

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

DĚLITELNOST PRO STUDENTY
UČITELSTVÍ 1. STUPNĚ ZŠ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jana HRONOVÁ

České Budějovice, duben 2009

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu literatury. Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích 27. 4. 2009

.....

Jana Hronová

Chtěla bych poděkovat vedoucí práce PaedDr. Daně Tržilové, CSc. za vedení práce, odborný dohled a poskytnutí důležitých rad při zpracování diplomové práce.

Mé další poděkování patří také autistické žákyni Míše a všem členům pedagogického sboru ZŠ Ledenice za vstřícnost a spolupráci.

Anotace

Cílem diplomové práce je vytvoření studijního materiálu shrnujícího problematiku dělitelnosti pro potřeby studentů učitelství 1. stupně ZŠ.

První část diplomové práce se zabývá teoretickým zpracováním daného tématu.

Druhou částí této práce je sestavení sbírky úloh postihující dané učivo ze zábavného pohledu, které bude sloužit k rozšíření dovedností v daném učivu a k rozvoji logického myšlení studentů. Tato sbírka bude též využitelná k budoucí praxi učitelů, a to jako zásobník netradičních úloh v zájmové matematice.

Součástí práce je sestavení a vyhodnocení testů pro studenty, a to sice na začátku a na konci studia. Na základě provedených testů budeme srovnávat úroveň dovedností v oblasti dělitelnosti před a po probrání daného učiva.

Problematiku dělitelnosti jsem pro zajímavost zkoušela testovat i na desetileté autistické žákyni, které asistuji při vyučování. O poznatky z těchto testů jsem rozšířila svou diplomovou práci.

Klíčová slova: dělitelnost, 1. stupeň ZŠ, primární matematika, autismus

Annotation

The subject of the diploma thesis is the creation of study material relating the subject of theory of dividing for students trained to be teachers at primary school.

In the first part of the thesis I am concentrating on theory of mentioned problem.

The main target of the thesis in the second part is the collection of exercises for the students.

In the third part of these I am checking the level of knowledge in the subject of divisions in natural numbers with ten years old autistics student that I take care during school instruction. The results of these tests are mentioned in the thesis.

Key words: divisibility, primary school, primary mathematics, autism

OBSAH

1. Úvod.....	9
2. Historie.....	10
2.1. Historie přirozených čísel	10
2.2 Historie dělitelnosti	11
3. Dělitelnost	12
3.1 Dělitelnost obecně.....	12
3.2 Znaky dělitelnosti.....	13
3.2.1 Dělitelnost 2, 5 a 10	14
3.2.2 Dělitelnost 4 a 25	14
3.2.3 Dělitelnost 3 a 9	15
3.2.4 Dělitelnost 8	15
3.2.5 Dělitelnost 11	16
3.2.6 Dělitelnost 7	17
3.2.7 Společný znak dělitelnosti sedmi, jedenácti a třinácti	17
3.2.8 Společný znak dělitelnosti třemi, sedmi a devatenácti.....	18
3.2.9 Zajímavost na konec	18
4. Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek.....	20
4.1 Největší společný dělitel	20
4.2 Nejmenší společný násobek	21
5. Prvočísla, čísla složená a rozklad přirozeného čísla v součin prvočísel	24
5.1 Prvočísla vs. čísla složená	24
5.2 Prvočísla.....	26
5.3 Prvočíselný rozklad	29
6. Dělitelnost na 1. stupni ZŠ	31
6.1 Dělitelnost na 1. stupni ZŠ	31
6.2 Proč nedělíme nulou?	34
6.3 Dělení se zbytkem	34
7. Testování	36
7.1 Test – varianta A	37
7.1.1 Úloha č. 1	39
7.1.2 Úloha č. 2	41

7.1.3 Úloha č. 3	43
7.1.4 Úloha č. 4	45
7.1.5. Úloha č. 5	47
7.2 Test – Varianta B	49
7.2.1 Úloha č. 1	51
7.2.2 Úloha č. 2	53
7.2.3 Úloha č. 3	55
7.2.4 Úloha č. 4	56
7.2.5 Úloha č. 5	58
7.3 Výsledky testování	60
8. Testování autistické žákyně	61
8.1 Autismus obecně	61
8.1.1 Úloha č. 1	64
8.1.1 Úloha č. 1	64
8.1.3 Úloha č. 3	70
8.1.4. Úloha č. 4	72
8.1.5 Úloha č. 5	74
8.1.6 Úloha č. 6	77
8.1.7 Úloha č. 7	79
9. Sbírka úloh	81
9.1. Dělitelnost	81
9.1.1 Vzorový příklad	81
9.1.2 Úlohy.....	81
9.2 Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek.....	84
9.2.1 Vzorový příklad	84
9.2.2 Úlohy.....	84
9.3 Prvočísla a čísla složená.....	86
9.3.1 Vzorový příklad	86
9.3.2 Úlohy.....	86
9.4 Řešení úloh.....	88
9.4.1 Dělitelnost	88
9.4.2 Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek.....	89

9.4.3 Prvočísla a čísla složená.....	90
10. Závěr	91
11. Seznam citací	92
12. Použitá literatura	93
13. Seznam příloh.....	96

1. Úvod

Cílem této diplomové práce je sestavení studijního materiálu pro potřeby studentů učitelství 1. stupně ZŠ. Zaměřím se jak na teoretické zpracování témat související s dělitelností, tak i na to, jak a kdy se s dělitelností žáci setkávají buď to v učebních osnovách, anebo i v běžném životě.

Chtěla bych vychovat studenty k tomu, aby při řešení úloh používali spíše logické myšlení oproti „selskému“ uvažování.

V samotném řešení úloh byl měl být kladen důraz na odstranění formalismu. Úlohy by měly žáka přitahovat svou zajímavostí, vést k zamyšlení se nad problémem a hledání různých řešení. Vypracováním sbírky bych chtěla u studentů rozšířit jejich osvojené i nově získané vědomosti.

Sestavení této diplomové práce je motivováno nedostatkem odborné literatury shrnující právě toto téma.

Tato práce by měla sloužit studentům jako metodická příručka a zároveň podpora při studiu.

Součástí práce je i testování, kde bych chtěla orientačně zjistit úroveň znalostí studentů oboru učitelství pro 1. stupeň ZŠ před probíráním tématického celku o dělitelnosti a po něm. Pro tyto účely bych chtěla sestavit a zadat testy, a to ve dvou variantách – před absolvováním kurzu o dělitelnosti a po něm, přičemž získáme informace o zlepšení těchto dovedností.

Pro zajímavost svou práci rozšířím o poznatky, které získám při testování dělitelnosti u desetileté autistické žákyni, které asistuji při vyučování.

2. Historie

2.1. Historie přirozených čísel

Počítání s přirozenými čísly patří mezi nejstarší matematické činnosti lidí. Dokud se čísla zapisovala nepozičním způsobem, bylo písemné počítání téměř nemožné. Výpočty se dělaly na deskách rozdělených čarami na políčka vyznačujícími řády – jednotky (pětky), desítky (padesátky), stovky atd. Položením kamínků nebo paliček na příslušná místa vznikl na desce poziční záznam čísel. Přemisťováním předmětů na desce podle příslušných pravidel získal počtář výsledek, který pak zapsal nepozičním způsobem. Tento způsob počítání byl poměrně rychlý a udržel se dlouho v novověku. Desky na počítání se postupně upravovaly na počítadla s předměty, které se navlékaly na dráty. Zajímavostí je, že porovnávání pomocí kamenů jako počítání se anglicky řekne calculate, které je odvozeno z latinského slova calculus - oblázek.

Poziční systémy umožnily písemné počítání s přirozenými čísly. Šedesátkový systém měl příliš velkou násobilku, proto v Babylonu pracovali s tabulkami násobků, mocnin a převrácených čísel. Desítkový systém vyžaduje zapamatovat si mnoho únosných počtových spojů a potom se v něm dá počítat (písemně) bez dalších pomůcek.

Mechanické počítací stroje se začaly vyrábět zhruba na konci 19. století a realizovaly desítkový poziční systém. Elektrické počítací stroje přijímaly a vydávaly záznamy v desítkovém systému, ale „uvnitř“ pracovaly s dvojkovým systémem nebo se smíšenými systémy.

2.2 Historie dělitelnosti

Základy nauky o dělitelnosti čísel sahají až do starověku. Pravidla o dělitelnosti čísla 2, 5 (snad i 9) poznali již Indové a pravidla o dělitelnosti čísla 3 a 11 Arabové. Vlastnosti celých čísel soustavně studoval řecký matematik Pythagoras (6. – 5. stol. př. n. l.), přezdívaný otec čísel, a jeho žáci. Znali pojmy: sudý, lichý, prvočíslo, složené číslo, spřátelená čísla a jiné. Řecký matematik a geometr Euklides (žil kolem r. 325 př. n. l.), který ve svém hlavním díle „Základy“ shrnul všechny matematické vědomosti známé do té doby, píše o soudělitelných číslech, o neomezeném počtu prvočísel, o vyhledávání největší společné míry a nejmenšího společného násobku. Způsob, jak vyhledat prvočísla, ukázal Eratosthenés (276 – 194 př. n. l. v Alexandrii), na jehož památku jej nazýváme „Eratosthenovým sítím“. Nesmíme opomenout ani helénskému matematikovi Diofantose (okolo r. 250 př. n. l.), považovaného za otce algebry.

„Některé vlastnosti celých čísel poznávali lidé již v době, kdy znali jen čtyři základní početní výkony. Studium takových vlastností, a to zejména zkoumání dělitelnosti čísel celých, vedlo ke vzniku samostatného oboru teoretické aritmetiky, pro nějž se od počátku 19. století ustálil název *číselná teorie* nebo *teorie čísel*. Tyto názvy se vžily, přestože nevystihují dost dobře obsah tohoto oboru matematiky, který označují.“ [1]

Číselná teorie patří k nejstarším oborům matematiky. Od Indů, Řeků a Arabů se dostaly vědomosti o vlastnostech čísel do Evropy, kde se dospělo k novým výsledkům až po dlouhé době strnulosti. Za zmínku stojí celá řada významných matematiků všech dob. Zásahu o nové důležité poznatky v oblasti teorie čísel má vynikající francouzský matematik Pierre de Fermat (1601 – 1665), který byl mimo jiné i spoluzakladatelem tohoto oboru v jeho moderní podobě. Za nejlepšího matematika 18. stol. a za jednoho z nejlepších matematiků vůbec je považován Švýcar Leonhard Euler (1707 – 1783), který nejenže dokázal řadu Fermatových vět, ale přispěl i značným počtem vět nových. Zanedlouho pak slavný matematik A. M. Legendre (1752 – 1833) a německý K. F. Gauss (1777 – 1855) podali ucelenou nauku o celých číslech (tzv. teorii čísel), do které patří i část o dělitelnosti čísel.

3. Dělitelnost

3.1 Dělitelnost obecně

Ze všech základních početních úkonů je nejosobitější dělení. Má zvláštní vlastnosti, ba můžeme říci, že má zvláštní „povahu“. Vezměte třeba počítání s nulou. Při všech ostatních početních úkonech je nula číslo jako každé jiné. Můžeme ji přičítat i odčítat, může být i činitelem při násobení; nikdy však nemůže být dělitelem. Žádné číslo, žádný algebraický výraz nesmíme nulou dělit.¹ To je důležitá vlastnost dělení, a jestliže ji nedbáme, snadno se můžeme zmýlit; můžeme třeba „dokázat“ libovolné vědomě nesprávné tvrzení. [2]

Zvláštní povaha dělení se projevuje i v jisté matematické teorii věnující velkou pozornost vlastnostem celých čísel a zákonům, jak s nimi počítat. Vezmeme-li třeba v úvahu množinu celých (kladných a záporných) čísel, budou zajímavosti opět jen v jediném úkonu: v dělení. Právě při něm si nevystačíme jen s celými čísly.

Říkáme, že celé číslo a je *dělitelné* celým číslem b , jestliže mezi celými čísly existuje takové číslo c , které vynásobeno číslem b dává přesně číslo a ; není-li takové číslo, pak a *není dělitelné* b . [2]

Všechny tyto „zvláštnosti“ dělení mimo jiné způsobily, že vznikly pojmy, jako jsou prvočísla, největší společný dělitel, nejmenší společný násobek, znaky dělitelnosti čísel; postupné rozvíjení teorie dělitelnosti čísel vedlo k rozsáhlé matematické disciplíně – k tzv. teorii čísel.

Jedním z hlavních cílů vyučování matematiky na prvním stupni základních škol je naučit pojem přirozeného čísla, operace s nimi a jejich vlastnosti. Je to nelehký úkol už jenom proto, že tato látka se rozkládá na delší období. Aby některá důležitá fakta a souvislosti ve vyučování neunikaly, je potřebné, aby učitelé ovládali v patřičném rozsahu teorii přirozených čísel. [3]

Dělitelnost je vlastnost celých čísel. Celé číslo p je dělitelné nenulovým číslem q (číslo q dělí p), jestliže existuje takové celé číslo k , pro které platí že $p = kq$.

¹ To vyplývá přímo z definice dělení: Dělit číslo a číslem b znamená najít takové číslo c , aby platilo: $b \cdot c = a$.
Je zřejmé, že tato definice nemá smysl, je-li $b = 0$. Říkáme, že dělení nulou není definováno.

Například číslo 27 je dělitelné třemi, neboť $27 = 9 \cdot 3$. Alternativě je p dělitelné q , jestliže zbytek po dělení $p \mid q$ je nula.

Obecně:

- číslo p se nazývá dělenec,
- číslo q se nazývá dělitel,
- číslo k se nazývá podíl čísla p při dělení číslem q ,
- v oboru celých čísel mají čísla p a $-p$ tytéž dělitele,
- čísla 1, -1, p a $-p$ se nazývají nevlastní (triviální) dělitelé čísel p a $-p$
- existují-li ještě další dělitelé, nazývají se vlastní dělitelé (netriviální),
- každé celé číslo mimo nuly je dělitelem nuly, nula ale není dělitelem žádného čísla různého od nuly.
- Pokud b je dělitelné a , píše se $a \mid b$ (a dělí b) [4]

Je-li přirozené číslo a dělitelné dvěma nesoudělnými čísly b , c , je dělitelné i jejich součinem bc .

3.2 Znaky dělitelnosti

Jedním z nejdůležitějších způsobů, kterým řešíme úlohy, je ten, že řešení dané úlohy převedeme na řešení jednodušší. Například máme-li zjistit, zda některé vícemístné číslo je dělitelné jiným daným číslem. Chceme-li na takovou otázku odpovědět, často vůbec nemusíme daná čísla dělit. Stačí jen zjistit, jak je dělitelné některé jiné číslo, nikoli mnohociferné, které sestavíme z číslic daného čísla podle nějakého pravidla. Takto vznikají znaky dělitelnosti čísel. Vztahují se na čísla napsaná v desítkové soustavě.

Znaky dělitelnosti jsou věty umožňující zjistit dělitelnost bez provedení dělení. Základní větou pro odvození znaků dělitelnosti je následující věta:

Je-li celé číslo a součtem dvou celých čísel, z nichž jedno je násobkem celého čísla b , pak druhé dává při dělení číslem b též zbytek jako číslo a . [5]

Při odvozování znaků dělitelnosti budeme vycházet ze zápisu přirozeného čísla a v desítkové soustavě, který má tvar

$$a = c_0 + c_1 \cdot 10 + c_2 \cdot 10^2 + \dots + c_n \cdot 10^n, \quad (1)$$

kde cifra c_0 je cifra nultého řádu a představuje počet jednotek, cifra c_1 je cifra řádu prvního a představuje počet desítek, cifra c_2 je cifra řádu druhého a představuje počet stovek, [5]

3.2.1 Dělitelnost 2, 5 a 10

Rovnosti (1) přepíšeme takto:

$$a = c_0 + 10 \cdot (c_1 + c_2 \cdot 10 + \dots + c_n \cdot 10^{n-1}), \text{ tj.}$$

$$a = c_0 + 2 \cdot 5 \cdot (c_1 + c_2 \cdot 10 + \dots + c_n \cdot 10^{n-1}), \text{ tedy}$$

$$a = c_0 + 2 \cdot u, \quad \text{kde} \quad u = 5 \cdot (c_1 + c_2 \cdot 10 + \dots + c_n \cdot 10^{n-1}),$$

$$a = c_0 + 5 \cdot u', \quad \text{kde} \quad u' = 2 \cdot (c_1 + c_2 \cdot 10 + \dots + c_n \cdot 10^{n-1}),$$

$$a = c_0 + 10 \cdot u'', \quad \text{kde} \quad u'' = c_1 + c_2 \cdot 10 + \dots + c_n \cdot 10^{n-1}.$$

Závěr: Dělíme-li přirozené čísla vyjádřené v desítkové soustavě dvěma (pěti, resp. deseti) dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme dvěma (pěti, resp. deseti) jeho cifru řádu nultého.

Speciálně: Přirozené číslo vyjádřené v desítkové soustavě je dělitelné dvěma (pěti, resp. deseti) právě tehdy, když je dělitelná dvěma (pěti, resp. deseti) jeho cifra řádu nultého. [5]

Číslo, které je dělitelné dvěma, se nazývá *sudé*; číslo, které není dělitelné dvěma, se nazývá *liché*. Nula je číslo sudé.

3.2.2 Dělitelnost 4 a 25

Za předpokladu, že přirozené číslo a je alespoň trojciferné, přepíšeme rovnost (1) do tvaru

$$a = (c_0 + c_1 \cdot 10) + 4 \cdot 25 \cdot (c_2 + \dots + c_n \cdot 10^{n-2}), \text{ tj.} \quad (2)$$

$$a = (c_0 + c_1 \cdot 10) + 4 \cdot v, \text{ kde } v = 25 \cdot (c_2 + \dots + c_n \cdot 10^{n-2}).$$

Přirozené číslo v desítkové soustavě alespoň trojciferné dává při dělení čtyřmi též zbytek, jako když dělíme čtyřmi jeho poslední dvojčíslí.

Z rovnosti (2) dostáváme dále *kritérium dělitelnosti 25*. Přirozené číslo v desítkové soustavě alespoň trojciferné je dělitelné 25 právě tehdy, když je 25 dělitelné jeho poslední dvojčíslí.

Závěr: Přirozené číslo v desítkové soustavě alespoň trojciferné je dělitelné čtyřmi (dvaceti pěti) právě tehdy, když je dělitelné čtyřmi (dvaceti pěti) jeho poslední dvojčíslí.

3.2.3 Dělitelnost 3 a 9

Pro nenulové přirozené mocniny čísla 10 platí $10 = 3 \cdot 3 + 1$, $10^2 = 3 \cdot 33 + 1$, $10^3 = 3 \cdot 333 + 1$, ... Obecně lze matematickou indukcí dokázat, že platí rovnost

$$10^k = 3 \cdot x^k + 1, \quad \text{kde } k \text{ je nenulové přirozené číslo. Dosazením do rovnosti (1)}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} a &= c_0 + c_1 \cdot (3 \cdot x_1 + 1) + c_2 \cdot (3 \cdot x_2 + 1) + \dots + c_n \cdot (3 \cdot x_n + 1) = \\ &= (c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n) * + 3 (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n) \end{aligned}$$

* (Pozn. součet cifer čísla a , $b = 3$)

Protože $10 = 9 \cdot 1 + 1$, $10^2 = 9 \cdot 11 + 1$, $10^3 = 9 \cdot 111 + 1$, ..., můžeme podobně postupovat i pro $b = 9$.

Závěr: Přirozené číslo vyjádřené v desítkové soustavě je dělitelné třemi (devíti) právě tehdy, když je třemi (devíti) dělitelný ciferný součet tohoto čísla. [3]

3.2.4 Dělitelnost 8

Je-li číslo a alespoň čtyřciferné, můžeme zapsat rovnost (1) do tvaru:

$$a = c_0 + c_1 \cdot 10 + c_2 \cdot 10^2 + 10^3 (c_3 + c_4 \cdot 10 + \dots + c_n \cdot 10^{n-3}).$$

Protože $10^3 = 8 \cdot 125$, můžeme položit $b = 8$, $c = c_0 + c_1 \cdot 10 + c_2 \cdot 10^2$. Potom c označujeme číslo zapsané číslicemi druhého, prvního a nultého řádu daného čísla a .

Závěr: Alespoň čtyřciferné přirozené číslo vyjádřené v desítkové soustavě dává při dělení osmi stejný zbytek jako číslo zapsané jeho třemi ciframi nejnižších řádů. [3]

Ve školních učebnicích se obvykle uvádí tento znak dělitelnosti osmi: Je-li číslo, které tvoří poslední tři číslice daného čísla, dělitelné osmi, je i dané číslo dělitelné osmi. Nic se však nikde neříká o tom, jak rychle poznáme, zda je takové trojmístné číslo

skutečně dělitelné osmi. Dělitelnost trojmístného čísla osmi není přeci vždy hned zřejmá a je zapotřebí skutečně dělení provést. Zcela přirozené vzniká otázka: Není možné zjednodušit znak osmi? Možné to je, jestliže jej doplníme zvláštním znakem dělitelnosti trojmístného čísla osmi.

Korděmskij a kol. uvádí, že „osmi je dělitelné každé trojmístné číslo, u něhož součet dvojmístného čísla složeného z číslic stovek a desítek² s polovinou počtu jednotek je dělitelný čtyřmi.“ ([2], s. 223)

3.2.5 Dělitelnost 11

Přirozené číslo vyjádřené v desítkové soustavě je dělitelné jedenácti právě tehdy, když je jedenácti dělitelný součet cifer sudých řádů zmenšených o součet cifer řádů lichých daného čísla. [5]

Korděmskij a kol. definoval znak jedenácti trochu jinak. *Rovná-li se ciferný součet lichých míst daného čísla cifernému součtu sudých míst, nebo je-li rozdíl těchto dvou ciferných součtů dělitelný jedenácti, je i dané číslo dělitelné jedenácti.*

Toto tvrzení platí také obráceně:

Nerovná-li se uvedené ciferné součty nebo není-li jejich rozdíl dělitelný jedenácti, není ani dané číslo jedenácti dělitelné. ([2], s. 219)

Příklad: Je číslo 3 528 041 dělitelné jedenácti?

Řešení: $S_1 = 3 + 2 + 0 + 1 = 6$

$$S_2 = 5 + 8 + 4 = 17$$

$$S_2 - S_1 = 11$$

$S_2 - S_1$ je dělitelné 11. Podle uvedeného pravidla tedy číslo 3 528 041 musí být dělitelné jedenácti. Dáme-li si práci a číslo skutečně vydělíme, přesvědčíme se, že nás znak dělitelnosti skutečně neoklamal.

² Místo desítek, stovek, tisícovek atd. říkáme odborněji jednotky 1. řádu, 2. řádu, 3. řádu atd. ($10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1\,000 = 10^3 \dots$ atd.)

3.2.6 Dělitelnost 7

Číslo 7 si lidé z nějakého důvodu zvláště oblíbili, a tak jej vkládali do svých písní, pohádek, názvů, pořekadel (sedmikráska, sedm let jsem sloužil, sedmero krkavců, ...). Číslo 7 však není jen bohatě zastoupeno v různých průpovídkách, ale vyniká i počtem znaků, podle nichž poznáme, že je nějaké číslo dělitelné sedmi. Kritéria pro dělitelnost sedmi jsou však poměrně složitější, proto zde uvádím pouze jedno (dle mého názoru nejzajímavější).

Znásobte dvěma poslední číslici a odečtěte druhou číslici zprava, výsledek znásobte dvěma a přičtěte třetí číslici zprava atd.; střídějte tak odčítání a sčítání, a kde je to možné, odečítejte od výsledku sedm nebo násobek sedmi. Jestliže konečný výsledek je $|$ není dělitelný sedmi, je $|$ není dělitelné sedmi také zkoumané číslo. [2]

Příklad: Je číslo 27 587 dělitelné sedmi?

Řešení: $7 \cdot 2 = 14$ $14 - 8 = 6$
 $6 \cdot 2 = 12$ $12 + 5 = 17$
 $17 \cdot 2 = 34$ $34 - 7 = 27$
 $27 \cdot 2 = 54$ $54 + 2 = 56$
 $56 : 7 = 8$
 $27\ 587 : 7 = 3\ 941$

Číslo 27 587 je tedy skutečně dělitelné sedmi.

3.2.7 Společný znak dělitelnosti sedmi, jedenácti a třinácti

V tabulce prvočísel následují čísla 7, 11 a 13 po sobě. Jejich součin je $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1\ 001 = 1\ 000 + 1$.

Číslo $1\ 000 + 1$ je tedy dělitelné sedmi, jedenácti i třinácti. Vynásobíme-li libovolné trojmístné číslo číslem 1 001, bude se součin skládat ze stejných číslic jako čitatel, ale tyto číslice se budou dvakrát opakovat.

Příklad: $abc \cdot 1\ 001 = abcabc$

Všechna čísla typu $abcabc$ jsou tedy dělitelná sedmi, jedenácti i třinácti

Příklad: Urči, zda je číslo 42 623 295 dělitelné sedmi, jedenácti a třinácti.

Řešení: Dané číslo rozdělíme zprava doleva na skupiny po třech číslicích. Levá krajní skupina může obsahovat i méně číslic. Dané číslo bude nyní vypadat takto:

$$42\,623\,295 = 295 + 623 \cdot 1\,000 + 42 \cdot 1\,000\,000$$

čili

$$\begin{aligned} 42\,623\,295 &= 295 + 623(1\,000 + 1 - 1) + 42(1\,000\,000 - 1 + 1) = \\ &= (295 - 623 + 42) + [623(1\,000 + 1) + 42(1\,000\,000 - 1)] \end{aligned}$$

Číslo v hranaté závorce je vždy dělitelné sedmi, jedenácti i třinácti. To znamená, že dělitelnost daného čísla sedmi, jedenácti a třinácti zcela závisí na tom, zda je těmito čísly dělitelné číslo v první, okrouhlé závorce.

Považujeme-li každou skupinu (trojčíslí) daného čísla za samostatné číslo a označíme-li skupinu na lichém místě za „lichou“ a skupinu na sudém místě za „sudou“, můžeme definovat společný znak dělitelnosti sedmi, jedenácti a třinácti takto:

Je-li rozdíl součtů lichých a sudých skupin daného čísla dělitelný sedmi, nebo jedenácti, nebo třinácti, je i dané číslo dělitelné sedmi, nebo jedenácti, nebo třinácti. [2]

3.2.8 Společný znak dělitelnosti třemi, sedmi a devatenácti

Korděmskij ve své knize uvádí: Součin prvočísel 3, 7 a 19 je 399.

Je-li číslo $100a + b$ (kde b je dvojmístné číslo a a je libovolné celé číslo kladné) dělitelné číslem 399 nebo některým z jeho násobků, je zároveň týmž číslem dělitelné i číslo $a + 4b$.

Oddělíme od daného čísla poslední dvě číslice a k zbylému číslu přičteme číslo oddělené, ale znásobené čtyřmi; je-li potřebí, opakujeme tak dlouho, až dostaneme výsledek, který je zřejmě dělitelný čísly 3, 7 a 19 nebo číslem 399. Jestliže výsledek je / není dělitelný číslem 399 nebo jeho prvočiniteli, je / není číslem 399 nebo jeho prvočiniteli dělitelné také dané číslo. ([2], s. 514)

3.2.9 Zajímavost na konec

Na závěr kapitoly bych ráda připomněla čtyři podivuhodná desetimístná čísla:

2 438 195 760

4 753 869 120

3 785 942 160

4 876 391 520

Každé z nich obsahuje všechny číslice od 0 do 9, přitom však každou číslici jen jednou, a všechna tato čísla jsou dělitelná čísly 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 a 18. [2]

4. Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek

4.1 Největší společný dělitel

Dělitel přirozeného čísla a je každé přirozené číslo b takové, že existuje přirozené číslo c , pro které je $a = b \cdot c$. Říká se pak také, že číslo a je dělitelné číslem b . [6]

Společným dělitelem dvou nebo několika čísel nazýváme číslo, které je dělitelem každého z daných čísel. [7]

Každé přirozené číslo je dělitelné číslem 1 a samo sebou. [8]

Číslo 1 se jmenuje *samozřejmý společný dělitel*. Taková dvě čísla, která mají pouze samozřejmé společného dělitele, nazývají se *nesoudělná čísla*. Čísla, která mají aspoň dva společné dělitele, nazývají se *soudělná*. [7]

Jsou-li daná čísla navzájem nesoudělná, jejich největší společný dělitel je roven jedné.

Je-li přirozené číslo a dělitelné dvěma nesoudělnými čísly b, c , je dělitelné jejich součinem bc . [7]

Každý z dvou činitelů součinu přirozených čísel je dělitelem tohoto součinu, jedná se o tzv. *samozřejmé (triviální) dělitele*. K tomuto tvrzení můžeme použít např. této úlohy:

Hospodář třídy rozprodal o přestávce 10 per, přičemž každý z kupujících žáků koupil stejný počet per. Kolik mohlo být kupujících žáků?

Možné jsou tyto příklady:

- a) 1 žák koupil 10 per, neboť $1 \cdot 10 \text{ per} = 10 \text{ per}$;
- b) 2 žáci koupili po 5-ti perech, neboť $2 \cdot 5 \text{ per} = 10 \text{ per}$;
- c) 5 žáků koupilo po 2 perech, neboť $5 \cdot 2 = 10 \text{ per}$;
- d) 10 žáků koupilo po 1 peru, neboť $10 \cdot 1 = 10 \text{ per}$.

Z tohoto zápisu usoudíme, že v případě součinu a dvou činitelích je každý z nich dělitelem tohoto součinu.

Největším společným dělitelem dvou čísel rozumíme takové číslo, které obě tyto čísla vydělí beze zbytku.

Největší se všech společných dělitelů několika přirozených čísel jmenuje se jejich *největší společný dělitel*. To, že číslo D je největším společným dělitelem čísel a , b , zapisujeme $D = D(a, b)$.

Podobného způsobu zápisu užíváme i pro více čísel. [7]

Při hledání největšího společného dělitele se užívají dvě metody výpočtu:

- a) rozkladem v prvočinitele
- b) Euklidovým algoritmem – metodou postupného dělení

a) Rozklad v prvočinitele:

Touto metodou se hledá největší společný dělitel u malých čísel, které snadno rozložíme v prvočinitele. Ze získaných prvočinitelů vybereme všechny společné prvočinitele a každého z nich vezmeme s nejmenším mocnitelem, jaký se vyskytuje v nalezených rozkladech. Výsledná čísla znásobíme.

Příklad: Určete $D(165, 198)$

Řešení: $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$

$$198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$D(165, 198) = 3 \cdot 11 = 33 \quad [3]$$

b) Euklidův algoritmus:

Je metoda pro výpočet největšího společného dělitele dvou daných přirozených čísel a a b . Je-li $a > b$ a $b \neq 0$, je zbytek při dělení čísla a číslem b , je $D(a, b) = D(b, z)$.

To umožňuje postupovat tak, jak ukážeme na příkladě:

$$24 : 14 = 1 \text{ (10)}$$

$$14 : 10 = 1 \text{ (4)}$$

$$10 : 4 = 2 \text{ (2)}$$

$$4 : 2 = 2 \text{ (0)}$$

$$D(24, 14) = D(14, 10) = D(10, 4) = D(4, 2) = 2. [1]$$

[6]

4.2 Nejmenší společný násobek

Nejmenší společný násobek čísel z množiny x je číslo, které je dělitelné všemi čísly z množiny x . Jinými slovy také celočíselným násobkem všech těchto čísel.

Používá se hlavně při operacích se zlomky, tedy při převádění zlomků na společného jmenovatele.

Společným násobkem dvou nebo několika přirozených čísel nazýváme přirozené číslo, které je násobkem každého z daných čísel. Nejmenší ze všech jejich společných násobků jmenuje se jejich nejmenší společný násobek. To, že číslo n je nejmenším společným násobkem čísel a, b , zapisujeme takto:

$$n = n(a, b).$$

Podobného způsobu zápisu užíváme i pro více čísel. [7]

Násobkem určitého celého čísla nazýváme součin tohoto čísla a libovolného celého čísla. [9]

Při zavedení pojmu násobek v učivu je třeba vhodně ilustrovat vybranými příklady. Je-li počet dětí přítomných ve třídě takový, že je možno děti rozdělit po čtyřech, vytváří se v mysli žáka, uvažujícího o této situaci, pojem násobku čísla 4. Dítě víceméně vědomě vyloučí některá čísla, totiž ta, která nejsou dělitelná čtyřmi. [9]

Společný násobek celých čísel $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ ($k \geq 2$) nazýváme každé celé číslo a , pro něž platí zároveň vztahy $b_1 \mid a, b_2 \mid a, b_3 \mid a, \dots, b_k \mid a$. [1]

Nejmenší společný násobek celých čísel $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$, jež jsou všechna různá od nuly, nazýváme nejmenší přirozené číslo m , pro které platí $b_1 \mid m, b_2 \mid m, b_3 \mid m, \dots, b_k \mid m$; označujeme je zpravidla $[b_1, b_2, b_3, \dots, b_k]$.

Nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel se hledá:

- a) rozkladem v prvočinitele (kanonickým rozkladem)
- b) pomocí věty: $n(a, b) = a \cdot b \mid D(a, b)$

a) Kanonický rozklad:

Touto metodou se hledá nejmenší společný násobek u malých čísel, které snadno rozložíme v prvočinitele. Abychom nejmenší společný násobek určili, vezmeme získané prvočinitele s největšími mocniteli, jaké se u daných dvou přirozených čísel v rozkladech vyskytují, a tato čísla znásobíme. [3]

Příklad: Určete $n(440, 660)$

Řešení: $440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$

$$660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$n(440, 660) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 1320$$

b) Věta $n(a, b) = a \cdot b \mid D(a, b)$:

Pro výpočet nejmenšího společného násobku u větších čísel použijeme této poučky:
Součin nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele dvou daných přirozených čísel je roven součinu těchto přirozených čísel. [9]

$$\text{Tedy } n(a, b) \cdot D(a, b) = a \cdot b$$

$$\text{z toho } n(a, b) = a \cdot b \mid D(a, b)$$

Příklad: Vypočítejte $n(9694, 4181)$

$$\text{Řešení: } n(9694, 4181) \cdot D(9694, 4181) = 9694 \cdot 4181$$

$$n(9694, 4181) = 9694 \cdot 4181 \mid D(9694, 4181)$$

$$n(9694, 4181) = 9694 \cdot 4181 \mid 37, \text{ platí že } 4181 : 37 = 113, \text{ proto } n(9694, 4181) = 9694 \cdot 113 = 1\,095\,422 \quad [3]$$

Pro výpočet nejmenšího společného násobku více než dvou přirozených čísel můžeme použít následující vztah:

$$n(a, b, c) = n[(a, b), c]$$

5. Prvočísla, čísla složená a rozklad přirozeného čísla v součin prvočísel

5.1 Prvočísla vs. čísla složená

Uložíme-li si za úkol vypsat všechny dělitele a jejich počet pro čísla 1 až 20, zjistíme následující informace.

Dané číslo	Dělitelé daného čísla	Počet dělitelů
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6
13	1, 13	2
14	1, 2, 7, 14	4
15	1, 3, 5, 15	4
16	1, 2, 4, 8, 16	5
17	1, 17	2
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6
19	1, 19	2
20	1, 2, 4, 5, 10, 20	6

Tab. č. 1 – Tabulka s počtem přirozených dělitelů čísla 1 až 20 (převzato z publikace [1], s. 80)

Množinu všech přirozených čísel můžeme tedy rozdělit na tři části takto:

- 1.) množinu s jediným prvkem 1, který má nejmenší počet dělitelů, totiž jen jednoho,
- 2.) množinu všech přirozených čísel, která mají dva různé přirozené dělitele. Jsou to čísla: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19...,
- 3.) množinu všech přirozených čísel, která mají více než dva různé přirozené dělitele, tj. množinu čísel 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, ...;

Toto roztrídění přirozených čísel vede k zavedení následujících definic:

Prvočíslo nazýváme každé přirozené číslo, které má právě dva různé přirozené dělitele, a to číslo 1 a samo sebe. [9]

Tyto dělitele označujeme jako *samozřejmí dělitele*. Má-li číslo ještě další dělitele, nazývají se *nesamozřejmí dělitele*.

Číslo složené nazýváme každé přirozené číslo, které má více než dva různé přirozené dělitele. [1]

Dle těchto definic nepatří číslo 1 mezi prvočísla ani mezi čísla složená. Jiná definice prvočísla však říká, že by právě mezi ně mohlo být zahrnuto i číslo 1. Bylo by to v případě, kdybychom za prvočíslo pokládali takové přirozené číslo, které je dělitelné číslem 1 a sebou samým.

Je-li možno rozložit přirozené číslo $n > 1$ na součin takových přirozených čísel a, b , že $a > 1, b > 1$, pak je n číslo složené; není-li takový rozklad možný, pak n je prvočíslo. [1]

Je-li totiž $n = ab > 1, a > 1, b > 1$, pak číslo n má zřejmě alespoň čtyři přirozené dělitele ($1/n, a/n, b/n, n/n$), když $a \neq b$; a alespoň tři různé přirozené dělitele ($1/n, a/n, a^2/n$), když $a = b$, a proto je n **číslo složené**. Není-li takový rozklad čísla $n > 1$ možný, pak má číslo n zřejmě právě pouze 2 dělitele ($1/n, n/n$), pak je číslo n **prvočíslo**.

Každé přirozené číslo $n > 1$ má alespoň jednoho prvočíselného dělitele. [1]

Číslo $n > 1$ má jistě alespoň jednoho dělitele, který je větší než 1. Z těchto jeho dělitelů je jeden nejmenší; označíme jej p . Tento nejmenší přirozený dělitel $p > 1$ musí být prvočíslem. Kdyby totiž p bylo číslo složené, tj. $p = ab$, kde $1 < a < p, 1 < b < p$, pak by ze vztahů $a/p, p/n$ plynulo a/n , což by znamenalo, že existuje dělitel $a < p$ čísla n v rozporu s naším předpokladem o čísle p . [1]

Není-li přirozené číslo $n > 1$ dělitelné žádným prvočíslem $p \leq \sqrt{n}$, pak je n prvočíslo. Je-li n číslo složené, pak existuje rozklad $n = ab$, kde a, b jsou taková přirozená čísla, že $1 < a < n$, $1 < b < n$. Při vhodném označení činitelů rozkladu čísla n na součin můžeme předpokládat $a \leq b < n$. V tom případě $a^2 \leq ab = n$ a odtud plyne $a \leq \sqrt{n}$. Avšak číslo a má alespoň jednoho prvočíselného dělitele $p \leq a \leq \sqrt{n}$. Ze vztahů p/a , a/n plyne p/n . [1]

5.2 Prvočísla

Má-li číslo n právě dva různé dělitele, jsou těmito děliteli číslo 1 a samo dané číslo n . Tyto čísla jako 2, 3, 5, 7, 11, ... nazýváme prvočíslly.

Abychom zjistili, je-li dané přirozené číslo a prvočíslem, stačí je dělit všemi prvočíslly p , pro něž platí $p^2 \leq a$. Nevyjde-li žádné z těchto dělení beze zbytku, je číslo a prvočíslem. [7]

Příklad: Chceme dokázat, že číslo 331 je prvočíslem. Dělíme jej postupně prvočíslly 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17; prvočíslem 19 a většími už jej dělit nemusíme, neboť $19^2 = 361 > 331$. Žádné z těchto dělení však nevyjde beze zbytku; u prvočísel 2, 3, 5, 11 to zjistíme pomocí znaků dělitelnosti, při dělení prvočíslem 7 vyjde zbytek 2, při dělení prvočíslem 13 zbytek 6 a při dělení prvočíslem 17 zbytek 8. Číslo 331 je tedy prvočíslem.

Studium prvočísel je součástí teorie čísel, odvětví matematiky, které zahrnuje i studium přirozených čísel. Přestože prvočísla byla a jsou předmětem intenzivního výzkumu, stále se nepodařilo vyřešit všechny otázky týkající se prvočísel.

Prvočísla jsou důležitou součástí matematiky a je jich nekonečně mnoho.

Existují důkazy, že již Egypťané znali prvočísla. První studie prvočísel pochází však až z Antického Řecka. Matematik Euklídus napsal knihu, která obsahovala důležité teorie prvočísel například včetně toho, že jich je nekonečná řada. Jeho důkaz zní asi takto: „*Mějme nějakou konečnou množinu prvočísel. Vynásobíme je všechny dohromady a přičteme jedničku. Výsledné číslo není dělitelné ani jedním prvočíslem z uvažované množiny, protože dělením jakýmkoliv z daných prvočísel získáme zbytek jedna. Protože všechna čísla, která nejsou prvočísla, mohou být rozložena na součin*

prvočísel je výsledek buď prvočíslo, nebo je výsledek možno rozložit pomocí nějakého prvočísla/prvočísel, které není v uvažované množině prvočísel. Tak nebo tak, vždy existuje minimálně jedno další prvočíslo, které není v uvažované množině. Tento fakt platí bez ohledu na to, jakou množinou začneme. Proto je řada prvočísel nekonečná.“
[10]

Eratosthenovo síto je algoritmus pro výběr prvočísel z dané množiny. Jde o poměrně snadnou a lehce pochopitelnou metodu. Tento algoritmus se nazývá sítem, protože se zde množina čísel takzvaně prosívá. Nejprve se všechny hodnoty nastaví na „true“, tedy jako prvočísla a následně se z nich odebírají složená čísla.

Jednoduchý příklad:

Dejme tomu, že chceme vypsát všechna prvočísla do čísla 10. Začneme samozřejmě logicky od čísla 2, protože číslo jedna není prvočíslem.

Nastavíme si tedy nejprve všechna čísla od čísla 2 na prvočísla – označíme si je tučně (jako true).

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Nyní vezmeme první prvočíslo (2) a nastavíme všechny jeho násobky, jako čísla složená (false).

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

V tuto chvíli uděláme to samé s dalším prvočíslem, které je v řadě (3).

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Nyní bychom pokračovali dalším číslem, které je označeno jako prvočíslo, což by v tuto chvíli bylo čísli 5. To ale nemusíme, protože nám to již stačí a můžeme již jen napsat výsledek.

2, 3, 5, 7

[11]

Další studie prvočísel pocházejí až ze 17. století. V roce 1640 ustanovil Pierre de Fermat „Malou Fermatovu větu“. Důkaz této věty našli později matematici Leibniz a Euler. Fermat předpokládal, že čísla $2^{2^n} + 1$ jsou prvočísla (nazývají se Fermatova čísla) a tuto větu potvrdil až do $n = 4$. Později matematik Euler dokázal, že další Fermatovo číslo $2^{2^5} + 1$ není prvočíslo. Není tedy známo další Fermatovo číslo, které by bylo prvočíslem.

Francouzský mnich Marin Mersene hledal prvočísla pomocí vzorce $2p-1$, kde p je prvočíslo. Tato čísla se na jeho počest nazývají Mersenova prvočísla.

Problém rozmístění prvočísel je populárním objektem výzkumu. Prvočísla jsou obklopena přirozenými čísly v nepředpovídaným způsobem. Přesto se zdá, že jejich rozmístění řídí nějaké zákony. Již zmíněný Leopold Euler toto komentoval následovně: „*Matematici se marně pokoušejí objevit nějaký zákon v rozmístění prvočísel, ale máme důvod se domnívat, že do tohoto problému naše mysl nikdy nepronikne.*“ [10]

Studium vysokých prvočísel patří mezi nejobtížnější otázky po stránce teoretické, ale i praktické. Práci si můžeme usnadnit nahlédnutím do tabulek, jež byla a jsou vydávány pro potřebu matematiků.

Od roku 1951 byla všechna vysoká prvočísla nalezena pomocí počítače. Dlouho se předpokládalo, že prvočísla nemají žádný praktický význam mimo matematiku. Hledání vyšších prvočísel však vyvolalo zájem i v jiných než matematických kruzích. Různé společnosti vynaložily velké úsilí o nalezení vysokých prvočísel.

5.3 Prvočíselný rozklad

Každé složené číslo je možno napsat jakou součin několika prvočísel, a to až na pořadí činitelů jediným způsobem.

Prvočísla, jejichž součinem je dané složené číslo, jmenují se *prvočinitelé*; napíšeme-li dané složené číslo jako součin prvočinitelů, říkáme, že provádíme jeho *rozklad v prvočinitele*. [7]

Prvočíselným rozkladem vyjadřujeme číslo jako součin prvočísel. Základní věta aritmetiky ustanovuje, že každé číslo větší než 1 se dá zapsat jako součin jednoho nebo více prvočísel. Jde o prvočíselný rozklad čísla x , o určení prvočísel, které když spolu následně vynásobíme, dostaneme opět číslo x . Každé číslo se dá zapsat právě jedním způsobem. Jednotlivá prvočísla se v prvočíselném rozkladu mohou opakovat. Psáváme je v tomto případě ve tvaru mocniny.

Příklad: Máme rozložit čísla 24 a 833 v prvočinitele.

a) U čísla 24 můžeme postupovat různými způsoby. Z násobilky víme, že :

$$24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot (2 \cdot 6) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

$$24 = 4 \cdot 6 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

$$24 = 8 \cdot 3 = (2 \cdot 4) \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

b) U čísla 833 znalosti z násobily užít nemůžeme. Zjišťujeme teda, je-li toto číslo dělitelné některým z prvočísel. Prvočísla 2, 3, 5 číslo dělitelné není (to poznáme podle znaků dělitelnosti).

Při dělení číslem 7 dostaneme:

$$833 = 7 \cdot 119.$$

Rozkládáme dále tedy číslo 119. Dle znaků dělitelnosti není také dělitelné prvočísla 2, 3, 5, začneme tedy od prvočísla 7:

$$119 = 7 \cdot 17$$

$$\text{Zjistili jsme, že } 833 = 7 \cdot 119 = 7 \cdot 7 \cdot 17 = 7^2 \cdot 17$$

Každé složené číslo a můžeme tedy vyjádřit pomocí mocnin různých prvočísel.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229	233
241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307	311
317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389
401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563
571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641
647	653	659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821
827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Tab. č. 2 – Tabulka prvočísel od 1 do 1000

6. Dělitelnost na 1. stupni ZŠ

6.1 Dělitelnost na 1. stupni ZŠ

Na prvním stupni ZŠ žáci nepracují s pojmem „dělitelnost“ (relace dělitelnost). Setkávají se jen s „dělením“, které je pojmově i významově bližší jejich konkrétnímu myšlení.

Při vyučování dělení je důležité, ba nutné dát do souvislosti s dělitelností poznatky dětí uložené u nich na intuitivní úrovni. Je třeba žáky přivést k tomu, aby si uvědomili, že s dělením se setkávají v běžném životě, v reálném světě, v reálných situacích, i když si to sami neuvědomují. [3]

Typickým příkladem vlastnosti dělitelnosti v reálném světě jsou například přírodní děje, které se periodicky opakují - střídání dne a noci, střídání ročních období, Patří sem i dělení roku na měsíce, týdny, dny, hodiny, Nesmíme opomenout i rytmus – bití srdce (tep), které nám dělí práci srdce, ale i rytmus hudební – dělení hudby na takty, na doby, I obyčejné kroky dělí naši chůzi na menší časové a délkové úseky.

První zkušenosti s dělením získává dítě při reálných situacích jako je například rozdělování. Má-li rozdělit třeba 12 bonbonů mezi tři sourozence, rozdělit si peníze na nákup, udělat si časový rozvrh (rozdělit si hodiny volna pro určité činnosti), aj.

Dělení je zavedeno ve 2. ročníku ZŠ jako inverzní operace k násobení.

Podílem přirozených čísel a , b , $b \neq 0$ je takové přirozené číslo x , pro které platí: $a = b \cdot x$. Číslo x zapisujeme $x = a : b$. Operace, která přirozeným číslům a , b , $b \neq 0$ přiřazuje jejich podíl, se nazývá dělení přirozených čísel. [12]

Vysvětlení operace dělení důsledně vychází z reálných situací. Pro děti je třeba tyto situace názorně a vhodně modelovat. Můžeme k tomu použít vhodné pomůcky: např. barevné geometrické tvary, knoflíky, bonbóny, nastříhané papírky, víčka od PET lahví, počítadlo,

Při modelování situace žáci zjistí, popř. je učitel k tomu dovede, že k dané reálné situaci existují vždy dvě úlohy, které se řeší dělením, ale které je třeba modelovat odlišnými manipulacemi. [3]

To vedlo k potřebě zavádět dělení na stejné části a dělení podle obsahu, které se projevuje u manipulace s předměty, nikoliv u numerického počítání.

Při prvním seznámení žáků s operací dělení se zpravidla začíná dělením na stejné části. Tyto situace vedoucí k dělení na části jsou v životě dítěte běžnější.

1.) Dělení na stejné části (rozdělování):

Daná množina má a prvků a počet tříd rozkladu je b . Každá třída rozkladu má stejný počet prvků. Máme určitý počet jednotlivých tříd. [3]

Daný počet jednotek máme rozdělit na daný počet stejných částí.

Příklad: Babička rozdělila 18 bonbonů třem vnoučatům. Kolik bonbonů každé dostalo?

- řešení příkladu modelujeme tak, že každému dáme nejprve jeden bonbon, pak přidáme druhý bonbon a tak pokračujeme, až všech 18 bonbonů rozdělíme.

$$18 : 3 = 6$$

2.) Dělení podle obsahu (po částech):

Počet prvků dané množiny je a . Každá třída jejího rozkladu má b prvků. Máme určit počet tříd rozkladu. [3]

Je potřeba rozdělit daný počet jednotek na stejné části dané velikosti.

Příklad: Babička rozdělila 18 bonbonů vnoučatům. Každé dostalo 6 bonbonů. Kolik vnoučat babička podělila?

- řešení příkladu modelujeme tak, že prvnímu vnoučeti dáme 6 bonbonů, pak dáme stejný počet i druhému vnoučeti a pokračujeme, až všech 18 bonbonů rozdáme.

$$18 : 6 = 3$$

Pro pochopení podstaty dělení lze objasnit souvislost mezi násobením a dělením a vytvářet tzv. čtveřice příkladů, které vycházejí z násobilky.

Příklad: $10 = 2 \cdot 5$

$$10 = 5 \cdot 2$$

$$10 : 2 = 5$$

$$10 : 5 = 2$$

První dva zápisy vyjadřují komutativnost³ násobením. Druhé dva dolní zápisy vyjadřují, že dělení je inverzní operací k násobením.

Podobně jako je zavedeno násobením na principu opakovaného sčítání stejných sčítanců, je možné i dělení zavést jako opakované odčítání stejných menšitelů.

Příklad: Babička dávala 18 bonbonů do sáčků po 3. Bonbony ji postupně ubývaly.

$$18 - 3 = 15$$

$$15 - 3 = 12$$

$$12 - 3 = 9 \qquad \text{zkráceně: } 18 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 = 0$$

$$9 - 3 = 6$$

$$6 - 3 = 3$$

$$3 - 3 = 0$$

Číslo 3 odčítáme tak dlouho, dokud nedostaneme číslo 0.

Odčítat můžeme šestkrát, proto $18 : 3 = 6$

Na postupném odčítání je založen i algoritmus písemného dělení. Ve 4. ročníku se nacvičuje algoritmus písemného dělení jednociferným dělitelem. Algoritmus písemného dělení dvojciferným a trojciferným dělitelem se probírá až v 5. ročníku.

Při nácvičení pamětného dělení mimo obor násobilky se užívá rozklad čísla (dělece) na dva nebo více sčítanců, a tím se úloha převede na několik úloh řešitelných v oboru násobilky.

$$92 : 4 = (80 + 12) : 4 = (80 : 4) + (12 : 4) = 20 + 3 = 23$$

³ Při součinu dvou čísel nezáleží na pořadí činitelů.

6.2 Proč nedělíme nulou?

Řadě žáků dělá problémy rozlišit dělení nuly a dělení nulou. Mohou nastat následující případy:

- a) Pro všechna nenulová přirozená čísla a platí:

$$0 : a = 0, \text{ protože } 0 = a \cdot 0$$

- b) Nulou nelze dělit. Podíl $a : 0$ neexistuje. Pokud by přirozené číslo x bylo hledaným podílem, muselo by podle definice platit

$$a = 0 \cdot x$$

To není splněno pro žádné přirozené číslo x .

- c) Podíl $0 : 0$ není definován. Pokud by existoval podíl x , muselo by platit

$$0 = 0 \cdot x$$

Rovnost je splněna pro všechna přirozená čísla x . Dělení by potom nebylo operací. [12]

Nulou nedělíme, protože výsledek buď nemá smysl, nebo vůbec neexistuje.

6.3 Dělení se zbytkem

Operace dělení není v množině přirozených čísel neomezeně definována. Proto se žáci seznamují také s operací dělení se zbytkem.

Jestliže pro přirozená čísla a, b, q, z platí $b \neq 0 \wedge a = b \cdot q + z \wedge z < b$, nazývá se číslo z zbytek a číslo q neúplný podíl při dělení čísla a (dělence) číslem b (dělitelem). Operace, která přirozeným číslům a, b přiřazuje čísla q, z , se nazývá dělení se zbytkem.

[12]

Při výkladu vycházíme z reálných situací.

Př. : Rozděl 14 sešitů 3 dětem tak, aby každé dostalo stejně. Rozdáváme sešity po jednom, až má každé dítě 4 sešity a dva sešity zbyly.

$$14 : 3 = 4, \text{ protože } 4 \cdot 3 + 2 = 14$$

Žáci s touto náročnou operací začínají již ve 3. ročníku. Náročná je proto, že se při něm provádí několik početních operací. Žáci musí určit neúplný podíl pomocí nejbližšího menšího násobku čísla b k číslu a .

Příklad: $11 : 3$

Žáci vyznačí na číselné ose násobky čísla 3 (0, 3, 6, 9, 12). Nejbližší menší násobek čísla 3 k číslu 11 je 9. Protože $9 : 3 = 3$, je hledaný neúplný podíl 3. Protože $11 - 9 = 2$, dostáváme při dělení čísla 11 číslem 3 zbytek 2.

Pokud se chceme vyhnout pojmu „nejbližší menší násobek“, můžeme například situaci modelovat pomocí skoků na číselné ose. [12]

Příklad: „Skáče“ po číselné ose po třech. Při 3 skocích se dostaneme před číslo 11, při 4 skocích bychom již číslo 11 „přeskočili“. Dostali jsme se tedy na číslo 9. Kolik zbývá do 11?

S pojmem dělitelnost se žáci setkávají až v 6. ročníku ZŠ.

Žák:

- zná a užívá základní znaky dělitelnosti
- ví, co je liché a sudé číslo
- rozliší čísla složení a prvočísla
- umí rozložit čísla složená
- zná pojem dělitel, násobek
- určí nejmenší společný násobek a největší společný dělitel
- již poznané umí využít v jednoduchých úlohách
- modeluje pojmy
- ví, že existují další pravidla dělitelnosti

7. Testování

Pro zjištění úrovně matematických dovedností studentů oboru učitelství 1. stupně ZŠ byly vypracovány dva testy. První z nich – varianta A – je určen pro studenty na počátku studia, tedy před kurzem zabývajícím se dělitelností. Druhý test – varianta B – je určený pro studenty na konci studia. Předpokládaným výsledkem těchto testů je alespoň 75 % úspěšnost studentů při řešení obou variant testů. Od srovnání těchto dvou testů očekáváme větší úspěšnost v řešení druhého z nich, tedy té varianty po absolvování učiva o dělitelnosti. Dalším faktorem, na který bych se chtěla zaměřit, je způsob řešení zadaných úloh a rozbor případných chyb.

Testování skupiny představuje pouze vzorek studentů oboru učitelství a výsledky jsou s omezenou platností rozšiřitelné na širší okruh těchto studentů. Závěry z tohoto testu však nejsou zobecnitelné, neboť by bylo potřeba provést rozsáhlejší testování, které by mohlo být předmětem zkoumání navazujících na téma přirozených čísel.

Při vyhodnocování výsledků jsem se zaměřila na bodové ohodnocení, kde jsem pro každý z příkladů stanovila maximální hodnotu získaných bodů na 20. Při správném řešení celého testu mohl tedy každý obdržet 100 bodů. Ze všech získaných bodů jsem poté sestavila průměr pro celou skupinu. Z těchto hodnot budu vycházet i při porovnávání úrovně znalostí před a po probírání tématu dělitelnost.

7.1 Test – varianta A

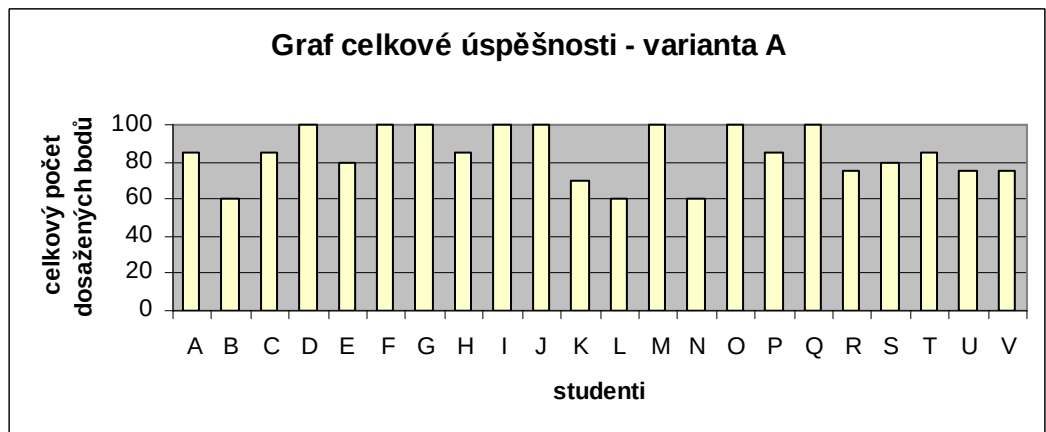
Požadavkem zadání testová varianty A bylo testování studentů, kteří ještě během svého studia neprošli matematickým kurzem s tématem dělitelnost. První z testů byl tedy proto zadán studentům 1. ročníku oboru učitelství 1. stupně ZŠ. Skupina se skládala ze 22 studentů. Na vypracování testu měli 45 minut. Test je složen z pěti elementárních úloh. Každá úloha představuje jeden z okruhů pomáhající pochopit dělitelnost (písemné dělení ze zbytkem, dělitelnost, zlomky, ...).

Cílem testování bylo zjištění úrovně znalostí o dělitelnosti, které si studenti přinášejí ze základních a středních škol.

Dosažené výsledky studentů jsem upravila do následující tabulky č. 3. Při hodnocení jsem se zaměřila na počet získaných bodů a na individuální způsoby řešení.

student		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	průměr
úloha	1.	5	20	5	20	20	20	20	5	20	20	10	0	20	0	20	5	20	5	20	5	5	5	12, 27
	2.	20	0	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	19, 09
	3.	20	0	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	19, 09
	4.	20	20	20	20	0	20	20	20	20	20	0	20	20	20	20	20	20	0	20	20	20	20	17, 27
	5.	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	0	20	0	20	20	20	10	20	20	10	10	16, 82
celkem bodů		85	60	85	100	80	100	100	85	100	100	70	60	100	60	100	85	100	75	80	85	75	75	84, 54

Tab. č. 3 – Tabulka úspěšnosti studentů v řešení testové varianty A podle bodového hodnocení



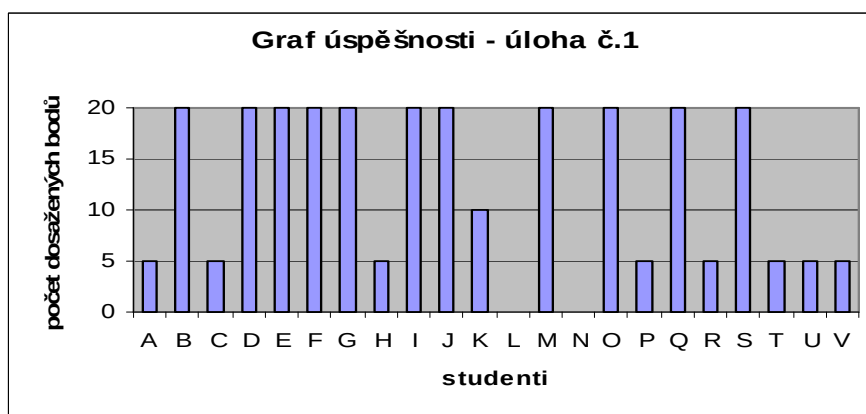
Obr. č. 1 – Graf celkové úspěšnosti v řešení testové varianty A

7.1.1 Úloha č. 1

Vypočítej v oboru N, bez použití kalkulačky:

$$4\,523 : 24$$

Ne všichni studenti si přesně pamatovali, jak se správně dělí písemně se zbytkem. Výsledky jsem zaznamenala v následujícím grafu. Plného počtu bodů dosáhlo pouze 11 studentů. Úspěšnost této úlohy byla 61,36 %.



Obr. č. 2 – Graf úspěšnosti řešení 1. úlohy

$$\begin{array}{r} 4523 : 24 = \underline{\underline{188}} \text{ a zbytek } \underline{\underline{11}} \\ 212 \\ 203 \\ 11 \end{array}$$

Obr. č. 3 – Řešení studenta G – 1. způsob řešení

$$4\,523 : 24 = 188,458\overline{35}$$

$$\begin{array}{r} 212 \\ -24 \\ \hline 203 \\ -192 \\ \hline 110 \\ -140 \\ \hline 200 \\ -180 \\ \hline 20 \end{array}$$

Obr. č. 4 – Řešení studenta R – 2. způsob řešení

$$4\,523 : 24 = 188,4\overline{58} \quad (\text{ob.} : 0,11)$$

$$\begin{array}{r} 212 \\ -24 \\ \hline 203 \\ -192 \\ \hline 110 \\ -96 \\ \hline 140 \\ -120 \\ \hline 20 \end{array}$$

~~20 (ob. 0,002)~~

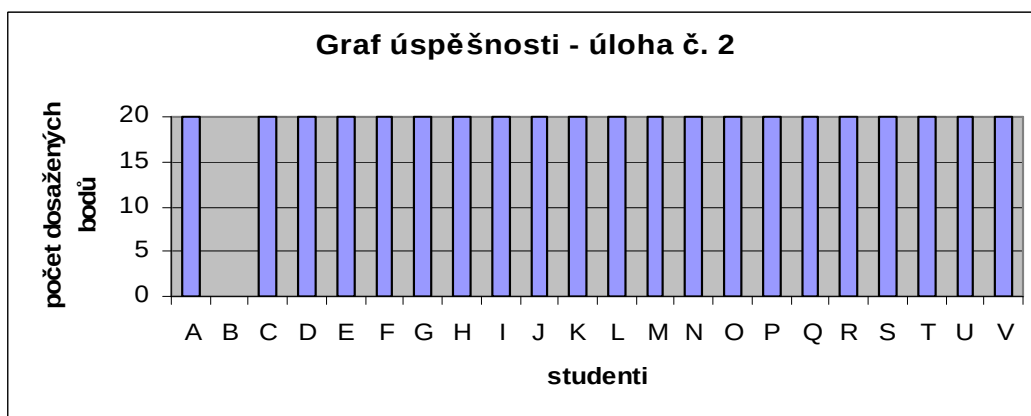
Obr. č. 5 - Chybné řešení studenta L

7.1.2 Úloha č. 2

Doplňte na volná políčka číslice tak, aby vzniklé pěticiferné číslo bylo dělitelné 3, 5 a 15-ti:

5_35_

Pro druhou úlohu existuje celkem sedm různých řešení. Studenti přišli na čtyři různá řešení. Zaznamenala jsem pouze jednu nevyřešenou úlohu, u které nemůžu určit chybu, protože se student do vyřešení úlohy nepustil. Studenti tuto úlohu řešili s 95,45% úspěšností.



Obr. č. 6 – Graf úspěšnosti řešení 2. úlohy

55350

$$55350 : 3 = 18450$$
$$55350 : 15 = 3690$$
$$55350 : 5 = 11070$$

Obr. č. 7 – Řešení studenta E – 1. způsob řešení

5350

SOUČET VŠECH ČÍSEL
MUSÍ BÝT ŠESTATELNÝ
3, 6, 15

$5+1+3+5+0=14$ NEJDE SČÍTAT ČÍSLA
 $5+2+3+5+0=15$ ANE
 $5+3+3+5+0=16$ NEJDE
 $5+4+3+5+0=17$ NEJDE
OŠETŘENÍ NEJDE

52350

Obr. č. 8 – Řešení studenta F – 2. způsob řešení

535
 $50355 : 15 = 3357$ aby bylo dělit. 15, 5 = množením
: 3 = 16785 na 5 nebo 0.
: 5 = 10071 a aby bylo dělitelné 3 tak
musí být dělit. 3

doplňme čísla 095 $\Rightarrow$

Obr. č. 9 – Řešení studenta N – 3. způsob řešení

$53355 : 3 = 17785$ $53355 : 5 = 10671$

5355

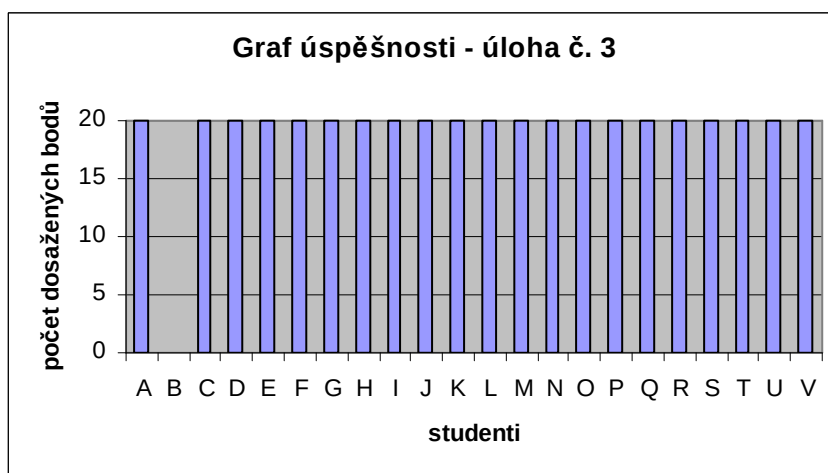
$53355 : 15 = 3557$

Obr. č. 10 – Řešení studenta A – 4. způsob řešení

7.1.3 Úloha č. 3

Pracovník vložil na vkladní knížku 4| 10 svojí výplaty, což bylo 3 600 Kč. Kolik korun dostal na výplatu?

S touto úlohou neměli studenti sebemenší problémy. Objevil se pouze jeden příklad, kdy se student do řešení vůbec nepustil. Ostatní dosáhli v této úloze plného počtu bodů. Většina studentů řešila úlohu pomocí zlomků, zbylá část studentů použila trojčlenku. Úspěšnost této slovní úlohy byla 95, 45 %.



Obr. č. 11 – Graf úspěšnosti řešení 3. úlohy

$$\begin{array}{l}
 3600 \text{ Kč} \dots \dots \frac{4}{10} \\
 \frac{1}{10} \dots \dots 3600 : 4 = 900 \text{ Kč} \\
 \text{výplata} = \frac{10}{10} \\
 \frac{10}{10} - \frac{4}{10} = \frac{6}{10} \dots \dots 6 \cdot 900 = 5400 \\
 \text{výplata} \quad \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \dots \dots 3600 \text{ Kč} + 5400 \text{ Kč} = \underline{\underline{9000 \text{ Kč}}}
 \end{array}$$

Obr. č. 12 – Řešení studenta D – řešení pomocí zlomků

↑ 40% 100%	3600 Kč ? Kč	↑
---------------	-----------------	---

$$\frac{100}{40} \cdot 3600 = 9000$$

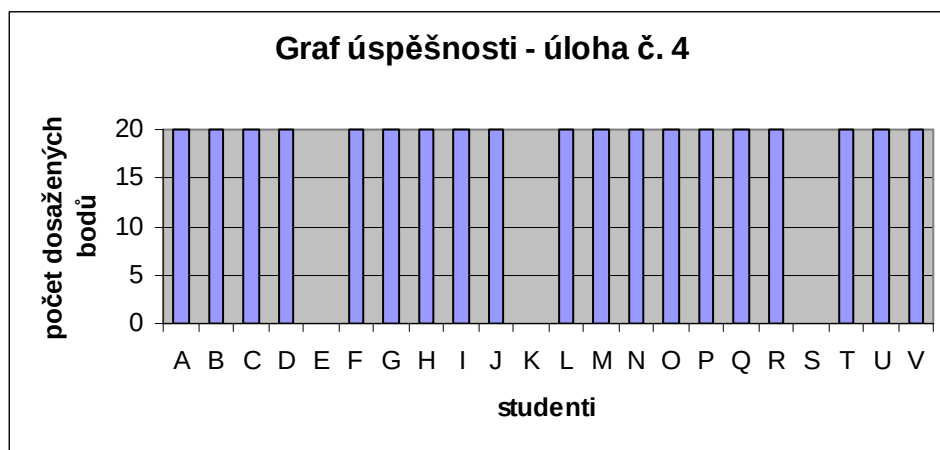
Pracovník dostal za výplatu 9000 Kč.

Obr. č. 13 – Řešení studenta P – řešení pomocí trojčlenky

7.1.4 Úloha č. 4

Když mému otci bylo 31 let, bylo mně 8 let. Dnes je otec dvakrát starší než já. Kolik je mně let?

U této úlohy mne nejvíc překvapil způsob řešení většiny studentů. Tím bylo v tomto případě postupné vypisování věku. V této úloze neúspěšní studenti použili zbytečně těžké postupy. I přesto byla úspěšnost celkem vysoká, a to celých 86, 36 %.



Obr. č. 14 – Graf úspěšnosti řešení 4. úlohy

*31-8=23 - dvakrát starší
23 dceru 46 otec.
Proto otec je mi 23 let a otec 46 let.*

Obr. č. 15 – Řešení studenta J – 1. způsob řešení

otec	syn	otec	syn
31	8	41	14
32	9	42	15
33	10	43	16
34	11	44	17
35	12	45	18
36	13	46	19
37	14		
38	15		
39	16		
40	17		

mmě 18 let.

Obr. č. 16 – Řešení studenta C – 2. způsob řešení

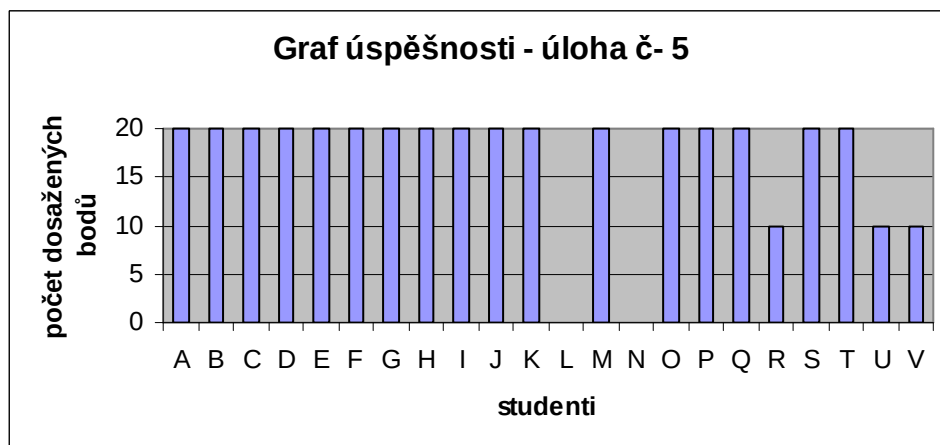
$$\begin{array}{l}
 31 \text{ let} - 8 \text{ let} = \\
 2x \text{ starší}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \frac{31}{-8} \\
 \hline
 23
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 2x+y \\
 31+8=x \\
 39=x \\
 2 \times 39 = \underline{\underline{78}}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 23 \\
 x=31 \quad x+y=z \\
 y=8 \quad 2x+y=z
 \end{array}$$

Obr. č. 17 – Chybné řešení studenta K

7.1.5. Úloha č. 5

Po dvoře pobíhalo stejné množství slepic jako ovcí. Dohromady měly 168 nohou. Kolik bylo ovcí a kolik slepic?

Tato úloha překvapivě vyvolala u pár studentů jisté problémy. Opět bylo častým řešením vypisování jednotlivých možností. Přitom řešením byla jednoduchá rovnice. Chybné řešení bylo zaznamenané pouze ve dvou případech. Studenti tuto úlohu počítali s úspěšností 84, 09 %.



Obr. Č. 18 – Graf úspěšnosti řešení 5. úlohy

$168 : 6 = 28$
 $28 \cdot 2 = 56$
 $28 \cdot 4 = 112$
 $112 : 56 = 2$
 28 ovcí
 28 slepic
 Počet bylo 28 a slepic také 28.

Obr. č. 19 – Řešení studenta G – 1. způsob řešení

$168 : 4 = 42$ (počtyřech)
 08
 42 orei
 $168 : 2 = 84$ (slepice)
 08

$0 = S$
 $2a + 4b = 168$ mchou
 $2a = 168$ (42)
 $4b = 168$ (42)

$28 = \text{orei}$ a
 $28 = \text{slepice}$

$42 \cdot 4 = 168$
 $30 \cdot 4 = 120$
 $20 \cdot 4 = 80$
 $16 \cdot 4 = 64$
 $14 \cdot 4 = 56$
 $12 \cdot 4 = 48$
 $10 \cdot 4 = 40$
 $8 \cdot 4 = 32$
 $6 \cdot 4 = 24$
 $4 \cdot 4 = 16$
 $2 \cdot 4 = 8$
 $0 \cdot 4 = 0$

Obr. č. 20 – Řešení studenta O – 2.způsob řešení

168 mchou
 08 orei
 168 slepice

$168 : 2 = 84$
 $84 : 4 = 21$
 $84 : 2 = 42$

$orei - 21$
 $slepice - 42$

Obr. č. 21 – Chybné řešení studenta L

7.2 Test – Varianta B

Tato varianta testu je určena pro studenty na konci studia, proto jsem ho zadávala studentům 2. ročníku oboru učitelství pro 1. stupeň ZŠ. Tito studenti již absolvovali kurz zabývající se dělitelností čísel. Test se znovu skládá z pěti elementárních úloh týkající se dělitelnosti. Tyto úlohy jsou voleny tak, aby jejich obtížnost odpovídala znalostem studentů po absolvování kurzu o dělitelnosti čísel. Obtížnost je tedy vyšší.

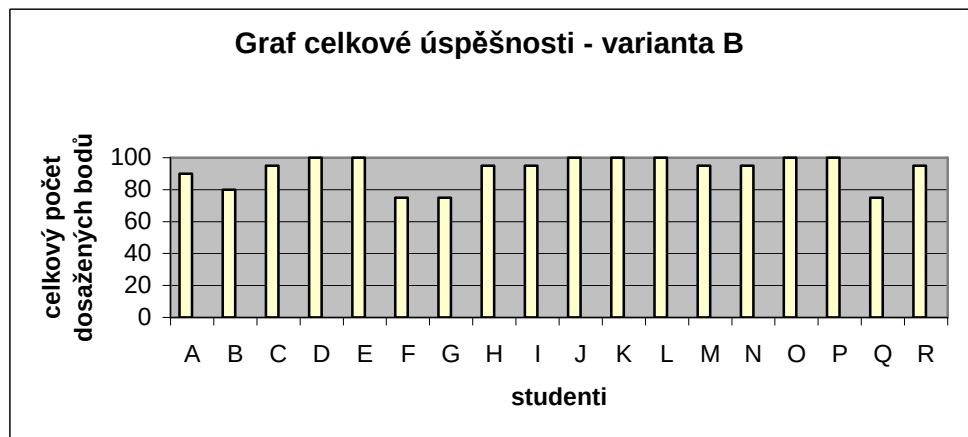
Cílem testování bylo zjistit úroveň znalostí studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ po probírání tématického celku o dělitelnosti.

Skupina se tentokrát skládala z 18 studentů, na vypracování měli také 45 minut.

Výsledky jednotlivých studentů z této testované skupiny jsem pro přehledné porovnání zaznamenala do níže uvedené tabulky č. 4.

student		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	průměr
úloha	1.	20	20	20	20	20	15	10	20	20	20	20	20	20	15	20	20	0	20	17,78
	2.	20	0	20	20	20	20	5	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	18,05
	3.	20	20	20	20	20	10	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	15	19,17
	4.	20	20	15	20	20	20	20	20	15	20	20	20	15	20	20	20	15	20	18,89
	5.	10	20	20	20	20	10	20	15	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	18,61
celkem bodů		90	80	95	100	100	75	75	95	95	100	100	100	95	95	100	100	75	95	92,5

Tab. č. 4 – Tabulka úspěšnosti studentů v řešení testové varianty B podle bodového hodnocení

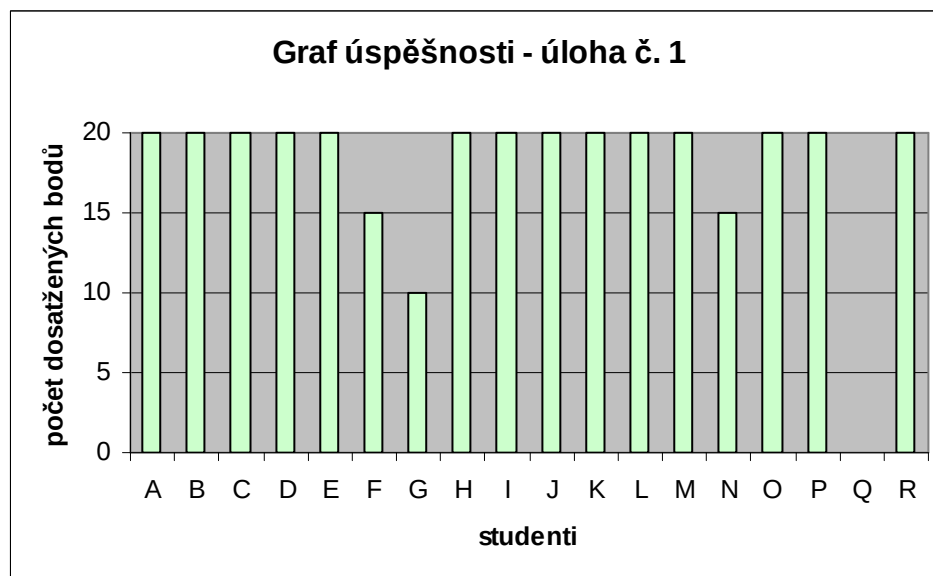


Obr. č. 22 – Graf celkové úspěšnosti v řešení testové varianty B

7.2.1 Úloha č. 1

Hádanka: Pamatuji si, že jsem dělil dvě čísla. Dělenec byl menší o 4 500 a podíl vyšel 74. Zbytek po dělení dělitelem, na kterého si nemůžu vzpomenout byl 57. Jakým číslem jsem dělil? Najdi nejvyšší číslo (a napiš, jaké číslo mu odpovídá jako dělenec), které by mohlo být dělitelem. Je víc možností.

Tuto úlohu vyřešili téměř všichni studenti správně. Zaznamenala jsem dva způsoby řešení, které jsou uvedeny na obrázcích níže. Úspěšnost této úlohy byla 88, 89 %.



Obr. Č. 23 – Graf úspěšnosti řešení 1. úlohy

$$\begin{array}{l}
 74 + 57 = 131 \\
 14500 - 131 = 4369 : 74 = 59 \quad 4369 : 59 = 74 \\
 \quad \quad \quad \begin{array}{r} 669 \\ 03 \end{array} \quad \text{zr. 03} \\
 4369 - 131 = 4238 : 74 = 57 \\
 \quad \quad \quad \begin{array}{r} 538 \\ 20 \end{array} \\
 4238 - 131 = 4107 : 74 = 55 \quad | 4107 : 55 = 74 \text{ zr. 57} | \\
 \quad \quad \quad \begin{array}{r} 407 \\ 37 \end{array} \rightarrow 37 + 20 = 57 \\
 4107 + 20 = 4127 \quad 4127 + 74 = 4201 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad | 4201 : 56 = 74 \text{ zr. 57} |
 \end{array}$$

Obr. č. 24 – Řešení studenta B – 1. způsob řešení

dělenec	dělitel	podíl
4500 : x		74

$\Rightarrow \text{zr. 57}$

$$\begin{array}{l}
 74 \cdot \boxed{60} = 4440 + 57 = \boxed{4497} \\
 4366 : 59 = 74 \quad | \boxed{4423} \\
 4292 : 58 = 74 \quad | \boxed{4349}
 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} + \text{zr. } \dots \\ - 74 \\ - 74 \end{array} \right\}$

Obr. č. 25 – Řešení studenta D – 2. způsob řešení

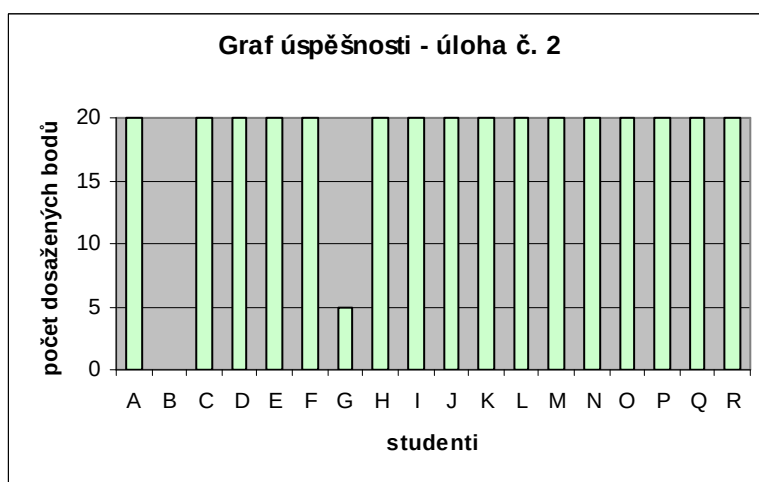
$$\begin{array}{l}
 4500 - 57 = 4443 \\
 4443 : x = 74 \\
 x = 5,986 \text{ (nejmenší je jinde, pokud máme nějaké číslo, v tomto případě by nejmenší} \\
 \text{celé číslo bylo } \underline{5}.
 \end{array}$$

Obr. č. 26 – Chybné řešení studenta Q

7.2.2 Úloha č. 2

Při závodu v cyklokrosu jela $\frac{1}{3}$ závodníků před Martinem a $\frac{1}{2}$ závodníků za Martinem. Kolik chlapců závodilo?

Pouze v jednom případě student tuto úlohu nevyřešil. Ve velké většině řešili studenti úlohu výborně. Možná jsem mohla zvolit těžší typ úlohy. Objevovaly se hlavně dva způsoby řešení, které uvádím na obrázcích níže. Úspěšnost této úlohy byla 90, 28 %.



Obr. č. 27 – Graf úspěšnosti řešení 2. úlohy

$$\begin{array}{l}
 \frac{1}{3} \leftarrow \text{Martin} \rightarrow \frac{1}{2} \\
 \text{celkem závodníků} = x \\
 x = \frac{1}{3}x + 1 + \frac{1}{2}x \\
 x = \frac{2+3}{6}x + 1 \\
 6x = 5x + 6 \\
 \boxed{x = 6}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \frac{1}{3} \leftarrow M \rightarrow \frac{1}{2} \\
 2 + 1 + 3 = \underline{\underline{6}} \\
 \text{V závodě jelo celkem 6 závodníků.}
 \end{array}$$

Obr. č. 28 – Řešení studenta R – 1. způsob řešení

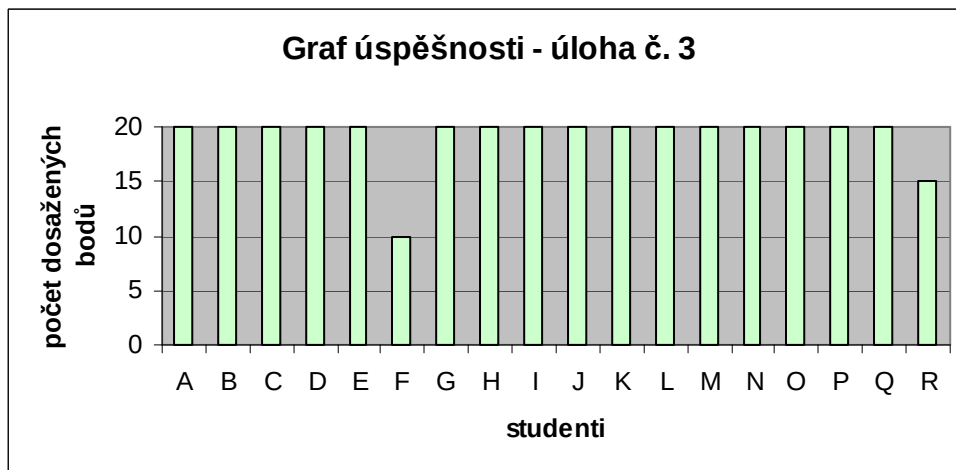
$x \dots \text{zavodilů}$
 $\frac{1}{3}x, \text{ Martin}, \frac{1}{2}x$
 $\dots \square \square M \square \square$
 $\frac{1}{3}$
 $\frac{1}{3}$
 $\frac{1}{3}x \approx 6 = 2$
 $\frac{1}{2}x \approx 6 = 3$
 $x = \frac{1}{3}x + 1 + \frac{1}{2}x \quad | \cdot 6$
 $6x = 2x + 6 + 3x$
 $6x = 5x + 6$
 $x = 6$
 $\frac{1}{3}x \approx 6 = 2$
 $\frac{1}{2}x \approx 6 = 3$
 $\text{Zavodilo 6 chlapců.}$

Obr. č. 29 – Řešení studenta E – 2. způsob řešení

7.2.3 Úloha č. 3

Doplňte za cifry x, y cifry tak, aby číslo $5x35y$ bylo dělitelné 12-ti.

Tato úloha byla zřejmě pro studenty nejjednodušší. Její úspěšnost byla totiž celých 95, 83 %. S chybným řešením jsem se v této úloze nesetkala. Plným počtem bodů jsem zde hodnotila pouze ta řešení, kde byly uvedeny všechny možnosti řešení. Takových řešení byla většina.



Obr. č. 30 – Graf úspěšnosti řešení 3. úlohy

$$\begin{array}{l}
 \frac{5x35y}{1^3} \quad \text{a} \quad \frac{5x35y}{1^4} \\
 \frac{5y}{1^4} \\
 5 \overline{) 12} = 12 \\
 5 \overline{) 14} = 14
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \frac{5x35y}{1^3} \\
 5x352 \Rightarrow 15:3 \\
 0 \Rightarrow -11- \\
 3 \Rightarrow 18:3 \\
 6 \Rightarrow 21:3 \\
 9 \Rightarrow 24:3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 5x356 \Rightarrow 19 \\
 2 \Rightarrow 21:3 \\
 5 \Rightarrow 24:3 \\
 8 \Rightarrow 27:3
 \end{array}$$

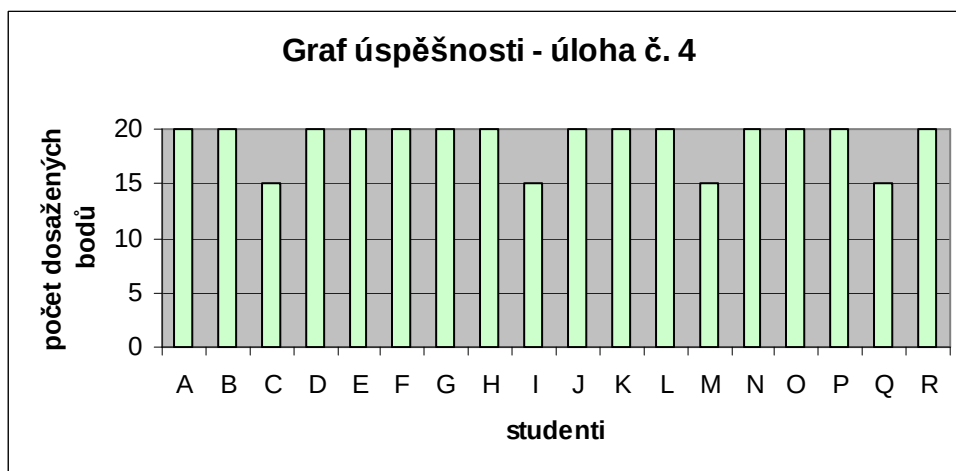
$50352, 53352, 56352, 59352, 52356, 55356, 58356$
 Aby bylo číslo dělitelné 12-ti, můžeme po doplnění x a y dostat 7 možných výsledků.

Obr. č 31 – Řešení studenta K

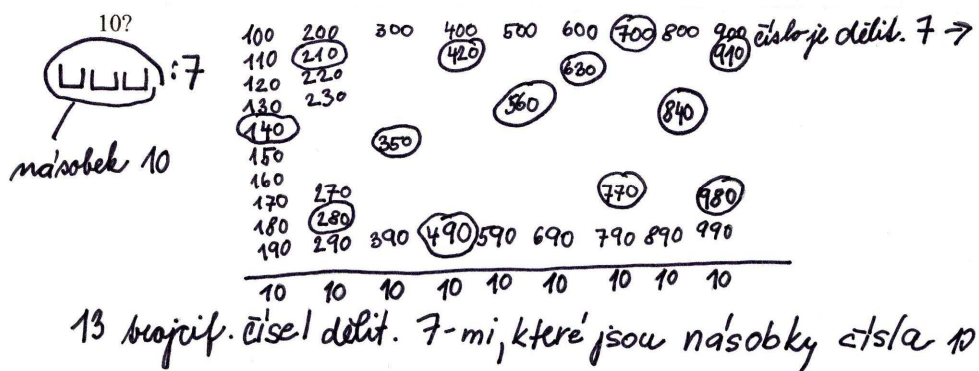
7.2.4 Úloha č. 4

Kolik existuje celkem trojciferných čísel dělitelných sedmi, které jsou násobky čísla 10?

Tato zajímavá úloha mne opět překvapila vysokým počtem správných řešení. Je zajímavé, že většina studentů řešila tuto úlohu postupným vypisováním násobků, podobně jako student P. Pro srovnání uvádím složitější řešení studenta H. Úspěšnost této úlohy byla 94, 45 %.



Obr. č. 32 – Graf úspěšnosti řešení úlohy č. 4



Obr. č. 33 – Řešení studenta P – 1. způsob řešení

3-ciferná čísla / 7, která jsou násobky 10
 $\Rightarrow$ hledám čísla, která jsou dělitelná $7 \times 10 = 70$
 $\Rightarrow 100 - 999$

$$\begin{aligned} 70 \times n &< 1000 \\ n &< \frac{1000}{70} \\ n &< 14,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 70 \times n &> 100 \\ n &> \frac{100}{70} \\ n &> 1,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 70 \times n &= c \\ n &= 2, 3, \dots, 14 \end{aligned}$$

$$c_1 = 70 \times 2 = 140$$

$$c_2 = 70 \times 3 = 210$$

$$c_3 = 70 \times 4 = 280$$

$\vdots$
 $\vdots$
 $\vdots$

$$c_{14} = 70 \times 14 = 980$$

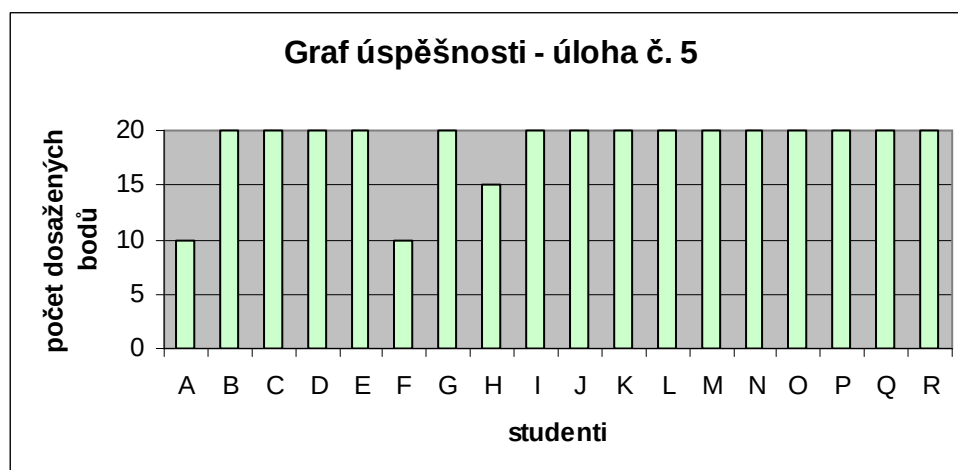
celkem je to 13 trojčiferných čísel / 7.

Obr. č. 34 – Řešení studenta H – 2. způsob řešení

7.2.5 Úloha č. 5

Na louce se pasou koně, ovce a husy. Ovcí je více než hus. Ovce a husy mají dohromady 100 noh a hlav. Husí a ovcí je třikrát víc než koní. Kolik je koní?

Tento typ „zvířecí“ úlohy znaly studenti dobře již z absolvovaného kurzu o dělitelnosti čísel. Proto zřejmě dopadla také tato úloha velice dobře. Častějším řešením však bylo opět jednodušší postupné vypisování hodnot. Všichni studenti tuto úlohu vyřešili. Úspěšnost úlohy byla 93, 05 %.



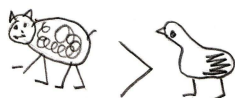
Obr. č. 35 – Graf úspěšnosti řešení úlohy č. 5

100 - rozdělím na dvě části, aby první byla dělitelná pěti a druhá třemi..

$\begin{array}{|c|c|} \hline 55 & 45 \\ \hline 70 & 30 \\ \hline \end{array}$ = nevhodně, byla by m/c hus
 $\begin{array}{|c|c|} \hline 85 & 15 \\ \hline \end{array}$ - nevhodně (vycházel 14 ovcí a 5 hus /²² nemí dělitelné 3.)
 zís. 14 ovcí a 10 hus = celkem 24 so.
 Zomí je $24 : 3 = 8 \Rightarrow \underline{\underline{8 \text{ koní}}}$

Obr. č. 36 – Řešení studenta L – 1. způsob řešení

koně - 4m.
 ovce - 4m.
 husy - 2m.



husy: 1 h. → 2 m.
 2 h. → 4 m.
 3 h. → 6 m.
 $x h. \rightarrow 2x m.$ 4 h. → 8 m.
 5 h. → 10 m.
 6 h. → 12 m.
 7 h. → 14 m.
 8 h. → 16 m.
 9 h. → 18 m.
 10 h. → 20 m.

dohv. 100 mohou a klar
 ovce: 1 o. → 4 m.
 2 o. → 8 m.
 3 o. → 12 m.
 $x o. \rightarrow 4x m.$ 4 o. → 16 m.
 5 o. → 20 m.
 6 o. → 24 m.
 7 o. → 28 m.
 8 o. → 32 m.
 9 o. → 36 m.
 10 o. → 40 m.

$10 + 20 + 10 + 40 = 80$; 10 h. → 20 m.
 $100 - 80 = 20$ (ještě potřeba 20)
 $10 + 20 + 10 + 40 + (4 + 16) = 100 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 10 \text{ hus a } 14 \text{ ovcí}; 14 > 10; 14 + 10 = 24$
 $24 : 3 = \underline{\underline{8}}$
 Koní je 8.

Obr. č. 37 – Řešení studenta N – 2. způsob řešení

7.3 Výsledky testování

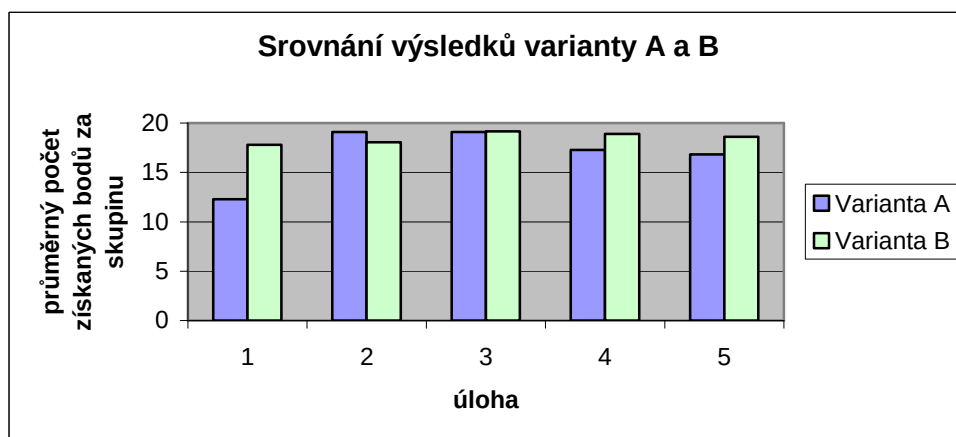
Shrnu-li, co ze zadání testů vyplývá, pak je to ten správný předpoklad, že lepších výsledků bude dosahovat skupina, která absolvovala kurz zabývající se tématikou dělitelnosti. Výsledky jednotlivých skupin jsem zaznamenala v následujícím grafu a tabulce.

Důvodem, proč nejsou tak markantní rozdíly v obou variantách, je zřejmě to, že úlohy byly voleny vzhledem k úrovni zvládnutí učiva o dělitelnosti.

V závěru testování bych si dovolila tvrdit, že úroveň dovedností studentů v oblasti dělitelnosti čísel je poměrně vyrovnaná. Pouze ojediněle se vyskytují jedinci, kteří z nejasných příčin nedokázali některé úlohy vyřešit.

Srovnání	Varianta A	Varianta B
Úloha č. 1	12, 27	17, 78
Úloha č. 2	19, 09	18, 05
Úloha č. 3	19, 09	19, 17
Úloha č. 4	17, 27	18, 89
Úloha č. 5	16, 82	18, 61
Průměrný počet získaných bodů	84,54	92,5

Tab. č. 4 – Tabulka srovnání úspěšnosti v jednotlivých variantách testů



Obr. č. 38 – Graf srovnání úspěšnosti v jednotlivých variantách testů

8. Testování autistické žákyně

Tento rok jsem pracovala jako asistent pedagoga na Základní škole v Ledenicích. Pomáhala jsem při práci autistické dívce Míše, která je žákyní druhého ročníku místní školy. Uplatnila a obohatila jsem zde své dosavadní vědomosti ze školy a zároveň získala i nové poznatky. Tato práce byla velice zajímavá. Jelikož jsem v loňském roce obdržela certifikát ze speciální pedagogiky, napadlo mne problematiku dělitelnosti zkusit testovat i na desetileté autistické dívce. Shromažďovala jsem proto sbírky úloh pro takto malé žáky a z nich vybírala to, co bych mohla při práci s Míšou využít. Některé úlohy šly Míše snadno, jiné byly o něco obtížnější. Ke správnému výsledku jsme ale vždy došly. Nutností bylo vždy praktické znázornění úlohy. U dětí s autismem je vizuální podpora zcela běžná.

8.1 Autismus obecně

„Představte si sebe ve společnosti Italů. Oni se živě baví, ale vy neumíte italsky, nikdo z nich neumí česky. Snažíte se jim porozumět, ale jak, když vás nikdo italsky nenaučil? Chcete něco říci, nikdo vám nerozumí, snažíte se různými gesty naznačit, co vlastně chcete, ale marně. Máte pocit, že je vše ztraceno, nudíte se, jste otráveni z vlastní bezmocnosti. Pak jste zlí na ně, protože jsou to oni, kdo vám nerozumí. Když si vás pozvali do Itálie, měli se na vás připravit a naučit se česky! Takto je to beznadějně! Nakonec si vás přestanou všimnout, protože nejste schopni se s nimi domluvit.

Najednou se k vám přiblíží člověk a promluví na vás česky. V tom okamžiku nevnímáte, jaké má vlasy či oči, jak je oblečený, jen to, že **MU budete rozumět a ON vám**. ON vás naučí italsky a vysvětlí vám jejich zvyky. ON seznámí všechny okolo s tím, že máte jistý problém, ať s vámi jedná tak, abyste jim porozuměl. **Je to zlatý člověk** – TOHO se musím držet, co bych si bez něj počal, myslíte si. Pomůže vám zajistit si jídlo a spoustu jiných věcí. Najednou máte pocit, že nejste tak úplně sami.“ [13]

Těmito slovy chtěla autorka přiblížit, co asi prožívají autisté mezi námi. Ve skutečnosti je to jen malá část toho, s čím se autisté musejí denně setkávat, co je tíží

a nedokáží nám to sdělit, abychom jim mohli pomoci. Existují názory, že jsou autisté šťastní ve svém světě a že jim ubližujeme, když je z něj chceme vytrhnout. Jiní si zas myslí, že jsou autisté šťastní, když nám porozumí a my porozumíme jim. S tímto názorem souhlasím i já. Ne nadarmo se říká, že každý autista je zcela jiný a nejlépe jej člověk pozná právě při kontaktu, sblížení s ním.

Autismus je jednou z nejzávažnějších poruch dětského mentálního vývoje. Je vrozenou poruchou některých mozkových funkcí s neurobiologickým základem. Důsledkem poruchy je, že dítě dobře nerozumí tomu, co vidí, slyší a prožívá. Duševní vývoj dítěte je díky tomuto handicapu narušen hlavně v oblasti komunikace, sociální interakce a představitivosti. Autismus doprovázejí specifické vzorce chování, podle kterých se i syndrom diagnostikuje. Jedná se především o stereotypy, omezené zájmy a aktivity. Dítě nesnáší změny, mívá specifickou přichylnost k neobvyklým předmětům, trvá na vykonávání zvláštních rutin při činnostech nefunkčního charakteru. Autismus je provázen problémy chování (výbuchy vzteku, agrese, sebezraňování), které jsou snahou postiženého zajistit si bezpečí ve zmatku okolního světa, je to obrana a únik z nesnesitelné tísně, kterou jim může způsobit jakákoliv změna.

„Když byl v roce 1940 autismus konečně diagnostikován, začalo být jasné, že většina „geniálních idiotů“ jsou ve skutečnosti autisté. Zhruba 10 % autistů jsou „géniové“, a to je dvěstěkrát víc, než kolik je jich mezi retardovanými. A tisíckrát víc, než jich najdeme v normální populaci. Ukázalo se také, že mnozí z těchto nadaných autistů mají mimořádných vloh hned několik – hudební, paměťové, vizuální, kreslířské, počítařské a jiné.“ [14]

Pomocí časně intenzivní terapie lze u některých autistických dětí zlepšit jejich sociální schopnosti do té míry, že se mohou plně účastnit běžné školní docházky.

Děti s autismem jsou v ČR integrovány ve speciálních, pomocných či základních školách, popřípadě jsou umístěny v ÚSP. Čím je postižení závažnější, tím je celá situace složitější. Ve speciálních školách mohou vznikat i třídy pro děti s autismem. Dle slov některých odborníků na autismus jsou tyto třídy velice prospěšné. V devadesátých letech postupně vznikala nabídka vzdělávacích programů školy dětem různých handicapů. Původní nabídka vzdělávacího programu zvláštní (speciální) školy se tak rozrostla o další různé programy, mimo jiné i o program vzdělávání dětí s autismem.

Některé děti vzhledem ke svému handicapu nezvládnou plně osnovy vzdělávacích programů. Vypracovávají se proto individuální vzdělávací programy.

Míša je tedy integrována do běžné základní školy a na doporučení speciálně pedagogického centra ji byl hned při nástupu do školy přidělen asistent. V rámci integrace musí být sledováno několik nezbytných předpokladů pro její úspěšnost (například připravenost školy, odbornost třídního učitele, ...).

V loňském školním roce Míša prospěla z vyznamenáním. Ani letošní výsledky nejsou o nic horší. Pracuje většinou společně se spolužáky ve třídě. Potřebuje-li klidnější prostředí, má možnost pracovat v kabinetě za třídou, kde jsme i testovaly úlohy o dělitelnosti.

Zřídka se u ní objevují výbuchy vzteku, jindy je plačtivá. Její nálady jsou velice ojedinělé.

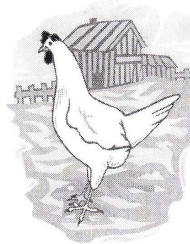
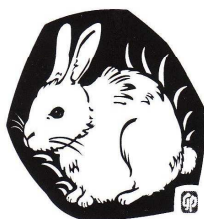
Co se týče samostatné práce a pracovního chování, je potřeba metoda strukturovaného učení. Jde hlavně o vizuální znázorňování, zadávání přiměřeně obtížných úloh a dodržování stereotypu.

V matematice Míše nesmí chybět počítadlo nebo číselná osa z důvodu utváření a upevňování početních představ. Často také počítala s pomocí prstů, které se jí osvědčily v poslední době hlavně při násobení. Dělí pouze pomocí barevných políček, které jí kreslím (viz příloha). Tempo počítání a zápisů je sice pomalejší, ale výsledky jsou většinou správné. Řešení složitějších úloh ji vyčerpává.

Úlohy o dělitelnosti Míšu velice bavily, jak mi i potvrdila později její maminka. Zaujaly ji možná i proto, že byly docela jiné, než na jaké jsou děti v matematice nyní zvyklé. Míša vždy za úspěšné řešení obdržela malou odměnu (samolepku, či tužku). Sebemenší dárek udělá Míše ohromnou radost. Autisté nebývají moc komunikativní, proto i rozhovory s ní jsou velice strohé.

8.1.1 Úloha č. 1

Na dvoře byli králíci a slepice. Dohromady měli 7 hlav a 20 nohou. Kolik bylo slepic a kolik králíků?



$4 + 3 = 7$ zvířat
3 KRÁLÍČI
4 SLEPÍCE

Nejdříve Míša přečetla zadání úlohy. Čtení s porozuměním jí dělá trochu problémy, proto jsem úlohu přečetla podruhé Míše já. Vysvětlily jsme si obsah úlohy.

Poté jsme si připravily pomůcky, které jsme nezbytně potřebovaly. Místo hlav Míša navrhla kolečka z papíru a místo nohou pastelky.

Potom jsme začaly úlohu rozebírat. Míša sama přišla na to, že se musí uvědomit, že slepice má dvě nohy a králík čtyři.

J: „Mohou to být jenom slepice, Míšo?“

M: „Ano, mohou.“

J: „Tak to pojď vyzkoušet.“

Míša začala znázorňovat. Připravila si sedm hlav a k nim přikládala tužky po dvou (dvě nohy). Když došla až k sedmému kolečku, zarazila se.

M: „Ne, nemohou to být jen slepice.“

J: „Pročpak ne, Míšo?“

M: „Protože zbyly pastelky.“

J: „Tak co s tím teď?“

M: „Nevím.“

J: „Ale víš Míšo, vždyť jsi šikovná holka.“

M: „Nevím.“

J: „Co myslíš? Bude tam nějaký králík?“

M: „Ano.“

J: „A jak to uděláme?“

M: „Nevím.“

J: „Míšo, musíme z některých slepiček udělat králíky. Jestlipak víš jak?“

M: „Jo, vím. Přidám jim nohy.“

J: „Výborně Míšo, tak mi to ukaž, jak to uděláš.“

Přidávala pak zbylé pastelky ke „slepícím“, dokud jí žádná nezbyla.

J: „Kolik je tedy Míšo dohromady králíků a slepic na dvoře?“

M: „Tři králíci a 4 slepice.“

J: „A to je dohromady kolik zvířátek?“

M: „Sedm.“

J: „Výborně Míšo, jsi šikulka.“

Nakonec Míša vepsala příklad na papír s úlohou.



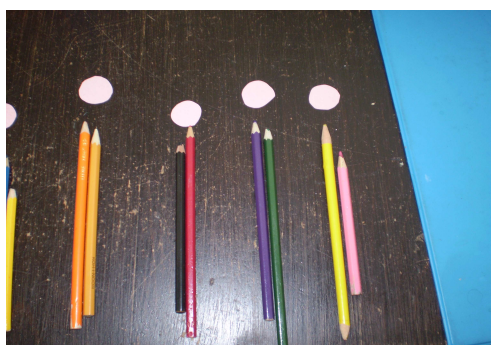
Obr. č. 40 – „Nohy a hlavy“



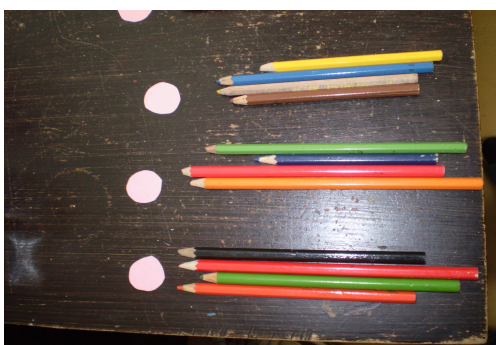
Obr. č. 41 – Jen slepice



Obr. č. 42 – „Jsou tam i králíci“



Obr. č. 43 – Čtyři slepice



Obr. č. 44 – Tři králíci



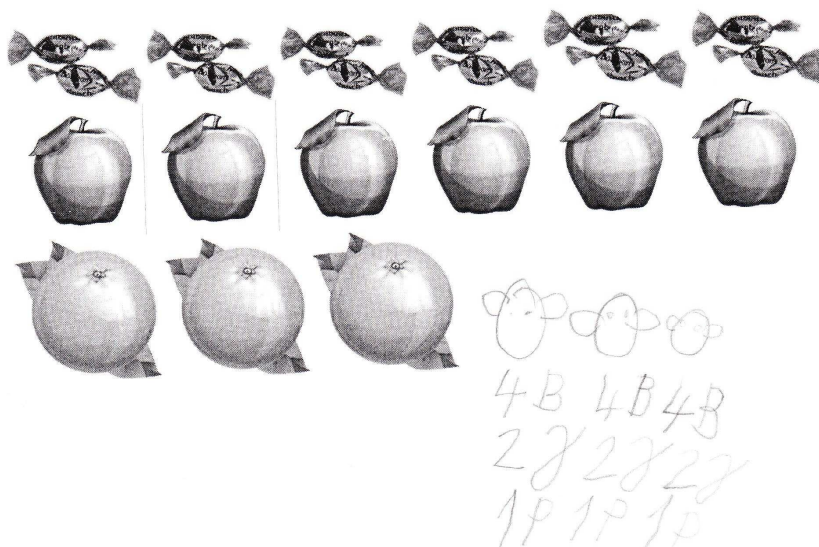
Obr. 45 – Králíci a slepice



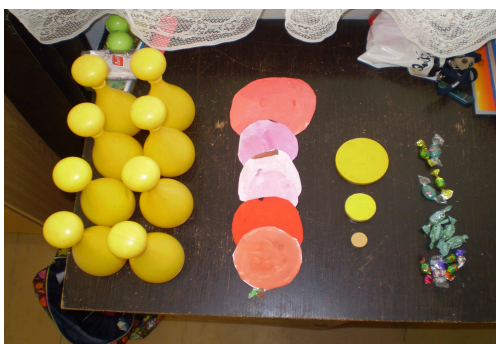
Obr. č. 46 – M. úlohu zapsala

8.1.2 Úloha č. 2

**Vnoučata přišla blahopřát babičce
k narozeninám. Babička jim rozdělila
12 bonbónů, 6 jablek a 3 pomeranče. Kolik
bylo vnoučat a kolik každé vnouče dostalo?**



je to 30, každý má 4B, 2J a 1P.



Obr. č. 48 – Co použijeme



Obr. č. 49 - Vnoučata



Obr. č. 50 – Každý má 1 pomeranč



Obr. č. 51 – M. přidala 2 jablka



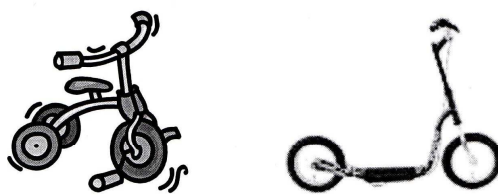
Obr. č. 52 – M. přidávala bonbóny



Obr. č. 53 – M. příklad zapsala

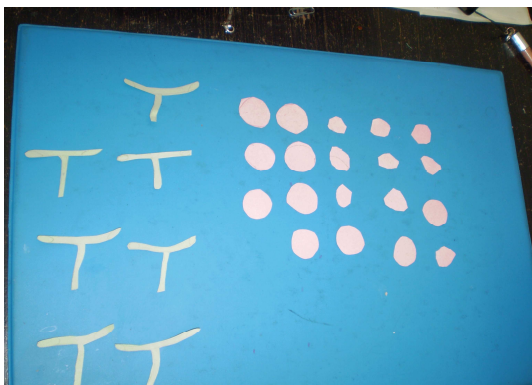
8.1.3 Úloha č. 3

Jenda měl ve stavebnici 19 koleček a 7 řídítek. Sestavil ze všech koleček a řídítek tříkolky a koloběžky. Kolik sestavil koloběžek a kolik tříkolek?

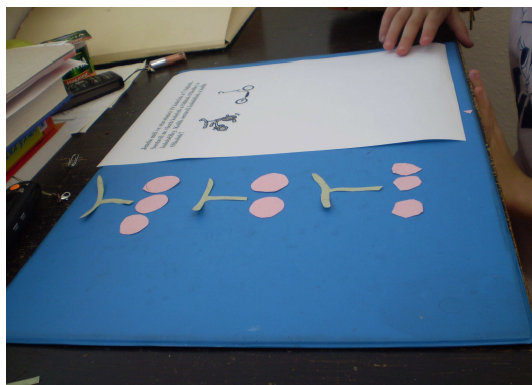


$$5 + 2 = 7$$

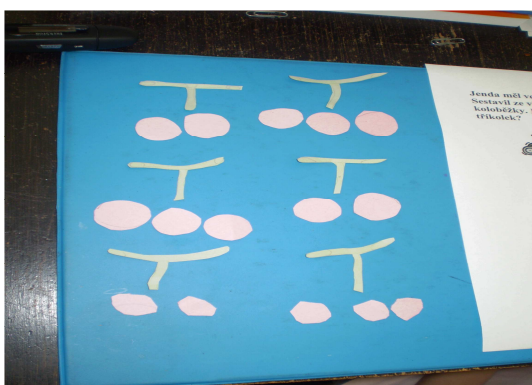
5 TŘÍKOLEK
2 KOLOBĚŽEK



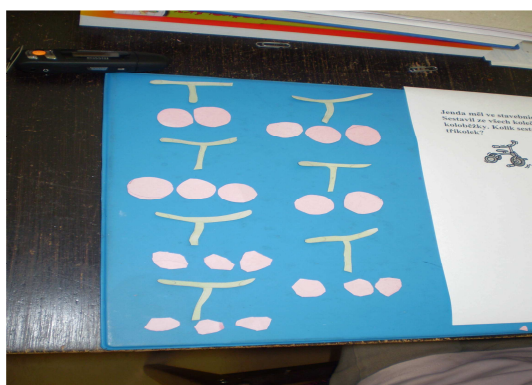
Obr. č. 55 – Řídítka a kolečka



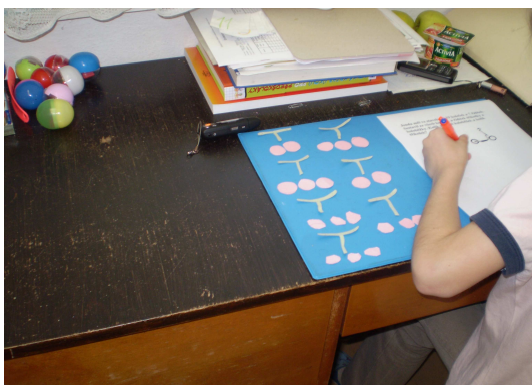
Obr. č. 56 – 2 tříkolky, 1 koloběžka



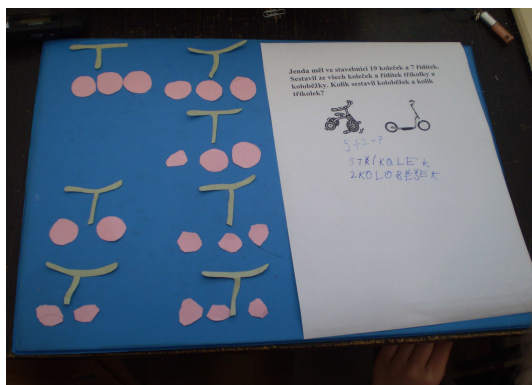
Obr. č. 57 – 3 tříkolky, 3 koloběžky



Obr. č. 58 – 5 tříkolek, 2 koloběžky



Obr. č. 59 – M. zapisuje řešení



Obr. č. 60 – Řešení – 5 tříkolek,
- 2 koloběžky

8.1.4. Úloha č. 4

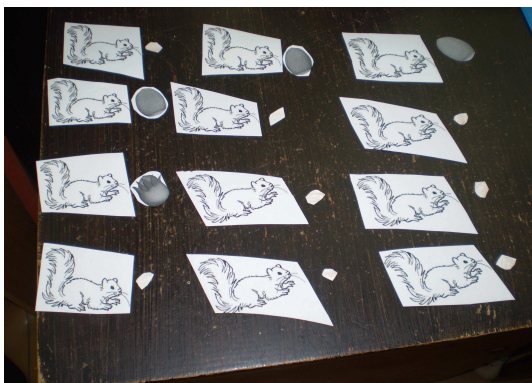
**Veverka Zuzka prosí: „Porad'te mi prosím.
Našla jsem 12 oříšků. Kolika veverkám je
mohu rozdělit, aby dostala každá stejně?
Kolik každá dostane?“**



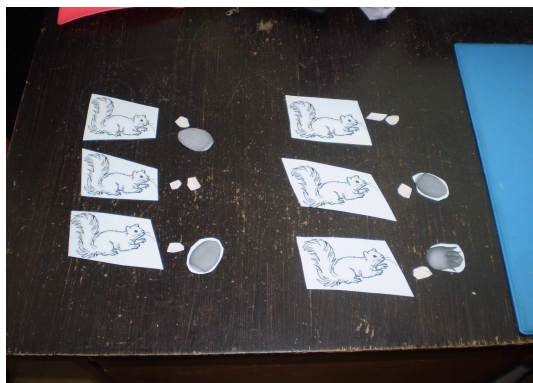
Handwritten solutions for the problem, showing the number of squirrels (V), the number of nuts each squirrel gets (K), and the total number of nuts (A):

V	K	A
12	1	12
6	2	12
4	3	12
3	4	12
2	6	12
1	12	12

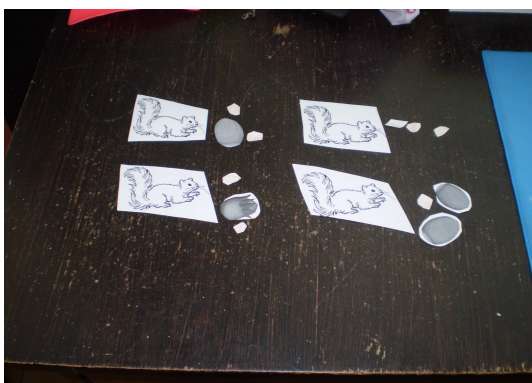
Obr. č. 61 – Úloha č. 4



Obr. č. 62 – 12 veverek, každá jeden oříšek



Obr. č. 63 – 6 veverek, každá 2 oříšky



Obr. č. 64 – 4 veverky, každá 3 oříšky



Obr. č. 65 – 3 veverky, každá 4 oříšky



Obr. č. 66 – 2 veverky, každá 6 oříšků



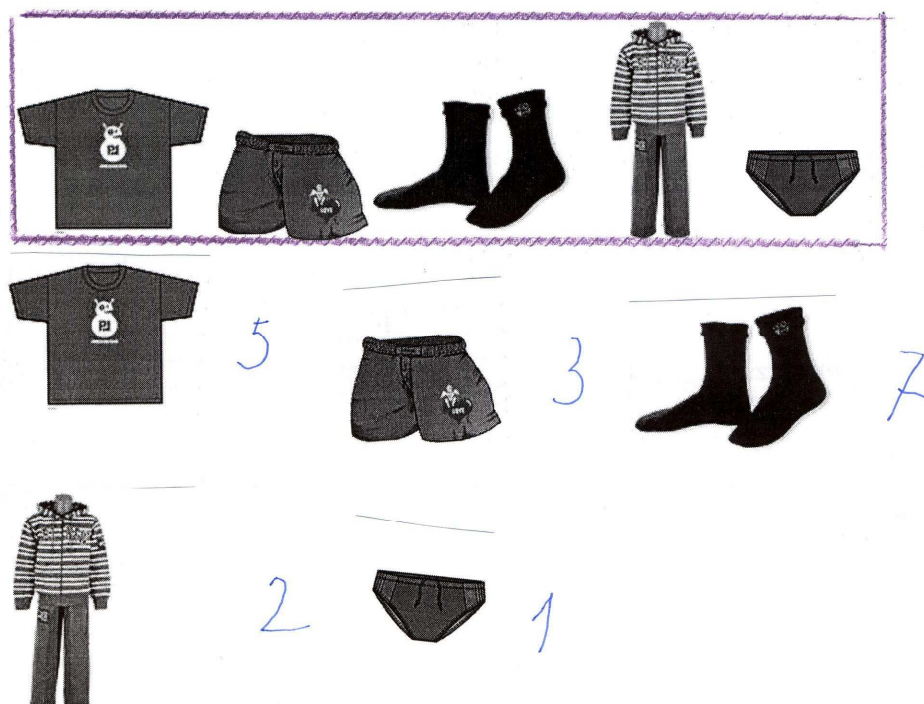
Obr. č. 67 – 1 veverka má 12 oříšků



Obr. č. 68 – M. zapisuje úlohu

8.1.5 Úloha č. 5

Maminka připravila Míšovi, Kájovi a Mirkovi na prázdniny stejné oblečení. Rozdělila do batohu 15 triček, 9 trenýrek, 21 párů ponožek, 6 teplákových souprav a troje plavky. Kolik dostal každý?



Obr. č. 69 – Úloha č. 5



Obr. č. 70 – 3 chlapci a oblečení



Obr. č. 71 – Každý má 5 triček



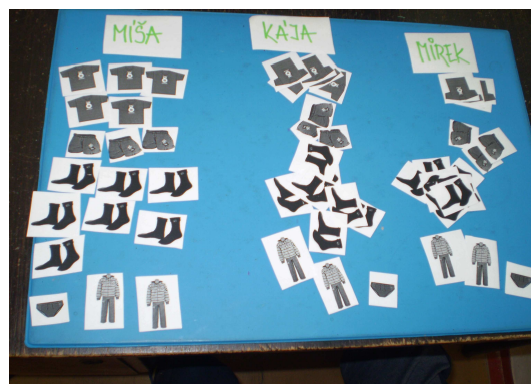
Obr. č. 72 – Každý má i troje trenýrky



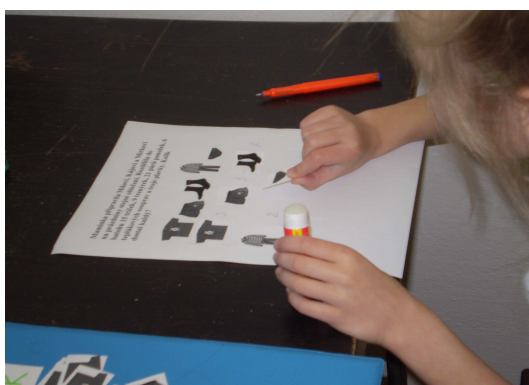
Obr. č. 73 – Každý má i sedmery ponožky



Obr. č. 74 – Každý má i 2 teplákové soupravy



Obr. č. 75 – Každý má i 1 plavky



Obr. č. 76 – M. tentokrát lepí a zapisuje řešení

8.1.6 Úloha č. 6

Na planetě Kalilot žijí chodící květiny. Každá má 2 páry bot. Kolik květin tu žije, když mají dohromady 20 párů bot?



Obr. č. 77 – Úloha č. 6



Obr. č. 78 – Boty a květiny



Obr. č. 79 – Každá květina má 2 páry bot

8.1.7 Úloha č. 7

Může mít 8 štěňat 30 nožiček?

ANO – NE 32

Může mít 8 vrabců 18 nožiček?

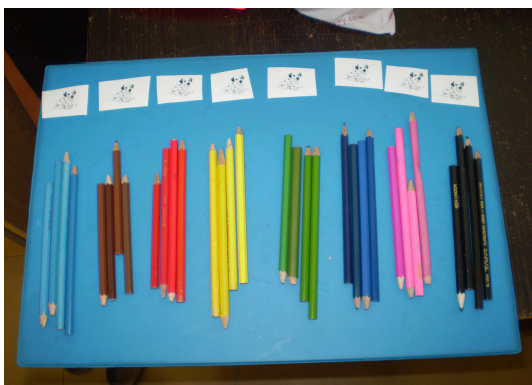
ANO – NE 16

Může mít 8 zvířat 20 nožiček?

ANO – NE 20



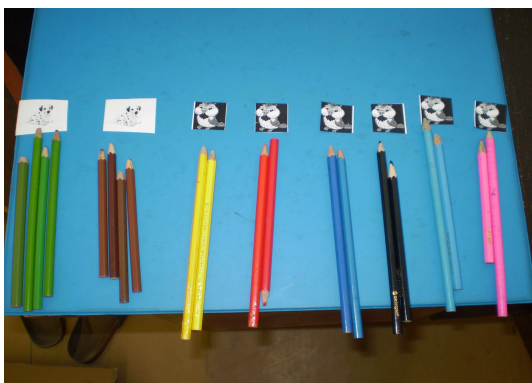
$$2\overset{\vee}{S} + 6\overset{\vee}{V} = 8Z$$



Obr. č. 81 – Osm štěňátek má 32 nohou



Obr. č. 82– Osm vrbců má 16 nohou



Obr. č. 83 – 6 vrbců a 2 štěňátka mají dohromady 20 nohou



Obr. č. 84 – M. zapisuje úlohu

9. Sbírka úloh

9.1. Dělitelnost

9.1.1 Vzorový příklad

Kupující řekl pokladní v obchodě:

„Platím dva balíčky soli po 90 kopejkách, dva kousky mýdla po 2 rublech 70 kopejkách, tři balíčky cukru a šest krabiček zápalek; kolik stojí balíček cukru a krabička zápalek, to si bohužel nepamatuji.“

Pokladní napsala kupujícímu účtenku na 29 rublů 17 kopejek. Když se kupující na účtenku podíval, vrátil ji pokladní a řekl:

„Asi jste se zmýlila v součtu“.

Pokladní účtenku přepočítala a uznala, že kupující má pravdu. Omluvila se a napsala jinou účtenku.

Jak objevil kupující chybu?

Řešení: Cena soli a mýdla je dělitelná třemi. Také počet balíčků cukru a krabiček se zápalkami je dělitelný třemi. Proto musí být třemi dělitelný i účet za celý nákup. Součet na lístku však tímto číslem dělitelný nebyl: $2 + 9 + 1 + 7 = 19$; součet není dělitelný třemi. Ve výpočtu tedy byla chyba.

9.1.2 Úlohy

1.) Je možné některou z částek 740 Kč a 1 350 Kč vyplatit

- a) v samých pětikorunách
- b) v samých desetikorunách
- c) v samých dvacetikorunách?

2.) Určete nejmenší trojciferné číslo, které

- a) při dělení dvěma dává zbytek 1,
- b) při dělení pěti dává zbytek 2,
- c) při dělení třemi dává zbytek 1,
- d) při dělení deseti dává zbytek 7.

3.) Zapiš všechna čtyřciferná čísla sestavená z číslic

A - 4, 5, 0, 7

B – 6, 0, 8, 5,

která a) jsou dělitelná deseti,

b) jsou dělitelná pěti, ale nejsou dělitelná deseti.

Musíš využít všechny číslice.

4.) Obžalovaný se u soudu obhájí: „Částku 8 990 Kč jsem žalobci poslal poštou a potvrzení jsem založil do rozečtené knihy. Dokonce vím, že jsem je dal mezi stránky 89 a 90, protože jsem si při tom všiml, jak se čísla stran shodují s čísly na potvrzení. Ale pak mi někdo ukradl tašku s knihou i s potvrzením.“

„Alespoň v jedné věci určitě lžete,“ řekl soudce. „Mezi stránky 89 a 90 jste žádné potvrzení vložil nemohl.“ Soudce má pravdu. Víš proč?

5.) Vypiš z čísel 241, 873, 2 421, 3 939, 5 421, 5 877, 8 159, 80 091 všechna ta, která jsou dělitelná devíti.

6.) Hanka ví, že Jakubovo telefonní číslo je dělitelné devíti. Protože nechce, aby mu volal i někdo jiný, zapsala si do telefonního seznamu:

*Jakub 475*63423*

Která číslice patří na místo hvězdičky?

7.) Z čísel 138, 198, 213, 264, 507, 756 vyberte čísla dělitelná

a) šesti,

b) dvanácti.

8.) Máte 42 bonbonů. Kolika spolužákům je můžete ve třídě rozdat tak, aby vám žádný nezbyl a aby všichni obdarovaní spolužáci dostali stejný počet bonbonů?

9.) O číslech 35 a 91 víte, že platí: $35 = 5 \cdot 7$ a $91 = 7 \cdot 13$. Navíc $35 + 91 = 126$ a $35 \cdot 91 = 3\,185$. O kterém z čísel 126 a 3 185 můžete říci, že je dělitelné 13, aniž byste prováděli dělení?

10.) Každý letopočet po roce 1582, který je dělitelný čtyřmi, jest rokem přestupným, vyjma letopočty stem dělitelné; z těchto jsou jen ty přestupné, u nichž je počet set čtyřmi dělitelný.

a) Stanovte, která z let byla nebo budou přestupná:

1628, 1700, 1834, 1880, 1900, 1910, 1944, 2000, 1412, 2700.

b) Jmenujte přestupné roky, které jste sami již prožili, a vypočtěte, kolik dní uplynulo od vašeho narození.

9.2 Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek

9.2.1 Vzorový příklad

Potřebujete rozstříhat barevný pás papíru tvaru obdélníku s rozměry 32 cm a 80 cm na co největší stejně veliké čtverce. Dokážete určit délku jejich strany? Kolik čtverců tak získáte?

Řešení: $D(32, 80) = 16$; $a = 16$ cm

$$x = (80 : 16) \cdot (32 : 16) = 5 \cdot 2 = 10$$

Čtverce budou mít stranu délky 16 cm a bude jich celkem 10.

9.2.2 Úlohy

- 1.) Představte si, že jste sami v místnosti a před vámi na stole leží 48 čokolád, 96 jablek, 72 mandarinek, 120 ořechů, balící papír a provázek. Ve vedlejší místnosti probíhá besídka dětí, brzy bude končit a vy jim máte na závěr přinést pod stromeček balíčky. Jenomže si nemůžete vzpomenout, kolik dětí tam právě je. Víte jen, že jich je víc než dvacet a že ovoce i čokolády jsou nachystány pro určitý počet stejných balíčků. Dokážete si počet balíčků vypočítat a zjistit, co je potřeba do každého balíčku dát?
- 2.) Z autobusového nádraží vyjíždějí přesně v 7 hodin autobuse linek A a B. Autobusy linky A jezdí každých 8 minut, linky B každých 12 minut. V jakých časech mezi sedmou a dvanáctou hodinou odjíždějí autobusy obou linek od nádraží současně.
- 3.) Tatínek chce vyrobit pro Jirku a Petra do jejich pokoje dvě skřínky na hračky. Chce je udělat stejně vysoké. Jirkovi vyhovuje, když police ve skřínce budou od sebe vzdáleny 24 cm, avšak Petr si chce do své skřínky ukládat i knihy. Proto potřebuje, aby vzdálenost polic byla 30 cm. Jak vysoké skřínky má tatínek vyrobit? (Tloušťku polic, spodku i vrchu skříněk zanedbejte.)
- 4.) Jirka stěradá do své pokladničky pouze korunové mince. Jednou se rozhodl, že svým třem mladším bratrům koupí čtvrtky za 35 haléřů. Kolik korun si má z pokladničky vzít

na jejich nákup, jestliže nechce nést zpátky žádné drobné? Nejméně kolik čtvrtek musí koupit? Podaří se mu rozdělit své sourozence spravedlivě, tj. rovným dílem?

5.) Potřebujete rozstříhat proužek papíru dlouhý 88 cm na stejně dlouhé menší proužky tak, aby jejich rozměry byly v centimetrech vyjádřeny celými čísly nebyly kratší než 8 cm. Jak to uděláte?

6.) Dědeček si sám vyrábí na česání ovoce do zahrady dva žebříky, jeden třímetrový a druhý dlouhý 4,5 m. Požádal svého vnuka Honzíka, aby mu poradil, jak daleko od sebe má umístit příčky. Chce je udělat u obou žebříků od sebe stejně vzdálené. Protože však potřebuje, aby se mu po žebříku dobře lezlo, nechce, aby vzdálenosti mezi příčkami byly větší než 35 cm. Honzík se chvíli zamyslel a pak dědečkovi poradil. Dokážete to také? (Tloušťku příček neberte v úvahu. Předpokládejte, že první a poslední příčka mají od konců žebříků stejnou vzdálenost libovolných dvou sousedních příček.)

7.) Pét'a má čtvercové destičky o straně 1 dm a sestavuje z nich obdélníky. Zjistí, jaké délky stran může mít obdélník, který Pét'a složí

- a) z dvanácti destiček
- b) z osmnácti destiček
- c) z dvaceti dvou destiček
- d) z dvaceti tří destiček

8.) Pro přemýšlivé. Hledej a zapisuj takové dvojice prvočísel, jejichž rozdíl je 1. Rozhodni, kolik takových dvojic existuje. Vyber správnou odpověď:

žádná jedna dvě nekonečně mnoho

9.) Společný násobek tří čísel je 3 276. Jedno číslo je v něm obsaženo 7krát, druhé 63krát a třetí 9krát. Která čísla to jsou?

10.) Sad má délku 60 m a šířku 42 m. Jak daleko od sebe budeme dávat sloupky pro oplocení, mají-li být vzdálenosti mezi sloupky po délce a šířce stejné a v celých metrech?

9.3 Prvočísla a čísla složená

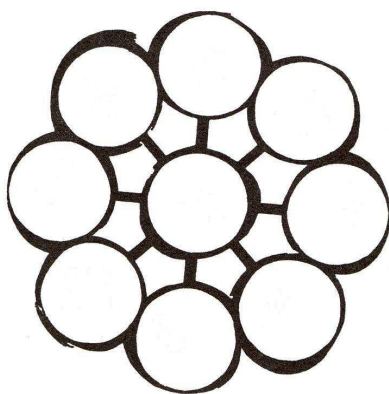
9.3.1 Vzorový příklad

Je číslo 89 složené? Rozhodněte o tom bez nahlédnutí do tabulky prvočísel.

Řešení: Kdyby bylo číslo 89 složené, bylo by dělitelné některým z čísel 2, 3, ..., 9 (neboť součin dvou dvojčiferných čísel je aspoň $10 \cdot 10 = 100$). Navíc nemusíme zkoumat dělitelnost všemi čísly 2, 3, ..., 9 ale pouze prvočísky, tj. čísky 2, 3, 5 a 7. Podle znaků dělitelnosti není číslo 89 dělitelné ani 2, ani 3, ani 5; Číslo 89 je prvočíslo.

9.3.2 Úlohy

- 1.) Mezi prvočísky je jediné sudé číslo. Určete je.
- 2.) Najděte všechna prvočísla, která jsou větší než 40 a menší než 50.
- 3.) Má každé složené číslo aspoň čtyři dělitele?
- 4.)



Umíte roztočit prvočíselné kolo? Roztočí se, až do něho vepíšete prvních devět lichých prvočísel tak, že součet tří prvočísel pro každý průměr kola bude opět prvočíslem. Poradíme vám, že ve středu kola může být číslo 13.

- 5.) Číslo 66 lze zapsat jakou součin tří prvočísel : $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$. Zapište číslo 66 jako součet tří prvočísel. Úloha má pět různých řešení (bez ohledu na pořadí sčítanců). Najděte je všechna.
- 6.) Bez použití tabulky prvočísel určete, zda čísla 51, 53, 55, 57 a 59 jsou prvočísla.
- 7.) Zapište číslo 49 jako součet tří po sobě jdoucích prvočísel.
- 8.) Určete součet všech prvočísel větších než 10 a menších než 20. Určete všechny dělitele tohoto součtu.
- 9.) Dvěma prvočísly, jejichž rozdíl je 2, říkáme prvočíselná dvojčata. Například čísla 3 a 5 jsou prvočíselná dvojčata, protože to jsou prvočísla $5 - 3 = 2$. Vypiš všechna další prvočíselná dvojčata, která jsou mezi čísly 1 a 20.
- 10.) Čísla 840, 5 742 a 980 001 jsou složená čísla. Vypiš u každého z nich aspoň tři dělitele.

9.4 Řešení úloh

9.4.1 Dělitelnost

- 1.) a) obě částky ano
b) obě částky ano
c) jen částku 740 Kč
- 2.) a) 101
b) 102
c) 100
d) 107
- 3.) A: a) 4 570, 4 750, 5 470, 5 740, 7 450, 7 540; b) 4 075, 4 705, 7 045, 7 405
B: a) 5 680, 5 860, 6 580, 6 850, 8 560, 5 650;
- 4.) Stránky 89 a 90 jsou obě strany jednoho listu. Na stránkách otevřené knihy je vždy nižší číslo sudé a vyšší liché.
- 5.) 873, 2 421, 5 877, 80 091;
- 6.) 2
- 7.) a) 138, 198, 264, 756;
b) 264, 756;
- 8.) 1, 2, 3, 6, 7, 14 nebo 21 spolužákům;
- 9.) O čísle 3 185.
- 10.) a) 1628, 1880, 1944, 2000, 2412;

9.4.2 Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek

- 1.) 24 balíčků se 2 čokoládami, 4 jablky, 3 mandarinkami a 5 ořechy
- 2.) 7,24, 7,48, 8,12, 9,36, 9,00, 9,24, 9,48, 10,12, 10,36, 11,00, 11,24, 11,48;
- 3.) Skřínky vysoké 120 cm.
- 4.) 700 haléřů tj. 7 Kč; $700 : 35 = 20$
- 5.) Protože $D^{88} = 1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88$, lze původní proužek rozstříhat na proužky délky 8, 11, 22 nebo 44 cm.
- 6.) Společnými děliteli čísel 300 a 450 menšími než 35 jsou čísla 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30; prakticky bude vyhovovat vzdálenost 25 nebo 30 cm.
- 7.) a) 1 a 12 dm, 2 a 6 dm, 3 a 4 dm
b) 1 a 18 dm, 2 a 9 dm, 3 a 6 dm
c) 1 a 22 dm, 2 a 11 dm
d) 1 a 23 dm
- 8.) jedna dvojice, 2 a 3
- 9.) 468, 52, 364
- 10.) po 1 m, 2 m, 3 m nebo 6 m

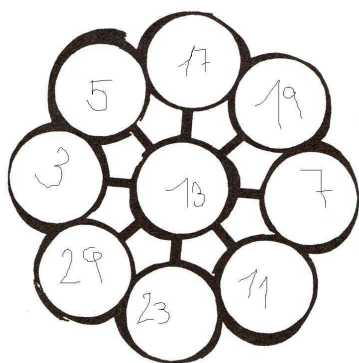
9.4.3 Prvočísla a čísla složená

1.) 2

2.) 41, 43, 47

3.) Ne, např. číslo 4 má jen tři dělitele

4.)



5.) $66 = 2 + 3 + 61 = 2 + 5 + 59 = 2 + 11 + 53 = 2 + 17 + 47 = 2 + 23 + 41$

6.) $51 = 3 \cdot 17, 55 = 5 \cdot 11, 57 = 3 \cdot 19$; čísla 53 a 59 jsou prvočísla

7.) $49 = 13 + 17 + 19$

8.) $60 = 11 + 13 + 17 + 19$; $D_{60} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$

9.) 5, 7; 11, 13; 17, 19

10.) 840: např. 1, 840, 5, 10, 20

5 742: např. 1, 5 742, 2

980 001: např. 1, 980 001, 3;

10. Závěr

Úkolem této diplomové práce bylo sestavení studijního materiálu shrnujícího problematiku dělitelnosti tak, aby byla využitelná pro studenty učitelství 1. stupně ZŠ. K tomuto cíli směřovala všechna témata, která byla v diplomové práci zpracována. Byla to dělitelnost jako taková, znaky dělitelnosti, největší společný dělitel a nejmenší společný násobek, prvočísla a čísla složená. V neposlední řadě nesmím opomenout dělitelnost na 1. stupni ZŠ.

Svou práci jsem rozšířila o testování dělitelnosti u desetileté autistické dívky. Žádné velké závěry jsem od testování neočekávala. Přála jsem si pouze, aby spolupracovala a je-li schopna tyto úlohy vůbec již v tomto věku řešit. Byla moc šikovná. Míša úlohy chápala a úspěšně řešila.

Doufám, že studium této práce poskytne ucelený pohled na téma dělitelnost a pomůže uchopit budoucím učitelům učivo při vyučovacím procesu, aby nebylo pojímáno pouze formálně.

Sbírku úloh jsem vyvodila z tématických celků v této práci a ještě rozšířila o zajímavé úlohy. Jde o příklady vedoucí k rozvíjení logického myšlení. Tato příručka mezi studijním materiálem zatím chyběla, tak doufám, že nejen studentům poslouží a stane se používanou.

Součástí práce bylo i testování studentů, které potvrdilo předpokládané lepší výsledky u studentů, kteří již prošli kurzem o dělitelnosti. Testování by bylo přesnější, kdybych jej aplikovala na větší skupině studentů.

Při tvorbě diplomové práce mne napadly i jiné problémy, o kterých by stálo za to se zmínit. Například více rozebrat a testovat autistické děti, nebo zkusit podobné úlohy testovat s dětmi v rámci matematického kroužku. Další variantou by bylo sestavení dotazníku pro učitele, zjištění nejčastějších potíží v dělitelnosti. Také by bylo možností otestovat žáky 1. stupně, jak by o úlohách o dělitelnosti přemýšleli.

11. Seznam citací

- [1] Veselý, F.: O dělitelnosti čísel, str. 3, 73, 81, 82, Praha: Mladá fronta, 1966
- [2] Korděmskij, B., A.: Matematické prostocviky, str. 215 - 235, 516, Praha: Mladá fronta, 1966
- [3] Drabešová, J.: Dělitelnost přirozených čísel v učivu matematiky 1. stupně ZŠ a při přípravě učitelů, str. 5 - 9, 21, 23, 24, 64, 65, České Budějovice, 1993
- [4] <http://cs.wikipedia.org/wiki/D%C4%9Blitelnost>
- [5] Drábek, J., Křižalkovič, K., Liška, J., Viktora, V.: Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ, str. 185 - 186, Praha: SPN, 1985.
- [6] Rossiová, Dell'Acqua, A.: Encyklopedie matematiky, str. 48, 57, Praha: Mladá fronta, 1978
- [7] Hruša, K.: Přehled elementární matematiky, str. 40, 41, 42, 43, Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1962
- [8] Hruša, K.: Elementární matematika, str. 109, Praha: Přírodovědecké nakladatelství, 1953
- [9] Bialas, A.: O dělitelnosti čísel, str. 19, 67, 68, 81, Praha: SPN, 1966
- [10] <http://maths.cz>
- [11] <http://pavel-novak.net>
- [12] Coufalová, J.: Matematika s didaktikou pro 1. ročník učitelství 1. stupně ZŠ, str. 67, 70, Plzeň: Západočeská fakulta v Plzni, 2004
- [13] Vilášková, D.: Strukturované učení pro žáky s autismem, str. 3, Praha: Septima, 2006
- [14] Hrdlička, M., Komárek, V.: Dětský autismus, str. 154, Praha: Potrál, 2004

12. Použitá literatura

Běloun, F. a kol. (1987): Sbírka úloh z matematiky pro základní školy, Praha: SPN

Bialas, A. (1966): O dělitelnosti čísel, Praha: SPN

Coufalová, J. (2004): Matematika s didaktikou pro 1. ročník učitelství 1. stupně ZŠ, Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni

Coufalová, J. a kol. (1994): Matematika pro druhý ročník základní školy, Praha: Fortuna

Divíšek, J. a kol. (1989): Sbírka úloh z matematiky pro 2. a 3. ročník základní školy, Praha: SPN

Divíšek, J., Hošpesová, A. (2002): Matematika pro všechny děti, České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Drábek, J. a kol. (1985): Základy elementární matematiky, Praha: SPN

Drabešová, J. (1993): Dělitelnost přirozených čísel v učivu matematiky 1. stupně ZŠ a při přípravě učitelů, České Budějovice

Eichlerová, M. a kol. (2003): Matematika pro 2. ročník, Praha: Alter

Gillberg, Ch., Peeters, T. (1998): Autismus – zdravotní a výchovné aspekty, Praha: Portál

Herman, J. a kol. (1994): Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií– Dělitelnost, Praha: Prométheus

Horník, L. (1994): Pracovní sešit pro druhé – sbírka úloh z matematiky, Praha: Pansofia

Hrdlička, M., Komárek, V. (2004): Dětský autismus, Praha: Potrál

Hruša, K. (1953): Elementární matematika, Praha: Přírodovědecké nakladatelství

Hruša, K. a kol. (1962): Přehled elementární matematiky, Praha: Státní nakladatelství technické literatury

Hruša, K. a kol. (1977): Úvod do studia matematiky, Praha: SPN

Kolman, A. (1969): Dějiny matematiky ve starověku, Praha: Academia

Korděmskij, B., A. (1966): Matematické prostocviky, Praha: Mladá fronta

Kuřina, F., Půlpán, Z. (2006): Podivuhodný svět elementární matematiky, Praha: Academia

Loukota, J. (1998): Veselá matematika, Olomouc: Votobia

Novočeský, Š. a kol. (1983): 777 matematických zábav a her, Praha: SPN

Odvárko, O., Kadleček, J. (1997): Matematika pro 6. ročník základní školy, 2. díl, Praha: Prométheus

Odvárko, O., Kadleček, J. (1998): Pracovní sešit z matematiky, Praha: Prométheus

Rossiová, Dell'Acqua, A. (1978): Encyklopedie matematiky, Praha: Mladá fronta

Schopler, E. a kol. (1998): Strategie a metody výuky dětí s autismem a dalšími vývojovými poruchami, Praha: Portál

Sroková, E., Olšáková, P. (2004): Autismus ve školní praxi, Ostrava: Montanex

Veselý, F. (1966): O dělitelnosti celých čísel, Praha: Mladá fronta

Vilášková, D. (2006): Strukturované učení pro žáky s autismem, Praha: Septima

<http://maths.cz>

<http://www.rvp.cz>

<http://pavel-novak.net>

<http://cs.wikipedia.org>

13. Seznam příloh

- 1.) Tabulka sloužící k násobení čísel
- 2.) Míši pomůcka určena k dělení čísel

1.) Tabulka pro násobení

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

2.) Míši pomůcka při dělení

