

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Obyčejné diferenciální rovnice a jejich aplikace

Knihovna JU - PF



Vedoucí diplomové práce:

Mgr. Hana Štěpánková, Ph.D.

Autor:

Soňa Nováková

2006

ABSTRACT

Diplomová práce obsahuje řešení úloh z oboru obyčejných diferenciálních rovnic a jejich aplikací. Práce je rozdělena do dvou částí. První část obsahuje řešení úloh z oboru obyčejných diferenciálních rovnic a jejich aplikací. Druhá část obsahuje řešení úloh z oboru obyčejných diferenciálních rovnic a jejich aplikací.

ANNOTATION

Tato diplomová práce obsahuje řešení úloh z oboru obyčejných diferenciálních rovnic a jejich aplikací. Práce je rozdělena do dvou částí. První část obsahuje řešení úloh z oboru obyčejných diferenciálních rovnic a jejich aplikací. Druhá část obsahuje řešení úloh z oboru obyčejných diferenciálních rovnic a jejich aplikací.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma: "Obyčejné diferenciální rovnice a jejich aplikace" vypracovala samostatně na základě vlastních zjištění a materiálů, které uvádím v seznamu literatury.

V Dražicích, 20. dubna 2006



ANOTACE

Diplomová práce obsahuje přehled základních pojmů z teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Vybrané příklady jsou ukázkově zpracovány a jsou zde typy příkladů z matematiky, mechaniky a fyziky, kde se diferenciálních rovnic užívá.

ANNOTATION

Thesis includes some summary of basic ideas in theory of general differential equations. There are worked some chosen examples and types of examples used in mathematics, mechanics and physics where are differential equations used.

POSLEDNÍ

1. ÚVOD

1.1. OBECNÉ INFORMACE O VYSOKOŠKOLSKÉM STUDIUM

1.1.1. Všeobecné informace o vysoké škole

1.1.2. Informace o studiu

1.1.3. Informace o studijním programu

1.1.4. Informace o studijních předmětech

1.1.5. Informace o studijních výsledcích

1.1.6. Informace o studijních podmínkách

1.1.7. Informace o studijních oporách

2. VÝVOJ VÝUKY V VYSOKÉ ŠKOLE

2.1. Všeobecné informace o výuce

2.1.1. Všeobecné informace o výuce v rámci studijního programu

2.1.2. Všeobecné informace o výuce v rámci studijního předmětu

2.1.3. Všeobecné informace o výuce v rámci studijního předmětu

2.1.4. Všeobecné informace o výuce

2.1.5. Všeobecné informace o výuce

2.1.6. Všeobecné informace o výuce

2.1.7. Všeobecné informace o výuce

Ráda bych tímto poděkovala Mgr. Haně Štěpánkové, Ph.D. za metodické vedení, odbornou pomoc, cenné a věcné připomínky, rady a náměty, kterých se mi od ní dostalo v průběhu zpracování této diplomové práce.

Dále bych chtěla touto cestou poděkovat rodině za všestrannou podporu poskytovanou po celou dobu mého vysokoškolského studia.

OBSAH:

1. ÚVOD	1
2. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU	2
2.1. SEPAROVATELNÁ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE	2
2.2. HOMOGENNÍ ROVNICE	11
2.3. LINEÁRNÍ DIF. ROVNICE 1. ŘÁDU	22
2.4. BERNOULLIOVA ROVNICE	31
2.5. RICATTIOVA ROVNICE	33
2.6. CLAIRAUTOVA ROVNICE	35
2.7. LAGRANGEOVA ROVNICE	37
3. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU	43
3.1. VLASTNOSTI LINEÁRNÍCH DIF. ROVNIC 2.ŘÁDU	44
3.2. LINEÁRNÍ DIF. ROVNICE 2. ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY BEZ PRAVÉ STRANY	45
3.3. LINEÁRNÍ DIF. ROVNICE 2. ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY S PRAVOU STRANOU	49
4. APLIKAČNÍ ÚLOHY	60
5. ZÁVĚR	75
LITERATURA:	76

1. ÚVOD

Cílem této práce je seznámit čtenáře s problematikou diferenciálních rovnic a jejich uplatnění v různých oborech. Předpokládáme, že čtenář již zná pojmy, které se týkají derivací a integrálů.

Diplomová práce je rozdělena do tří kapitol, které jsou dále děleny do několika podkapitol. Každá podkapitola obsahuje řešený vzorový příklad a úlohy k samostatnému procvičení s výsledky. Pro lepší názornost příkladů jsou zde uvedeny i některé obrázky.

V první kapitole jsou přiblíženy obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu. Nalezneme v ní teorii a návod k řešení jednoduchých diferenciálních rovnic, např. separovatelnou, ale samozřejmě i složitější např. homogenní, lineární, Bernoulliovu, Ricattiovu, Clairautovu a Lagrangeovu diferenciální rovnici.

Řešení obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu je popisováno v kapitole druhé. V této části je možné nalézt vlastnosti rovnic, metodiku a řešení rovnic s konstantními koeficienty s pravou a bez pravé strany.

Poslední kapitola je věnována užití diferenciálních rovnic v praxi. Je zde uvedeno několik příkladů pro řešení problémů v geometrii, mechanice a fyzice. Pro přehlednost jsou zopakovány věty z fyziky a geometrie, které používám.

2. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

Obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu rozumíme rovnici ve tvaru:

$$F(x, y, y') = 0, \quad (*)$$

kde F je reálná funkce tří proměnných, definovaná v nějaké oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$.

Řešením rovnice $F(x, y, y') = 0$ rozumíme funkci $h: y = h(x)$, která má derivaci v jistém intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a pro kterou platí:

$$[x, h(x), h'(x)] \in G \text{ a } F(x, h(x), h'(x)) = 0 \text{ pro každé } x \in I.$$

Někdy lze rovnici (*) vyjádřit ve tvaru:

$$y' = f(x, y)$$

Obdobně řešením této rovnice rozumíme funkci $h: y = h(x)$, která je diferencovatelná v nějakém intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a pro kterou platí:

$$\begin{aligned} [x, h(x)] &\in H, \\ h'(x) &= f(x, h(x)) \text{ pro každé } x \in I \end{aligned}$$

dodatek:

- 1) Necht' $[x_0, y_0]$ je libovolný bod v G (z def. fce f). Úloha určit řešení rovnice (*) splňující počáteční podmínku

$$h(x_0) = y_0 \quad (**)$$

se nazývá počáteční úloha (či počáteční problém).

- 2) Obecným řešením rovnice (*) budeme rozumět funkci záviselou na jedné konstantě (parametru) C takovou, že speciální volbou C lze získat řešení každé počáteční úlohy (*), (**).
- 3) Graf řešení rovnice (*) nazveme integrální křivkou.

2.1. SEPAROVATELNÁ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Separovatelná dif. rovnice má tvar

$$y' = f(x) \cdot g(y) \text{ nebo } g(y) \cdot y' = f(x)$$

(kde f, g jsou zadané funkce).

Jedná se o dif. rovnici 1. řádu speciálního tvaru, kde na pravé straně je oddělen (separován) výraz obsahující pouze symbol x od výrazu obsahujícího pouze symbol y a to součinem. Takovými rovnicemi jsou například také

$$y' = y, (y' = 1 \cdot y) \text{ nebo } y' = \frac{x}{y}, \left(y' = x \cdot \frac{1}{y} \right).$$

Separovatelné rovnice řešíme speciálním postupem (řešení má 1 volitelnou konstantu C).

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

Přepsání y' na podíl diferenciálů umožní další manipulace. Obě strany rovnice násobíme symbolem dx a dělíme funkcí $g(y)$

$$\frac{1}{g(y)} \cdot dy = f(x) \cdot dx,$$

nyní obě strany rovnice integrujeme

$$\int \frac{1}{g(y)} \cdot dy = \int f(x) \cdot dx$$

a pak přistoupíme k získání primitivních funkcí

$$G(y) + C_1 = F(x) + C_2$$

Dále položíme $C = C_2 - C_1$ a dostáváme $G(y) = F(x) + C$. Pokud nejsme schopni z poslední rovnice vyjádřit y , ponecháme výsledek v tomto tzv. implicitním tvaru.

Poznámka:

Můžeme se setkat se zadáním dif. rovnice v tzv., diferenciálním tvaru“, např. $dy - x^2 \cdot dx = 0$ je jen upravený zápis rovnice $y' = x^2$, kde byla derivace nahrazena podílem diferenciálů a rovnice upravena.

Příklad 1

Najděte všechna řešení rovnice $2yy' - 4x^3 = 0$.

Řešení:

$$\int 2y \, dy - \int 4x^3 \, dx = C,$$

$$y^2 = x^4 + C.$$

Protože $g(y) \neq 0$ pro $y \neq 0$, je pro tato y určeno poslední rovnicí řešení diferenciální rovnice implicitně.

Bodem $[0,0]$ procházejí řešení a to $h_1 : y = x^2$, $h_2 : y = -x^2$ (pokud $C = 0$). Ostatními body přímky $y = 0$ neprochází žádné řešení. Integrální křivky leží vždy v horní nebo dolní polorovině s hraniční přímkou $y = 0$.

Příklad 2

Řešte dif. rovnici $(x-1)y^3 - e^x y' = 0$.

Řešení:

$$(x-1)y^3 = e^x \frac{dy}{dx}.$$

Separací proměnných dostáváme:

$$\frac{x-1}{e^x} dx = \frac{dy}{y^3} \quad \text{pro } y \neq 0$$

integrujeme

$$\int \frac{x-1}{e^x} dx = \int \frac{dy}{y^3} + C,$$

$$\int x e^{-x} dx - \int e^{-x} dx = y^{-3} dy + C,$$

$$-x e^{-x} - e^{-x} + e^{-x} = -\frac{1}{2y^2} + C,$$

upravíme

$$(1) \quad \frac{e^x}{C e^x + x} = 2y^2.$$

Rovnice (1) určuje řešení implicitně pro $y \neq 0$. Funkce $y = 0$ také vyhovuje původní diferenciální rovnici a popisuje tedy její singulární řešení.

Příklad 3

Řešte diferenciální rovnici $y' \cos^2 x = (1 + \cos^2 x) \sqrt{1 - y^2}$.

Řešení:

$$\frac{dy}{dx} \cos^2 x = (1 + \cos^2 x) \sqrt{1 - y^2},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx,$$

pro $y \in (-1, 1)$, $x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$.

Integrujeme:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx + C,$$

$$\arcsin y = \operatorname{tg} x + x + C,$$

$$y = \sin (\operatorname{tg} x + x + C).$$

Dostáváme obecné řešení dané rovnice. Navíc singulární řešení původní rovnice jsou funkce $y = 1$, $y = -1$.

Příklad 4

Najděte obecné řešení a posléze i partikulární řešení separovatelné diferenciální

rovnice se zadanou počáteční podmínkou. $y' = \frac{x^2}{2y}$ $y(3) = -2$.

Řešení:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2y},$$

$$2y \, dy = x^2 \, dx,$$

$$\int 2y \, dy = \int x^2 \, dx,$$

$$y^2 + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_2,$$

obecné řešení v implicitním tvaru

$$y^2 = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

explicitní vyjádření

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{3} + C} \quad \text{nebo} \quad y = -\sqrt{\frac{x^3}{3} + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ze všech těchto řešení musíme vybrat takové, aby splňovalo počáteční podmínku.

Tedy:

$$y(3) = -2 \Leftrightarrow \frac{3^3}{3} + C = 4,$$

$$C = -5.$$

Hledané partikulární řešení má implicitní tvar

$$y^2 = \frac{x^3}{3} - 5.$$

Jako explicitní vyjádření pak vyhovuje funkce

$$y = -\sqrt{\frac{x^3}{3} - 5} \quad \text{na intervalu } (\sqrt[3]{15}, \infty).$$

Příklad 5

Jestliže nějaké těleso má teplotu větší, než je teplota jeho okolí, začne se ochlazovat. Rychlost ochlazování tělesa na vzduchu je úměrná rozdílu mezi teplotou tělesa a teplotou vzduchu. Necht' teplota vzduchu je 20 °C. Empiricky bylo zjištěno, že během 20 minut se těleso ochladilo ze 100 °C na 60 °C. Určete zákon změny teploty tělesa v závislosti na čase.

Necht' $y(t)$ značí teplotu tělesa v okamžiku t ($t > 0$). Potom rychlost ochlazování tělesa neboli rychlost, jakou se mění jeho teplota, bude rovna derivaci $\frac{dy}{dt}$. Podle podmínky

vyslovené v úloze platí:

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 20),$$

kde k je součinitel úměrnosti. Přitom podle smyslu úlohy je $y > 20$. Separací proměnných dostaneme rovnici

$$\frac{dy}{y-20} = k dt,$$

a po provedení integrace dostaneme

$$\ln(y-20) = kt + \ln c,$$

$$y-20 = ce^{kt},$$

odtud

$$(2) \quad y = 20 + ce^{kt}.$$

Abychom určili konstanty k a c , použijeme podmínek vyslovených v úloze

$$y(0) = 100, y(20) = 60,$$

dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice, dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých c a k

$$20 + c = 100,$$

$$20 + ce^{20k} = 60,$$

odtud

$$c = 80,$$

$$(ce^{20k} = \frac{1}{2}),$$

$$e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Dosaďme nyní do obecného řešení (2) hodnoty vypočtených konstant

$$y = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

to je hledaný zákon změny teploty y tělesa v závislosti na čase t za podmínek daných v úloze.

Na rovnice se separovanými proměnnými lze převést rovnice tvaru

$$y' = f(ax + by + c),$$

kde f je funkce, a , b , c jsou konstanty.

Rozlišme dva případy:

1) $b = 0$ tj. $y' = f(ax + c)$,

pak

$$dy = f(ax + c)dx,$$

$$y = \int f(ax + c) dx + C.$$

2) $b \neq 0$

V tomto případě užijeme vhodné transformace

$$z = ax + by + c,$$

pak

$$y = \frac{1}{b}(z - ax - c),$$

$$y' = \frac{1}{b}(z' - a).$$

Po dosazení do původní rovnice dostáváme

$$\frac{1}{b}(z' - a) = f(z),$$

$$z' = a + bf(z),$$

což je rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci z . Po vyřešení této rovnice dosadíme za $z = ax + by + c$ a vypočítáme neznámou funkci y . Dostaneme tak řešení původní rovnice.

Příklad 6

Řešte rovnici $y' = (x + y)^2$.

Tato rovnice odpovídá výše popsanému typu rovnice, kde $a = 1$, $b = 1$ a $c = 0$.

Substituce $z = x + y$. Pak $y = z - x$ a $y' = z' - 1$.

Dosadíme do původní rovnice

$$z' - 1 = z^2,$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1,$$

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int dx + C,$$

$$\operatorname{arctg} z = x + C,$$

$$z = \operatorname{tg}(x + C),$$

po dosazení za $z = x + y$ dostaneme

$$y = \operatorname{tg}(x + C) - x.$$

Příklad 7

Řešte rovnici $y' = \frac{x - y + 1}{x - y}$.

Využijeme substituce. Pak $y = x - z$ a $y' = 1 - z'$.

po dosazení

$$1 - z' = \frac{1 + z}{z},$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z},$$

$$\int z dz = -\int dx + C,$$

$$\frac{z^2}{2} = -x + C,$$

$$z^2 + 2x = C.$$

Po navrácení k původní neznámé dostaneme řešení dané rovnice v implicitním tvaru

$$(x - y)^2 + 2x = C.$$

CVIČENÍ

Najděte obecné řešení separovatelných diferenciálních rovnic (alespoň v implicitním tvaru).

a) $y' = x^3 y^4$

$$\left[-\frac{1}{3y^3} = \frac{x^4}{4} + C \right]$$

b) $y' = \sqrt{y}$

$$[2\sqrt{y} = x + C]$$

c) $y' = x e^y$

$$[-e^{-y} = \frac{x^2}{2} + C]$$

d) $y' = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$$\left[\frac{\sin y \cos y}{2} + \frac{y}{2} = -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + C \right]$$

e) $y' = e^{x+y}$

$$[-e^{-y} = e^x + C]$$

f) $e^{x+2y} dx = e^{2x-1} dy$

$$\left[-\frac{1}{2} e^{-2y} = -e^{-x+1} + C \right]$$

$$g) y^4 e^{2x} dx + dy = 0$$

$$\left[-\frac{1}{3y^3} = \frac{1}{2} e^{2x} \right]$$

$$h) y' = \frac{y^2 + 4y + 3}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y+1}{y+3} \right| = \frac{-1}{x+1} + C \right]$$

$$i) e^y \sin x dx - \cos^2 x dy = 0$$

$$\left[-e^{-y} = \frac{1}{\cos x} + C \right]$$

$$j) x^2 y' - yx^2 = 0$$

$$[y = Ce^x]$$

Najděte partikulární řešení zadaných diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou.

$$a) y' = \frac{x^2}{y}, y(3) = 1$$

$$\left[\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} - \frac{17}{2} \right]$$

$$b) y' \sqrt{x} = x\sqrt{y} + \sqrt{y}, y(9) = 4$$

$$[2\sqrt{y} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} - 20]$$

$$c) x dy + y dx = 0, y(e) = 1$$

$$[\ln|y| = 1 - \ln|x|]$$

$$d) y' = \ln x, y(1) = 3$$

$$[y = x \ln x - x + 4]$$

$$e) \frac{d^2 y}{dt^2} = 6s + 6t, y(3) = s, y'(3) = 6$$

$$[y = t^3 + 3st^2 - 18st - 21t + 28s + 36]$$

$$f) \frac{d^2 y}{ds^2} = 25e^{5s}, y(0) = 4, y'(0) = -2$$

$$[y = e^{5x} - 7x + 3]$$

$$g) \frac{dy}{x} = \frac{dx}{y}, y(2) = 10$$

$$[y^2 = x^2 + 96]$$

$$h) y'' = \sqrt{x}, y(1) = 1, y(4) = 8$$

$$[y = \frac{4}{15} x^{\frac{5}{2}} - \frac{19}{45} x + \frac{52}{45}]$$

Separaci proměnných určete obecné řešení rovnic.

$$a) \frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C]$$

$$b) y'tgx - y = 2$$

$$[y = C \sin x - a]$$

$$c) 2st^2 ds = (1 + t^2) dt$$

$$[s = \sqrt{t + C - \frac{1}{t}}]$$

$$d) \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{y}{y^2 - 1} y' = 0$$

$$[x^2 + \ln x^2 + \ln|y^2 - 1| = C]$$

$$e) \frac{x^2}{x^3 + 5} + \frac{y^2}{y^3 + 3} = 0$$

$$[(x^3 + 5)(y^3 + 3) = C]$$

Určete obecné řešení diferenciálních rovnic.

$$a) y' = 3x - 2y + 5$$

$$[6x - 4y + 7 - Ce^{-2x} = 0]$$

$$b) y' = \cos(x - y)$$

$$[x + \cotg \frac{x - y}{2} = C]$$

$$c) y' = \sin(x - y)$$

$$[\cotg(\frac{y - x}{2} + \frac{\pi}{4}) - x = C]$$

$$d) y' = \frac{2}{x + 2y} - 3$$

$$[30x + 10y + 4 \ln 5x + 10y - 4 = C]$$

$$e) (x + y)^2 y' = 4$$

$$[2 \arctg \frac{x + y}{2} - y = C]$$

$$f) y' = 3^{3x+2y}$$

$$[3 \cdot 3^{2y} + 2 \cdot 3^{3x} = C]$$

$$g) y' = \frac{1}{x + 2y}$$

$$[(x + 2y + 2)^2 - Ce^{2y} = 0]$$

$$h) y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

$$[-5x + 10y + 7 \ln |10x + 5y + 9| = C]$$

2.2. HOMOGENNÍ ROVNICE

Homogenní diferenciální rovnici nazýváme diferenciální rovnici, která se dá převést na tvar $y' = f(y/x)$. To je možné u rovnic tvaru $y' = g(x, y)$, kde funkce g je homogenní funkcí nultého stupně, tj. platí $g(tx, ty) = g(x, y)$ pro každé číslo $t \neq 0$.

Například funkce

$$g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

je homogenní stupně nula, protože pro každé $t \neq 0$ je

$$g(tx, ty) = \frac{t^2 xy}{t^2 (x^2 + y^2)} = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Jestliže do vztahu $g(tx, ty) = g(x, y)$ dosadíme $t = 1/x$, dostaneme $g(x, y) = g(1, y/x) = f(y/x)$.

Např. rovnici

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

můžeme psát ve tvaru

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Homogenní rovnice řešíme zavedením nové neznámé funkce $z = z(x)$ vztahem $z = y/x$, takže $y = zx$. Odtud $y' = z'x + z$ ($z' = dz/dx$). Po dosazení do rovnice $y' = f(y/x)$ dostáváme

$$z'x + z = f(z),$$

odtud

$$z' = \frac{f(z) - z}{x},$$

což je rovnice se separovatelnými proměnnými a platí

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x}.$$

Poznámka:

Je-li $f(z) - z = 0$ pro každé z , má rovnice obecné řešení $y = Cx$, kde $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$. Bude-li diferenciální rovnice psána ve tvaru

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

bude homogenní dif. rovnicí tehdy, budou-li $P(x, y)$, $Q(x, y)$ homogenní funkce téhož stupně.

Příklad 8

Řešte rovnici $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$

Pro každé $x \neq 0$ ji můžeme psát ve tvaru

$$y' = \frac{2 \frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Substitucí $y/x = z$, tj. $y = zx$, přejdeme na rovnici

$$z'x + z = \frac{2z}{1 - z^2},$$

odtud

$$z'x = \frac{z + z^3}{1 - z^2},$$

$$\frac{(1 - z^2)dz}{z(1 + z^2)} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{(1 - z^2)dz}{z(1 + z^2)} = \int \frac{dx}{x}.$$

Integrál na levé straně vypočteme rozkladem integrované funkce na parciální zlomky

$$\frac{1 - z^2}{z(1 + z^2)} = \frac{1}{z} - \frac{2z}{1 + z^2},$$

integrací dostaneme

$$\ln|z| - \ln(1 + z^2) = \ln|x| + \ln|c|,$$

$$\ln\left|\frac{z}{1 + z^2}\right| = \ln|cx|,$$

$$\frac{z}{1 + z^2} = cx.$$

Dosadíme zpět $z = y/x$ a po úpravě máme

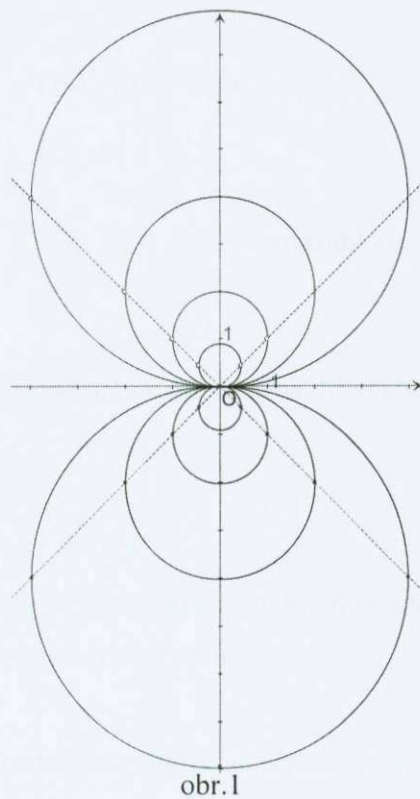
$$x^2 + y^2 - 2Cy = 0,$$

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2,$$

při úpravě jsme označili $1/c = 2C$.

Řešení $z = 0$ dává $y/x = 0$, tj. $y = 0$.

Uvážíme-li, že funkce na pravé straně dané diferenciální rovnice není definována na přímkách $y = x$ a $y = -x$, vidíme, že integraálními křivkami jsou kružnice se středem na ose y dotýkající se osy x , z nichž jsou vyňaty jejich průsečíky s přímkami $y = x$ a $y = -x$, a osa x s výjimkou počátku. (viz obr.1)



Příklad 9

Řešte dif. rovnici $(y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0$ a popište průběh jejích řešení.

$P(x, y) = y^2 - x^2$, $Q(x, y) = -2xy$, obě funkce jsou homogenní druhého stupně, proto je daná rovnice homogenní. Můžeme ji psát ve tvaru

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}} \quad \text{pro } xy \neq 0.$$

Provedeme substituci $z = \frac{y}{x}$ a po úpravě dostáváme

$$z'x + z = \frac{z^2 - 1}{2z},$$

$$\frac{dz}{dx}x = -\frac{z^2 + 1}{2z},$$

$$\frac{2zdz}{z^2 + 1} = -\frac{dx}{x}.$$

Po integraci

$$\ln(z^2 + 1) = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$(z^2 + 1)|x| = |C|,$$

$$\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)x = \pm C, \text{ nemusíme psát } \pm \text{ neboť } C \in \mathbb{R}$$

$$y^2 + x^2 = \pm Cx.$$

Poslední rovnici, která implicitně určuje řešení dané diferenciální rovnice, můžeme ještě upravit

$$\left(x \mp \frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2.$$

Je tedy vidět, že integrální křivky tvoří soustavu kružnic, které mají středy na ose x a dotýkají se osy y v počátku soustavy souřadnic.

Na rovnice homogenní případně na rovnice se separovanými proměnnými lze převést rovnice tvaru

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right),$$

kde f je daná funkce, a, b, c, A, B, C jsou konstanty.

Rozlišujeme dva případy:

$$1) \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$$

$$2) \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{tj. } aB - Ab \neq 0$$

První případ nastane:

$$a) \quad a = A = 0$$

$$b) \quad a = b = 0$$

$$c) \quad A = B = 0$$

d) $b = B = 0$

e) $a = kA, b = kB, k \neq 0$

f) $b = ka, B = kA, k \neq 0$

Pro $a = A = 0$ jde o rovnici $y' = f\left(\frac{by + c}{By + C}\right)$, což je rovnice se separovanými proměnnými

Pro $a = b = 0$ je $y' = f\left(\frac{C}{Ax + By + C}\right)$, volíme substituci $z = Ax + By$.

Pro $A = B = 0$ je $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{C}\right)$.

Pro $b = B = 0$ je $y' = f\left(\frac{ax + c}{Ax + C}\right)$, což je rovnice se separovanými proměnnými.

Pro $a = kA, b = kB, k \neq 0$ je $y' = f\left(\frac{kAx + kBy + c}{Ax + By + C}\right)$, volíme substituci $z = Ax + By$.

Pro $b = ka, B = kA, k \neq 0$ je $y' = f\left(\frac{ax + kay + c}{Ax + kAy + C}\right)$, volíme substituci $z = x + ky$.

Ve druhém případě má soustava lineárních algebraických rovnic

$$ax + by + c = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

jediné řešení $[m, n]$. Pak volíme záměnu proměnných

$$x = u + m$$

$$y = v + n.$$

Kde $dx = du, dy = dv$ a po dosazení do původní rovnice dostáváme

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + am + bv + bn + c}{Au + Am + Bv + Bn + C}\right) = f\left(\frac{au + bv}{Au + Bv}\right)$$

a to je homogenní diferenciální rovnice.

Příklad 10

Integrujte diferenciální rovnici

$$(3) \quad y' = \frac{2x + 3y - 1}{4x + 6y + 5}.$$

Definičním oborem je celá rovina s vyloučením bodů přímky $4x+6y+5=0$. Vidíme, že koeficienty u proměnných x a y jsou úměrné. Rovnici přepíšeme proto ve tvaru

$$(4) \quad y' = \frac{2x+3y-1}{2(2x+3y)+5}$$

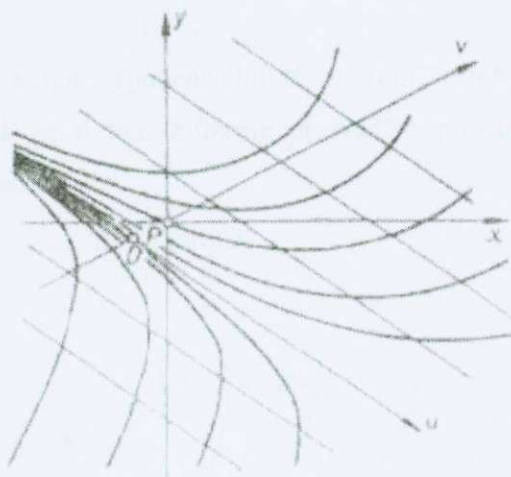
a zavedeme substituce $2x+3y=z$. Rovnice (4) přejde pak v rovnici

$$(5) \quad z' = 7 \frac{z+1}{2z+5}$$

to je separovatelná rovnice (za předpokladu $2z+5 \neq 0$ čili $2(2x+3y) \neq 0$ je ovšem splněn).

Její řešení je dáno vztahem

$$(6) \quad z+1 = Ce^{\frac{7x-2z}{3}},$$



obr.2

kde C můžeme volit rovno nule, neboť $z+1=0$ je též řešením rovnice (5). Substitucí $z=2x+3y$ dostaneme

$$(7) \quad 2x+3y+1=Ce^{x-2y},$$

to je vztah, který zahrnuje všechna řešení rovnice (3).

Príslušné integrální čáry jsou zakresleny na obr.2. Vynášet je přímo podle rovnice (7) je obtížné. Daleko pohodlněji je získáme, zakreslíme-li nejdříve směrové pole diferenciální rovnice (3), neboť příslušné izokliny spojující body, jimž je přiřazen směr o směrnici k , jsou čáry o rovnici

$$\frac{2x+3y-1}{4x+6y+5} = k,$$

čili přímky

$$2x(2k-1)+3y(2k-1)+5k+1=0,$$

jsou to rovnoběžky se směrnici $-\frac{2}{3}$. Dosadíme-li $k=-\frac{2}{3}$, dostaneme rovnici izoklíny,

která je sama integrální čarou, totiž

$$2x+3y+1=0,$$

je to asymptota všech integrálních čar. Povahu integrálních čar můžeme snadno poznat z rovnice (6), jestliže v ní provedeme substituci

$$(8) \quad \left. \begin{aligned} z+1 &= v \\ 7x-2z &= u \end{aligned} \right\}$$

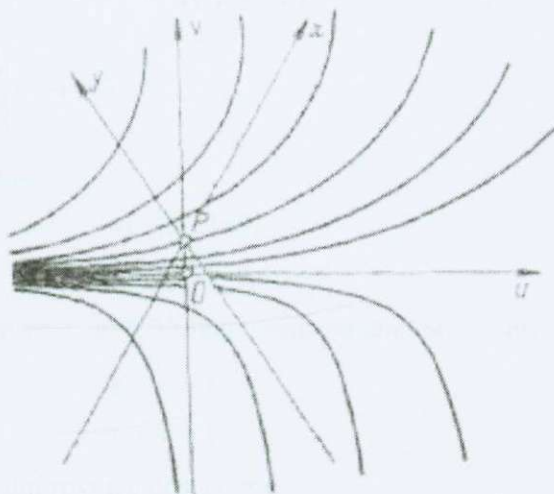
Dostaneme pak rovnici

$$v = Ce^{\frac{u}{3}},$$

která pro různá C vyjadřuje exponenciální křivky (obr.3), jež posunutím podél osy u přecházejí v sebe, jak se o tom můžeme přesvědčit, připsíme-li poslední rovnici logaritmováním na tvar

$$u = 3 \ln|v| - K$$

kde $K = 3 \ln|C|$.



obr.3

Obr. 2 vznikne z obr.3 pouhou kolineací, tato kolineace je analyticky vyjádřena substitucí, vzniklou složením substitute (8) a původní substitute $2x+3y=z$, kterou jsme převedli původní diferenciální rovnici (3) na rovnici separovatelnou. Je to substitute

$$(9) \quad \left. \begin{aligned} v &= 2x + 3y + 1 \\ u &= 3x - 6y \end{aligned} \right\}$$

z ní plyne

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{6}{21}v + \frac{3}{21}u - \frac{6}{21} \\ y &= \frac{3}{21}v - \frac{2}{21}u - \frac{3}{21} \end{aligned} \right\}.$$

Rovnice (3) přechází substitucí (9) v diferenciální rovnici

$$\frac{3v' - 2}{6v' + 3} = \frac{v - 2}{2v + 3},$$

čili po úpravě

$$v' = \frac{1}{3}v.$$

Je to velmi jednoduchá separovatelná diferenciální rovnice, jejíž řešení již známe ze

vztahu $v = Ce^{\frac{u}{3}}$.

Příklad 11

Řešte diferenciální rovnici $y' = -\frac{4x + 3y + 1}{3x + 2y + 1}$.

Jde o případ $\begin{vmatrix} a & A \\ b & B \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Řešme soustavu rovnic

$$4x + 3y + 1 = 0,$$

$$3x + 2y + 1 = 0.$$

Snadno určíme řešení $x = -1, y = 1$. Volíme proto záměnu proměnných

$$x = u - 1,$$

$$y = v + 1.$$

Po dosazení do původní rovnice dostáváme

$$\frac{dv}{du} = -\frac{4u + 3v}{3u + 2v},$$

což je homogenní diferenciální rovnice. Provedeme další záměnu

$$z = \frac{v}{u}, \quad v = zu, \quad v' = z'u + z,$$

kde ' znamená derivaci podle proměnné u . Po dosazení je

$$z'u + z = -\frac{4+3z}{3+2z},$$
$$\frac{dz}{du} \cdot u = \frac{-2(z^2+3z+2)}{2z+3}$$

a po separaci proměnných

$$\frac{2z+3}{z^2+3z+2} dz = -2 \frac{du}{u}$$

za podmínek $u \neq 0$, $z^2+3z+2 \neq 0$.

Po integraci

$$\ln|z^2+3z+2| = -2 \ln|u| + \ln|C|,$$

po odlogaritmování

$$(z^2+3z+2) \cdot u^2 = C.$$

Přesněji bychom na pravé straně měli psát po odstranění absolutní hodnoty $\pm C$, jelikož C je libovolná konstanta, má zápis C místo $\pm C$ stejný význam. Vrátime se nejprve k proměnným u, v

$$\left(\frac{v^2}{u^2} + 3\frac{v}{u} + 2\right) \cdot u^2 = C,$$
$$v^2 + 3uv + 2u^2 = C,$$

pak dosadíme z transformačních rovnic $u = x+1$, $v = y-1$ a dostáváme

$$(y-1)^2 + 3(x+1)(y-1) + 2(x+1)^2 = C$$

a po úpravě a rozkladu

$$(x+y)(2x+y+1) = C,$$

což je obecné řešení dané rovnice v implicitním tvaru.

Podívejme se, zda omezující podmínka $z^2+3z+2 \neq 0$ neumožňuje určit singulární řešení. Pro

$$z^2+3z+2=0$$

je $(z+1)(z+2)=0$, tj. $z=-1$ nebo $z=-2$

V prvním případě

$$z=-1, \frac{v}{u}=-1, \text{ tj. } v=-u,$$

v druhém případě

$$z = -2, \frac{v}{u} = -2, \text{ tj. } v = -2u.$$

Přejdeme-li k původním proměnným x, y , dostáváme v prvním případě

$$x = u - 1,$$

$$y = v + 1 = -u + 1$$

a po sečtení obou rovnic $x + y = 0$, tj. $y = -x$.

Ve druhém případě máme

$$x = u - 1,$$

$$y = v + 1 = -2u + 1$$

a po vyloučení u z obou rovnic je $2x + y = -1$, tj. $y = -2x - 1$.

Je však vidět, že v obou případech funkce $y = -x$ a $y = -2x - 1$ jsou partikulární řešení dané rovnice, která obdržíme z obecného řešení volbou $C = 0$.

CVIČENÍ

a) $y' = \frac{x + y + 1}{2x + 2y - 1}$

$$\left[\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} \ln|x + y| = x + c \right]$$

b) $y' = \frac{y^2 + 4y + 3}{x^2 + 2x + 1}$

$$\left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y+1}{y+3} \right| = \frac{-1}{x+1} + C \right]$$

c) $y' = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$[\sin y = -\cos x + C]$$

d) $y' = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 y}$

$$\left[\frac{\sin y \cos y}{2} + \frac{y}{2} = -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + C \right]$$

e) $e^{x+2y} dx = e^{2x-1} dy$

$$\left[-\frac{1}{2} e^{-2y} = -e^{-x+1} \right]$$

f) $e^y \sin x dx - \cos^2 x dx = 0$

$$\left[-e^{-y} = \frac{1}{\cos x} + C \right]$$

g) $y^4 e^{2x} dx + dy = 0$

$$\left[-\frac{1}{3y^3} = \frac{1}{2} e^{2x} \right]$$

h) $y' = -\frac{2x + 3y - 1}{2x + 3y - 5}$

$$[x + y - 4 \ln|2x + 3y + 7| = C]$$

i) $(x - 2y + 9)dx = (3x - 6y + 19)dy$

$$[x - 3y + 8 \ln|x - 2y| = C]$$

j) $y' = -\frac{2x+3y-1}{4x+6y+5}$	$[2x+3y+1 - Ce^{x-2y}]$
k) $y' = \frac{x-2y+3}{2x-4y+5}$	$[x^2 + 4y^2 - 4xy + 6x - 10y = C]$
l) $(-2x+3y-7)dx + (4x+5y+13)dy = 0$	$[(y-x-3)(5y-2x-9)^2 = C]$
m) $y' = \frac{x+y+3}{x-y-1}$	$\left[C((x+1)^2 + (y+2)^2)^{1/2} - e^{\arctg \frac{y+2}{x+1}} = 0 \right]$
n) $(x+y-2)dx + (x-y+4)dy = 0$	$[x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C]$
o) $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$	$[x^2 - xy + y^2 + x - y - C = 0]$
p) $y' = \frac{3x-4y}{4x+7y-1}$	$[7y^2 + 8xy - 3x^2 - 2y - C = 0]$
q) $(y-x-4)y' = x+y-2$	$[x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y - C = 0]$

2.3. LINEÁRNÍ DIF. ROVNICE 1. ŘÁDU

Obyčejné lineární diferenciální rovnice prvního řádu jsou rovnice, které lze zapsat ve tvaru

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

kde o funkcích p, q jedné proměnné x budeme předpokládat, že jsou na nějakém intervalu spojité. (Lineárně v této rovnici tedy vystupuje jak funkce y , tak její derivace y' .)

Pokud jedna z funkcí p, q je reálným násobkem funkce druhé, dá se takováto lineární rovnice řešit metodou separace proměnných. Speciálně to lze např. tehdy, je-li $p = 0$ (jedná se o „pouhé“ nalezení neurčitého integrálu) či $q = 0$.

V některých případech je pak možné lineární rovnici převést na rovnici se separovatelnými proměnnými vhodnou substitucí.

Jedním z obecně použitelných postupů řešení lineárních diferenciálních rovnic však je postup následující.

V prvním kroku řešíme nejprve tzv. **rovnici bez pravé strany** (budeme ji též nazývat rovnicí homogenní), tj. rovnicí, kde $q(x)$ položíme rovno nule

$$y' + p(x)y = 0.$$

Její obecné řešení nalezneme pomocí separace proměnných.

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y,$$

takže

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x) dx.$$

Jestliže označíme $P(x)$ primitivní funkci k funkci $p(x)$, můžeme dále psát:

$$\ln|y| = -P(x) + C,$$

odkud odlogaritmováním (a zbavením se absolutní hodnoty) získáme explicitní tvar obecného řešení (homogenní rovnice)

$$y(x) = K \cdot e^{-P(x)},$$

kde reálnou konstantu značíme K .

Nyní následuje krok druhý, nazývaný **variace konstanty**. Jde nám totiž o nalezení řešení nehomogenní rovnice, tj. rovnice s pravou stranou rovnou $q(x)$.

Toto řešení hledáme ve tvaru

$$\bar{y}(x) = K(x) \cdot e^{-P(x)}.$$

Konstantu K vstupující v obecném řešení homogenní rovnice tedy chceme nahradit funkcí $K(x)$ proměnné x tak, aby funkce $\bar{y}(x) = K(x) \cdot e^{-P(x)}$ splňovala rovnici nehomogenní (odtud i název variace konstanty). Musí tudíž platit

$$\bar{y}'(x) + p(x)\bar{y}(x) = q(x),$$

což po zderivování funkce $\bar{y}$ (je ji třeba derivovat jako součin, neboť K je nyní také funkcí proměnné x) a dosazení dává

$$K'(x) \cdot e^{-P(x)} + K(x) \cdot e^{-P(x)} \cdot (-P'(x) + p(x)) \cdot K(x) \cdot e^{-P(x)} = q(x).$$

Protože $P(x)$ představuje primitivní funkce k funkci $p(x)$, je $P'(x) = p(x)$, a druhý a třetí člen z levé strany poslední rovnice se odečtou. Podmínka pro hledanou funkci $K(x)$, aby

$\bar{y}(x) = K(x) \cdot e^{-P(x)}$ řešila rovnici nehomogenní, tak má tvar

$$K'(x) \cdot e^{-P(x)} = q(x),$$

neboli

$$K'(x) = q(x) \cdot e^{P(x)}.$$

A odtud lze $K(x)$ získat „pouhým“ zintegrováním

$$K(x) = \int q(x) \cdot e^{P(x)} dx.$$

Funkce $K(x)$ pro spojitě funkce p , q existuje (jinou otázkou je, umíme-li uvedený integrál vypočítat), a je určena jednoznačně až na integrační konstantu c . Obecné řešení nehomogenní lineární rovnice $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ má proto zápis

$$\bar{y}(x) = (K(x) + c) \cdot e^{-P(x)} = K(x) \cdot e^{-P(x)} + c \cdot e^{-P(x)},$$

kde

$$P(x) = \int p(x) dx,$$

$$K(x) = \int q(x) \cdot e^{P(x)} dx$$

a x je z vhodného intervalu.

Za pozornost stojí tvar funkce $\bar{y}(x)$: je součtem obecného řešení homogenní lineární rovnice $c \cdot e^{-P(x)}$ a tzv. partikulárního řešení rovnice s pravou stranou. Pokud tedy známe obecné řešení rovnice bez pravé strany a nějaké (jedno) partikulární řešení rovnice s pravou stranou, známe tím již všechna řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice.

Poznámka:

1) Je-li metoda variace konstanty prováděna bez chyb a užíváme i správně spočteného obecného řešení rovnice bez pravé strany, musí se v průběhu postupu členy obsahující funkci $K(x)$ v diferenciální rovnici odečíst. Diferenciální rovnice je tak redukována na jednodušší případ hledání neurčitého integrálu.

A v tom tkví výhoda uvedeného postupu: kdybychom totiž hledali řešení nehomogenní rovnice v jiném tvaru, tato situace by nastat nemusela a my bychom pouze jednu diferenciální

rovnici převedli na rovnici jinou, taktéž „neredukovanou“.

2) V situaci, kdy známe obecné řešení homogenní lineární rovnice (což obnáší výpočet v podstatě jen jedné primitivní funkce $P(x)$ a dokážeme najít partikulární řešení rovnice bez pravé strany nějakým jiným způsobem, nemusíme variaci konstanty samozřejmě vůbec provádět. Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je již zcela popsáno součtem těchto dvou zmíněných řešení.

3) Jestliže převedeme lineární diferenciální rovnici $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ na tvar

$$y' = -p(x)y + q(x) = f(x, y), \text{ je}$$

$$\frac{df}{dy} = -p(x).$$

Bude-li dále $(x_0, y_0) \in R^2$ takový bod, že x_0 patří do definičního oboru funkce $p(x)$ i $q(x)$, je díky spojitosti funkce p parciální derivace $\frac{df}{dy}$ na jistém okolí bodu (x_0, y_0) funkcí omezenou. Z dříve uvedené věty o jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice prvního řádu tudíž vyplývá, že lineární rovnice $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ má jediné řešení.

Jeho určení znamená fakticky výpočet jen dvou neurčitých integrálů (jednoho při řešení homogenní rovnice, jednoho při variaci konstanty) a stanovení hodnoty integrační konstanty: tu je třeba zjistit dosazením počáteční podmínky do obecného řešení nehomogenní rovnice. Dosazujeme tedy až do konečného tvaru hledaného řešení, nikoliv někde dříve v průběhu výpočtu.

Příklad 12

Určete obecné řešení diferenciální rovnice $xy' - y = x^2 \quad (x > 0)$,

- a) dosazením do odvozeného vzorce pro obecné řešení
- b) metodou variace konstanty
- c) substitucí $y = uv$.

Daná diferenciální rovnice je po úpravě

$$y' - \frac{1}{x}y = x$$

lineární diferenciální rovnicí 1. řádu typu $y' + f(x)y = g(x)$, kde $f(x) = -1/x$, $g(x) = x$.

a) Pro obecné řešení diferenciální rovnice tohoto typu jsme odvodili vzorec

$$y = Ce^{-\int f(x)dx} + e^{-\int f(x)dx} \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx.$$

dosadíme-li do tohoto vzorce, dostáváme s přihlédnutím k podmínce $x > 0$

$$y = Ce^{\int \frac{1}{x} dx} + e^{\int \frac{1}{x} dx} x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx,$$

$$y = Ce^{\ln x} + e^{\ln x} \int x e^{-\ln x} dx,$$

$$y = Cx + x \int dx,$$

$$y = Cx + x^2,$$

což je obecné řešení dané rovnice.

b) Řešíme nejprve rovnici $y' - \frac{1}{x}y = 0$, metodou separace proměnných. Řešení dostaneme ve tvaru $y = Cx$.

Řešení původní rovnice hledáme ve tvaru $y = C(x)x$. Po dosazení určíme funkci $C(x)$:

$$C'(x)x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)x = x,$$

$$C'(x)x = x,$$

$$C'(x) = 1,$$

$$C(x) = x + C.$$

Po dosazení do vztahu $y = C(x)x$ dostáváme obecné řešení dané rovnice ve tvaru

$$y = Cx + x^2.$$

c) Necht' $y = uv$. Po dosazení do dané rovnice je

$$(10) \quad u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = x,$$

$$u(v' - \frac{1}{x}v) + (u'v - x) = 0.$$

Určeme funkci v tak, aby platilo $v' - \frac{1}{x}v = 0$.

Separací proměnných, obdržíme řešení $v = Cx$.

Pro tuto funkci v má rovnice (10) tvar

$$\begin{aligned}u'v - x &= 0, \\u'Cx - x &= 0.\end{aligned}$$

Odtud funkce u :

$$u = \frac{1}{C}x + c.$$

Pak obecné řešení dané rovnice je

$$\begin{aligned}y &= uv, \\y &= \left(\frac{1}{C}x + c\right)Cx = \overline{C}x + x^2.\end{aligned}$$

Příklad 13

Najděte řešení rovnice $y' - 4y = \cos x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 1$.

Podle odvozeného vzorce je obecné řešení dané rovnice po dosazení $f(x) = -4$, $g(x) = \cos x$:

$$\begin{aligned}y &= Ce^{\int 4dx} + e^{\int 4dx} \int \cos x \cdot e^{-\int 4dx} dx, \\y &= Ce^{4x} + e^{4x} \int e^{-4x} \cdot \cos x dx.\end{aligned}$$

Proveďme pomocný výpočet integrálu

$$I = \int e^{-4x} \cos x dx.$$

Při výpočtu užijeme 2 krát metodu per partes. Nejprve položíme $u = e^{-4x}$, $v' = \cos x$, pak $u' = -4e^{-4x}$, $v = \sin x$ a tedy

$$(11) \quad I = e^{-4x} \sin x + 4 \int e^{-4x} \sin x dx.$$

Po druhé položíme $u = e^{-4x}$, $v' = \sin x$, pak $u' = -4e^{-4x}$, $v = -\cos x$ a tedy

$$I = e^{-4x} \sin x - 4e^{-4x} \cos x - 16I,$$

odtud

$$I = \frac{e^{-4x}}{17} (\sin x - 4 \cos x).$$

Po dosazení do vzorce pro obecné řešení za I máme obecné řešení ve tvaru

$$y = Ce^{4x} + \frac{1}{17} (\sin x - 4 \cos x).$$

Nyní přihlédneme k počáteční podmínce $y(0) = 1$ a dostáváme $C = \frac{21}{17}$.

Hledané partikulární řešení dané rovnice, které splňuje počáteční podmínku, funkce je

$$y = \frac{1}{17}(21e^{4x} + \sin x - 4 \cos x).$$

Příklad 14

Řešte dif. rovnici $y' + 2y = e^{3x}$

Nejprve budeme řešet rovnici bez pravé strany, tj. rovnici $y' + 2y = 0$.

Separací proměnných dostaneme řešení ve tvaru $y = Ce^{-2x}$.

Metodou variace konstanty C v rovnici $y = Ce^{-2x}$ budeme nyní hledat řešení diferenciální rovnice $y' + 2y = e^{3x}$. Derivováním rovnice $y = Ce^{-2x}$ dostaneme

$$y' = e^{-2x}(C' - 2C)$$

a po dosazení do rovnice $y' + 2y = e^{3x}$ a malé úpravě dostaneme diferenciální rovnici

$$C' = e^{5x},$$

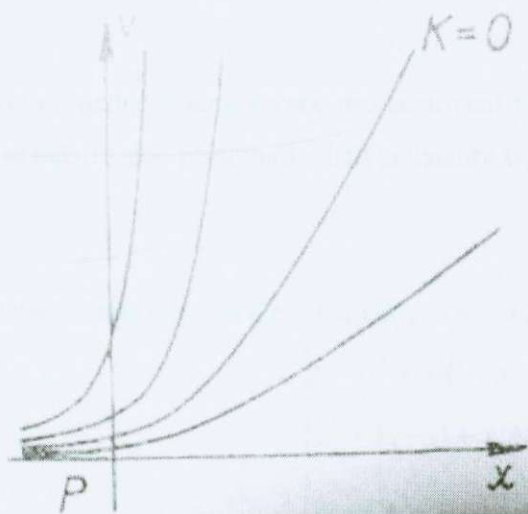
odtud

$$C = \frac{1}{5}e^{5x} + K.$$

Dosadíme-li za C do rovnice $y = Ce^{-2x}$, dostaneme konečné řešení dané rovnice

$$y' + 2y = e^{3x}$$

$$y = \frac{1}{5}e^{3x} + Ke^{-2x}, \text{ kde } K \in \mathbb{R}$$



Obr.4

Příslušné integrační křivky jsou zakresleny na obr.4. Pro $K = 0$ je integrační křivkou exponenciální funkce $y = \frac{1}{5}e^{3x}$, k níž se asymptoticky blíží všechny ostatní integrační křivky.

Příklad 15

Počet obyvatel velkého města se mění jednak porodností a úmrtím, jednak stěhováním. V prvním případě je rychlost růstu úměrná počtu obyvatel v daném okamžiku, ve druhém případě je při rovnoměrném vývoji úměrná časovému intervalu měřenému od doby, kdy počet obyvatel byl A_0 . Najděme závislost počtu obyvatel na čase.

Označme $A(t)$ počet obyvatel v čase t . Podle předpokladů platí

$$\frac{dA}{dt} = k_1 A + k_2 t, \quad A(0) = A_0,$$

k_1, k_2 jsou konstanty úměrnosti. Řešení této lineární rovnice, které vyhovuje uvedené počáteční podmínce, je

$$\begin{aligned} A &= e^{k_1 t} \left(A_0 + k_2 \int_0^t s e^{-k_1 s} ds \right) = \\ &= e^{k_1 t} \left(A_0 - \frac{k_2}{k_1} t e^{-k_1 t} + \frac{k_2}{k_1^2} - \frac{k_2}{k_1^2} e^{-k_1 t} \right) = \\ &= \left(A_0 + \frac{k_2}{k_1^2} \right) e^{k_1 t} - \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{1}{k_1} + t \right). \end{aligned}$$

Poznámka:

Výsledkem úlohy je velmi zjednodušený vzorec pro stanovení počtu obyvatel velkého města v čase t . Jak by se daly (aspoň přibližně) zjistit konstanty k_1, k_2 ?

CVIČENÍ

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty:

1) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

$[y = (C + x)(1 + x^2)]$

2) $(1 + x^2)y' + 4xy = 3$

$[x^3 + 3x - (1 + x^2)^2 y = C]$

3) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$

$[y = Cx^2 e^{1/x} + x^2]$

$$\begin{array}{ll}
4) \ y' + 2xy = xe^{-x^2} & \left[y = Ce^{-x^2} + \frac{x^2}{2} e^{-x^2} \right] \\
5) \ y' + y \cos x = \cos x & [y = Ce^{-\sin x} + 1] \\
6) \ y' + (y-1)\operatorname{tg} x = 0 & [y = C \cos x + 1] \\
7) \ y' + \frac{x}{1+x^2} y = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}} & \left[y = \frac{C - \cos x}{\sqrt{1+x^2}} \right] \\
8) \ y' + \frac{y}{1+x^2} = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} & [y = Ce^{-\operatorname{arctg} x} + \operatorname{arctg} x - 1] \\
9) \ y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x} e^{-x^2} & \left[y = \frac{C}{2x^2} - \frac{e^{-x^2}}{2x^2} \right] \\
10) \ y' - y \operatorname{tg} x = 2 \cos^2 x & \left[y = \frac{C}{\cos x} + (6 - \sin^2 x) \operatorname{tg} x \right]
\end{array}$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice substitucí $y = uv$:

$$\begin{array}{ll}
1) \ y' + y \cos x = \sin 2x & [y = Ce^{-\sin x} + 2(\sin x - 1)] \\
2) \ y' \cos x + y \sin x = a & [y = a \sin x + C \cos x] \\
3) \ y' \sin x - y = \frac{1}{2} \sin 2x - \sin x & \left[y = C \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] \\
4) \ xy' + ny = x^m, m \neq n & \left[y = Cx^n + \frac{x^m}{m-n} \right] \\
5) \ y' + y = \cos x & \left[y = Ce^{-x} + \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) \right] \\
6) \ y' + 2xy = 1 + 2x^2 & [y = Ce^{-x^2} + x] \\
7) \ y' + ay = be^{cx}, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 & \left[y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a+c} e^{cx}, a \neq -c \right] \\
8) \ y' - y - x^2 = 0 & [y = Ce^x - (x^2 + 2x + 2)] \\
9) \ y' - y \operatorname{tg} x = \cot g x & \left[y = \frac{1}{\cos x} \ln \operatorname{Ctg} \frac{x}{2} + 1 \right] \\
10) \ (1+x^2)y' - xy = a & [y = ax + C\sqrt{1+x^2}]
\end{array}$$

2.4. BERNOULLIOVA ROVNICE

Budeme tak nazývat rovnici

$$y' + f(x)y = g(x).y^n,$$

kde n je reálné číslo. O funkcích f, g budeme předpokládat, že jsou spojité na nějakém intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Ve speciálních případech, kdy $n = 0$ nebo $n = 1$, dostáváme vlastně lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Budeme proto předpokládat, že $n \neq 0$ a $n \neq 1$.

Při řešení převedeme Bernoulliovu rovnici vhodnou úpravou a substitucí na lineární diferenciální rovnici 1. řádu.

Rovnici dělíme y^n :

$$(12) \quad \frac{y'}{y^n} + \frac{1}{y^{n-1}} f(x) = g(x).$$

Zavedeme substituci

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}, \\ z' &= (1-n)y^{-n} \cdot y', \\ \frac{y'}{y^n} &= \frac{z'}{1-n}. \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (12) a úpravě dostáváme

$$z' + (1-n)f(x).z = (1-n)g(x),$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

Příklad 16

Řešte rovnici $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$

Volíme substituci $z = \frac{1}{y^2}$, pak $z' = -2y^{-3} \cdot y'$.

Dělíme y^3 a dosadíme

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^3} - \frac{x}{y^2} &= -e^{-x^2}, \\ -\frac{z'}{2} - xz &= -e^{-x^2}, \end{aligned}$$

$$z' - 2xz = 2e^{-x^2}.$$

Řešme např. metodou substituce. Položme $z = u \cdot v$, pak $z' = u'v + uv'$. Po dosazení a úpravě je

$$\begin{aligned} u'v + uv' + 2xuv &= 2e^{-x^2}, \\ u(v' + 2xv) + u'v - 2e^{-x^2} &= 0. \end{aligned}$$

Položme

$$v' + 2xv = 0.$$

Separací proměnných obdržíme řešení $v = Ce^{-x^2}$.

Pro tuto funkci v je rovnice $u(v' + 2xv) + u'v - 2e^{-x^2} = 0$ rovnice se separovanými proměnnými

$$u' \cdot Ce^{-x^2} = 2e^{-x^2},$$

řešením je

$$u = \frac{2}{C}x + c.$$

Tedy

$$z = \left(\frac{2}{C}x + c\right)(Ce^{-x^2}),$$

$$z = 2x \cdot e^{-x^2} + \bar{C} e^{-x^2}.$$

Po dosazení za $z = 1/y^2$ dostáváme obecné řešení dané rovnice

$$\frac{1}{y^2} = e^{-x^2} (\bar{C} + 2x),$$

$$y^2 - \frac{e^{x^2}}{\bar{C} + 2x} = 0.$$

Příklad 17

Řešte dif. rovnici $y' + xy = xy^3$

Dělením y^3 a substitucí $z = \frac{1}{y^2}$, čili $z' = -\frac{2y'}{y^3}$ máme

$$-\frac{z'}{2} + xz = x,$$

$$z' - 2xz = -2x.$$

Vyřešíme lineární dif. rovnici a dostaneme

$$z = 1 + Ce^{x^2}$$

a z toho

$$y^2 = \frac{1}{1 + Ce^{x^2}}.$$

CVIČENÍ

a) $y' - \frac{y}{x} = 3xy^2$

$$\left[y = \frac{x}{C - x^3} \right]$$

b) $y' - y + y^2 \cos x = 0$

$$\left[y = \frac{1}{Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)} \right]$$

c) $y'x + y = y^2 \ln x$

$$\left[y = \frac{1}{1 + \ln x + Cx} \right]$$

d) $y' + y = x\sqrt{y}$

$$\left[y = (x - 2 + Ce^{-x/2})^2 \right]$$

e) $y' - ay^2 \cot x + 2y \tan x = 0$

$$\left[ay(21 \ln |\sin x| - \sin^2 x) + 2Cy + 2 \cos^2 x = 0 \right]$$

f) $y' - 9x^2 y + 3(x^5 - x^2)y^{2/3} = 0$

$$\left[y = \left(\frac{x^3}{3} + Ce^{x^3} \right)^3 \right]$$

g) $ydy - \frac{ay^2}{x^2} dx - \frac{b dx}{x^2} = 0, a \neq 0$

$$\left[y^2 + \frac{b}{a} = Ce^{-2/x} \right]$$

2.5. RICATTIOVA ROVNICE

Má tvar

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

Pro $a(x) = 0$ dostáváme lineární rovnici, pro $c(x) = 0$ Bernoulliiovu rovnici.

Ricattiou rovnici nelze obecně řešit kvadraturami, tj. její řešení nelze převést jen na výpočet integrálů, jako tomu bylo u předcházejících typů. Známe-li však jedno řešení

rovnice, najdeme obecný integrál kvadraturami: Necht' $y_1(x)$ je řešením rovnice $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, tj.

$$y_1' = ay_1^2 + by_1 + c.$$

Zavedeme-li novou neznámou funkci $z(x)$ vztahem $y = y_1 + z$

a dosadíme do $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, máme

$$y_1' + z' = ay_1^2 + 2ay_1z + az^2 + by_1 + bz + c;$$

v důsledku $y_1' = ay_1^2 + by_1 + c$. Funkce z vyhovuje rovnici

$$z' = az^2 + (2ay_1 + b)z,$$

což je Bernoulliova rovnice, kterou lze integrovat kvadraturami.

Příklad 18

Řešte $xy' - 3y + y^2 = 4x^2 - 4x$

Hledejme partikulární řešení ve tvaru $y_1 = Ax + B$.

Dosazením y_1 do původní rovnice a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme

$$y_1 = 2x.$$

Substitucí $y = y_1 + z = 2x + z$, dospějeme k rovnici

$$xz' + (4x - 3)z + z^2 = 0,$$

která je již Bernoulliova typu.

Jednoduše se integrují dva speciální případy Ricattiovy rovnice:

a) $y' = ay^2 + b,$

a, b jsou konstanty, integrujeme podle $y' = f(x)$ nebo $y' = f(y)$.

b) $y' = ay^2 + \frac{b}{x^2},$

a, b konstanty, integrujeme substitucí $y = \frac{1}{z}$, z čehož $y' = -\frac{z'}{z^2},$

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{x^2},$$

$$z' = -a - b\left(\frac{z}{x}\right)^2,$$

což je homogenní rovnice, kterou integrujeme podle $y' = f\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0$.

2.6. CLAIRAUTOVA ROVNICE

Diferenciální rovnici tvaru

$$y = xy' + g(y'),$$

kde g je daná funkce, nazýváme Clairautovou diferenciální rovnici.

Tato rovnice má vždy řešení, je-li funkce g definována aspoň v jednom bodě. Tak např. je-li g definována v čísle p_0 , je řešením Clairautovy rovnice funkce $y = xp_0 + g(p_0)$, pro všechna reálná čísla x .

Při hledání obecného řešení rovnice uijeme metodu derivování rovnice. Položme nejprve $y' = p$, dostáváme rovnici $y = xp + g(p)$.

Derivujeme obě strany rovnice podle x

$$y' = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{dg}{dp} \cdot \frac{dp}{dx},$$

$$p = p + \frac{dp}{dx} \left(x + \frac{dg}{dp}\right),$$

$$0 = \frac{dp}{dx} \left(x + \frac{dg}{dp}\right).$$

Z poslední rovnice plyne

$$(13) \quad \frac{dp}{dx} = 0 \text{ nebo } x + \frac{dg}{dp} = 0.$$

Z rovnice $\frac{dp}{dx} = 0$ dále plyne $p = C$, kde C je konstanta, po dosazení do rovnice

$y = xp + g(p)$ získáváme obecné řešení Clairautovy dif. rovnice

$$y = Cx + g(C).$$

Z druhé části (13) vyplývá $x = -dg/dp$. Tato rovnice spolu s rovnicí $y = xp + g(p)$, do níž dosadíme za $x = -dg/dp$ určuje singulární řešení Clairautovy rovnice. Toto singulární řešení je tedy určeno rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= -g'(p), \\ y &= -pg'(p) + g(p),\end{aligned}$$

kde ' znamená derivaci podle p . Často se z obou rovnic dá vyloučit parametr p a získáme tak singulární řešení v explicitním tvaru.

poznámka

Grafem singulárního řešení je křivka, jejíž tečny v jednotlivých bodech jsou přímky, jejichž rovnice získáme z obecného řešení rovnice vhodnou volbou konstanty C . Řečeno jinak, křivka představující singulární řešení je obálkou jednoparametrické soustavy přímek, popsaných rovnicemi

$$y = Cx + g(C).$$

Příklad 19

Řešte dif. rovnici $y = xy' + (y')^2$.

Položme $y' = p$, pak $y = xp + p^2$.

Tuto rovnici derivujeme podle x

$$0 = \frac{dp}{dx}(x + 2p).$$

Pro $dp/dx = 0$ je $p = C$ a tedy obecné řešení dané rovnice je

$$y = Cx + C^2.$$

Pro $x + 2p = 0$ dostáváme parametrické vyjádření singulárního řešení

$$\begin{aligned}x &= -2p, \\ y &= -p^2,\end{aligned}$$

odkud po eliminaci parametru dostáváme singulární řešení ve tvaru $y = -\frac{x^2}{4}$.

CVIČENÍ

$$\text{a) } x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{(y')^2}$$

$$[4x + y^2 = 0]$$

$$\text{b) } y = xy' + \frac{a}{(y')^2}$$

$$\left[x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \right]$$

$$\text{c) } y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

$$[4y^3 = 27ax^2]$$

$$\text{d) } y = xy' - a\sqrt{1 + (y')^2}$$

$$[x^2 + y^2 = a^2]$$

$$\text{e) } y = xy' + \sin y'$$

$$\left[y = (\pi - \arccos x)x + \sqrt{1 - x^2} \right]$$

$$\text{f) } y = xy' + e^{-y'}$$

$$[y = x - x \ln x]$$

$$\text{g) } y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$[x^2 + y^2 = 1]$$

$$\text{h) } y = xy' - 3(y')^3$$

$$\left[9y \pm 2x^{\frac{3}{2}} = 0 \right]$$

2.7. LAGRANGEOVA ROVNICE

Rovnice tvaru

$$y = x \cdot f(y') + g(y'),$$

kde f a g jsou spojitě diferencovatelné funkce proměnné y' , definované na intervalu I , přičemž $f(y') \neq y'$. Taková rovnice se nazývá Lagrangeova diferenciální rovnice.

Umíme ji vždy řešit kvadraturami.

Položme $y' = p$

$$y = x \cdot f(p) + g(p),$$

zderivujeme podle x :

$$p = f(p) + x \cdot f'(p) \cdot \frac{dp}{dx} + g'(p) \cdot \frac{dp}{dx},$$

zde ' znamená derivaci podle p . Rovnici upravíme

$$p - f(p) = (x \cdot f'(p) + g'(p)) \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Budeme nyní předpokládat, že $p - f(p) \neq 0$ a že proměnná x je funkcí parametru p . Pak můžeme rovnici přepsat na tvar

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f'(p)}{p - f(p)} \cdot x + \frac{g'(p)}{p - f(p)}.$$

Tato rovnice je lineární dif. rovnicí pro neznámou funkci x . Jejím řešením dostaneme vyjádření x pomocí parametru p a konstanty C . Tato rovnice pak spolu s rovnicí $y = x \cdot f(p) + g(p)$ jsou parametrické rovnice pro obecné řešení Lagrangeovy rovnice.

Vraťme se nyní k podmínce $p - f(p) \neq 0$. Je-li pro nějaké p_0

$$p_0 = f(p_0),$$

je funkce $y = x \cdot f(p_0) + g(p_0)$ také řešením Lagrangeovy rovnice. Pokud toto řešení není partikulárním řešením, je singulárním řešením Lagrangeovy rovnice.

Příklad 20

Řešte rovnici $y = x(y')^2 + (y')^3$.

Položme $y' = p$, pak $y = xp^2 + p^3$.

Rovnici zderivujeme

$$p(1 - p) = (2px + 3p^2) \frac{dp}{dx},$$

za předpokladů $p \neq 0$, $p \neq 1$ můžeme psát

$$(14) \quad \frac{dx}{dp} = \frac{2}{1 - p} x + \frac{3p}{1 - p}.$$

Tato rovnice je lineární diferenciální rovnicí pro neznámou x . Řešme nejprve rovnici

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2}{1 - p} x,$$

obdržíme řešení

$$x = \frac{C}{(1 - p)^2}.$$

Řešení rovnice (14) získáme metodou variace konstanty, tedy

$$x = \frac{C}{(1 - p)^2} + \frac{3p^2}{2(1 - p)^2} - \frac{p^3}{(1 - p)^2}.$$

Po dosazení do rovnice $y = xp^2 + p^3$ dostáváme obecné řešení dané rovnice v parametrickém tvaru

$$x = \frac{1}{(1-p)^2} \left(C + \frac{3}{2} p^2 - p^3 \right)$$

$$y = \frac{p^2}{(1-p)^2} \left(C + p - \frac{p^2}{2} \right).$$

Vraťme se nyní k podmínkám $p \neq 0, p \neq 1$. Pro $p = 0$ dostáváme z rovnice $y = xp^2 + p^3$ $y = 0$, pro $p = 1$ dostáváme $y = x + 1$. Jak se snadno přesvědčíme, obě funkce jsou řešením dané rovnice, a to singulární řešení.

Příklad 21

Řešte diferenciální rovnici $y = 2xy' + \frac{1}{(y')^2}$.

Položme $y' = p$, pak $y = 2xp + \frac{1}{p^2}$,

Rovnici zderivujeme

$$-p = \left(2x - \frac{2}{p^3} \right) \frac{dp}{dx},$$

za předpokladů $p \neq 0$ můžeme psát

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} + \frac{2}{p^4}.$$

Řešme nejprve rovnici $\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p}$,

Obdržíme řešení $x = \frac{C}{p^2}$.

Metodou variace konstanty pak obecné řešení rovnice je

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{2}{p}.$$

Dostáváme obecné řešení dané rovnice v parametrickém tvaru

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{2}{p},$$

$$y = \frac{2C}{p} - \frac{3}{p^2}.$$

poznámka

Užití záměny proměnných u některých typů dif. rovnic

U diferenciálních rovnic 1. řádu, v nichž se proměnná x vyskytuje jen v první mocnině a hledaná funkce y se vyskytuje v argumentu elementárních funkcí, je možné užít záměnu proměnných, kdy x pokládáme za funkci a y za nezávisle proměnnou. Rovnici pak upravíme na lineární diferenciální rovnici 1. řádu vzhledem k funkci x . Obecné řešení bude také obecným řešením dané rovnice.

Příklad 22

Řešte rovnici $y' = \frac{1}{2x - y^2}$

Tato rovnice není žádného z typů, které jsme dosud řešili. Je nelineární rovnicí pro neznámou funkci y .

Pokládejme nyní x za funkci proměnné y . Pak je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x},$$

a po dosazení do původní rovnice je

$$\begin{aligned}\frac{1}{x'} &= \frac{1}{2x - y^2}, \\ x' &= 2x - y^2, \\ x' - 2x &= -y^2.\end{aligned}$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnicí 1. řádu pro neznámou funkci x . Řešme ji např. metodou variace konstanty. Nejprve tedy řešíme rovnici $x' - 2x = 0$,

pak $x = Ce^{2y}$.

Řešení rovnice hledejme se tvaru $x = C(y) \cdot e^{2y}$. Po dosazení do $x' - 2x = -y^2$ hledáme funkce $C(y)$, tedy

$$C(y) = -\int y^2 e^{-2y} dy + C.$$

Integrál $I = \int y^2 e^{-2y} dy$.

Vypočteme dvojnásobným použitím metody per partes. Dostaneme výsledek

$$I = -\frac{1}{2}y^2 e^{-2y} - \frac{1}{2}ye^{-2y} - \frac{1}{4}e^{-2y},$$

proto

$$C(y) = \frac{1}{4}e^{-2y}(2y^2 + 2y + 1) + C.$$

Obecné řešení dané rovnice je tedy určeno implicitně rovnicí

$$x = Ce^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}.$$

CVIČENÍ

a) $y = x(1 + y') + (y')^2$

$$\begin{cases} x = Ce^{-p} - 2p + 2 \\ y = Ce^{-p}(1 + p) - p^2 + 2 \end{cases}$$

b) $(y')^2 + y - 2xy' = 0$

$$\begin{cases} y = 0, x = Cp^{-2} + \frac{2}{3}p \\ y = 2Cp^{-1} + \frac{p^2}{3} \end{cases}$$

c) $y = x(1 + (y')^2)$

$$\begin{cases} \ln|x|(p^2 - p + 1) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2p-1}{\sqrt{3}} + C \\ y = x(1 + p^2) \end{cases}$$

d) $y = xy' + (y')^2$

$$\begin{cases} x = \frac{C+1}{(1-p)^2} - 1 \\ y = p^2 \frac{C+1}{(1-p)^2}, y = 0 \end{cases}$$

e) $yy' = 2xy'^2 + 1$

$$\begin{cases} x = \frac{\ln|p| + C}{p^2} \\ y = \frac{\ln p^2 + 2C}{p} \end{cases}$$

f) $2y + (y^2 - 6x)y'$

$$\left[x = \frac{y^2}{2} + Cy^3 \right]$$

g) $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$

$$\left[x = y \ln y + \frac{C}{y} \right]$$

h) $ydx - (x + y^2 \sin y)dy = 0$

$$[x + y \cos y - Cy = 0]$$

$$\text{i) } xdx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy$$

$$[x^2 + y^2(y^2 - C) = 0]$$

$$\text{j) } x' + ax = e^{bt}, a + b \neq 0$$

$$\left[x = Ce^{-at} + \frac{e^{bt}}{a+b} \right]$$

$$\text{k) } (x + 2 \cos y) \sin y \cdot y' = \cos y$$

$$[2x \cos y + \cos 2y = C]$$

$$\text{l) } tdx + (x - t \sin t)dt = 0$$

$$\left[x = \frac{\sin t}{t} - \cos t + \frac{C}{t} \right]$$

3. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU

Obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu nazveme vztah (platný v určitém oboru) mezi neznámou funkcí, její první a druhou derivací a nezávisle proměnnou. Je-li tento vztah možno vyjádřit funkcí, potom obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

Kde $F(x, y, y', y'')$ je reálná funkce čtyř proměnných jejímž definičním oborem je nějaká část množiny všech čtveřic reálných čísel, y je hledaná reálná funkce reálné proměnné x , $y' = \frac{dy}{dx}$ a $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ jsou její první a druhá derivace. Přitom y'' se v rovnici skutečně vyskytuje.

Stejně jako v případě rovnic prvního řádu budeme předpokládat, že $F(x, y, y', y'')$ je v definičním oboru spojitá.

Rovnici tvaru

$$f(x, y, y') + g(x, y, y')y'' = 0,$$

resp.

$$y'' + h(x, y, y') = 0$$

nazýváme **obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu rozřešenou vzhledem k druhé derivaci**. V ostatních případech mluvíme o **rovnících nerozřešených vzhledem k druhé derivaci**. Opět předpokládáme, že funkce f, g, h jsou spojitě funkce a že $g(x, y, y') \neq 0$ v celém definičním oboru.

Jestliže funkce $F(x, t_0, t_1, t_2)$ je prvního stupně vzhledem k t_0, t_1, t_2 , tj. jestliže

$$F(x, t_0, t_1, t_2) = a_0(x) + a_1(x)t_0 + a_2(x)t_1 + a_3(x)t_2$$

($a_i(x)$ jsou spojitě funkce definované na nějakém intervalu I , $a_3(x) \neq 0$), mluvíme o **obyčejné lineární diferenciální rovnici druhého řádu**. V ostatních případech jde o **nelineární rovnice**.

3.1. VLASTNOSTI LINEÁRNÍCH DIF. ROVNIC 2.ŘÁDU

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu je rovnice tvaru

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x),$$

kde funkce $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ jsou spojité v nějakém intervalu I . Je-li funkce $d(x)$ identicky rovna nule v intervalu I , má rovnice tvar

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

a nazýváme ji homogenní nebo také bez pravé strany. V opačném případě rovnici nazýváme nehomogenní nebo také s pravou stranou.

Pro lineární diferenciální rovnice 2. řádu platí tato tvrzení:

a) Je-li funkce $y = y(x)$ řešením lineární dif. rovnice, je také funkce $y = Cy(x)$ řešením této rovnice.

b) Jsou-li funkce $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ řešením rovnice, je také funkce $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ řešením této rovnice.

c) Jsou-li funkce y_1 , y_2 řešením rovnice a jsou-li tyto funkce lineárně nezávislé (tj. platí, že determinant $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ je různý od nuly), je obecné řešení rovnice funkce $y = C_1y_1 + C_2y_2$. Determinant $W(x)$ se nazývá **determinant Wronského** nebo **wronskián**.

d) Je-li rovnice tvaru

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

platí pro wronskián dvojice nezávislých řešení vztah

$$W(x) = Ce^{-\int a_1(x) dx}.$$

Známe-li jedno řešení y_1 této rovnice, můžeme ze vztahu $W(x) = Ce^{-\int a_1(x) dx}$ po úpravě vypočítat dvojí integrací druhé nezávislé řešení y_2 . Platí

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x) dx} dx.$$

e) Každá dvojice lineárně nezávislých řešení rovnice tvoří tzv. fundamentální systém řešení rovnice.

3.2. LINEÁRNÍ DIF. ROVNICE 2. ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY BEZ PRAVÉ STRANY

Jestliže se dané funkce $N(x)$, $P(x)$ v rovnici

$$y'' + N(x)y' + P(x)y = 0$$

redukují na konstanty b, c mluvíme o homogenní lineární rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Stačí hledat partikulární řešení y_1 a y_2 s wronskiánem různým od nuly rovnice

$$y'' + by' + cy = 0,$$

abychom měli její obecné řešení.

Kvadratická rovnice $k^2 + bk + c = 0$, kde k je neznámá, se nazývá **charakteristická rovnice** rovnice $y'' + by' + cy = 0$.

Příklad 23

Rovnice $y'' + y = 0$ má charakteristickou rovnici $k^2 + 1 = 0$.

Rovnice $2y'' - y' - y = 0$ má charakteristickou rovnici $2k^2 - k - 1 = 0$.

Je-li k kořenem charakteristické rovnice, je e^{kx} řešením diferenciální rovnice.

$$\begin{aligned}(e^{kx})' &= ke^{kx}, \\ (e^{kx})'' &= k^2 e^{kx},\end{aligned}$$

tedy je

$$(e^{kx})'' + b(e^{kx})' + ce^{kx} = k^2 e^{kx} + bke^{kx} + ce^{kx} = e^{kx}(k^2 + bk + c) = 0.$$

Podle toho, jaké má charakteristická rovnice kořeny, rozeznáváme tři případy:

1) Charakteristická rovnice má různé reálné kořeny, $k_1 \neq k_2$

Rovnice má dvě různá partikulární řešení

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}.$$

Výpočtem

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{k_1 x} k_2 e^{k_2 x} - e^{k_1 x} k_1 e^{k_2 x} = e^{k_1 x} e^{k_2 x} (k_2 - k_1).$$

Tedy je $W \neq 0$ při $k_1 \neq k_2$, protože $e^{k_1 x} \neq 0, e^{k_2 x} \neq 0$. Obě řešení jsou nezávislá a tvoří fundamentální systém řešení rovnice. Její obecný integrál má tudíž tvar

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2) Charakteristická rovnice má kořen k dvojnásobný

Dostaneme tudíž pouze jedno partikulární řešení e^{kx} . Kořen k je roven číslu $-\frac{b}{2}$, neboť diskriminant je roven nule. Druhý partikulární kořen najdeme, existuje-li taková funkce $z(x)$, že také $e^{kx} z(x)$ je řešením rovnice $y'' + by' + cy = 0$.

Položíme-li $y = e^{kx} z$,

pak je

$$y' = e^{kx} (kz + z'),$$

$$y'' = e^{kx} (k^2 z + 2kz' + z'').$$

Po dosazení do rovnice a úpravě je

$$e^{kx} (z'' + (b + 2k)z') = 0.$$

Protože $b + 2k = 0, e^{kx} \neq 0$, dostáváme pro funkci z podmínku

$$z'' = 0,$$

odtud je

$$z' = C_2,$$

$$z = C_1 + C_2 x.$$

Pro funkci y pak dostáváme

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{kx} x.$$

Jak se snadno můžeme přesvědčit výpočtem wronskiánu, tvoří funkce $y_1 = e^{kx}, y_2 = e^{kx} x$ fundamentální systém řešení rovnice a tedy vztah $y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{kx} x$ vyjadřuje obecné řešení rovnice.

3) Charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny, $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Užijeme-li Eulerových vztahů pro $e^{i\beta}$ a uvážíme-li, že každá lineární kombinace dvou řešení rovnice je opět řešením rovnice, lze i v tomto případě nalézt dvě nezávislá partikulární řešení, což jsou reálné funkce

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x.$$

Obecné řešení rovnice je tentokrát funkce

$$y = C_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x.$$

Příklad 24

Určete obecné řešení dif. rovnice $4 \frac{d^2 x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 25x = 0.$

Charakteristická rovnice pro danou rovnici je

$$4k^2 - 20k + 25 = 0,$$

diskriminant je roven 0, charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný kořen $k = \frac{5}{2}.$

Obecné řešení dané rovnice je tedy

$$x = C_1 e^{\frac{5}{2}t} + C_2 t e^{\frac{5}{2}t}.$$

Příklad 25

Určete obecné řešení dif. rovnice $y'' - 7y' + 12y = 0.$

Charakteristická rovnice pro danou rovnici je

$$k^2 - 7k + 12 = 0,$$

diskriminant je 1, charakteristická rovnice má dva různé reálné kořeny

$$k_1 = 4, k_2 = 3.$$

Obecné řešení dané rovnice je tedy

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}.$$

Příklad 26

Určete obecné řešení dif. rovnice $y'' - 4y' + 13y = 0.$

Charakteristická rovnice pro danou rovnici je

$$k^2 - 4k + 13 = 0,$$

diskriminant je -36, charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny

$$k_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

Obecné řešení dané rovnice je tedy

$$y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x.$$

Příklad 27

Určete partikulární řešení dif. rovnice $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0$ splňující počáteční podmínky $s(0) = 1, s'(0) = 1$.

Charakteristická rovnice pro danou rovnici je

$$k^2 + 2k + 2 = 0,$$

diskriminant je -4, charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny

$$k_{1,2} = -1 \pm i.$$

Obecné řešení dané rovnice je tedy

$$s = C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t.$$

Uvážíme-li počáteční podmínky, dostáváme s přihlédnutím k

$$s' = (-C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t}) \cos t - (C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t}) \sin t$$

pro C_1, C_2 rovnice

$$1 = C_1,$$

$$1 = -C_1 + C_2,$$

tedy $C_2 = 2$ a hledané partikulární řešení je

$$s = e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t.$$

CVIČENÍ

Určete obecné řešení dif. rovnice

a) $3y'' - 2y' - 8y = 0$

$$\left[y = C_1 e^{-\frac{4}{3}x} + C_2 e^{2x} \right]$$

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

$$[y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}]$$

c) $y'' + 6y' + 13y = 0$

$$[y = C_1 e^{-3x} \cos 2x + C_2 e^{-3x} \sin 2x]$$

d) $y'' - y' - 6y = 0$

$$[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}]$$

e) $y'' + 5y' = 0$

$$[y = C_1 + C_2 e^{-5x}]$$

f) $4y'' - 8y' + 5y = 0$

$$[y = C_1 e^x \cos 3x + C_2 e^x \sin 3x]$$

Určete partikulární řešení dif. rovnice, které splňuje dané počáteční podmínky:

$$\text{a) } y'' - 2y' + 5y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y' = \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \left[y = -\frac{1}{2} e^{\frac{x-\pi}{2}} \cdot \sin 2x \right]$$

$$\text{b) } y'' + 2hy' + h^2 y = 0, y(0) = a, y'(0) = C \quad \left[y = e^{-hx} (a + (C + ah)x) \right]$$

$$\text{c) } \frac{d^2 s}{dt^2} + 2a \frac{ds}{dt} + a^2 s = 0, s(0) = a, s'(0) = 0 \quad \left[s = ae^{-at} (1 + at) \right]$$

3.3. LINEÁRNÍ DIF. ROVNICE 2. ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY S PRAVOU STRANOU

Diferenciální rovnice

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

kde $f(x)$ je daná funkce, užíváme často metodu variace konstant.

Řešíme nejprve přidruženou homogenní rovnici

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

Řešení této rovnice je

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

kde y_1, y_2 jsou taková řešení rovnice, která tvoří fundamentální systém řešení.

Obecné řešení rovnice hledáme ve tvaru

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2,$$

kde $C_1(x), C_2(x)$ jsou funkce. Tyto funkce určíme z podmínky, že funkce

$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$ je řešením původní rovnice a z podmínky

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0.$$

Příklad 28

Určete obecné řešení rovnice $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Nejprve řešíme rovnici

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

její obecné řešení je

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Obecné řešení dané rovnice hledejme ve tvaru

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x.$$

Platí

$$y' = C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x + C_1(x) e^x + C_2(x) e^x + C_2(x) x e^x.$$

Volíme podmínku

$$(15) \quad C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x = 0.$$

Pro y'' dostáváme

$$y'' = C_1'(x) e^x + C_1(x) e^x + C_2'(x) e^x + 2C_2(x) e^x + C_2'(x) x e^x + C_2(x) x e^x.$$

Dosadíme do dané rovnice vypočtenou první a druhou derivaci y' , y'' a po úpravě dostáváme rovnici

$$(16) \quad -C_1'(x) + C_2'(x)(1-x) = \frac{1}{x}.$$

Determinant soustavy rovnic (15), (16) je wronskián fundamentální soustavy řešení přidružené rovnice, je proto různý od nuly a soustava rovnic má jediné řešení $C_1'(x)$, $C_2'(x)$:

$$C_1(x) = -1,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{x}$$

Po integraci dostáváme

$$C_1(x) = -x + C_1,$$

$$C_2(x) = \ln|x| + C_2.$$

Proto obecné řešení dané diferenciální rovnice je

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x - e^x x + e^x x \ln|x|.$$

Metoda variace konstant vede často k složitějším výpočtům. Proto je u některých rovnic se speciálním typem pravé strany výhodnější užít nalezení partikulárního řešení rovnice s pravou stranou pomocí metody neurčitých koeficientů. Označíme-li toto partikulární řešení y_p a je-li $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ obecné řešení přidružené homogenní rovnice, je obecné řešení rovnice s pravou stranou

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p.$$

Nyní si ukážeme několik typů pravé strany diferenciální rovnice, kdy můžeme partikulární řešení y_p snadno nalézt.

1) Rovnice tvaru $f(x) = P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je mnohočlen stupně n .

a) pokud 0 není kořenem charakteristické rovnice, partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p = Q_n(x)$, kde $Q_n(x)$ je také mnohočlem stupně n .

b) Pokud 0 je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, $k = 1, 2$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p = x^k Q_n(x)$.

Příklad 29

Řešte dif. rovnici $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.

Přidružená rovnice $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Kořeny charakteristické rovnice jsou čísla $k_1 = -2 + i$, $k_2 = -2 - i$. Obecné řešení homogenní rovnice je

$$y = C_1 e^{-2x} \cos x - C_2 e^{-2x} \sin x.$$

Partikulární řešení dané rovnice hledáme ve tvaru

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Zderivujeme

$$y' = 2Ax + B,$$

$$y'' = 2A.$$

Po dosazení do dané rovnice platí

$$2A + 8Ax + 4B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 5x^2 - 32x + 5.$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ 8A + 5B &= -32, \\ 2A + 4B + 5C &= 5, \end{aligned}$$

jejíž řešení je $A = 1$, $B = -8$, $C = 7$.

Partikulární řešení je tedy

$$y_p = x^2 - 8x + 7$$

a obecné řešení dané rovnice je

$$y = C_1 e^{-2x} \cos x - C_2 e^{-2x} \sin x + x^2 - 8x + 7.$$

Příklad 30

Řešte dif. rovnici $y'' - 5y' = 7$.

Přidružená rovnice $y'' - 5y' = 0$.

Kořeny charakteristické rovnice jsou čísla $k_1 = 0$, $k_2 = 5$. Protože charakteristická rovnice má jednoduchý nulový kořen, hledáme partikulární řešení dané rovnice ve tvaru

$$y_p = x(Ax + B).$$

Zderivujeme

$$\begin{aligned} y' &= 2Ax + B, \\ y'' &= 2A. \end{aligned}$$

Po dosazení do dané rovnice platí

$$2A - 10Ax - 5B = 7.$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ 2A - 5B &= 7, \end{aligned}$$

jejíž řešení je $A = 0$, $B = -7/5$.

Partikulární řešení je $y_p = -\frac{7}{5}x$,

a obecné řešení dané rovnice je

$$y = C_1 - C_2 e^{5x} - \frac{7}{5}x.$$

2) rovnice tvaru $f(x) = e^{qx} \cdot P_n(x)$

a) Číslo q není kořenem charakteristické rovnice. Partikulární řešení pak hledáme ve tvaru $y_p = e^{qx} \cdot Q_n(x)$.

b) Číslo q je kořenem charakteristické rovnice o násobnosti k , $k = 1, 2$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p = x^k e^{qx} \cdot Q_n(x)$.

Poznámka:

Pokud $q = 0$ je $f(x) = P_n(x)$ a dostáváme výše zmíněný případ.

Příklad 31

Řešte diferenciální rovnici $y'' - 2y' + y = e^{2x}$.

$P_n(x) = P_0(x) = 1$, $q = 2$. Příslušná rovnice bez pravé strany je $y'' - 2y' + y = 0$.

Charakteristická rovnice má kořeny $k_1 = 1$, $k_2 = 1$. Tedy číslo $q = 2$ není kořenem charakteristické rovnice a partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p = Ae^{2x}.$$

Pak

$$y_p' = 2Ae^{2x},$$

$$y_p'' = 4Ae^{2x}.$$

Po dosazení do dané rovnice máme

$$4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x},$$

odtud $A = 1$. Proto je obecné řešení dané rovnice

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{2x}.$$

Příklad 32

Řešte rovnici $y'' - 16y' + 64y = 3xe^{8x}$.

$P_n(x) = P_1(x) = 3x$, $q = 8$. Přidružená homogenní rovnice je $y'' - 16y' + 64y = 0$,

Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen $k_{1,2} = 8 = q$. Partikulární řešení dané rovnice hledáme ve tvaru

$$y_p = x^2 (Ax + B) e^{8x}.$$

Platí

$$y_p' = e^{8x} (8Ax^3 + 2Bx + 3Ax^2 + 8Bx^2),$$

$$y_p'' = e^{8x} (64Ax^3 + 64Bx^2 + 48Ax^2 + 6Bx + 64Ax + 2B).$$

Po dosazení do dané rovnice a úpravě máme

$$6Axe^{8x} + 2Be^{8x} = 3xe^{8x},$$

$$6Ax + 2B = 3x,$$

odkud $A = 1/2$, $B = 0$. Hledané obecné řešení dané rovnice je

$$y = C_1 e^{8x} + C_2 x e^{8x} + \frac{1}{2} x^3 e^{8x}$$

3) rovnice tvaru $f(x) = m \cos px$, $f(x) = n \sin px$, $f(x) = m \cos px + n \sin px$, kde m , n , p jsou reálná čísla.

a) Čísla $\pm pi$ nejsou kořeny charakteristické rovnice. Partikulární řešení pak hledáme ve tvaru $y_p = A \cos px + B \sin px$.

b) Čísla $\pm pi$ jsou kořeny charakteristické rovnice. Partikulární řešení pak má tvar

$$y_p = x(A \cos px + B \sin px)$$

Příklad 33

Řešte diferenciální rovnici $y'' - 4y = 3 \sin 2x$.

Charakteristická rovnice příslušné rovnice bez pravé strany má dva reálné kořeny $k_{1,2} = \pm 2$. Čísla $\pm pi$ tedy nejsou kořeny charakteristické rovnice a proto partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Pak je

$$y_p' = -2A \cos 2x + 2B \sin 2x,$$

$$y_p'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Po dosazení do původní rovnice a úpravě dostáváme

$$-8A \cos 2x - 8B \sin 2x = 3 \sin 2x,$$

odtud $A = 0$, $B = -3/8$.

Daná rovnice má tedy obecné řešení

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{3}{8} \sin 2x.$$

Příklad 34

Řešte diferenciální rovnici $y'' + 2y' + 5y = 4 \sin x + 22 \cos x$.

Charakteristická rovnice příslušné homogenní rovnice má kořeny $k_{1,2} = -1 \pm 2i$. Proto partikulární řešení dané rovnice hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned} y_p &= x(A \cos x + B \sin x), \\ y_p' &= (A \cos x + B \sin x) + x(-A \sin x + B \cos x), \\ y_p'' &= (-2A - Bx) \sin x + (2B - Ax) \cos x. \end{aligned}$$

Po dosazení a úpravě je

$$(2B + 2A + 2Bx + 4Ax) \cos x + (2B - 2A + 4Bx - 2Ax) \sin x = 4 \sin x + 22 \cos x$$

Porovnáním dostáváme $A = 4$, $B = 3$.

Potom má daná rovnice obecné řešení

$$y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x + 3 \sin x + 4 \cos x.$$

4) rovnice tvaru $f(x) = e^{qx} P_n(x) \cos px$, $f(x) = e^{qx} P_n(x) \sin px$,
 $f(x) = e^{qx} (P_n(x) \cos px + Q_m(x) \sin px)$.

a) Čísla $q \pm pi$ nejsou kořeny charakteristické rovnice. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p = e^{qx} (\overline{P}_s(x) \cos px + \overline{Q}_s(x) \sin px)$, kde $\overline{P}_s(x)$, $\overline{Q}_s(x)$ jsou mnohočleny stupně $s = \max(m, n)$

b) Čísla $q \pm pi$ jsou kořeny charakteristické rovnice. Pak partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p = x e^{qx} (\overline{P}_s(x) \cos px + \overline{Q}_s(x) \sin px)$

Příklad 35

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = (3x + 2) \sin 2x + (x^2 + x + 2) \cos 2x.$$

Položíme-li $q = 0$, $p = 2$, $P_n(x) = P_2(x) = x^2 + x + 2$, $Q_m(x) = Q_1(x) = 3x + 2$.

Charakteristická rovnice má kořeny $k_{1,2} = \pm i$, čísla $q \pm pi = \pm 2i$ nejsou kořeny charakteristické rovnice.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C) \cos 2x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 2x,$$

$$y'_p = (2Ax + B + 2Dx^2 + 2Ex + 2F) \cos 2x + (-2Ax^2 - 2Bx - 2C + 2Dx + E) \sin 2x,$$

$$y''_p = (-4Ax^2 - 4Bx + 8Dx + 2A - 4C + 4E) \cos 2x + (-4Dx^2 - 8Ax - 4Ex - 4B + 2D - 4F) \sin 2x.$$

Po dosazení do dané rovnice a úpravě máme:

$$\begin{aligned} &(-3Ax^2 - 3Bx + 8Dx + 2A - 3C + 4E) \cos 2x + \\ &+ (-3Dx^2 - 8Ax - 3Ex - 4B + 2D - 3F) \sin 2x = \\ &= (x^2 + x + 2) \cos 2x + (3x + 2) \sin 2x. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin mnohočlenů u $\sin 2x$ a $\cos 2x$ dostáváme:

$$\begin{aligned} -3A &= 1, & -3D &= 0, \\ -3B + 8D &= 1, & -8A - 3E &= 3, \\ 2A - 3C + 4E &= 2, & -4B + 2D - 3F &= 2. \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení

$$A = -\frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{28}{27}, D = 0, E = -\frac{1}{9}, F = -\frac{2}{9}.$$

Obecné řešení dané rovnice

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{27}(9x^2 + 9x + 28) \cos 2x - \frac{1}{9}(x + 2) \sin 2x.$$

Pokud je pravá strana rovnice vyjádřena jako součet funkcí dvou různých typů, můžeme určit partikulární řešení tak, že najdeme nejprve partikulární řešení rovnic se stejnou levou stranou a jedna z rovnic bude mít na pravé straně funkci prvního typu, druhá z rovnic bude mít na pravé straně funkci druhého typu. Hledané partikulární řešení je pak součtem obou partikulárních řešení.

Příklad 36

Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^x$.

Partikulární řešení dané rovnice je součtem partikulárních řešení diferenciálních rovnic

$$y'' - 6y' + 9y = 3x, \quad y'' - 6y' + 9y = -8e^x.$$

Charakteristická rovnice má kořeny $k_{1,2} = 3$. Protože nula není kořenem charakteristické rovnice, hledáme partikulární řešení první rovnice ve tvaru $y_p = Ax + B$. Pak je $y'_p = A$, $y''_p = 0$ a po dosazení je

$$-6A + 9Ax + 9B = 3x,$$

odkud $A = 1/3$, $B = 2/9$. Partikulární řešení rovnice je $y_p = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$.

Jelikož číslo 1 také není kořenem charakteristické rovnice, hledáme partikulární řešení druhé rovnice ve tvaru $y_p = Ae^x$. Pak $y'_p = Ae^x$, $y''_p = Ae^x$. Dosadíme a máme

$$Ae^x - 6Ae^x + 9Ae^x = -8e^x,$$

odkud $A = -2$. Partikulární řešení rovnice je $y_p = -2e^x$.

Partikulární řešení dané rovnice je

$$y_p = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} - 2e^x,$$

a hledané obecné řešení dané rovnice je

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} - 2e^x.$$

CVIČENÍ

Řešte diferenciální rovnici

a) $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 24$

$$\left[y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{3}{4} \right]$$

b) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = 4t + 4$

$$\left[y = C_1 + C_2 e^{2t} - t^2 - 3t \right]$$

c) $y'' + y = 2x^3 - x + 2$

$$\left[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x^2 - 13x + 2 \right]$$

d) $y'' - 6y' + 9y = 1 - x^2$

$$\left[y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} - \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{27}x + \frac{1}{27} \right]$$

e) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$

$$\left[y = C_1 + C_2 e^{-5x/2} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x \right]$$

Řešte diferenciální rovnici:

a) $2y'' + 5y' = e^x$

$$\left[y = C_1 + C_2 e^{-5x/2} + \frac{1}{7} e^x \right]$$

b) $y'' + a^2 y = e^x$

$$\left[y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{e^x}{1 + a^2} \right]$$

c) $\frac{d^2 x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 4x = 7e^{3t}$

$$\left[x = C_1 e^t + C_2 e^{4t} - \frac{7}{2} e^{3t} \right]$$

d) $y'' - 2y = x e^{-x}$

$$\left[y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} - (x-2)e^{-x} \right]$$

e) $y'' + y' - 2y = 3x e^x$

$$\left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \frac{1}{6} (3x^2 - 2x) e^x \right]$$

f) $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$

$$\left[y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + \left(\frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{16} x^2 + \frac{1}{32} x \right) e^x \right]$$

Řešte diferenciální rovnici

a) $y'' - 6y' + 9y = \sin 2x$

$$\left[y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{12}{169} \cos 2x + \frac{5}{169} \sin 2x \right]$$

b) $y'' - 2y' + 10y = 37 \cos 3x$

$$\left[y = C_1 e^x \cos 3x + C_2 e^x \sin 3x + \cos 3x - 6 \sin 3x \right]$$

c) $y'' + y = -8 \cos 3x$

$$\left[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos 3x \right]$$

d) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2a \frac{dx}{dt} + 2a^2 x = 5a^2 \sin at$

$$\left[y = C_1 e^{-at} \cos at + C_2 e^{-at} \sin at - 2 \cos at + \sin at \right]$$

e) $y'' - 4y' + 29y = 44 \sin 3x + 28 \cos 3x$

$$\left[y = C_1 e^{2x} \cos 5x + C_2 e^{2x} \sin 5x + 2 \cos 3x + \sin 3x \right]$$

f) $y'' + 121y = \cos 11x - \sin 11x$

$$\left[y = C_1 \cos 11x + C_2 \sin 11x + \frac{1}{11} (\cos 11x + \sin 11x) \right]$$

Řešte diferenciální rovnici

a) $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3x}{5}} \sin \frac{4}{5}x$

$$\left[y = C_1 e^{\frac{3x}{5}} \cos \frac{4}{5}x + C_2 e^{\frac{3x}{5}} \sin \frac{4}{5}x - \frac{1}{8} x e^{\frac{3x}{5}} \cos \frac{4}{5}x \right]$$

b) $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \cos 3x$

$$\left[y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x + \frac{1}{6} x e^{2x} \sin 3x \right]$$

c) $y'' - 4y' + 13y = e^{4x} \cdot 5x \sin 2x$

$$\left[y = C_1 e^{4x} \cos 2x + C_2 e^{4x} \sin 2x - \frac{5}{8} x^2 e^{4x} \cos 2x + \frac{5}{16} x e^{4x} \sin 2x \right]$$

d) $y'' + y = x^2 \sin x$

$$\left[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x^2}{4} \sin x + \left(\frac{x}{4} - \frac{x^3}{6} \right) \cos x \right]$$

e) $4y'' + 8y' = x \sin x$

$$\left[y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \left(\frac{x}{10} + \frac{33}{50} \right) \cos x - \left(\frac{x}{20} + \frac{9}{50} \right) \sin x \right]$$

f) $y'' - y' = e^x \sin x$

$$\left[y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2} (e^x \sin x + e^x \cos x) \right]$$

Řešte diferenciální rovnici

a) $y'' - 3y' + 2y = x + 1 - e^{-2x}$

$$\left[y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x + \frac{5}{4} - \frac{1}{12} e^{-2x} \right]$$

b) $y'' + y = 5 + \cos x$

$$\left[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 5 + \frac{1}{2} x \sin x \right]$$

c) $y'' - 2y' + y = 4e^x + e^{-x} \sin x$

$$\left[y = C_1 e^x + C_2 x e^x + 2x^2 e^x + \frac{1}{25} e^{-x} (4 \cos x + 3 \sin x) \right]$$

d) $y'' - 2y' + 4y = e^{-x} \cos x + e^x \sin x$

$$\left[y = C_1 e^x \cos \sqrt{3}x + C_2 e^x \sin \sqrt{3}x + \frac{1}{26} e^{-x} (3 \cos x - 2 \sin x) + \frac{1}{2} e^x \sin x \right]$$

4. APLIKAČNÍ ÚLOHY

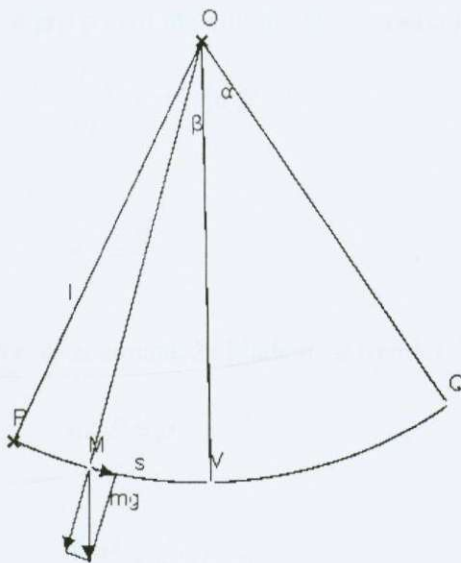
Diferenciální rovnice se uplatňují v oborech jako např. mechanika, fyzika, geometrie, biologie, chemie, ekologie, demografie a v dalších. My si ukážeme několik příkladů použití diferenciálních rovnic v geometrii, fyzice a mechanice.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE V MECHANICE A FYZICE

Velmi často se zde setkáváme s úlohami o pohybu. Rovnice sestavujeme zpravidla na základě druhého Newtonova zákona, který říká, že časová změna hybnosti tělesa (hybnost p je součinem hmotnosti a rychlosti $p = mv$) je rovna výslednici sil, které na těleso působí.

Příklad 37

Jednoduché kyvadlo je hmotný bod (malá těžká kulička) o konstantní hmotnosti m , zavěšená na neroztažitelném vláknu (bez hmotnosti). Vlákno má délku l .



obr.5

poznámka:

Nebudeme přihlížet k odporu vzduchu, budeme vyšetřovat kyvy tohoto kyvadla ve vzduchoprázdném prostoru.

Kyvadlo je zavěšeno v bodě O . Předpokládejme, že je v poloze OM , a označme β úhel MOV , přičemž OV je rovnovážná poloha kyvadla. Tíha kuličky je mg . Síla mg se rozkládá na dvě složky

$$mg \cos \beta \text{ a } mg \sin \beta ,$$

z nichž první způsobuje tah ve vlákně, který se ruší pevností vlákna a pevností závěsu, druhá složka pohání kuličku do rovnovážné polohy V .

Úhlem α měříme výchylku vlákna od rovnovážné polohy. Předpokládáme-li, že gravitační síla je jediná síla, působící na hmotný bod, dostaneme podle druhého Newtonova zákona na pohybovou rovnici ve tvaru

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \beta .$$

Znaménko minus před pravou stranou rovnice znamená opačnou orientaci síly a výchylky.

Protože je

$$s = l\beta ,$$

je dále

$$\frac{d^2(l\beta)}{dt^2} = l \frac{d^2 \beta}{dt^2} = -g \sin \beta ,$$

takže diferenciální rovnice pro pohyb matematického kyvadla je

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} + w^2 \sin \beta = 0 ,$$

kde je

$$w^2 = \frac{g}{l} .$$

Omezme se na malé kmity, to znamená, že klademe v rovnici $\frac{d^2 \beta}{dt^2} + w^2 \sin \beta = 0$

$$\sin \beta \approx \beta .$$

Dostaneme pak rovnici

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} + w^2 \beta = 0 ,$$

jejíž obecné řešení je

$$\beta = A \cos wt + B \sin wt .$$

Dejme tomu, že máme tyto počáteční podmínky:

$$\beta = \alpha, \quad \frac{d\beta}{dt} = 0 \quad \text{pro } t = 0.$$

Počáteční podmínky značí, že jsme na začátku pohybu vychýlili kyvadlo o úhel α z rovnovážné polohy a potom je pustili, aniž jsme mu udělili jakoukoli rychlost.

Protože je

$$\frac{d\beta}{dt} = -Aw \sin wt + Bw \cos wt,$$

dává druhá podmínka $B = 0$;

první podmínka pak dává $A = \alpha$.

Řešením rovnice $\frac{d^2\beta}{dt^2} + w^2 \sin \beta = 0$, která splňuje počáteční podmínky, je tedy dáno výrazem

$$\beta = \alpha \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

Matematické kyvadlo koná za předpokladu $\sin \beta \approx \beta$ jednoduchý harmonický pohyb.

Doba kmitu podle $w^2 = \frac{g}{l}$ je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

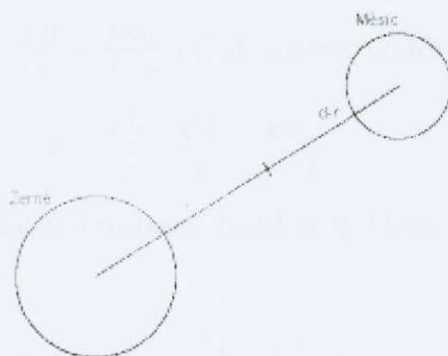
To je doba, za kterou se kyvadlo z polohy P přes V, Q a opět přes V vrací do polohy P zpět. Poloviční doba kmitu

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

je dobou kyvu matematického kyvadla.

Příklad 38

Střela vystřelená vertikálně z povrchu Země směrem k Měsíci, může doletět až na Měsíc, je-li její počáteční rychlost v_0 dosti velká. Určete rychlost, při které střela dosáhne Měsíce, za předpokladu, že se pohybuje pouze v gravitačním poli Země a Měsíce a že vliv ostatních těles zanedbáváme.



obr.6

Podle Newtonova gravitačního zákona se dvě tělesa přitahují silou přímo úměrnou součinu jejich hmotností a nepřímo úměrnou čtverci vzdáleností, proto

$$F = \kappa \frac{M \cdot m}{r^2},$$

kde κ je gravitační konstanta, M hmotnost Země, m hmotnost tělesa a r vzdálenost tělesa od středu Země. Označme $r(t)$ vzdálenost tělesa od středu Země v časovém okamžiku t . Pohybovou rovnici sestavíme na základě druhého Newtonova zákona

$$mr''(t) + \kappa \frac{M \cdot m}{r^2} - \kappa \frac{m_0 m}{(d-r)^2} = 0$$

Vzhledem k tomu, že

$$r''(t) = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} v = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr} v$$

dostaneme z poslední rovnice

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{\kappa M}{r^2} + \frac{\kappa m_0}{(d-r)^2},$$

kde m_0 je hmotnost Měsíce. Rychlost nyní chápeme jako funkci vzdálenosti od středu Země. Odtud separací proměnných plyne

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\kappa M}{r} + \frac{\kappa m_0}{d-r} + C.$$

Konstantu určíme z počáteční podmínky. Víme totiž, že těleso bylo vrženo rychlostí v_0 z povrchu Země. Je tedy

$$v(R) = v_0,$$

kde R je poloměr Země.

Dosažením $r = R$ do $\frac{v^2}{2} = \frac{\kappa M}{r} + \frac{\kappa m_0}{d-r} + C$ dostaneme vzhledem k $v(R) = v_0$

$$C = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\kappa M}{R} - \frac{\kappa m_0}{d-R}$$

Řešením této počáteční úlohy dostaneme závislost rychlosti na vzdálenosti od středu Země.

$$(17) \quad v(r) = \left[2\kappa M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + 2\kappa m_0 \left(\frac{1}{(d-r)} - \frac{1}{(d-R)} \right) + v_0^2 \right]^{1/2}$$

Podmínkou dosažení Měsíce je překonání neutrálního bodu, tj. bodu v němž jsou přitažlivé síly Země a Měsíce v rovnováze. Vzdálenost tohoto bodu od středu Země vyhovuje rovnici

$$\frac{M}{r^2} = \frac{m_0}{(d-r)^2}.$$

Označme její řešení r^* . Nejmenší počáteční rychlost v_0 potřebnou k dosažení neutrálního bodu, určíme z rovnice $v(r^*) = 0$, kde v je dáno vztahem (17).

Po dosažení dostaneme rychlost přibližně 11,1 km/s.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE V GEOMETRII

Nejprve si připomeňme:

- tečna ke křivce $y = f(x)$ v jejím bodě $T[x_0, y_0]$ má směrnici $k_t = f'(x_0)$ a rovnici

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

- normála n v bodě T má směrnici $k_n = -1/f'(x_0)$ a rovnici

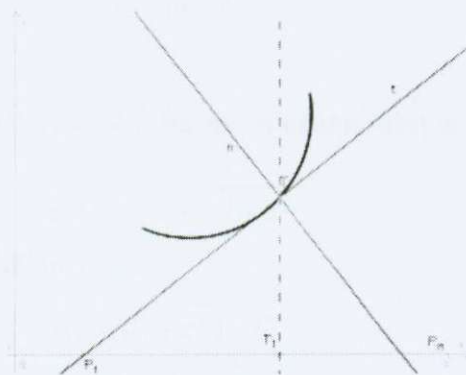
$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{ předpokládáme, že } f'(x_0) \neq 0$$

- délka tečny $|TP_t| = \frac{y_0}{f'(x_0)} \sqrt{1 + (f'(x_0))^2}$

- délka normály $|TP_n| = y_0 \sqrt{1 + (f'(x_0))^2}$

- subtangenta $|T_1P_t| = \frac{y_0}{f'(x_0)}$

- subnormála $|T_1 P_n| = y_0 f'(x_0)$



obr.7

- odchylkou křivky od osy x rozumíme odchylku tečny ke křivce ve společném průsečíku s osou x od osy x , odchylkou křivky od dané přímky rozumíme odchylku tečny ke křivce ve společném průsečíku s přímkou od dané přímky, odchylkou dvou křivek rozumíme odchylku jejich tečen ve společném průsečíku

- poloměr křivosti ρ platí $\rho = \frac{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}{f''(x)}$ ($\rho > 0$ je-li křivka konvexní a $\rho < 0$ je-li konkávní)

Příklad 39

Určete rovnici křivky, jejíž tečna vytíná na ose y úsek, jehož velikost je rovna délce průvodiče bodu dotyku.

Tečna ke křivce v bodě $T[x_0, y_0]$ má rovnici $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, úsek který vytíná tečna na ose y je $y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$

Průvodič dotykového bodu má délku

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Má tedy platit

$$y_0 - f'(x_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Tento vztah platí pro libovolný bod křivky $[x, y]$, tedy platí rovnice

$$y - y'x = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$y' = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Je to homogenní diferenciální rovnice. Řešíme ji užitím substitute $z = \frac{y}{x}$. Dostáváme

$$z'x + z = z - \sqrt{1 + z^2}.$$

Separací proměnných obdržíme řešení

$$x(z + \sqrt{1 + z^2}) = C$$

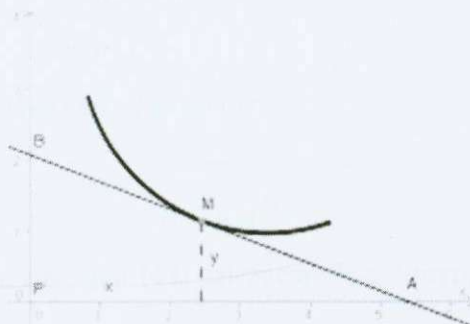
a po navrácení se k původní proměnné y dostaneme

$$y = \frac{C}{2} - \frac{x^2}{2C}.$$

Z této rovnice je vidět, že uvedenou vlastnost mají jisté paraboly.

Příklad 40

Určete křivku, na jejichž tečnách vytínají osy souřadnic úsek konstantní délky a .



obr.8

Tečna ke křivce v bodě $T[x_0, y_0]$ má rovnici $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, na osách souřadnic úseky

$$PB = y_0 - x_0 f'(x_0) \text{ a } PA = \frac{x_0 f'(x_0) - y_0}{f'(x_0)}.$$

Podmínka $|PB|^2 + |PA|^2 = a^2$ je ekvivalentní s rovnicí

$$(y_0 - x_0 f'(x_0))^2 + \frac{(x_0 f'(x_0) - y_0)^2}{(f'(x_0))^2} = a^2.$$

Z toho plyne

$$y_0 = x_0 f'(x_0) \pm \frac{a \cdot f'(x_0)}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}},$$

což je Clairautova diferenciální rovnice.

Položme $f'(x_0) = p$, dostaneme

$$(18) \quad y_0 = x_0 p \pm \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}},$$

zderivujeme

$$f'(x_0) = p + x_0 \frac{dp}{dx_0} \pm \frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}} \cdot \frac{dp}{dx_0},$$

$$p = p + \frac{dp}{dx_0} \left(x_0 \pm \frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}} \right),$$

$$0 = \frac{dp}{dx_0} \left(x_0 \pm \frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}} \right).$$

$$\text{Platí } 0 = \frac{dp}{dx_0} \text{ nebo } x_0 = \mp \frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}}.$$

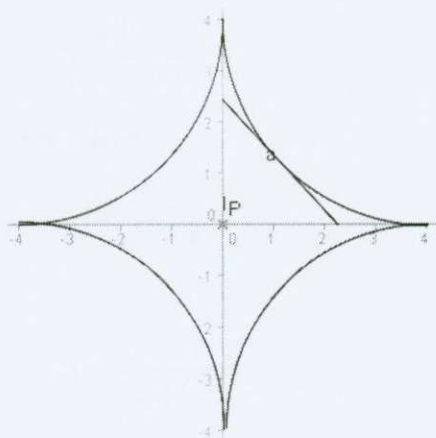
Dosadíme-li do rovnice (18) za x , dostaneme

$$y_0 = \pm \frac{ap^3}{(1 + p^2)^{3/2}}.$$

Vyloučením parametru p z rovnice (18) nalezneme řešení rovnice ve tvaru

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

což je asteroidea.



obr.9

Křivky hledané vlastnosti jsou jednak oblouky asteroidy, bez bodů vratu (hroty), jednak její tečny a křivky skládající se z oblouku asteroidy a její tečny.

Příklad 41

Najděte rovnici křivky s konstantním poloměrem křivosti $\rho = k$ ($k > 0$) takovou, že její tečna v bodě $(x, y) = (0, y(0))$ je rovnoběžná s osou x a která prochází bodem $(k, 0)$.

Necht' hledaná křivka má rovnici $y = f(x)$. Z podmínky $\rho = k$ dostáváme ihned diferenciální rovnici pro hledanou funkci $f(x)$

$$k = \frac{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}{f''(x)}.$$

Označíme-li $f'(x) = z$ máme pro z rovnici

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(1 + z^2)^{3/2}}{k}.$$

Separací proměnných dostaneme řešení

$$\frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{x}{k} + C.$$

Konstantu C určíme z podmínky, že tečna v bodě $(x, y) = (0, y(0))$ má být rovnoběžná s osou x . Proto funkce y musí mít v počátku nulovou směrnici a tedy máme podmínku $f'(0) = 0$, což pro funkci z znamená $z(0) = 0$. Dosazením $x = 0$ do rovnice dostaneme

$$\frac{z(0)}{\sqrt{1+z^2(0)}} = C$$

a tedy $C = 0$. Pro funkci z tedy máme

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{x}{k}.$$

Odtud plyne

$$z(x) = \frac{x}{\sqrt{k^2 - x^2}}.$$

Protože $z(x) = \frac{dy(x)}{dx}$, dostaneme funkci y integrováním funkce z

$$y(x) = \int \frac{x}{\sqrt{k^2 - x^2}} dx + C = -\sqrt{k^2 - x^2} + C.$$

Konstantu určíme z podmínky, že křivka má procházet bodem $(x, y) = (k, 0)$, má platit

$$y(k) = 0.$$

Snadno zjistíme, že musíme volit $C = 0$. Rovnice hledané křivky je

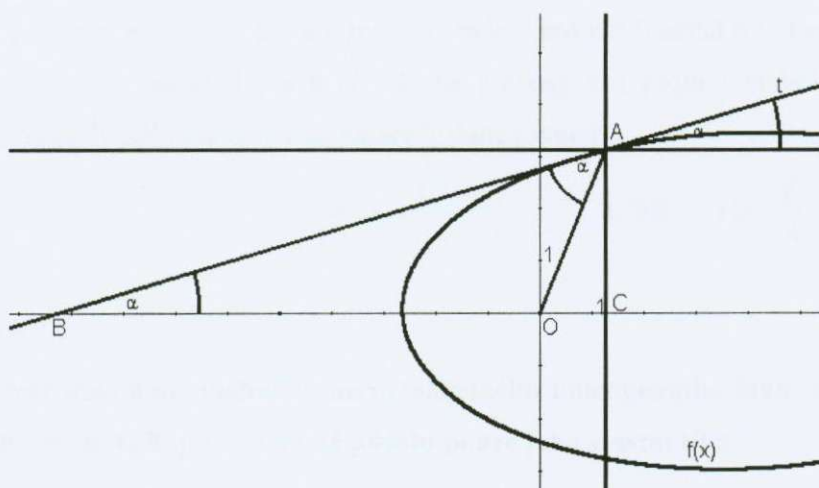
$$y = -\sqrt{k^2 - x^2}, \text{ pro } |x| < k.$$

Je to část kružnice se středem v počátku a poloměrem k ležící v polovině $y < 0$. (Poznamenejme, že horní polokružnici bychom dostali analogicky, kdybychom požadovali, aby křivost byla rovna $-k$.)

Příklad 42

Najděte tvar zrcadla, které odráží světlo bodového zdroje do směru dané polopřímky.

Bez újmy na obecnosti zavedeme kartézský souřadný systém x, y tak, aby počátek splýval se zdrojem světla a kladná poloosa x ležela ve směru, do kterého se mají paprsky odrážet.



obr. 10

Předpokládejme, že tvar zrcadla je určen zatím neznámou křivkou $y = f(x)$. Nejprve sestavíme diferenciální rovnici, kterou budí tato křivka splňovat. Jejím řešením potom získáme hledanou křivku a tím i tvar zrcadla.

Je známo, že světlo se odráží pod stejným úhlem, pod jakým dopadá, proto úhly označené na obrázku jako α s vrcholem v bodě A jsou shodné. Přímka t je tečna ke křivce $y = f(x)$. Je vidět, že i úhel ABC je s nimi shodný a proto trojúhelník AOB je rovnoramenný. Speciálně tedy $OB = OA = \sqrt{x^2 + y^2}$, proto

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{y}{OB + OC} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} = \frac{y(\sqrt{x^2 + y^2} - x)}{x^2 + y^2 - x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} \dots$$

Pro křivku popisující tvar zrcadla jsme dostali diferenciální rovnici

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}.$$

Je to homogenní diferenciální rovnice prvního řádu. Jako řešení dostaneme funkce

$$y(x) = \pm \sqrt{Cx + \frac{C^2}{4}}, \text{ kde } C > 0 \text{ definované pro } x > -\frac{C}{4}.$$

O tom, že to je rovnice paraboly se snadno přesvědčíme jejím umocněním. Dostaneme

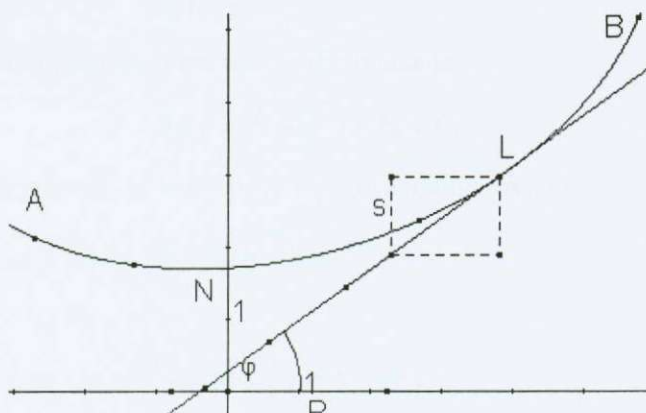
$$y^2 = Cx + \frac{C^2}{4} \quad \text{pro } x > -\frac{C}{4}.$$

Vyloučili jsme její vrchol, ve kterém je $y = 0$, neboť pro $y = 0$ nemá rovnice smysl. Ve vrcholu se paprsky odrážejí právě do kladné poloosy x a proto i vrchol je bodem hledané křivky. Zrcadlo má tedy tvar paraboly dané rovnicí

$$f^2(x) = Cx + \frac{C^2}{4} \quad C > 0, \quad x \geq -\frac{C}{4}.$$

Příklad 43

Najděte tvar dokonale ohebného neroztažitelného homogenního lana, zavěšeného na obou koncích A, B , jestliže na ně působí pouze jeho vlastní tíha.



obr. 11

Nechť $y = f(x)$ je rovnice křivky, jejíž tvar zaujme lano. Za osu y zvolme vertikální přímku jdoucí nejnižším bodem N křivky. Nechť L je libovolný bod křivky. Na část lana mezi body L, N působí tři síly: 1. síla horizontálního tahu H v bodě N ; 2. síla tahu T , působící v bodě L a mající směr tečny křivky v bodě L ; 3. tíha Q uvažované části lana, působící v těžišti; je-li ρ tíha délkové jednotky lana a s délka oblouku LN , je $Q = \rho^2$. Rozložíme-li T na horizontální a vertikální složku a vezmeme-li v úvahu podmínku rovnováhy, dostaneme rovnice

$$T \sin \varphi = \rho s,$$

$$T \cos \varphi = H,$$

kde φ je úhel, který svírá tečna v bodě L s osou x . Dělením obou rovnic dostaneme

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\rho}{H} s$$

neboli, jestliže položíme

$$\frac{\rho}{H} = k \quad (k \text{ je konstanta}),$$

pak

$$y' = ks.$$

Odtud dostaneme rovnici

$$y'' = ks' = k\sqrt{1 + y'^2},$$

která substitucí $y' = z$ přejde v rovnici

$$\frac{z'}{\sqrt{1 + z^2}} = k.$$

Obecné řešení v implicitním tvaru nalezené rovnice je

$$\ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = kx + C_1.$$

Protože v bodě N je $x = 0$, $y' = z = 0$, je $C_1 = 0$ a máme rovnici

$$z + \sqrt{1 + z^2} = e^{kx}$$

neboli

$$z = y' = \frac{1}{2}(e^{kx} - e^{-kx}),$$

jejíž řešení je

$$y = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}) + C_2.$$

Zvolíme-li délku $PN = \frac{1}{k}$, potom $C_2 = 0$ a dostaneme rovnici křivky ve tvaru

$$y = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}),$$

označíme-li $\frac{1}{k} = a$, bude

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{x/a} + e^{-x/a} \right)$$

rovnice křivky, která se nazývá řetězovka.

CVIČENÍ

1) Na bod o hmotnosti m působí síla F (F je konstantní). Přihlížíme-li ke tření, které vzniká při pohybu bodu, platí rovnice $m \frac{dv}{dt} = F - \lambda v$, kde v je rychlost pohybu a λ součinitel tření. Máme určit časový průběh rychlosti, jestliže pro $t = 0$ je $v = 0$.

$$\left[v = \frac{F}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m} t} \right) \right]$$

2) Určete rovnice křivek, pro něž ve všech jejích bodech platí:

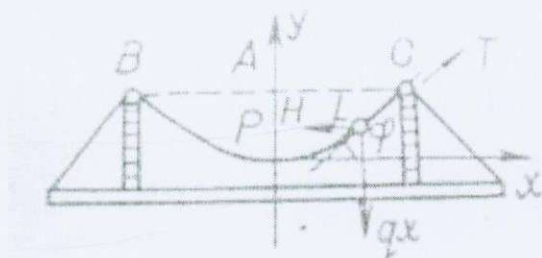
- a) subnormála je konstantní a je rovna číslu $p > 0$
- b) subtangenta je n -krát větší než x -ová souřadnice bodu dotyku.

$$\left[y^2 = 2px + c \right]$$

3) Pro kterou křivku je odchylka normály od průvodiče rovna dvojnásobku odchylky průvodiče od osy x .

$$\left[(x^2 + y^2)^2 + C^2 (y^2 - x^2) = 0, \text{lemniskáta} \right]$$

4) Zatížení lana visutého mostu je na každou jednotku délky vodorovného nosníku rovno q (N/m). Najděte jeho tvar, jestliže sílu působící v dolním bodě lana položíte rovnou $F(N)$. Přitom nepřihlížejte k vlastní tíze lana.



Návod:

Zvolte na oblouku PC libovolný bod $L = [x, y]$. Na část lana PL budou působit tři síly: vodorovná H (směrem doleva od bodu L), svislá, tj. tíha qx , a síla ve směru tečny (jež svírá úhel φ s osou x), vzniklá tahem T doprava od bodu L . Aby bylo lano v rovnováze, musí být součet pravoúhlých průmětů sil do os x a y roven nule. Je tedy

$$\sum_{i=1}^3 X_i = -F + T \cos \varphi = 0, \quad \sum_{i=1}^3 Y_i = -gx + T \sin \varphi = 0$$

odtud

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{qx}{F}.$$

[Tvar lana je parabola o rovnici

$$x^2 = \frac{2F}{q} \left(y + \frac{C}{F} \right)]$$

5. ZÁVĚR

Diplomová práce je pojata jako „učebnice“, která má čtenáře seznámit s řešením a metodikou obyčejných diferenciálních rovnic.

Jedním z cílů této práce, je přiblížit čtenáři pojem diferenciální rovnice. V každé kapitole je popsán typ dané rovnice a její vlastnosti. Pro názornost si čtenář může vyzkoušet vypočítat příklad podle předlohy a na závěr procvičit každý typ rovnice na cvičení a ověřit uvedenými výsledky.

Pro matematiku je důležitá představivost a názornost, proto jsem pro lepší pochopení uvedla i několik obrázků.

Dalším z mých cílů je ukázat, že matematika není samoučelná a s její pomocí lze řešit i mnohé úlohy praktického významu. Je možné, že odhalení a pochopení vzájemných souvislostí matematiky s daným oborem pomůže jak k lepšímu pochopení problematiky oboru, tak i k nalezení lepšího vztahu studentů k matematice.

Literatura:

BARTÁK, J. *Diferenciální rovnice*. Praha: PF UK, 1984

BARTÁK, J. *Užití diferenciálních rovnic*. Praha: PF UK, 1984

DULA, J. a HÁJEK, J. *Obyčejné diferenciální rovnice – Cvičení z MA*. Brno: PF MU, 1996

KOTVALT, V. *Základy matematiky pro biologické obory*. Praha: UK, 2005

NÝDL, V. a KLUFOVÁ, R. *Matematika část 2 – Matematická analýza*. České Budějovice: Jihočeská univerzita – Zemědělská fakulta, 1998

REKTORYS, K. a spolupracovníci. *Přehled užití matematiky*. Praha: Prometheus, 1963

RYCHNOVSKÝ, R. *Obyčejné diferenciální rovnice a jejich řešení*. 2. vydání Praha: SNTL, 1972