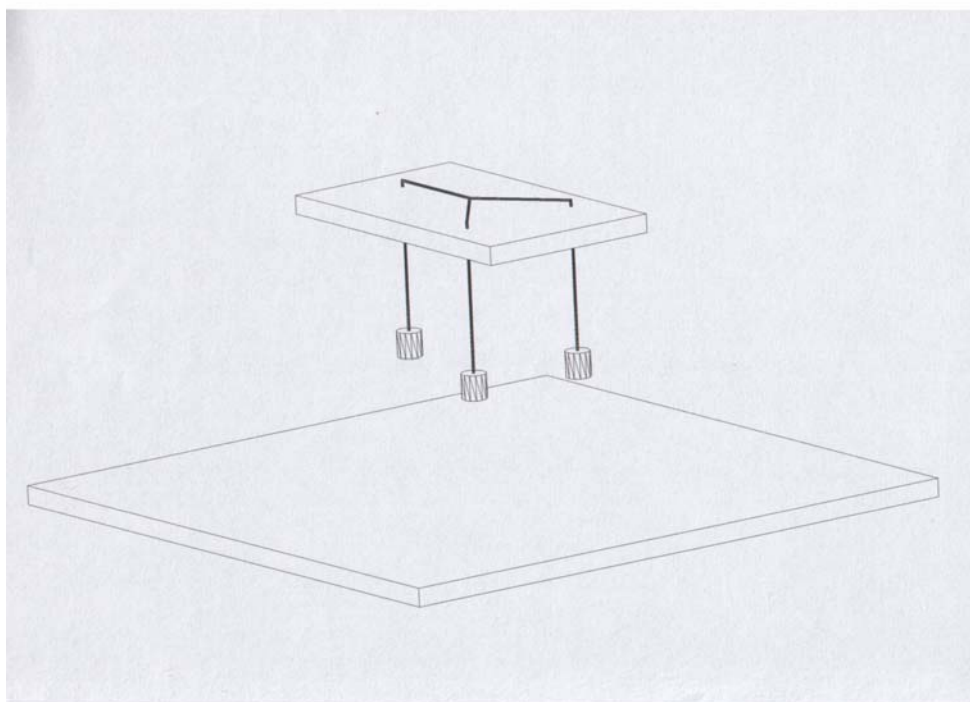
3.3.3 Využití principu minimální energie

Každá soustava se snaží dosáhnout stav minimální potenciální energie. Potenciální energii mají tělesa, která jsou v silových polích jiných těles. K jejímu určení je vždy nutné zvolit nulovou hladinu potenciální energie (většinou volíme povrch Země). Velikost potenciální energie se rovná mechanické práci, která je na těleso vykonána při zvedání, přičemž nulová hodnota potenciální energie je kladena na povrch zdroje gravitačního pole. Hodnota potenciální energie je určena vztahem

$$E_p = m \cdot g \cdot h . \quad (4)$$

Tímto principem hledal nejkratší síť Hejný ve své publikaci [3]. Opět si představme myšlenkový pokus. Daný trojúhelník narýsujeme na vodorovnou desku a do jeho vrcholů uděláme tři otvory, kterými protáhneme provázky o délce l a svážeme je dohromady na vrchu desky. Pod deskou na konce provázků zavěsíme tři stejně těžká závaží o hmotnosti m (obr. 12). Pokud tření o desku zanedbáváme, na vlákno působí tři stejně velké síly $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ s nulovou výslednicí, která bude nulová právě tehdy, když

součet každých dvou sil bude roven třetí síle a bude mít opačný směr ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$, $\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -\vec{F}_1$, $\vec{F}_3 + \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$). Každé závaží se snaží dosáhnout co nejmenší potenciální energie i celková potencionální energie musí být minimální ($E = E_1 + E_2 + E_3$). Závaží klesají dokud se neustálí. Energii vypočteme vynásobením hmotnosti závaží m , vzdálenosti závaží od země h a gravitační konstanty g ($E_1 = m \cdot g \cdot h_1$, $E_2 = m \cdot g \cdot h_2$, $E_3 = m \cdot g \cdot h_3$). Vzdálenost závaží od země vypočteme tak, že od celkové výšky desky od země h_0 odečteme délku provázku l , který ještě zkrátíme o délku, která je nad deskou x, y, z , tj. délka provázku od otvoru po jejich spojení ($h_1 = h_0 - (l - x)$, $h_2 = h_0 - (l - y)$, $h_3 = h_0 - (l - z)$). Po dosazení dostaneme $E = m \cdot g \cdot [h_0 - (l - x)] + m \cdot g \cdot [h_0 - (l - y)] + m \cdot g \cdot [h_0 - (l - z)]$, dále upravíme $E = m \cdot g \cdot [3 \cdot h_0 - 3 \cdot l + (x + y + z)]$. Protože hmotnost závaží m , gravitační konstanta g , vzdálenost desky od země h_0 a délka provázku l jsou konstantní, závisí celková potencionální energie na délce provázků nad deskou $x+y+z$. Tudíž potenciální energie bude minimální, pokud bude minimální délka $x+y+z$.



Obr. 12

3.4 Využití Ptolemaiovy nerovnosti

Termínem *Ptolemaiova nerovnost* [4] se označuje následující tvrzení:

Věta 4 Pro každé čtyři body A, B, C, D v rovině platí:

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|. \quad (5)$$

Přitom rovnost

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD| \quad (6)$$

nastane právě tehdy, když tyto čtyři body leží v abecedním uspořádání na kružnici nebo na přímce.

Toto tvrzení můžeme uplatnit při zkoumání vlastností trojúhelníku, poněvadž důsledkem je tvrzení:

Věta 5 Pro libovolný trojúhelník ABC a bod X v rovině trojúhelníku platí:

$$b \cdot |BX| + c \cdot |CX| \geq a \cdot |AX|. \quad (7)$$

Přičemž rovnost nastane, právě když se bod X nachází na tom oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC , který neobsahuje bod A .

Zvolíme-li za libovolný trojúhelník rovnostranný, důsledkem věty 4 je tvrzení:

Věta 6 Nechť ABC je rovnostranný trojúhelník a X libovolný bod v rovině trojúhelníku. Pak platí:

$$|BX| + |CX| \geq |AX|. \quad (8)$$

Přičemž rovnost nastane, právě když se bod X nachází na tom oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC , který neobsahuje bod A .

Právě toto poslední tvrzení využijeme pro důkaz věty 2 (ze str. 16).

Důkaz: Jsou-li X, Y dva body trojúhelníku ABC , pak sečtením trojúhelníkových nerovností $|AX| \leq |AY| + |XY|$, $|BX| \leq |BY| + |XY|$ a $|CX| \leq |CY| + |XY|$, které platí pro trojice bodů (A, X, Y) , (B, X, Y) a (C, X, Y) dostaneme

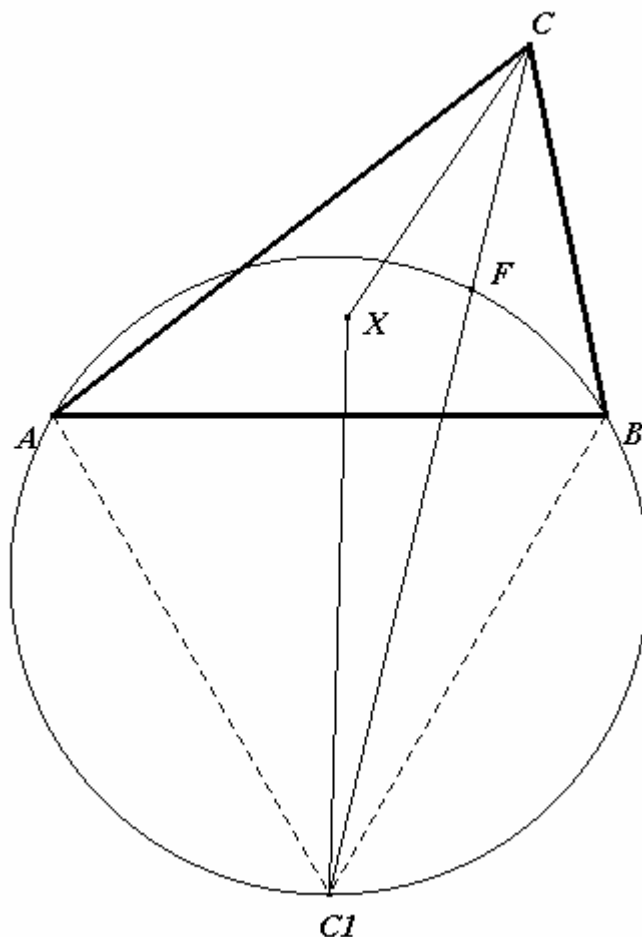
$$|AX| + |BX| + |CX| = |AY| + |BY| + |CY| + 3|XY|.$$

Odtud je zřejmé, že rovnost

$$|AX| + |BX| + |CX| = |AY| + |BY| + |CY| = s(X)_{\min}$$

nastává právě tehdy, když $Y = X$. Existuje tedy nejvýše jeden bod X pro který má součet (2) minimální hodnotu.

Sestrojíme nyní nad stranou AB rovnostranný trojúhelník ABC_1 tak, aby bod C_1 ležel v polorovině opačné k polorovině ABC . Průsečík úsečky CC_1 s kratším obloukem AB kružnice opsané trojúhelníku ABC_1 označme F (obr. 13 – z podmínek věty a konstrukce bodu C_1 plyne, že úsečka oblouk protíná).



Obr. 13

Nechť X je libovolný bod dané roviny. Aplikací věty 6 na trojúhelník ABC_1 zjistíme $|AX| + |BX| \geq |C_1X|$. Odtud, použijeme-li navíc trojúhelníkovou nerovnost pro body C, X, C_1 , dostáváme

$$s(x) = |AX| + |BX| + |CX| \geq |C_1X| + |CX| \geq |CC_1|$$

Je tedy vždy $s(X) \geq |CC_1|$, přitom rovnost nastane právě tehdy, když bod X leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC_1 a současně na úsečce CC_1 , tedy v bodě F .

Obdobným postupem pro trojúhelníky A_1BC a AB_1C zjistíme, že platí $s(X) \geq |AA_1|$ a $s(X) \geq |BB_1|$, přičemž v prvním ze vztahů platí rovnost, právě když bod X leží v průsečíku úsečky AA_1 s kratším obloukem BC kružnice trojúhelníku opsané. V druhém ze vztahů nastane rovnost jen tehdy když bod X je průsečíkem úsečky BB_1 s kratším obloukem AC kružnice trojúhelníku opsané. Mají-li platit všechny tři odhady hodnoty $s(X)$ současně, přičemž minimum nastává pro jediný bod X v rovině, je tímto věta 2 dokázána. Navíc jsme zjistili

$$s(X)_{\min} = |AA_1| = |BB_1| = |CC_1|.$$

3.5 Nalezení minimální sítě pro trojúhelník s úhlem větším než 120°

Věta 7 Je-li D vnitřní bod trojúhelníka ABC , pak

$$|AC| + |BC| > |AD| + |BD|$$

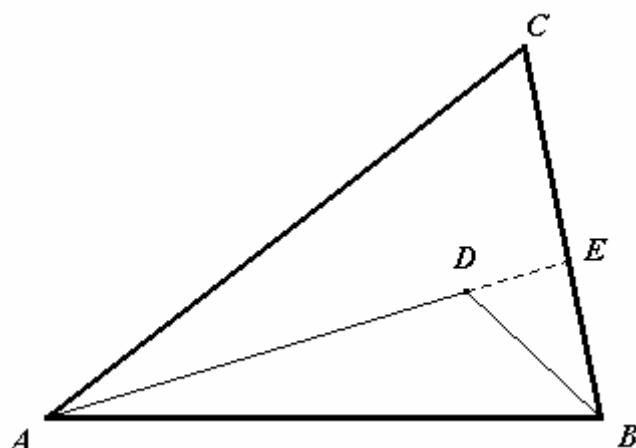
Důkaz: Označme E průsečík polopřímky AD se stranou BC (obr. 14). Trojúhelníkovou nerovnost $|AC| + |EC| > |AE|$ pro trojúhelník ACE upravíme přičtením výrazu $|BE|$ k jejím oběma stranám na tvar

$$|AC| + |BC| > |AE| + |BE| \quad (9)$$

Podobně nerovnost $|DE| + |BE| > |BD|$ pro trojúhelník DBE upravíme přičtením $|AD|$ na tvar

$$|AE| + |BE| > |AD| + |BD|$$

a po dosazení do (9) již dostaneme dokazovanou nerovnost $|AC| + |BC| > |AD| + |BD|$.



Obr. 14

Věta 8 Má-li některý z úhlů trojúhelníku ABC velikost větší než 120° , je bod X totožný s vrcholem tohoto úhlu. Jsou-li body A, B, C kolineární, je bodem X ten z nich, který leží mezi druhými dvěma.

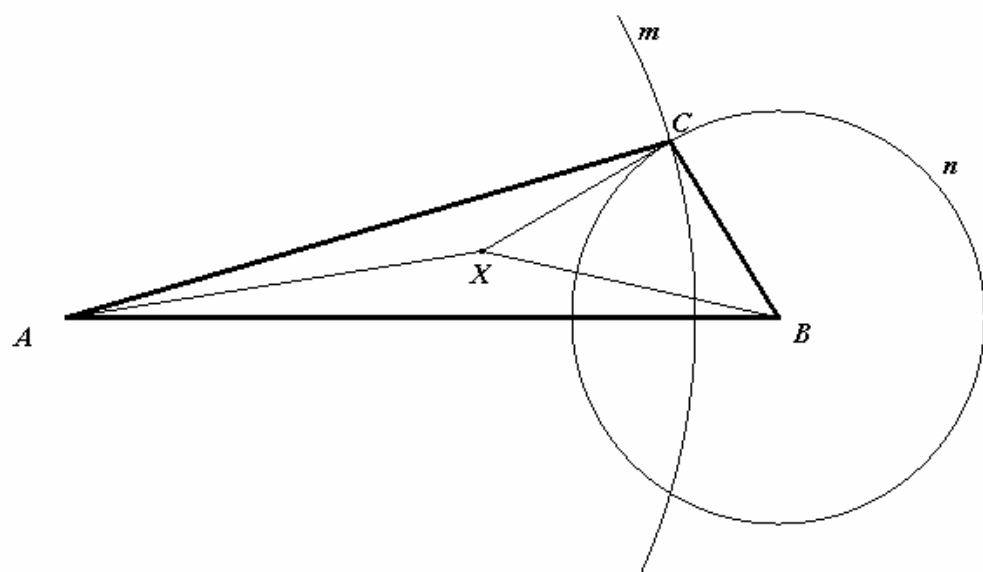
Důkaz: Předpokládejme, že ABC je trojúhelník s úhlem při vrcholu C větším než 120° a označme $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ vnitřky kruhů s hraničními kružnicemi $\mathcal{m}(A, |AC|)$ a $\mathcal{n}(B, |BC|)$. Předpokládejme, že bod X leží vně útvaru $\mathcal{N}$ (obr. 15). Pak pomocí zřejmé podmínky $|BX| \geq |BC|$ a trojúhelníkové nerovnosti $|AX| + |BX| \geq |AC|$ plyne

$$|AX| + |BX| + |CX| \geq |AC| + |BC|, \quad (10)$$

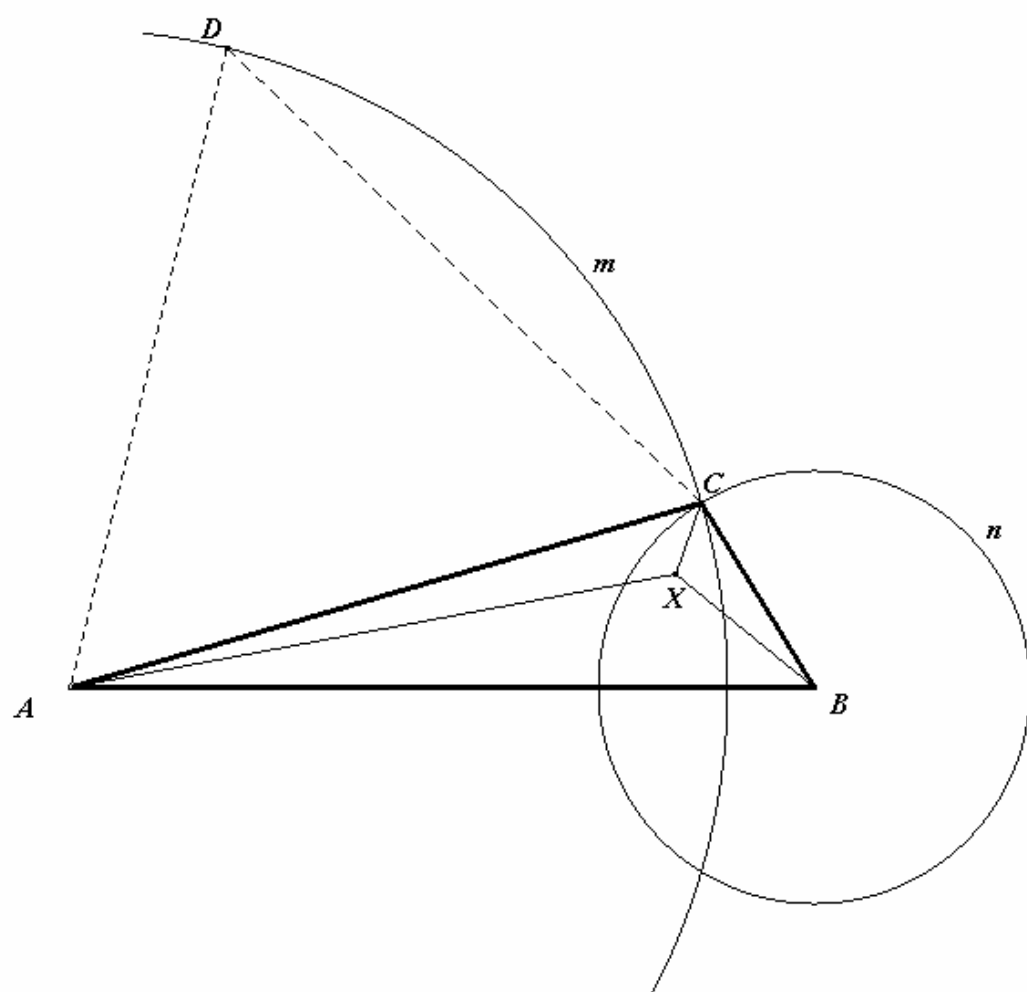
přičemž rovnost nastane, právě když $X = C$. Stejně tak platí leží-li bod X vně útvaru $\mathcal{M}$.

Předpokládejme, že se bod X nachází v průniku útvaru $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ a vně trojúhelníku ABC zvolme bod D tak, aby trojúhelník ACD byl rovnostranný (obr. 16). Podle věty 6 platí $|AX| + |CX| \geq |DX|$ a podle věty 7 pro trojúhelník BDX a jeho vnitřní bod C platí $|BX| + |DX| > |BC| + |DC|$. Z toho plyne

$$|AX| + |BX| + |CX| > |AC| + |BC|.$$



Obr. 15



Obr. 16

4. Vlastnosti nejkratší sítě

Ukážeme nejprve, že platí:

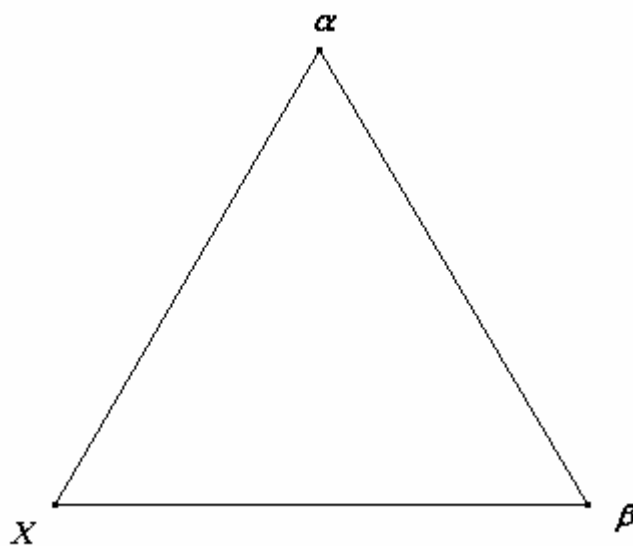
Věta 9 Z každé vidlice nejkratší sítě vycházejí právě tři úsečky, z nichž každé dvě svírají úhel 120° .

Důkaz: Kdyby vycházely z vidlice α jen dvě úsečky, které například na obrázku 17 spojí α s body X, β , zkrátili bychom síť přímou spojnici (úsečkou) $X\beta$.

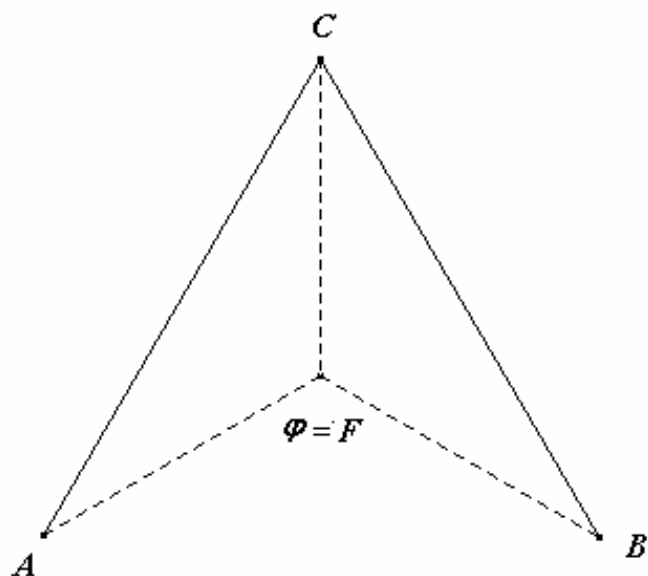
Kdyby dále některé dvě úsečky z vidlice α svíraly úhel menší než 120° (obr. 18), zkrátili bychom síť zavedením vidlice φ ve Fermatově bodě F a náhradou hran $X\alpha$ a $Y\alpha$ hranami $\varphi\alpha, \varphi A, \varphi B$.

Platí:

$$|\varphi\alpha| + |\varphi A| + |\varphi B| < |\alpha A| + |\alpha B|.$$



Obr. 17



Obr. 18

Vycházejí-li tedy z vidlice α alespoň tři úsečky, každé dvě z nich svírají úhel větší nebo roven 120° . Kdyby však některý z těchto (aspoň tři) úhlů byl větší než 120° , bude součet všech úhlů větší než $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ a to není možné. Proto z vidlice α vycházejí právě tři úsečky a každé dvě z nich svírají úhel 120° .

Z předcházejících úvah plynou tyto vlastnosti nejkratší sítě:

- Z každého uzlu vychází jedna, dvě nebo tři úsečky.
- Jestliže z uzlu nejkratší sítě vychází dvě úsečky, je úhel mezi nimi větší nebo roven 120° .
- Jestliže vychází tři, je úhel mezi každými dvěma z nich roven 120° .
- Z každé vidlice vychází právě tři úsečky a každé dvě z těchto úseček svírají úhel 120° .
- Žádné úsečky nejkratší sítě netvoří uzavřenou čáru. Kdyby ano, mohla by se některá z nich vynechat a celková délka sítě se tím zkrátí.

- f) Nejkratší síť je tedy graf typu strom. Označíme-li n počet všech jeho bodů (uzlů a vidlic, u počet všech uzlů (daných bodů, které spojujeme) a v počet všech vidlic, pak platí $n = v + u$ a podle věty 1 je počet všech úseček (hran grafu) dán vztahem

$$h = n - 1 = v + u - 1 \quad (11)$$

- g) Odhad počtu vidlic

Víme, že $h = v + u - 1$. Počet úseček můžeme vyjádřit i jiným způsobem. Z každé vidlice vychází právě tři úsečky, z každého uzlu alespoň jedna úsečka, takže počet úseček je

$$h \geq \frac{3 \cdot v + u}{2}$$

Z těchto vzorců můžeme vyjádřit

$$v + u - 1 \geq \frac{3 \cdot v + u}{2}$$

Odtud plyne

$$v \leq u - 2 \quad (12)$$

- h) Přesnější vztah pro počet vidlic

Písmenem u_1 označíme počty uzlů, z nichž vychází právě jedna úsečka, písmenem u_2 počty uzlů, z nichž vychází právě dvě úsečky a písmenem u_3 počty uzlů, z nichž vychází právě tři úsečky. Pak je počet všech úseček sítě dán vztahem

$$h = \frac{u_1 + 2 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 + 3 \cdot v}{2}$$

Porovnáním se vztahem (1) dostáváme:

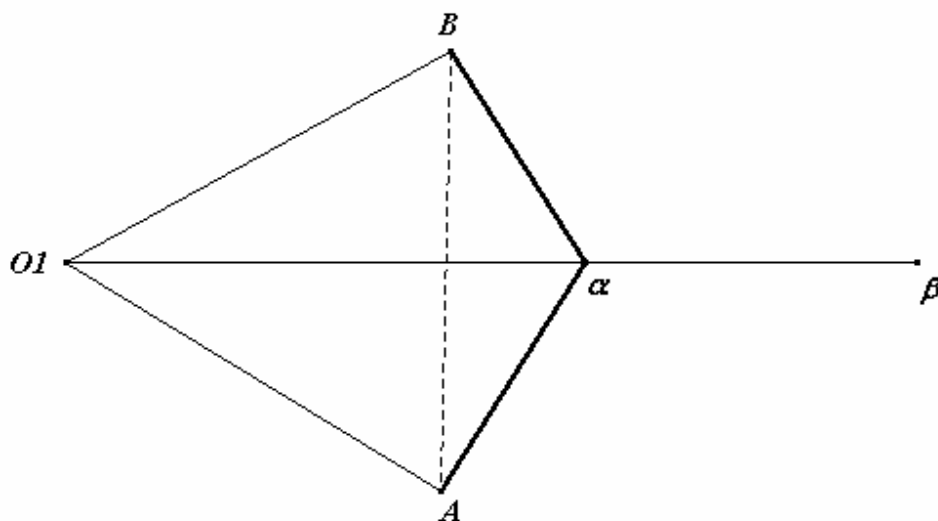
$$u_1 + u_2 + u_3 + v - 1 = \frac{u_1 + 2 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 + 3 \cdot v}{2}$$

Odtud po úpravě dostaneme

$$v = u_1 - u_3 - 2 \quad (13)$$

5. Algoritmický postup při obecném řešení úlohy

- I. Nejprve zjistíme, kolik může být vidlic a které uzly jsou přímo spojeny úsečkami.
- II. Nakreslíme schémata sítí, která přicházejí v úvahu. Musí jich být konečný počet, protože vidlic je nejvýše $(n - 2)$.
- III. Dále vyšetřujeme jednotlivé typy grafů postupným zjednodušováním. Dodržujeme tyto algoritmy:
 - a) jsou-li některé dva uzly přímo spojeny, získáme odstraněním příslušné úsečky 2 sítě s menším počtem uzlů. Tím úlohu převedeme na vyřešení dvou jednodušších případů.
 - b) po důsledném provedení a) řešíme jen takové sítě, v nichž každá úsečka vycházející z uzlu směřuje do vidlice. Protože je množství vidlic menší než počet uzlů, musí aspoň ze dvou uzlů vést úsečky do téže vidlice. Tyto uzly označíme A, B (obr. 19).
- IV. Je zřejmé, že vidlice α musí být Fermatovým bodem v trojúhelníku $AB\beta$. Sestrojíme nad AB rovnostranný trojúhelník ABO_1 . V nejkratší síti musí α ležet na úsečce $O_1\beta$ a zároveň $|A\alpha| + |B\alpha| + |\alpha\beta| = |O_1\beta|$. Můžeme tedy nahradit úsečky $A\alpha, B\alpha, \alpha\beta$ jedinou úsečkou $O_1\beta$. Tím jsme ovšem uzly A, B nahradili jediným uzlem O_1 . Počet uzlů jsme tedy zmenšili o jednu a počet vidlic se rovněž zmenšil o jednu. Postup opakujeme až postupně nalezneme polohu všech vidlic zpětnou konstrukcí.



Obr. 19

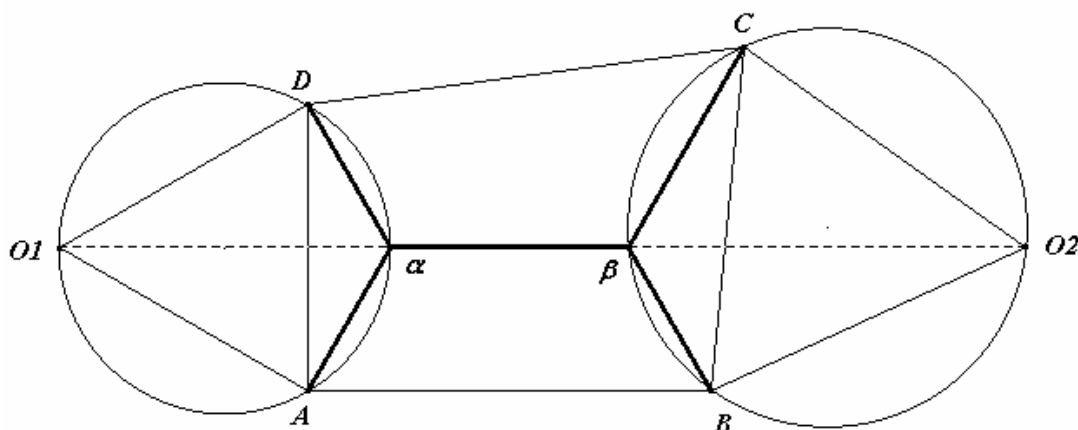
6. Řešení pro konvexní čtyřúhelník

Jsou-li 4 uzly ve vrcholech čtyřúhelníku, nedostane se žádná část minimální sítě za hranice tohoto čtverce. Odsud vyplývá, že z každého uzlu vychází právě 1 úsečka. Kdyby totiž z některého vycházely alespoň 2, byl by úhel mezi nimi nejvýš 90° a graf by neměl minimální celkovou délku. Podle vztahu (13) platí $v = u_1 - u_3 - 2 = 2$, tedy graf má 2 vidlice. Řešíme dva problémy a to jak sestrojíme α, β (Fermatovy body) a dále zjistíme, že lze sestrojit dvě sítě a musíme řešit otázku, která z nich je minimální. Tímto se zabýval Abakumov ve svém článku [1].

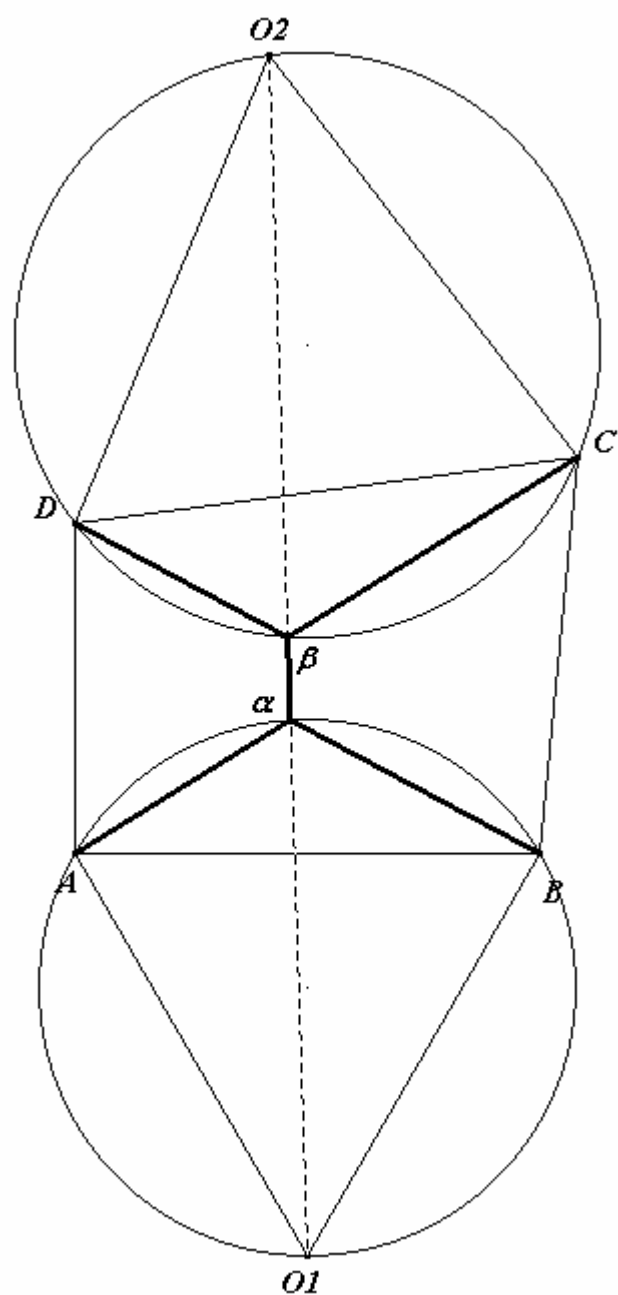
Nad úsečkami AB, CD sestrojíme rovnostranné trojúhelníky ABO_1, CDO_2 . Těmto trojúhelníkům opišeme kružnice k_1, k_2 a spojíme O_1 a O_2 . Průsečíky kružnic k_1, k_2 a přímky $O_1 O_2$ jsou body α, β . β je Fermatův bod v trojúhelníku $AB\alpha$, α je Fermatův bod v trojúhelníku $CD\beta$ (Obr. 20). Délka sítě je

$$|A\alpha| + |\alpha D| + |\alpha\beta| + |B\beta| + |\beta C|, \quad (14)$$

po úpravě dostaneme $|A\alpha| + |\alpha D| + |\alpha\beta| + |B\beta| + |\beta C| + |\alpha\beta| - |\alpha\beta|$. Součet délek $|A\alpha| + |\alpha D| + |\alpha\beta|$ je roven délce přímky $|O_1\alpha|$ a součet délek $|B\beta| + |\beta C| + |\alpha\beta|$ je roven délce přímky $|O_2\beta|$. Odtud dostaneme $|O_1\alpha| + |O_2\beta| - |\alpha\beta| = |O_1 O_2|$. Tentýž postup uděláme nad úsečkami AD, BC (Obr. 21). Porovnáme délku obou sítí a tu kratší považujeme za správné řešení.

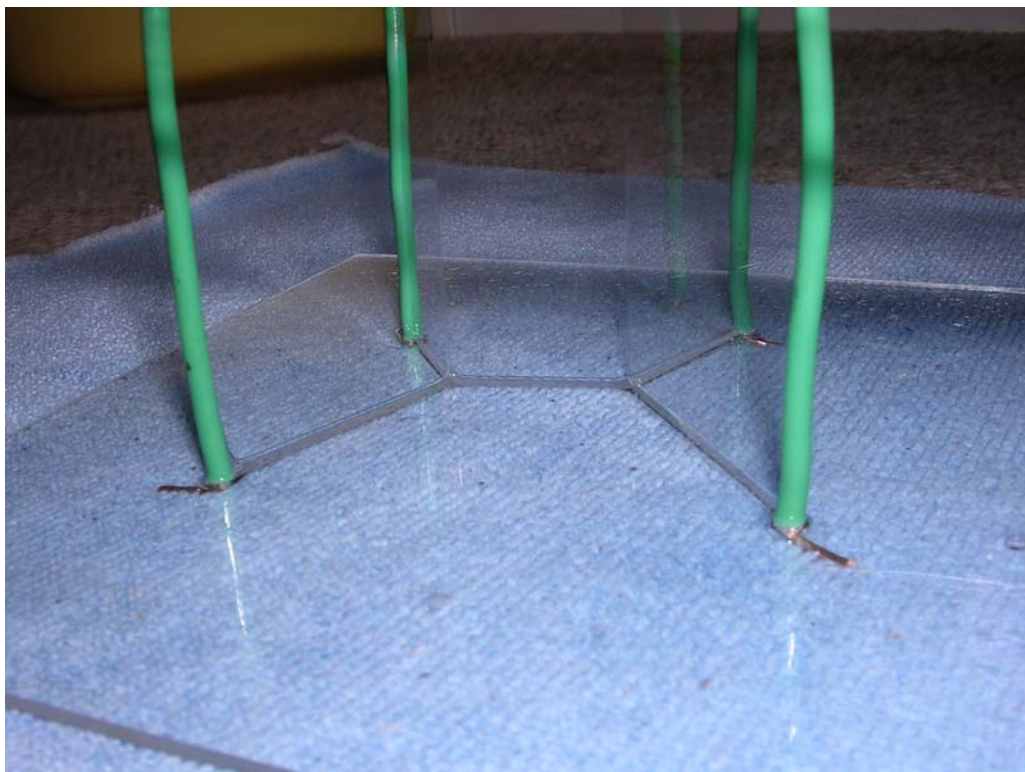


Obr. 21

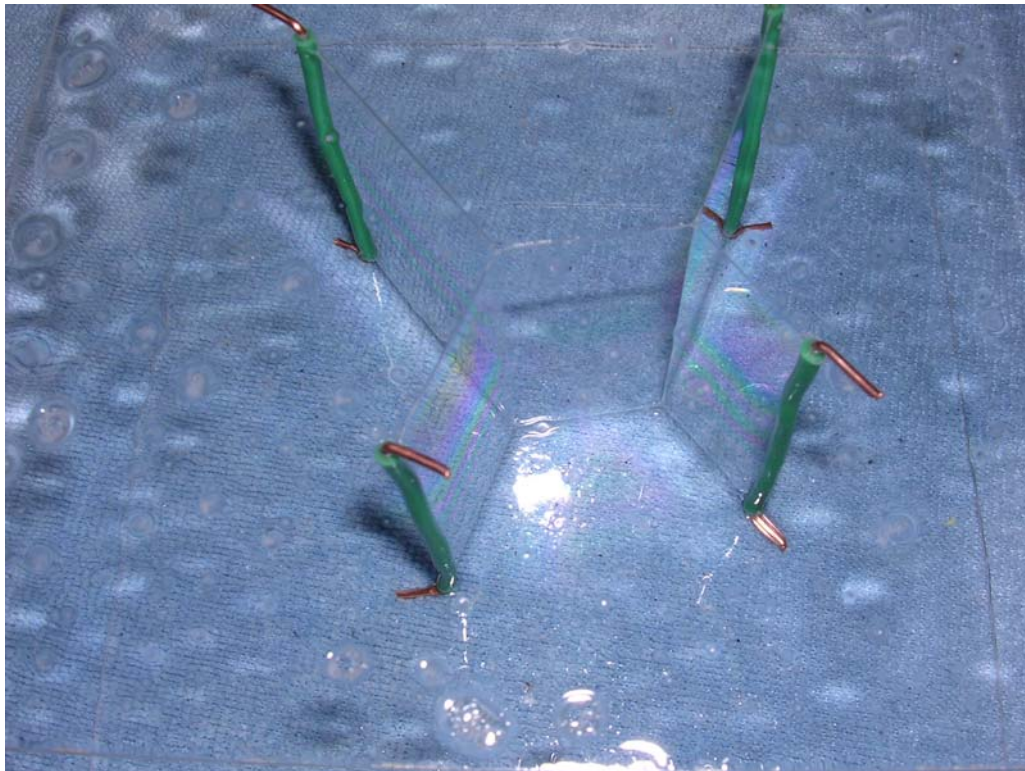


Obr. 20

Další možností nalezení řešení tohoto problému je metodou využití mýdlových bublin (obr. 22- 23), jak jsme uváděli u řešení pro trojúhelník viz. kapitola 3 na str. 18.



Obr. 22



Obr. 23

Pro obecné čtyřúhelníky nelze vypočítat, která varianta má nejkratší síť, můžeme ji určit pouze narýsováním.

Vypočítat délku nejkratší sítě můžeme u zvláštního případu, kterým je obdélník, u něhož porovnáme jeho strany a , b a vypočteme pomocí výšky v trojúhelníku (obr. 24). Je-li $s_1 = |a + b \cdot \sqrt{3}|$ a $s_2 = |b + a \cdot \sqrt{3}|$ a předpokládáme, že $s_1 < s_2$, pak

$$|a + b \cdot \sqrt{3}| < |b + a \cdot \sqrt{3}|.$$

Výraz vytkneme

$$a \cdot (1 - \sqrt{3}) < b \cdot (1 - \sqrt{3})$$

a po úpravě dostaneme

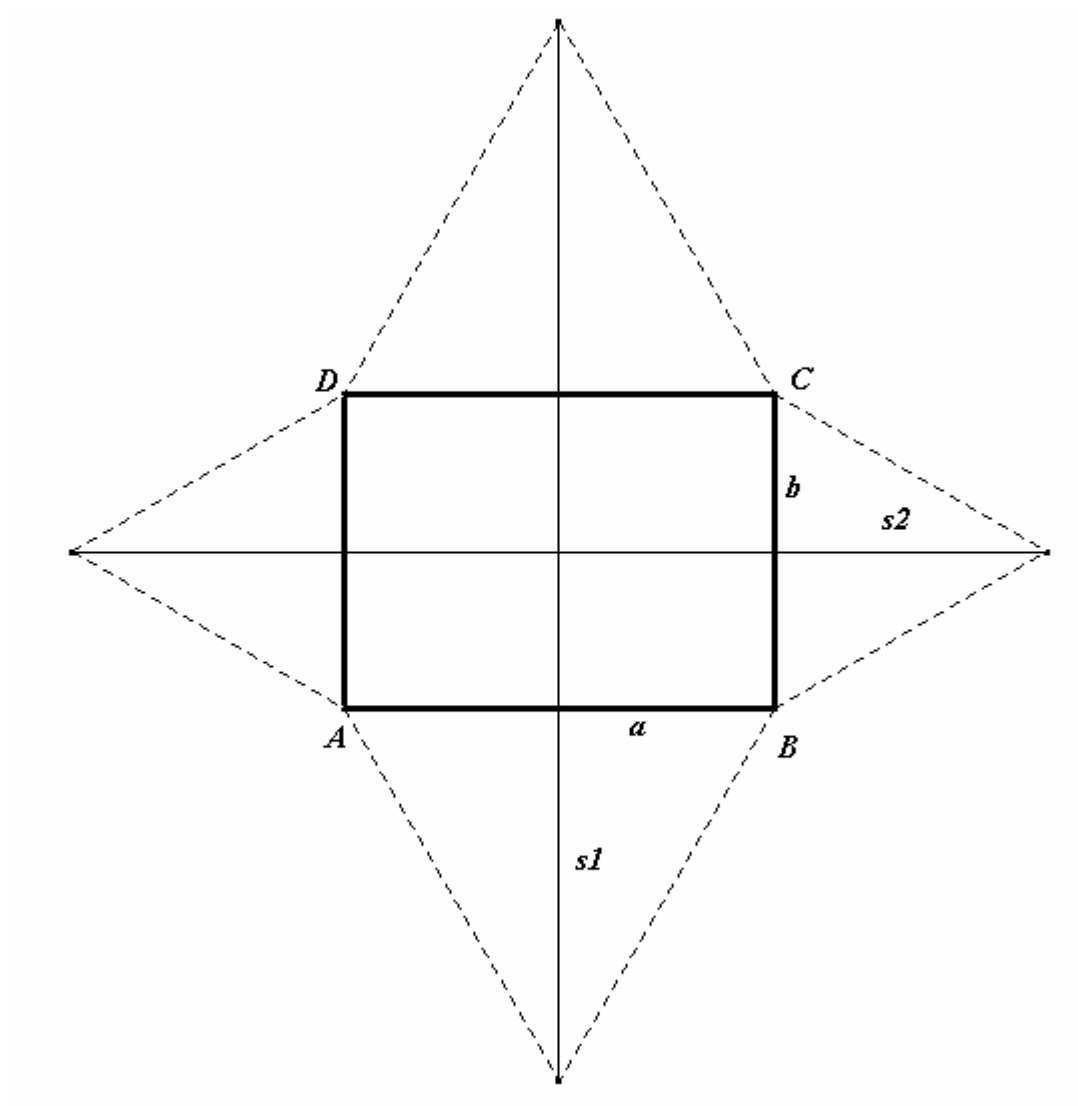
$$a > b.$$

Z toho plyne: je-li a větší než b je délka nejkratší sítě s_1 , tedy vypočítáme ji vztahem $|a + b \cdot \sqrt{3}|$.

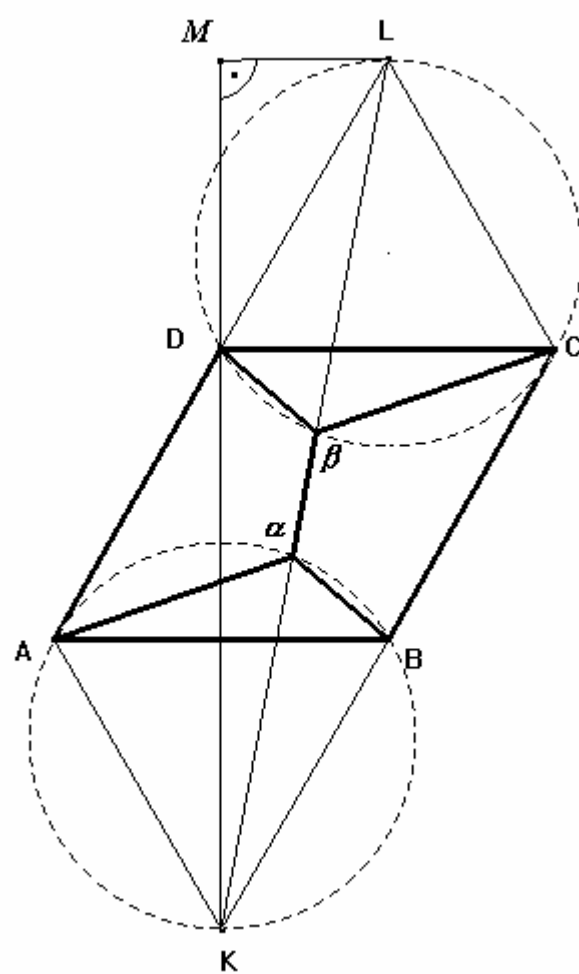
Dalším zvláštním případem je kosočtverec s úhly 60° a 120° . Postup konstrukce je stejný jako u komplexního čtyřúhelníku. Víme, že délka nejkratší sítě je podle vztahu (14) stejná jako délka úsečky KL (obr. 25) a pro výpočet použijeme Pythagorovu větu.

$$\text{Je-li } |KM| = 3 \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \text{ a } |ML| = \frac{a}{2}, \text{ pak } |KL| = \sqrt{3 \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{a \cdot (3 \cdot \sqrt{3} + 1)}.$$

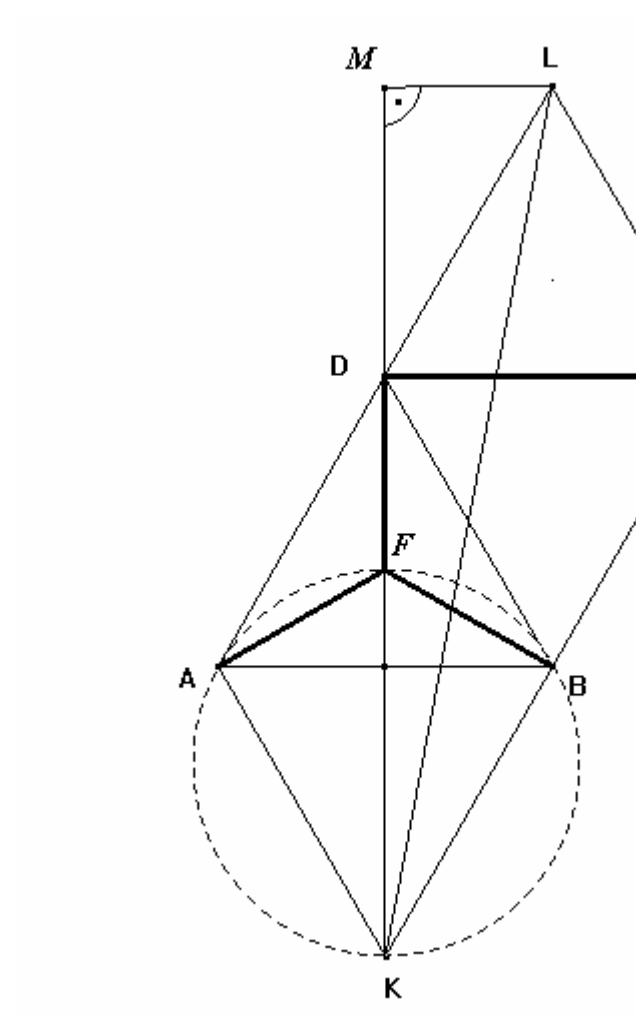
Tímto případem se zabýval i Courant ve své knize [2], ten ovšem řešil tento problém trochu jinak. Postupoval tak, že rozdělil tento kosočtverec na dva rovnostranné trojúhelníky ABD a BCD (obr. 26). Poté v trojúhelníku ABD hledal Fermatův bod a v trojúhelníku BCD spojil pouze body C a D . Tím délku nejkratší sítě určil jako $|AF| + |BF| + |DF| + |DC|$. Nahradíme-li však délku vzdáleností $|AF| + |BF| + |DF|$ úsečkou $|DK|$, dostaneme $|DK| + |DC|$ a po dosazení do tohoto vztahu nám vychází délka sítě $s = 2 \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}\right) + a = a \cdot (1 + \sqrt{3})$. Jasně vidíme, že délka této sítě je delší než délka úsečky $|ML|$, tudíž se nejedná o nejkratší síť. Závěry Couranta tím byly chybné.



Obr. 24



Obr. 25



Obr. 26

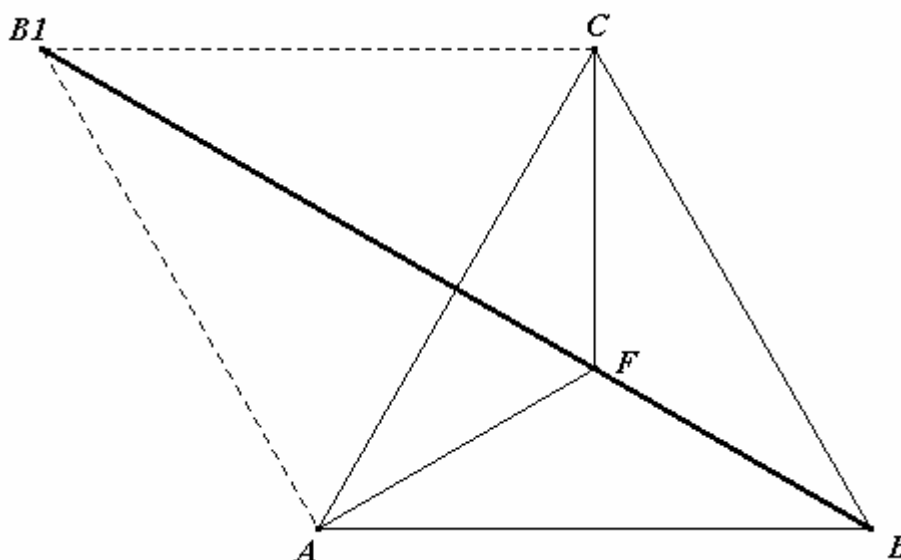
7. Řešení pro pravidelné n -úhelníky

7.1 Rovnostranný trojúhelník

Rovnostranný trojúhelník je speciální případ, pro který platí stejná pravidla pro hledání nejkratší sítě. Postupujeme stejně jako u obecného trojúhelníku. Můžeme provést konstrukci nebo použít kosinovou větu pro výpočet nejkratší sítě. Také však lze využít vlastnosti tohoto trojúhelníku a použít pro výpočet větu o výšce v rovnostranném trojúhelníku.

Příklad:

Hledáme nejkratší síť rovnostranného trojúhelníku o délce strany a (obr. 27).



Obr. 27

Řešení pomocí kosinové věty:

$$s_{\min} = |BB_1| = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha + 60^\circ)}$$

Úhel známe, protože víme, že v rovnostranném trojúhelníku jsou všechny úhly stejné a jsou rovny 60° .

$$s_{\min} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(60^\circ + 60^\circ)}$$

Po úpravě dostaneme

$$s_{\min} = a \cdot \sqrt{3}.$$

Řešení pomocí věty o výšce:

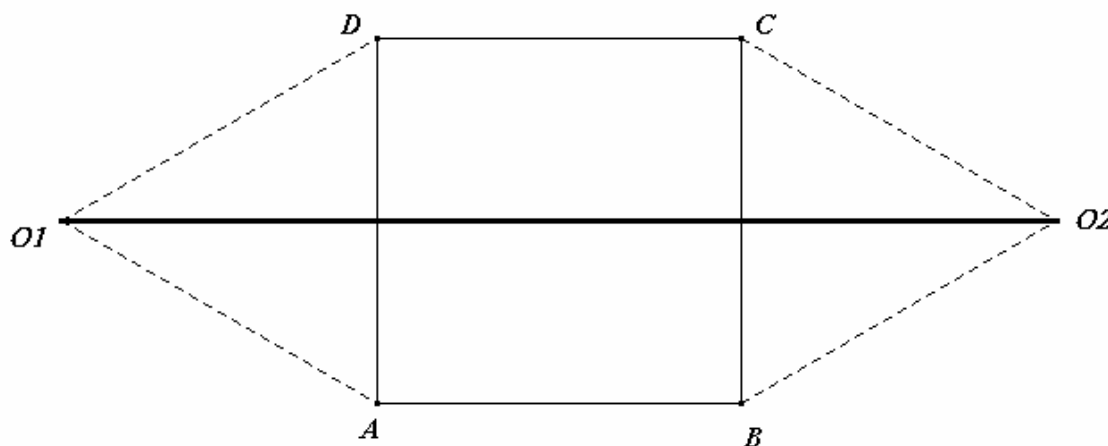
$$s_{\min} = |BB_1| = 2 \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} \right) = a \cdot \sqrt{3}$$

7.2 Čtverec

Čtverec je speciální případ čtyřúhelníku, pro který platí stejná pravidla pro hledání nejkratší sítě. Můžeme provést konstrukci nebo vypočítat pomocí věty o výšce v trojúhelníku.

Příklad:

Hledáme nejkratší síť čtverce o délce strany a (obr. 28).



Obr. 28

Řešení:

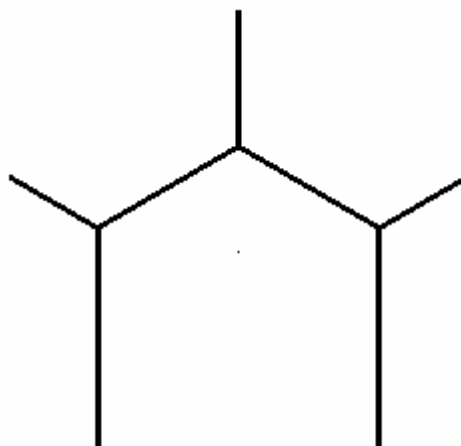
$$s_{\min} = |O_1O_2| = \left| a + 2 \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} \right) \right|$$

Po úpravě

$$s_{\min} = a \cdot (1 + \sqrt{3})$$

7.3 Pravidelný pětiúhelník

Úhly jsou menší než 120° a z každého vrcholu vychází právě jedna úsečka a podle vztahu (13) vypočteme $v = u_1 - u_3 - 2 = 3$. V úvahu přichází jediná varianta řešení (obr. 29).

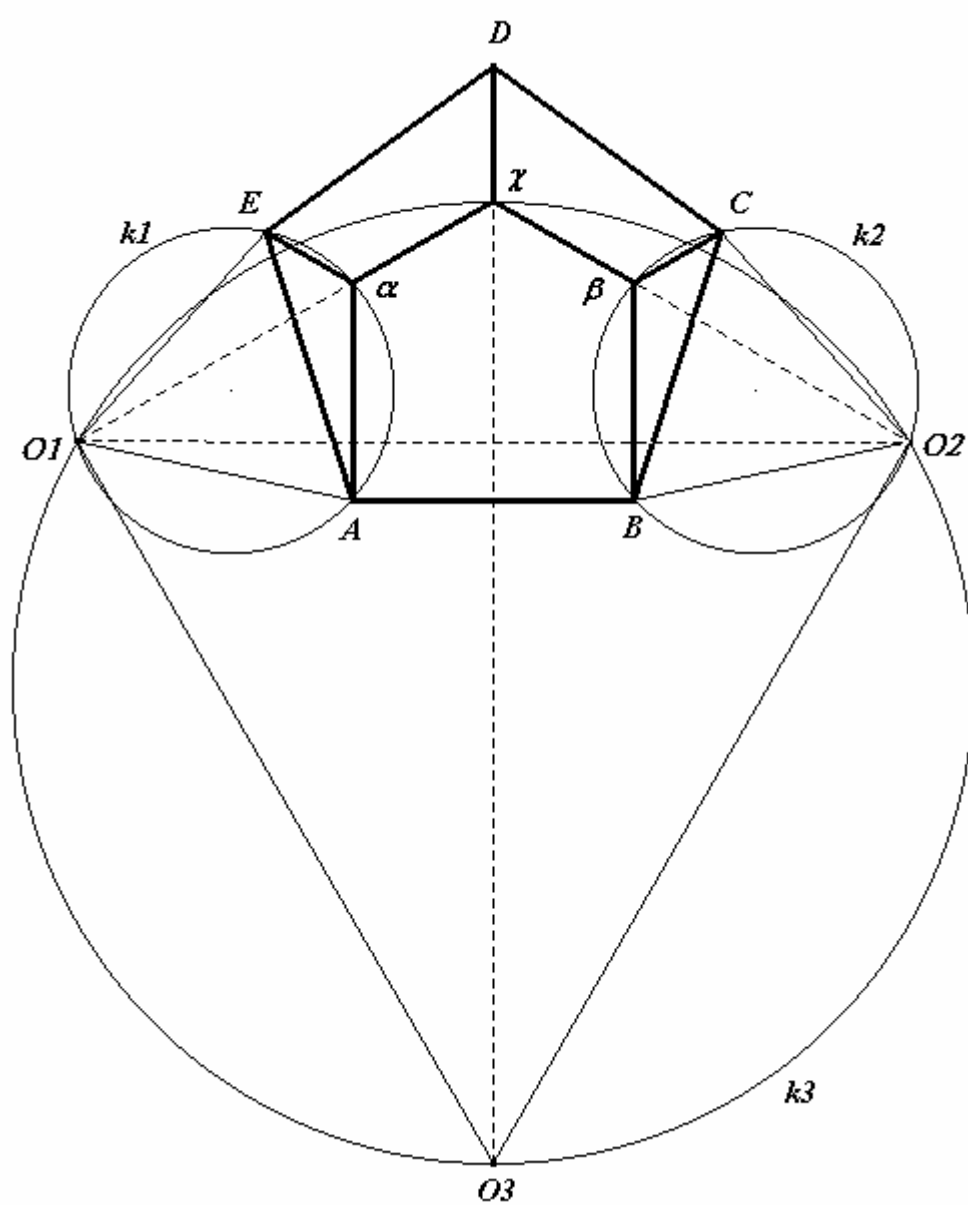


Obr. 29

Uvažujeme-li pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, sestrojíme nad úsečkami AE , BC (obr. 30) rovnostranné trojúhelníky $EA O_1$, $BC O_2$. Těmto trojúhelníkům opišeme kružnice k_1 , k_2 . Pod úsečkou $O_1 O_2$ sestrojíme opět rovnostranný trojúhelník $O_1 O_2 O_3$. Tomuto trojúhelníku opišeme kružnici k_3 a spojíme O_3 a D . Průsečík kružnice k_3 a přímky $O_3 D$ je bod χ . Poté spojíme body χ a O_1 , χ a O_2 . Průsečík kružnice k_1 a přímky $O_1 \chi$ je bod α . Průsečík kružnice k_2 a přímky $O_2 \chi$ je bod β . Délka sítě je

$$|A\alpha| + |\alpha E| + |\alpha\chi| + |B\beta| + |\beta C| + |\beta\chi| + |\chi D|. \quad (15)$$

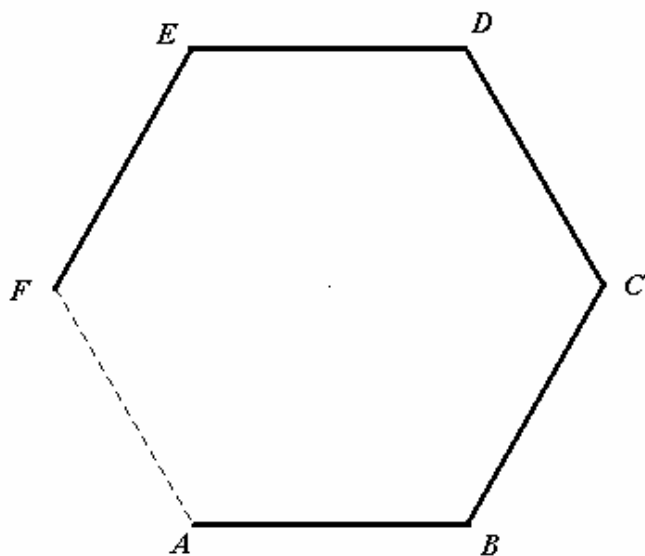
Součet délek $|A\alpha| + |\alpha E| + |\alpha\chi|$ je roven délce přímky $|O_1 \chi|$ a součet délek $|B\chi| + |\beta C| + |\beta\chi|$ je roven délce přímky $|O_2 \chi|$. Odtud dostaneme součet délek $|O_1 \chi| + |O_2 \chi| + |\chi D|$, které jsou rovny délce přímky $|O_3 D|$. Další možnosti vzniknou pouze otočením.



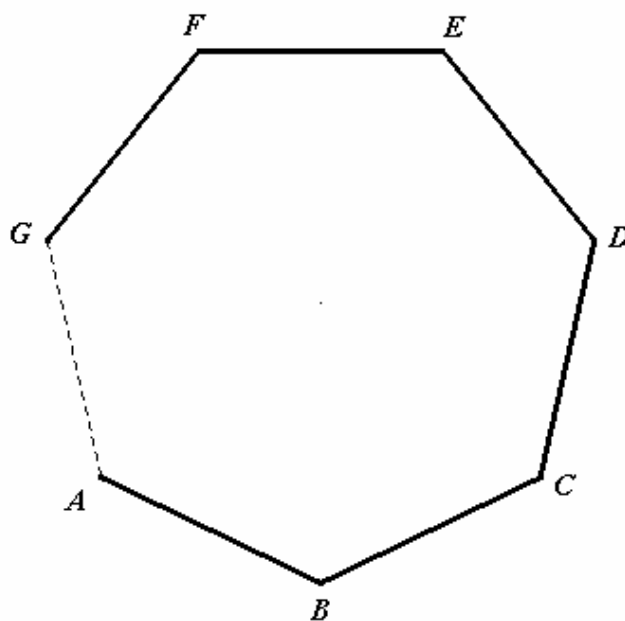
Obr. 30

7.4 Pravidelný šestiúhelník

V pravidelném 6-úhelníku svírají každé dvě strany 120° . Proto podle bodu h) na str. 28 nevznikne žádná vidlice. Řešení je na obrázku 31. Stejné řešení bude pro každý pravidelný n -úhelník, kde $n \geq 6$. Na obrázku 32 si ukážeme řešení pro pravidelný sedmiúhelník.



Obr. 31



Obr. 32

Seznam literatury:

- [1] Abakumov, E., Ižboldin, O., Kudrjančik, L., Necvĕtajev, H.: Kratĕajšie seti, *Kvant* 1990, str. 17-24, Moskva: Nauka, 1990
- [2] Courant, R., Robbins, H.: *What is Mathematics?, An elementary approach to ideas and methods*, Oxford University Press, New York: Oxford, 1996
- [3] Hejný, M. a kol.: *Teória vyuĕovania matematiky 2*, Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990
- [4] Leischner, P.: Ptolemaiova nerovnosť. *Matematika – fyzika – informatika*, roĕ. 17 (zatím nepublikováno, pripravuje se pro tisk)
- [5] Neĕas, J.: *Grafy a jejich pouŕití*, Praha, Nakladatelství technické literatury, Praha, 1978
- [6] <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html>
- [7] http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat_point.shtml
- [8] http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point