



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Fakulta pedagogická
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Vlastnosti kuželoseček

Vypracoval: Eva Schwarzová
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2015

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě - v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

.....

Anotace

Bakalářská práce se zabývá několika vybranými vlastnostmi kuželoseček. V první části jsou kuželosečky rozděleny, uvedeny jejich vlastnosti probírané v předmětu Geometrie 1 a doplněny o vlastnosti nové. Druhá část je věnována afinitě mezi kružnicí a elipsou a afinním vlastnostem elipsy. Obě části jsou doplněny vybranými příklady a názornými obrázky.

Annotation

The bachelor thesis deals with a number of selected properties of conics. In the first part conics are divided, their properties discussed in the subject Geometry 1 are given, and new properties are added. The second part is dedicated to affinity between the circles and ellipses and affine properties of ellipses. Both parts are supplemented by selected examples and illustrative figures.

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych tímto vyjádřila poděkování vedoucímu své bakalářské práce, panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., za odborné vedení při řešení této bakalářské práce.

Obsah

1. Úvod	7
2. Rozdělení kuželoseček	8
3. Elipsa.....	9
3.1. Rovnice elipsy	10
3.2. Tečna elipsy	11
3.3. Ohniskové vlastnosti elipsy	13
3.4. Konstrukce elipsy	14
3.4.1. Bodová konstrukce elipsy	14
3.4.2. Trojúhelníková konstrukce elipsy	15
3.4.3. Proužková konstrukce elipsy.....	16
3.4.4. Rytzova konstrukce elipsy	17
4. Hyperbola	20
4.1. Rovnice hyperboly	22
4.2. Tečna hyperboly	23
4.2.1. Tečny hyperboly vedené z bodu P	25
4.3. Ohniskové vlastnosti hyperboly	25
4.4. Konstrukce hyperboly.....	27
4.4.1. Bodová konstrukce hyperboly.....	27
4.5. Asymptoty hyperboly	29
4.6. Rovnoosá hyperbola	31
4.7. Sečny hyperboly	33
4.8. Průsečíky přímky s hyperbolou	36
5. Parabola.....	38
5.1. Rovnice paraboly	38
5.2. Tečna a normála paraboly	39
5.2.1. Subtangent a subnormála paraboly.....	41
5.2.2. Tečny z bodu k parabole	45
5.2.3. Tečna rovnoběžná se směrem	47
5.3. Konstrukce paraboly	48
5.3.1. Bodová konstrukce paraboly.....	48
5.3.2. Trojúhelníková konstrukce	49

5.4.	Průsečíky přímky s parabolou	49
6.	Afinita	51
6.1.	Osová afinita	51
6.2.	Afinita mezi kružnicí a elipsou	57
6.3.	Afinní vlastnosti elipsy	57
6.4.	Použití afinních vlastností elipsy při konstrukcích	59
7.	Pascalova a Brianchonova věta	63
8.	Závěr	64
9.	Citovaná literatura.....	65

1. Úvod

Toto téma bakalářské práce jsem si vybrala, protože problematika kolem kuželoseček je zajímavá. Vlastností kuželoseček je mnohem více, ale vybrala jsem jen některé z nich.

Práci jsem si ze začátku rozdělila podle druhu kuželosečky, ke každé z nich jsem uvedla vlastnosti, které jsou mi známé ze střední či vysoké školy a vlastnosti, které jsou pro mě nové.

Ke konci práce jsem se věnovala afinitě mezi kružnicí a elipsou, afinním vlastnostem elipsy a zmínila jsem dvě věty, které platí pro všechny kuželosečky.

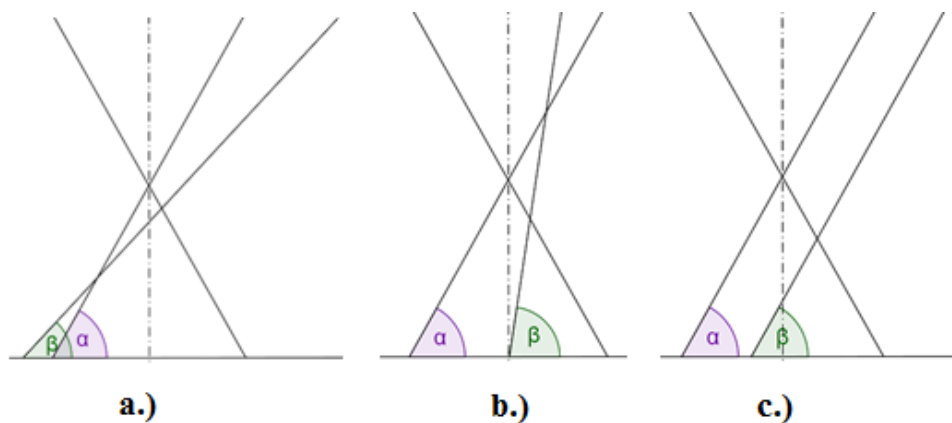
V bakalářské práci najdete příklady a u nich postup sestavení.

Celá práce je doplněna obrázky. K vytváření obrázků jsem si zvolila program GeoGebra, který je přehledný a dobře se mi v něm pracuje.

2. Rozdělení kuželoseček

Kuželosečka je rovinná křivka, která vznikne jako průnik roviny s rotační kuželovou plochou, kdy rovina neprochází vrcholem kuželové plochy. Nejjednodušší takovou rovinnou křivkou je kružnice. Řezem může být elipsa, hyperbola nebo parabola.

Typ kuželosečky závisí na tom, pod jakým úhlem protíná rovina řezu kuželovou plochu, což nám říká Quételetova-Dandelinova věta.



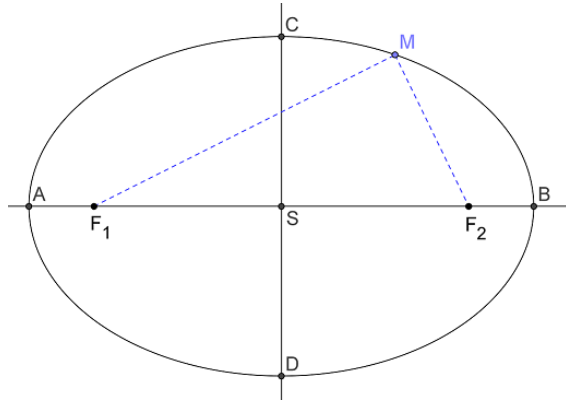
Obr. 1 Quételetova-Dandelinova věta

Je-li:

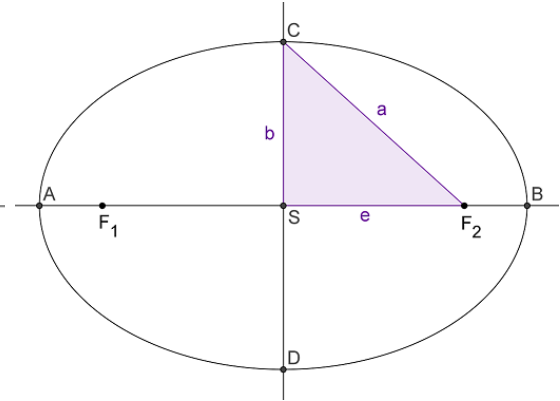
- a.) $\alpha > \beta$, tak řezem vznikne elipsa.
- b.) $\alpha < \beta$, tak řezem vznikne hyperbola.
- c.) $\alpha = \beta$, tak řezem vznikne parabola

3. Elipsa

Definice: Elipsa je množina bodů v rovině, jejichž součet vzdáleností od dvou daných pevných bodů F_1, F_2 je konstantní, [1].



Obr. 2 průvodiče bodu M



Obr. 3 Základní vlastnosti elipsy

Věta: Elipsa má dvě osy souměrnosti o_1 a o_2 a je středově souměrná podle jejich průsečíku S , [2].

Kde S je středem, o_1 je hlavní a o_2 vedlejší osou elipsy. Tedy mluvíme o středové kuželosečce.

Body A, B, C, D jsou vrcholy elipsy. Body A, B jsou vrcholy hlavní, které leží na hlavní ose a body C, D jsou vrcholy vedlejší, které leží na vedlejší ose. S je střed elipsy, který leží ve středu úsečky AB a platí $|AS| = |BS| = a$, kde a je délka hlavní poloosy. Stejně platí i $|CS| = |DS| = b$, kde b je délka vedlejší poloosy. Body F_1, F_2 jsou ohniska elipsy. Excentricita je vzdálenost středu S od ohniska F_1 (F_2) a značíme ji e . Pokud z ohnisek se stane jedno, tak je to speciální případ elipsy a kuželosečkou je kružnice. To znamená, že excentricita e je nulová a tudíž $a = b$. Trojúhelník SF_2C je charakteristický trojúhelník elipsy, pro který platí Pythagorova věta:

$$a^2 = b^2 + e^2$$

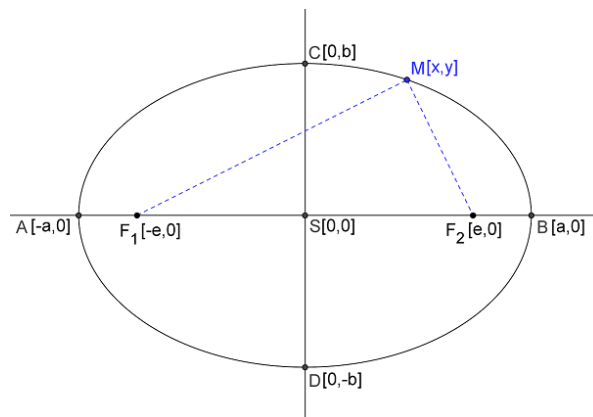
Spojnice libovolného bodu M s ohnisky F_1, F_2 jsou průvodiče bodu M a součet průvodičů je konstantní, proto platí:

$$|F_1M| + |MF_2| = 2a$$

Dále zavedeme vnější a vnitřní body elipsy. Bod X je vnějším bodem elipsy, jestliže platí $|F_1X| + |XF_2| > 2a$. A bod X je vnitřním bodem elipsy, jestliže platí $|F_1X| + |XF_2| < 2a$. Tedy ohniska F_1 a F_2 jsou vnitřními body elipsy.

3.1. Rovnice elipsy

Abychom odvodili rovnici elipsy, musíme si zvolit kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $F_1 = [-e, 0]$ a $F_2 = [e, 0]$.



Obr. 4 Rovnice elipsy

Zvolíme si bod $M = [x, y]$, to je libovolný bod elipsy a podle definice platí:

$$|F_1M| + |MF_2| = 2a.$$

Po rozepsání této rovnice dostaneme:

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

A rovnici postupně upravujeme:

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$(e+x)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2ex + e^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 4a^2 - 4ex$$

$$a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = a^2 - ex$$

$$a^2(x - e)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2ex + a^2e^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2e^2 + a^2y^2 = a^4 + e^2x^2$$

$$a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2e^2$$

a využijeme vztahu $a^2 - e^2 = b^2$:

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

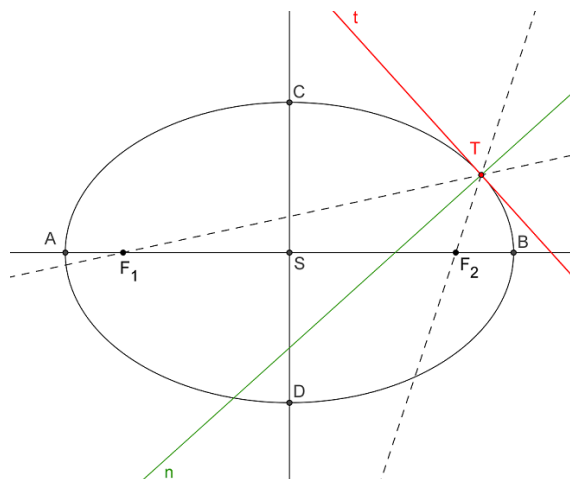
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Konečnou úpravou dostáváme obecnou rovnici elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Rovnice $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ je kanonická rovnice elipsy.

3.2. Tečna elipsy

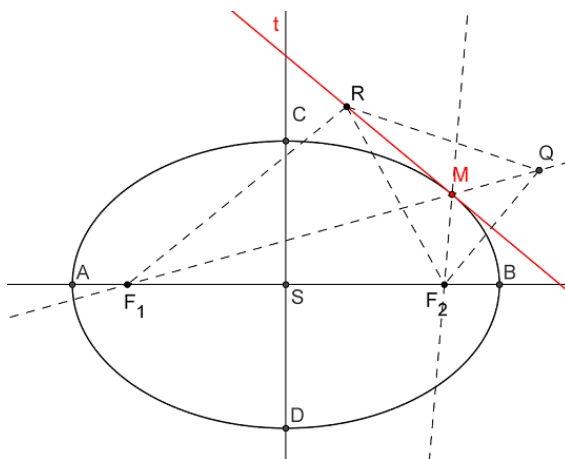


Obr. 5 Tečna a normála elipsy

Věta: Tečna elipsy pílí vnější úhel průvodičů bodu dotyku, [1].

Důkaz:

Zvolme libovolný bod M , který náleží kuželosečce. Dále sestrojíme osu t průvodičů MF_1 a MF_2 , pak k jednomu z ohnisek, např. F_2 sestrojíme souměrný bod Q podle přímky t . Ze souměrnosti platí: $|MF_2| = |MQ|$, tedy $|F_1Q| = |F_1T| + |TQ| = |F_1T| + |TF_2| = 2a$. Na t si zvolíme libovolný bod R , který je různý od M . Máme trojúhelník RF_1Q a platí nerovnost: $|RF_1| + |RQ| > |F_1Q| = 2a$. Z osově souměrnosti $|RQ| = |RF_2|$ nám předchozí nerovnost dává: $|RF_1| + |RF_2| > 2a$. To znamená, že všechny body kromě bodu M jsou vnějšími body elipsy, tedy přímka t nemá žádný jiný společný bod než bod M . Podle definice je t tečna s bodem dotyku M .

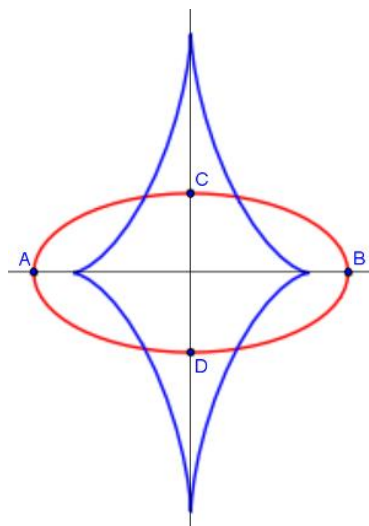


Obr. 6 Důkaz, že tečna elipsy půlí vnější úhel průvodičů

Věta: Normála elipsy půlí vnitřní úhel průvodičů bodu M , [1].

Normála n je kolmá na tečnu t a prochází bodem M .

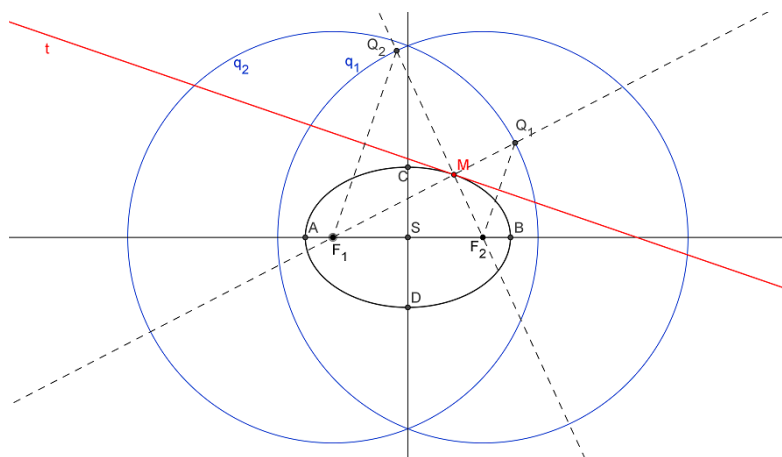
Tečny elipsy obalují elipsu, tedy elipsa je obalovou křivkou svých tečen. Obalová křivka normál elipsy se nazývá evoluta elipsy. Je to množina všech středů křivosti dané elipsy. Vrcholy evoluty jsou středy křivosti osculačních kružnic ve vrcholech elipsy. Evoluta elipsy je rovinná křivka, která se nazývá asteroida. Pomocí trojúhelníkové konstrukce lze přesně dohledat nejen normálu, ale i střed křivosti v bodě - bod evoluty.



Obr. 7 Asteroida

3.3. Ohniskové vlastnosti elipsy

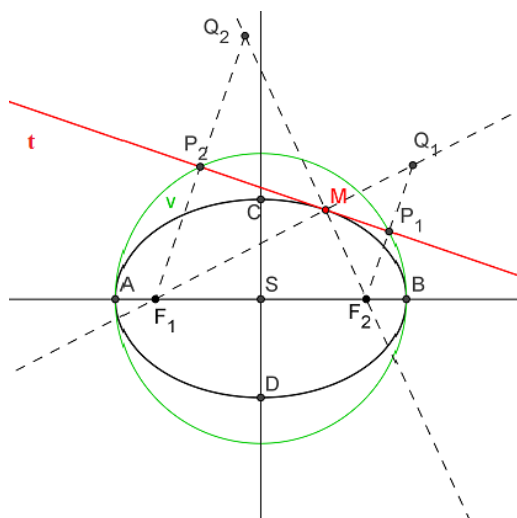
Věta: Množina bodů souměrných s jedním ohniskem elipsy podle všech tečen je kružnice se středem ve druhém ohnisku o poloměru $2a$, [1].



Obr. 8 Řídící kružnice elipsy

Máme body Q_1 , Q_2 , kde bod Q_1 je souměrný s ohniskem F_2 a bod Q_2 je souměrný podle druhého ohniska F_1 podle tečny t . Množina všech bodů Q_1 opisuje kružnici q_1 se středem v ohnisku F_2 a poloměru $2a$ a množina všech bodů Q_2 opisuje kružnici q_2 se středem v ohnisku F_1 a poloměru $2a$. Kružnice q_1, q_2 jsou řídící kružnice elipsy.

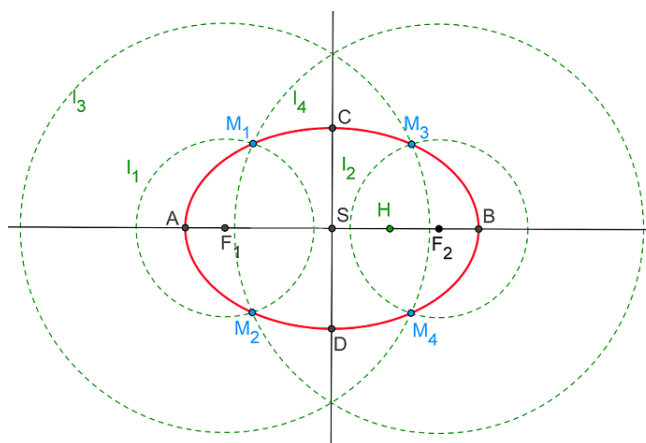
Věta: Množina pat kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny je kružnice se středem ve středu elipsy o poloměru a , [1].



Obr. 9 vrcholová kružnice elipsy

3.4. Konstrukce elipsy

3.4.1. Bodová konstrukce elipsy



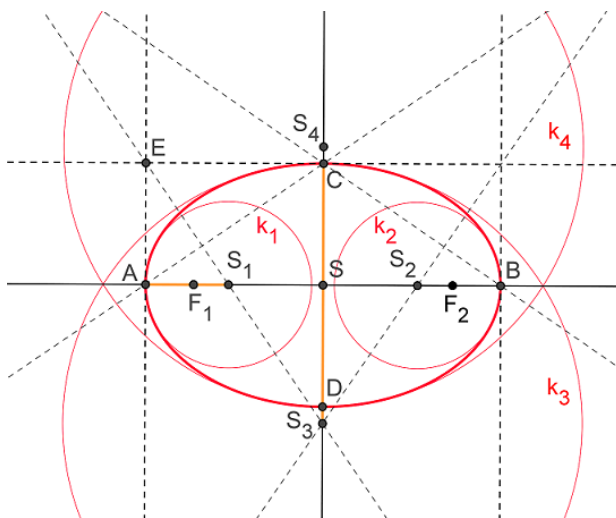
Obr. 10 Bodová konstrukce elipsy

Body elipsy sestrojíme následujícím způsobem:

Mezi ohnisky si zvolíme pomocný bod H a sestrojíme kružnice l_1, l_2, l_3, l_4 o poloměrech $r_1 = |AH|$ a $r_2 = |HB|$ se středy v ohniscích F_1, F_2 . Průsečíky těchto kružnic jsou body M_1, M_2, M_3, M_4 a tyto body jsou body elipsy. Pro ověření zda jsou to body elipsy, tak platí např. pro bod M_1 :

$$|M_1F_1| + |M_1F_2| = |AH| + |HB| = |AB| = 2a$$

Tedy M_1 je bod elipsy.



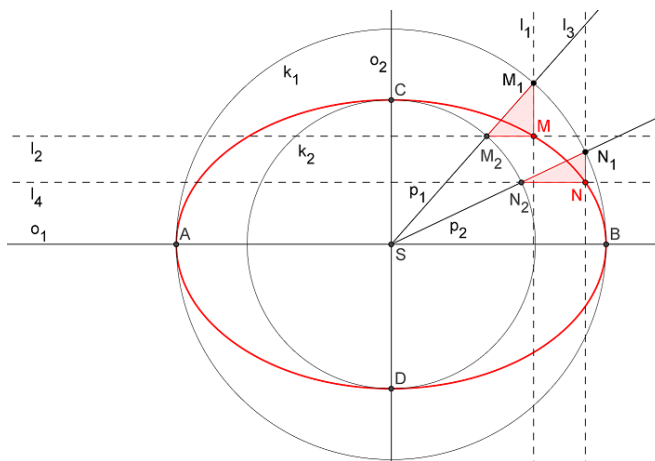
Obr. 11 Oskulační kružnice

Oblouky u vrcholů elipsy nahrazujeme oskulačními kružnicemi, které nám pomáhají vystihnout tvar elipsy. Konstrukci uděláme následovně:

Body A, S, C doplníme na obdélník AOCE. Z bodu E spustíme kolmici na úhlopříčku AC, kde se kolmice protne s hlavní a vedlejší poloosou, tak vzniknou středy S_1 a S_2 příslušných oskulačních kružnic.

3.4.2. Trojúhelníková konstrukce elipsy

Máme zadaný střed S a osy o_1 a o_2 , které jsou zadány velikostmi poloos a , b .



Obr. 12 Trojúhelníková konstrukce elipsy

Postup:

Sestrojíme kružnice k_1 (hlavní vrcholová kružnice), k_2 (vedlejší vrcholová kružnice) se středem v bodě S , které mají poloměry r_1 a r_2 , kde r_1 je určena velikostí a a r_2 je určena velikostí b . Z bodu S vedeme polopřímku p_1 , která protne kružnice k_1 a k_2 v bodech M_1 a M_2 . Poté vedeme bodem M_1 kolmici l_1 na hlavní osu o_1 a z M_2 kolmici l_2 na vedlejší osu o_2 . Průsečíkem kolmic l_1 a l_2 bude bod M , který náleží elipse. Ostatní body elipsy získáme stejným způsobem.

3.4.3. Proužková konstrukce elipsy

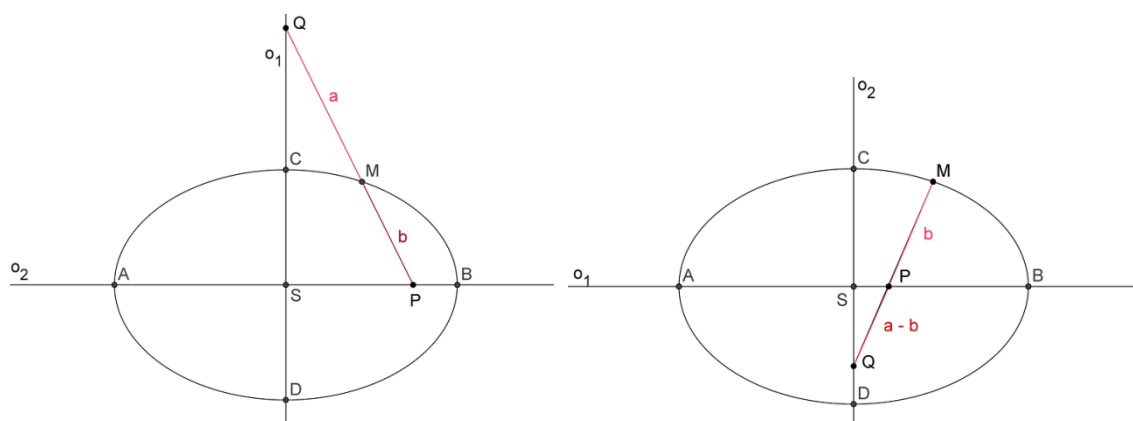
Proužkové konstrukce elipsy existují dvě a to součtová a rozdílová. Konstrukce spočívá v tom, že na proužek papíru nanese velikosti hlavní a vedlejší poloosy.

Součtová konstrukce - postup:

Na proužek papíru nanese vedle sebe velikosti poloos a , b , vznikne úsečka PQ o velikosti $a + b$. Společný bod M dělí úsečku PQ v poměru $a : b$. Proužek papíru přiložím tak, aby bod P ležel na hlavní ose o_1 a bod Q na vedlejší ose o_2 . Bod M , v tomto okamžiku, je bodem elipsy, vyznačíme ho na papír. Proužkem papíru pohybují tak, aby se bod P pohyboval po hlavní ose o_1 a bod Q po vedlejší ose o_2 , opět bod M vyznačíme na papír. Tímto pohybem bod M opisuje elipsu.

Rozdílová konstrukce - postup:

Opět nanese na proužek papíru velikosti poloos a , b . Na úsečku QM o velikosti a z bodu M nanese úsečku o velikost b . Společným průsečíkem těchto úseček je bod P . Proužek papíru umístíme tak, aby bod Q ležel na vedlejší ose o_2 a bod P na hlavní ose o_1 a polohu bodu M si vyznačíme na papír. Opět pohybují tak, aby bod Q se pohyboval po vedlejší ose o_2 a bod P po hlavní ose o_1 , kde bod M opisuje elipsu. Polohy bodu M , při tomto pohybu, si vyznačíme na papír.



Obr. 13 Proužková konstrukce elipsy - součtová Obr. 14 Proužková konstrukce elipsy - rozdílová

3.4.4. Rytzova konstrukce elipsy

V Rytzově konstrukci budeme používat sdružené průměry.

Sdružené průměry elipsy

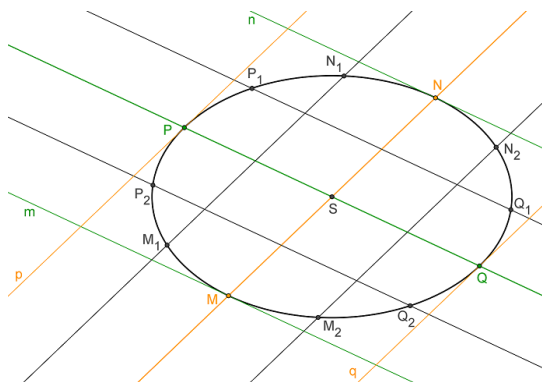
Elipsou e vedeme středem S tětivu MN , kterou nazýváme průměr, a tětivy $M_1N_1 \parallel M_2N_2 \parallel M_3N_3 \parallel \dots \parallel MN$; středy těchto rovnoběžných tětív vyplňují úsečku PQ , procházející středem S a nazývá se sdružený průměr. Obráceně, středy tětív $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2 \parallel \dots \parallel PQ$ leží na průměru MN . V krajním případě tětivy M_iN_i přejdou v tečnu p , resp. q a tětivy P_iQ_i přejdou v tečnu m , resp. n .

Tětivy rovnoběžné s jedním průměrem elipsy jsou půleny sdruženým průměrem.

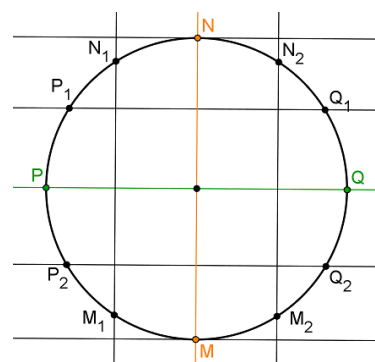
Tečny elipsy sestrojené v krajních bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné se sdruženým průměrem.

Z kolmosti tečny kružnice a příslušného průměru vyplývá:

Sdružené průměry kružnice jsou vždy navzájem kolmé, a naopak, každé dva kolmé průměry kružnice jsou sdružené.



Obr. 15 Sdružené průměry kružnice



Obr. 16 Sdružené průměry elipsy

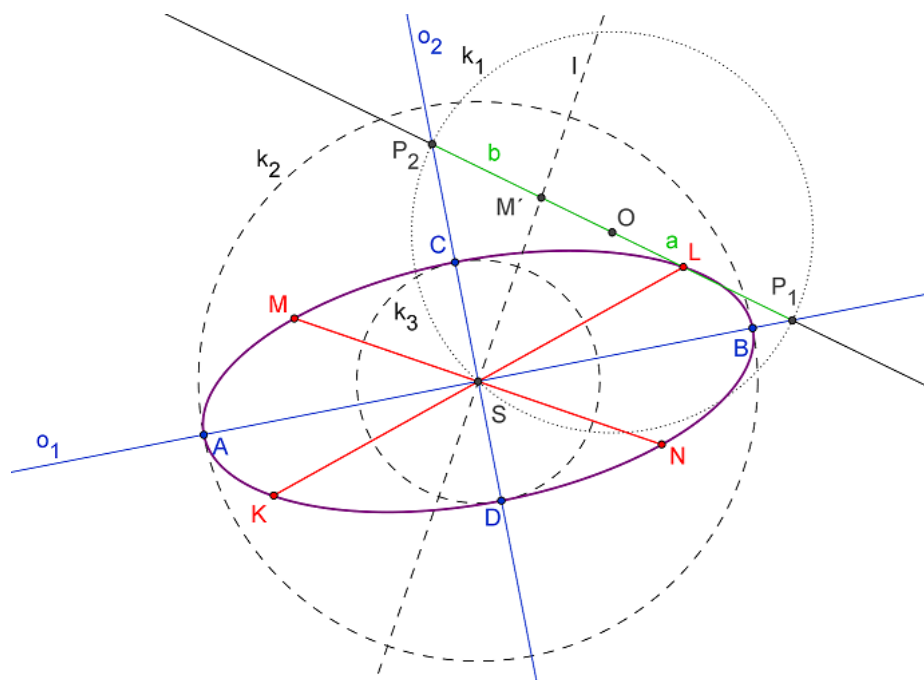
V afinitě odpovídá tečně kružnice tečna afinní elipsy a rovnoběžkám opět rovnoběžky, můžeme tedy říci:

Sdruženým průměrům elipsy odpovídá v afinitě kolmé průměry afinní kružnice.

Příklad: Sestrojte elipsu pomocí Rytzovy konstrukce. Elipsa je dána dvěma sdruženými průměry KL a MN .

Postup Rytzovy konstrukce:

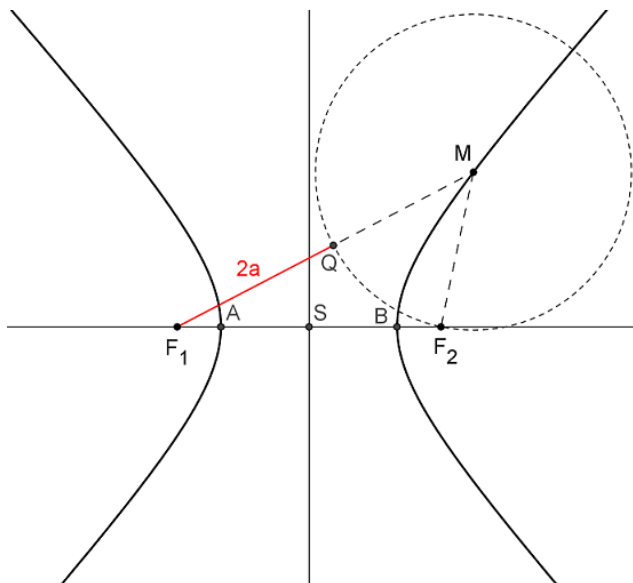
Průsečíkem sdružených průměrů je S . Sestrojíme kolmici l na úsečku MN , která prochází bodem S . Z bodu S nanese na kolmici l velikost úsečky SM a vznikne bod M' . Poté sestrojíme přímku procházející body $M'L$ a bod O je středem úsečky $M'L$. Sestrojíme kružnici k_1 se středem v bodě O o poloměru OS a průsečíky kružnice k_1 a přímky $M'L$ nazveme P_1 a P_2 . Sestrojíme přímky P_1S a P_2S , kde P_1S je hlavní osou o_1 a P_2S ve vedlejší osou o_2 . Délka úsečky $M'P_1$ je velikost hlavní poloosy a a tedy můžeme sestrojit hlavní vrcholy A, B a to tak, že z bodu S sestrojíme kružnici k_2 o poloměru a , vrcholy A, B jsou průsečíkem kružnice k_2 s hlavní osou o_1 . Délka úsečky P_2M' je velikost vedlejší poloosy b a opět můžeme sestrojit vedlejší vrcholy C, D , které jsou průsečíkem kružnice k_3 , která má střed v bodě S a poloměr b , s vedlejší osou o_2 . Máme tedy všechny čtyři vrcholy elipsy a můžeme sestrojit elipsu.



Obr. 17 - Rytzova konstrukce elipsy

4. Hyperbola

Definice: Hyperbola je množina bodů v rovině, jejichž rozdíl od dvou daných bodů F_1 , F_2 je konstantní, [1].

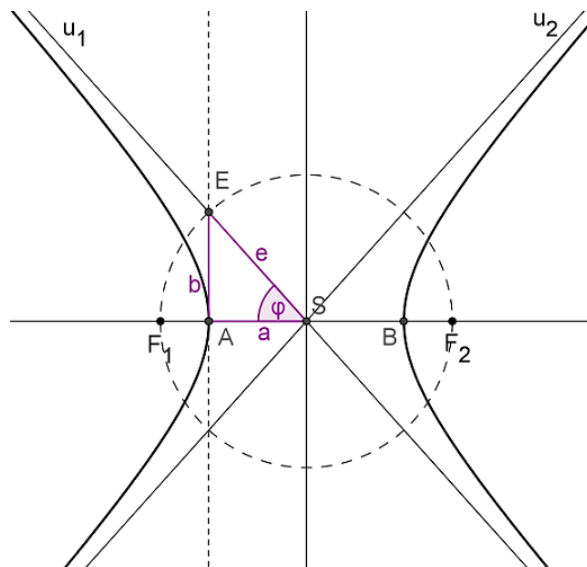


Obr. 18

Body F_1 , F_2 jsou ohniska hyperboly. Konstantní rozdíl vzdáleností značíme $2a$. Spojnice libovolného bodu M s ohnisky F_1 , F_2 se nazývají průvodiče bodu M . V tomto případě můžeme říci, že hyperbola je množina bodů, které mají od dvou daných bodů stálý rozdíl průvodičů, tj.

$$||MF_1| - |MF_2|| = 2a.$$

Vzdálenost ohnisek F_1 , F_2 značíme $2e$ a říkáme ji ohnisková vzdálenost. Z definice vyplývá platnost $a < e$. Číslo e se nazývá délková výstřednost (excentricita). Hyperbola vyjadřuje vzdálenost ohnisek hyperboly od středu S . Číslo a se nazývá délka hlavní poloosy hyperboly a číslo b , pro které platí $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ nazýváme délka vedlejší poloosy. Přímka, na které leží ohniska F_1 , F_2 je hlavní osa hyperboly. Body A , B , které leží na hlavní ose hyperboly, jsou hlavní vrcholy hyperboly a platí pro ně $|AS| = |BS| = a$. Přímka, která prochází středem S a je kolmá k hlavní ose hyperboly, se nazývá vedlejší osa hyperboly.



Obr. 19

Číslo $\varepsilon = \frac{e}{a}$ se nazývá numerická výstřednost. Numerická výstřednost u hyperboly je vždy větší než jedna, protože $e > a$. K určení správného tvaru hyperboly jsou velmi užitečné asymptoty u_1 a u_2 . Asymptoty jsou přímky procházející středem hyperboly S a svírají s hlavní osou hyperboly úhel φ , pro který platí $\tan \varphi = \frac{b}{a}$.

Bod X se nazývá vnější bod hyperboly, platí-li $||F_1X| - |F_2X|| < 2a$. Bod X se nazývá vnitřní bod hyperboly, platí-li $||F_1X| - |F_2X|| > 2a$.

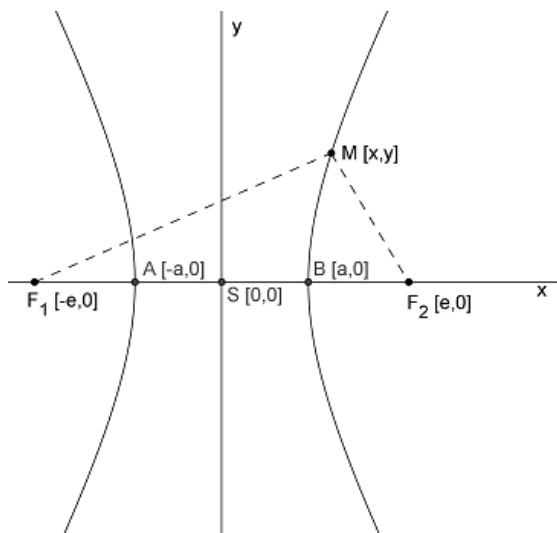
Hyperbola tak dělí rovinu na

- vnějšek hyperboly, který je tvořen vnějšími body,
- na body hyperboly,
- a na vnitřek hyperboly (obsahuje ohniska), který je tvořen vnitřními body hyperboly.

Pokud $e = a\sqrt{2}$, potom $a = b$ a hyperbola se nazývá rovnoosá. Asymptoty rovnoosé hyperboly jsou k sobě kolmé.

4.1. Rovnice hyperboly

Budeme předpokládat, že hyperbola je dána ohnisky F_1, F_2 a délkou hlavní poloosy a . Pro odvození rovnice hyperboly si zvolíme kartézskou soustavu tak, aby platilo $F_1 = [-e, 0], F_2 = [e, 0]$.



Obr. 20 Rovnice hyperboly

Dále předpokládejme, že $M = [x, y]$ je libovolný bod hyperboly a podle definice platí

$$||MF_1| - |MF_2|| = 2a.$$

Rozepsáním této rovnice dostáváme

$$\left| \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

$$x^2 + e^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{((x+e)^2 + y^2)((x-e)^2 + y^2)}.$$

Po úpravách dostaneme

$$a^4 + x^2 e^2 - x^2 a^2 - e^2 a^2 - y^2 a^2 = 0.$$

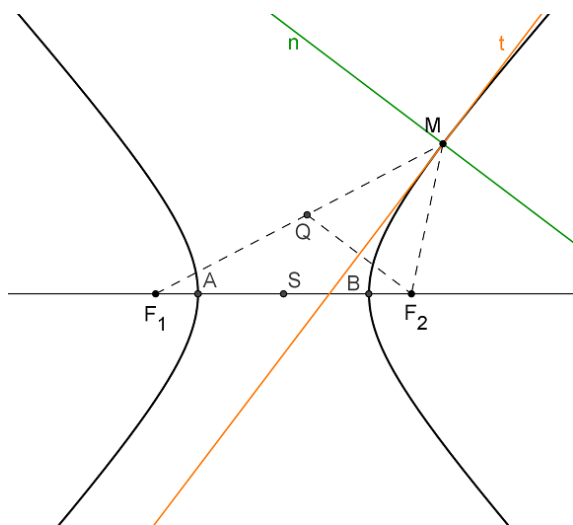
S použitím vztahu $b^2 = e^2 - a^2$ dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Této rovnici se říká kanonická rovnice hyperboly.

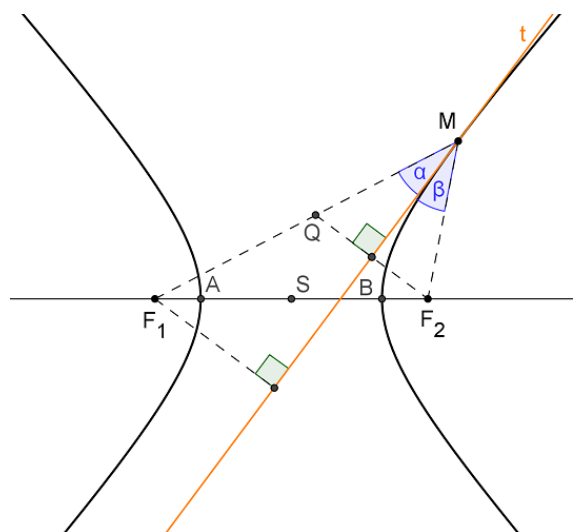
4.2. Tečna hyperboly

Definice: Necht' M je libovolný bod hyperboly. Přímka procházející bodem M , který je dvojnásobným průsečíkem této přímky s hyperbolou, se nazývá tečna hyperboly s dotykovým bodem M a přímka procházející bodem M , která je kolmá na tečnu se nazývá normála v bodě M , [1].



Obr. 21 Tečna a normála hyperboly

Věta: Tečna hyperboly pólí vnější úhel průvodičů bodu dotyku, [1].



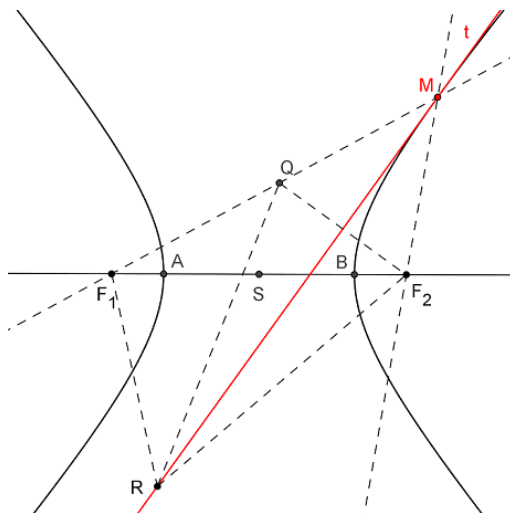
Obr. 22

Důkaz:

Zvolme si libovolný bod M , který náleží hyperbole. Dále sestrojme osu t vnějších úhlů průvodičů TF_1 , TF_2 . K jednomu z ohnisek, např. k F_1 , najdeme souměrně sdružený bod Q podle přímky t . Bod Q je bodem úsečky TF_2 . Ze souměrnosti platí: $|TQ| = |TF_1|$, tedy $2a = ||TF_1| - |TF_2|| = ||TQ| - |TF_2|| = |QF_2|$. Zvolme na t libovolný bod R různý od T . Body R , F_2 , Q určují vždy trojúhelník, platí tedy nerovnosti:

$$\begin{aligned} |RF_2| + |QF_2| &> |RQ|, \\ \text{tedy } 2a = |QF_2| &> |RQ| - |RF_2|, \\ |QF_2| + |RQ| &> |RF_2|, \\ \text{tedy } 2a = |QF_2| &> |RF_2| - |RQ|. \end{aligned}$$

Z obou nerovností pak plyne: $2a > ||RQ| - |RF_2||$. Protože však $|RQ| = |RF_1|$ (z osové souměrnosti), předchozí nerovnost dává $2a > ||RF_1| - |RF_2||$. To znamená, že se jedná o vnější bod hyperboly. Protože bod R byl volen libovolně, tak všechny body kromě bodu T jsou vnějšími body hyperboly. Přímka t nemá s hyperbolou žádný jiný společný bod než právě T . Podle definice je tato přímka t tečnou hyperboly a bod T je bodem dotyku.



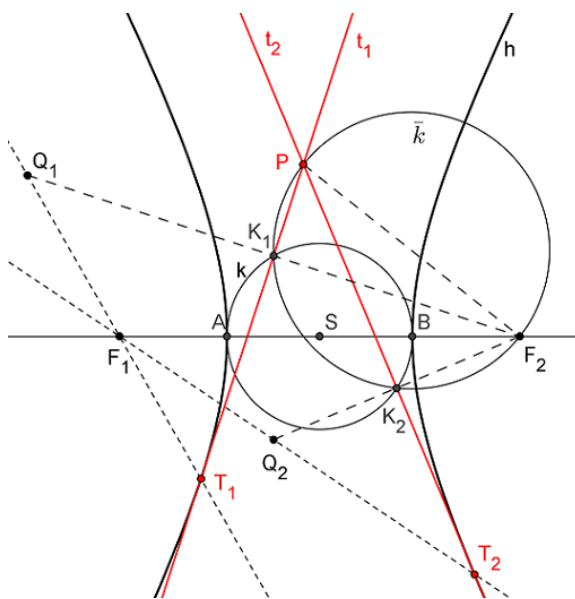
Obr. 23

4.2.1. Tečny hyperboly vedené z bodu P

Věta: Geometrickým místem pat kolmic K vedených z ohniska hyperboly na její tečny je kružnice k o středu S a poloměru a , [3].

Věta: Přímka spojující ohnisko F_1 s bodem Q souměrně položeným k druhému ohnisku F_2 vzhledem k tečně t prochází dotykovým bodem T této tečny, [3].

Příklad: K hyperbole h , která je dána ohnisky F_1, F_2 a délkou AB hlavní osy, sestrojte tečny z bodu P a určete na nich dotykové body.

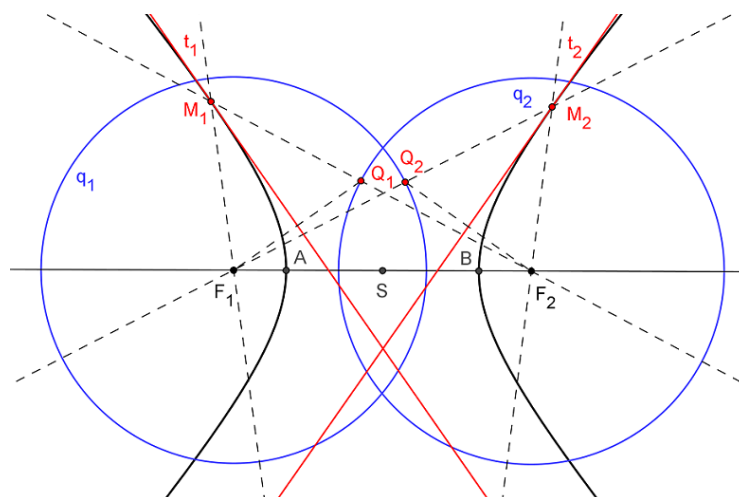


Obr. 24 Tečny k hyperbole z bodu P

Řešení provedeme na obr.22 podle předchozí věty. Paty kolmic vedených z ohniska F_2 na hledané tečny t_1, t_2 jsou na kružnici k ($S; a$) a leží na Thaletově kružnici $\bar{k}$ nad průměrem PF_2 . Průsečíky K_1, K_2 kružnic k a $\bar{k}$ jsou paty kolmic na hledané tečny t_1, t_2 a můžeme tyto tečny narýsovat, $t_1 \equiv PK_1, t_2 \equiv PK_2$. Abychom mohli určit dotykové body T_1, T_2 na těchto tečnách, musíme použít podle předchozí věty body Q_1, Q_2 , které jsou souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle t_1 a t_2 ; $Q_1K_1 = K_1F_2, Q_2K_2 = K_2F_2$. Dotykové body T_1, T_2 tečen t_1, t_2 určíme pomocí spojnic Q_1F_1, Q_2F_1 .

4.3. Ohniskové vlastnosti hyperboly

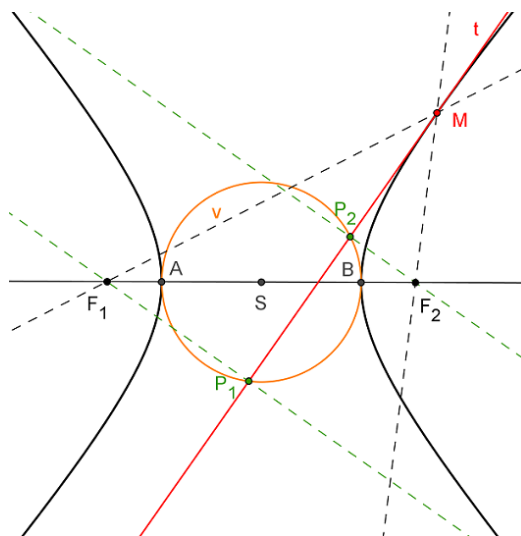
Věta: Množina bodů souměrných s jedním ohniskem hyperboly podle všech tečen leží na kružnici se středem v druhém ohnisku o poloměru $2a$, [1].



Obr. 25

Bod Q_1 je souměrný podle tečny t_1 a bod Q_2 je souměrný podle tečny t_2 . Bod Q_1 leží na kružnici $q_2 = (F_2, 2a)$ a bod Q_2 leží na kružnici $q_1 = (F_1, 2a)$. Kružnice q_1, q_2 se nazývají řídicí kružnice hyperboly.

Věta: Množina pat kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny leží na kružnici se středem ve středu hyperboly o poloměru a , [1].



Obr. 26

Body P_1, P_2 jsou paty kolmic, které jsou spuštěné z ohnisek F_1, F_2 na tečnu t . Paty kolmic leží na kružnici $v = (S, a)$, která se nazývá vrcholová kružnice hyperboly.

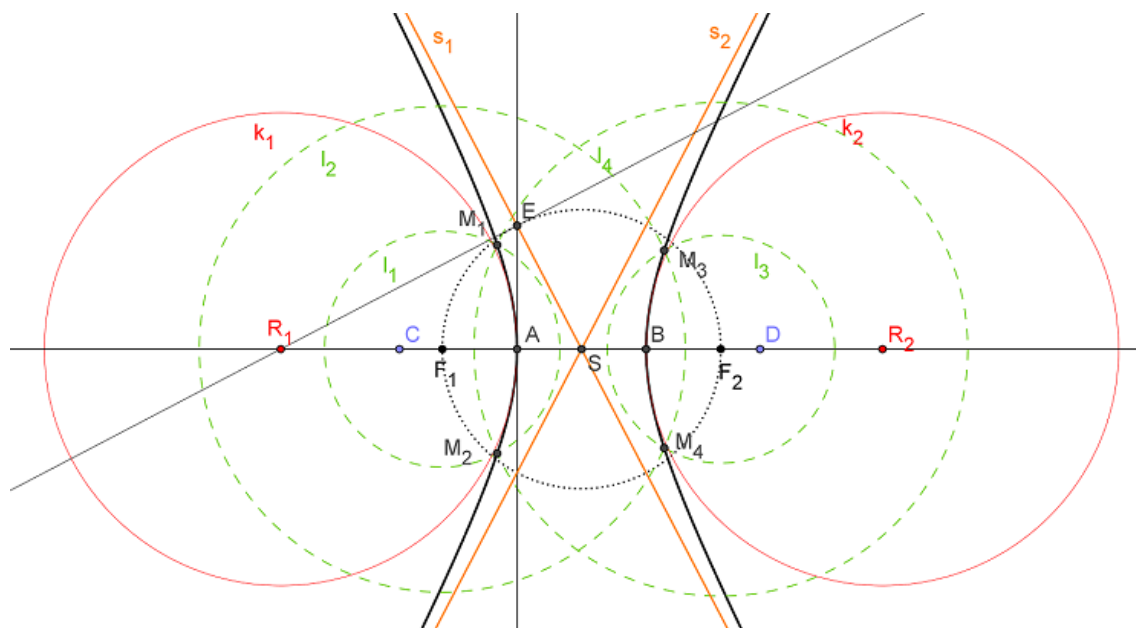
4.4. Konstrukce hyperboly

4.4.1. Bodová konstrukce hyperboly

Na polopřímce si zvolíme bod C . Poté opišeme kružnice l_1, l_2 o poloměrech $|AC|, |BC|$, kde se kružnice l_1, l_2 protnou, tam vzniknou body M_1, M_2 . To samé uděláme s bodem D a vzniknou nám body M_3, M_4 .

V hlavním vrcholu A sestojíme kolmici a z bodu S nanese na kolmici vzdálenost SF_1 , čímž nám vznikne bod E . Přímka s_1 vedená body E a S se nazývá asymptota, podle osové souměrnosti doděláme s_2 .

Ještě potřebujeme sestojit oskulační kružnice, abychom vykreslili hyperbolu v okolí vrcholů A, B . Bodem E povedeme kolmici na asymptotu s_1 , kde se kolmice protne s hlavní osou hyperboly, tam vznikne střed oskulační kružnice R_1 .

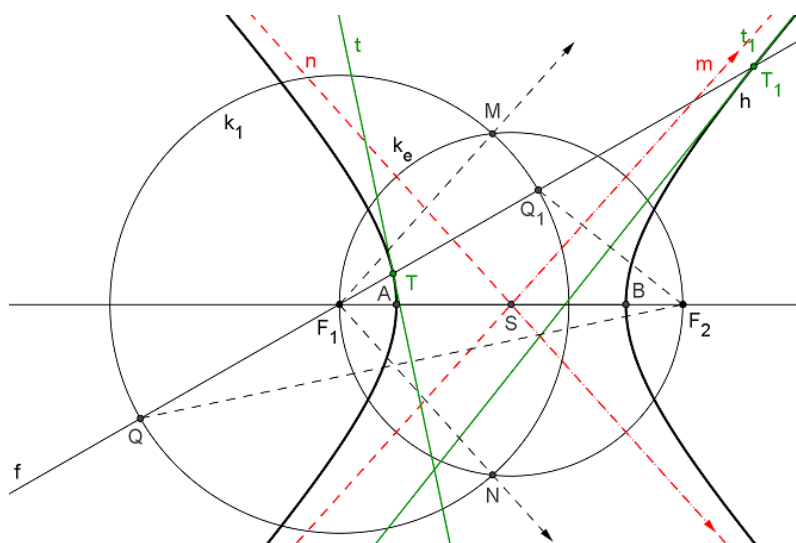


Obr. 27 Bodová konstrukce hyperboly

4.4.2. Konstrukce hyperboly pomocí pevné kružnice

Hyperbolu h máme zadanou ohnisky F_1, F_2 a vrcholy A, B . Nejdříve narýsujeme kružnici k_1 , která má střed v ohnisku F_1 a poloměr $2a = AB$. Zvolíme si libovolnou přímku f , která prochází ohniskem F_1 a na ni budeme hledat body T a T_1 hyperboly h . Průsečíky přímky f s kružnicí k_1 jsou body Q a Q_1 ; osa t úsečky QF_2 a osa t_1 úsečky

Q_1F_2 jsou tečnami hyperboly; jejich dotykové body T , popř. T_1 leží v průsečících přímek t a f , popř. t_1 a f .



Obr. 28 Konstrukce hyperboly užitím pevné kružnice

Důkaz:

Z konstrukce vyplývá

$$QT = F_2T, Q_1T_1 = F_2T_1, F_1Q = F_1Q_1 = 2a,$$

$$F_2T - F_1T = QT - F_1T = F_1Q = 2a,$$

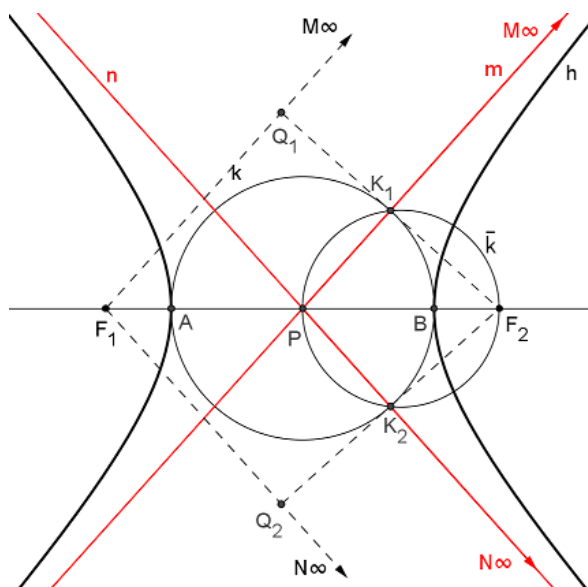
$$F_1T_1 - F_2T_1 = F_1T_1 - Q_1T_1 = F_1Q_1 = 2a.$$

Rozdíl průvodičů bodů T a T_1 je konstantní ($= 2a$), a proto tedy body T , T_1 leží na hyperbole h . Body Q a Q_1 leží na kružnici k_1 podle konstrukce souměrně sdužené s ohniskem F_2 podle přímky t a t_1 , přímky t a t_1 jsou tečnami hyperboly h . Jakoukoliv volbou přímky f dostáváme různé dvojice T a T_1 bodů na hyperboly a jejich tečny t a t_1 , [3].

Ve zvláštním případě, když přímku f vedeme průsečíkem M , popř. N kružnic $k_1(F_1; 2a)$, $k_e(S, e)$, jsou symetrály úseček F_2M , F_2N rovnoběžné s přímkami F_1M , F_1N a odvozené tečny jsou asymptotami m , n hyperboly, [3].

4.5. Asymptoty hyperboly

Příklad: K hyperbole h , která je dána ohnisky F_1, F_2 a délkou AB hlavní osy, sestrojte tečny z bodu P , kde P leží ve středu S hyperboly h ($S \equiv P$), a určete na nich dotykové body.



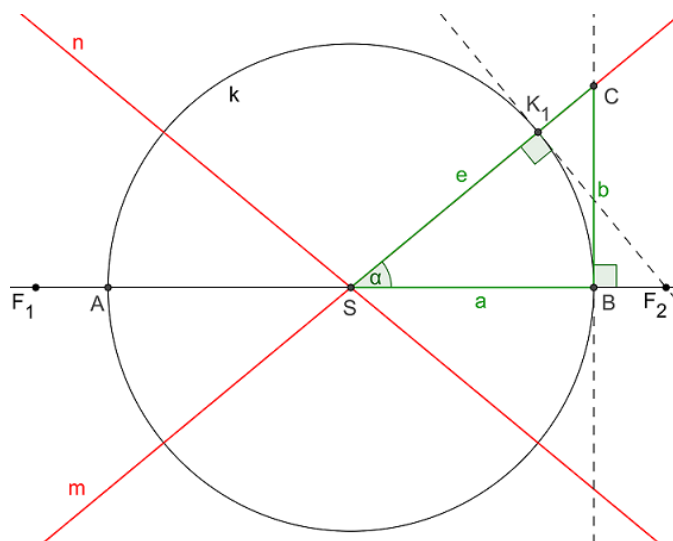
Obr. 29 Asymptoty hyperboly

Nad Průměrem PF_2 sestrojíme Thaletovu kružnici $k(P; a)$. Protože $Q_1K_1 = K_1F_2, Q_2K_2 = K_2F_2$ a $F_1P = PF_2$, jsou přímky F_1Q_1 a PK_1 rovnoběžné ($F_1Q_1 \parallel PK_1$) právě tak, jako $F_1Q_2 \parallel PK_2$. Máme tedy hledané tečny m, n $m \equiv PK_1, n \equiv PK_2$. V průsečících tečen m, n s přímkami F_1Q_1, F_1Q_2 , které jsou s tečnami rovnoběžné, jsou dotykové body tečen m, n . Těmto dotykovým bodům přímek m, n říkáme nevlastní body M^∞, N^∞ . Tečny, která mají tuto vlastnost, se nazývají asymptoty.

Definice: Asymptota křivky je tečna křivky (vlastní přímka), jejíž dotykový bod je nevlastní, [3].

Věta: Tečny vedené k hyperbole z jejího středu jsou jejími asymptotami, [3].

Věta: Úhly asymptot hyperboly jsou půleny osami, [3].



Obr. 30 Vlastnosti asymptot

Z obrázku odvodíme další vlastnosti asymptot m , n . Kolmice F_2K_1 vedená z ohniska F_2 na asymptotu m je tečnou kružnice $k(S; a)$. Ve vrcholu B sestrojíme tečnu hyperboly k průsečíku C s asymptotou m . Dostaneme $\triangle SBC \cong \triangle SK_1F_2$ (usu) a odpovídající strany jsou stejně dlouhé.

$SC = SF_2 = e, SB = SK_1 = a$; třetí stranu $BC = F_2K_1 = b$ nazveme vedlejší poloosou hyperboly.

Z charakteristického trojúhelníka SBC vyplývá

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

Asymptota svírá s hlavní osou úhel α , pro který platí

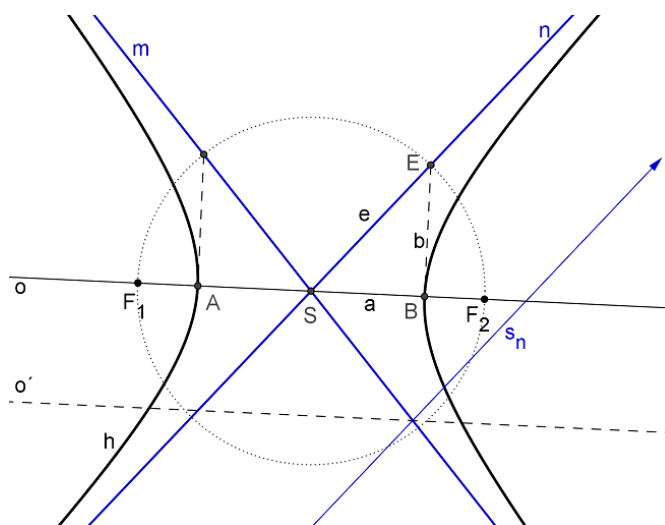
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Pokud známe dvě ze tří veličin a , b , e , můžeme sestrojit hyperbolu. Nejdříve si sestrojíme obě asymptoty m , n a potom další body na obou větvích hyperboly, které se k asymptotám stále více blíží, nikdy je však neprotínají.

Můžeme tedy vyslovit větu

Věta: Vzdálenost ohnisek hyperboly od jejich asymptot se rovná délce její poloosy b , [3].

Příklad: Narýsujte hyperbolu h , u které máme dáno ohnisko F_1 , asymptotu m a směr druhé asymptoty s_n .

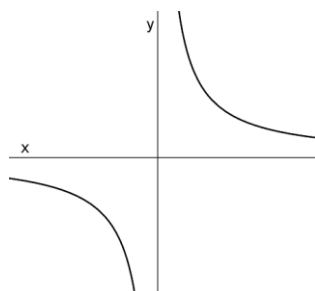


Obr. 31 Hyperbola určena bodem F_1 , m , s_n

Sestrojíme osu úhlu přímek m a s_n . Osa úhlu je rovnoběžná s osou hyperboly o . Osu hyperboly o vedeme ohniskem F_1 a kde se protne s asymptotou m , tam vznikne střed S . Středem S povedeme druhou asymptotu n , která je rovnoběžná se směrem s_n . Sestrojíme kružnici $k(S; r = SF_1)$ a vznikne nám průsečík E asymptoty n a kružnice k . Bodem E vedeme kolmici na osu o a na ose o dostaneme hlavní vrchol B . Máme charakteristický $\triangle SBE$. Můžeme tedy sestrojit hyperbolu.

4.6. Rovnoosá hyperbola

S rovnoosou hyperbolou se můžeme setkat u grafu nepřímé úměrnosti $(y = \frac{k}{x})$, kde asymptoty jsou osy x a y .



Obr. 32 Nepřímá úměrnost

Vlastnosti:

- Asymptoty m, n jsou na sebe kolmé a platí

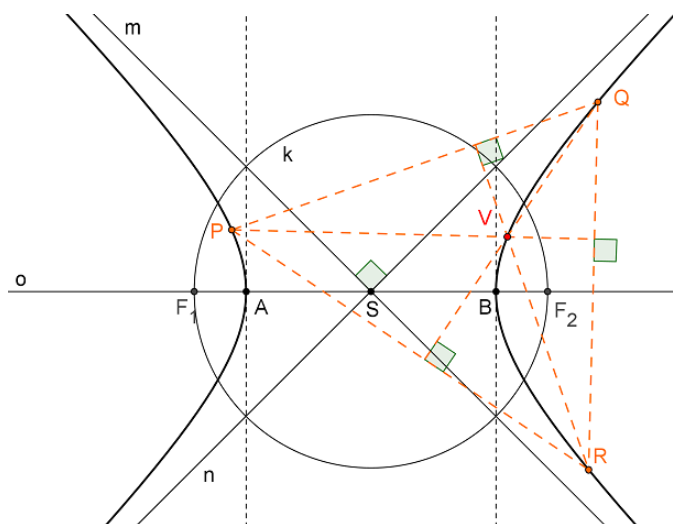
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = 1, \quad \alpha = 45^\circ, \quad 2\alpha = 90^\circ,$$

kde úhel α je úhel mezi asymptotou a osou afinity o ,

- má stejné poloosy ($a = b$),
- pro rovnoosou hyperbolu platí všechny věty, které platí pro obecnou hyperbolu, ale pro rovnoosou hyperbolu platí speciálně tato věta:

Věta: Průsečík výšek V trojúhelníka PQR , jehož vrcholy P, Q, R náležejí rovnoosé hyperbole, leží na této hyperbole, [4].

Příklad: Narýsujte rovnoosou hyperbolu h , která je zadána ohnisky F_1, F_2



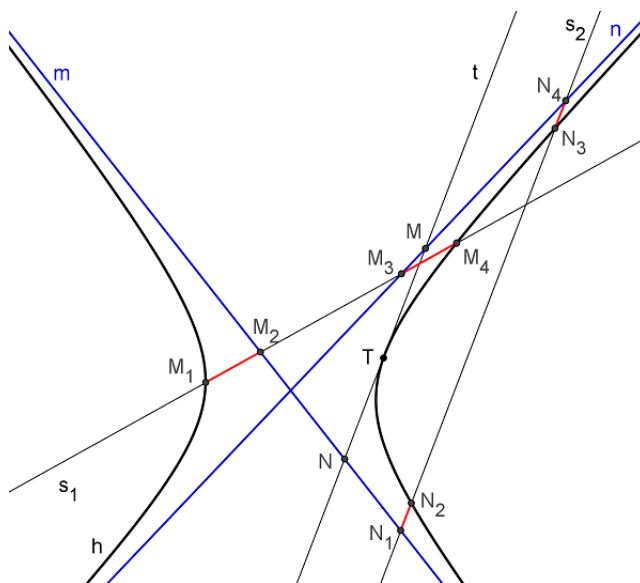
Obr. 33 Rovnoosá hyperbola konstrukce

Přímka procházející ohnisky F_1, F_2 je osou o . Sestrojíme asymptoty m, n , které procházejí středem S úsečky F_1F_2 a svírají s ní úhel $\pm 45^\circ$. Poté sestrojíme kružnici k ($S; r = SF_1 = e$) a ta protne asymptoty v bodech, těmito body procházejí tečny hyperboly ve vrcholech A, B . Můžeme tedy sestrojit hyperbolu h_r .

4.7. Sečny hyperboly

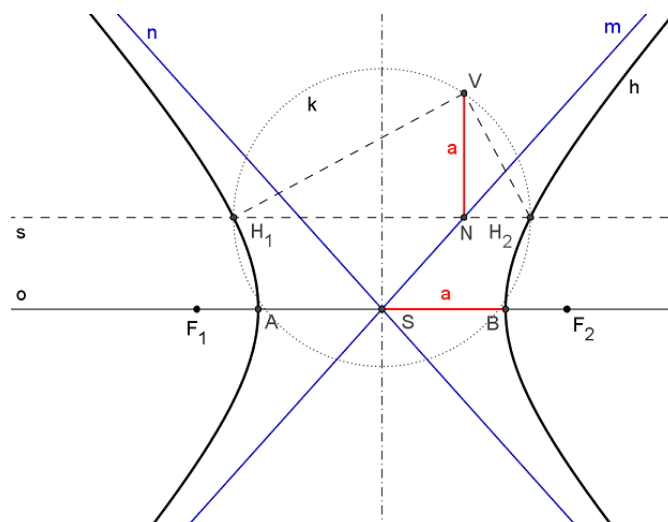
Věta: Libovolná sečna hyperboly vytíná mezi hyperbolou a jejími asymptotami dva stejné úseky, [3].

Věta: Úsek, který vytínají asymptoty hyperboly na její tečně, je půlen dotykovým bodem, [3].



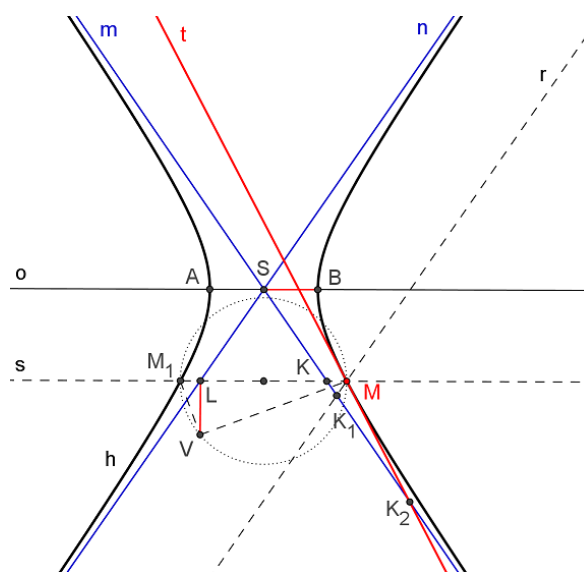
Obr. 34 Sečny hyperboly

Věta: Sečny hyperboly rovnoběžné s hlavní osou protínají větve hyperboly v bodech H_1, H_2 tak, že asymptota hyperboly dělí úsečku H_1H_2 na dva úseky, jejichž součin je konstantní a rovná se dvojnoci hlavní poloosy. Na obr. je sečna $s \parallel o, H_1N \cdot NH_2 = a^2 = |NV|^2$, [3].



Obr. 35 Znáznornění věty

Příklad: Sestrojte hyperbolu h , která je dána asymptotami m, n a bodem M . V bodě M sestrojte tečnu.

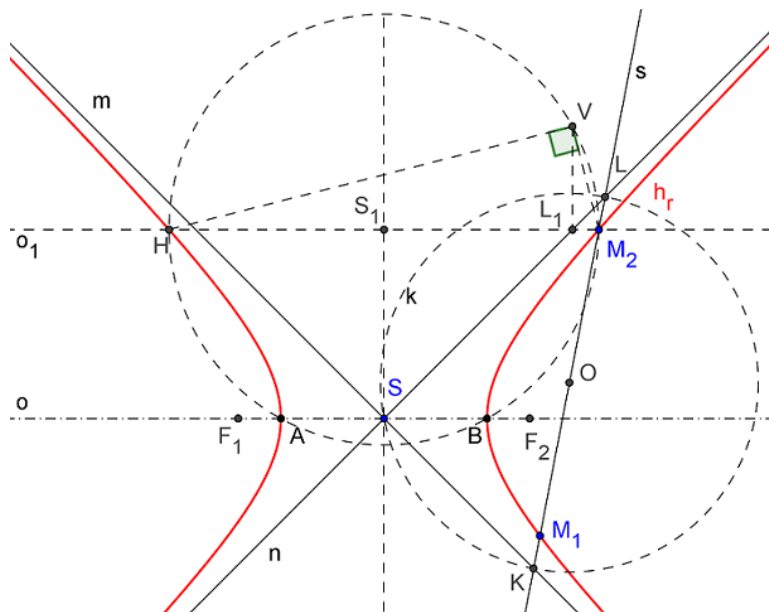


Obr. 36 Hyperbola zadána m, n, M

Sestrojíme osu hyperboly o tak, že půlí úhel asymptot m, n , kde leží bod M . Bodem M povedeme sečnu s , která je rovnoběžná s osou o , ta protne asymptoty v bodech K, L a hyperbolu h v dalším bodě M_1 , kde platí $M_1L = KM$. Z výšky pravoúhlého $\triangle M_1MV$ dostaneme délku hlavní poloosy a a naneseť ji na osu o ($SA = SB = a$). Bodem M vedeme přímku r , která je rovnoběžná s asymptotou n ,

přímka r protne druhou asymptotu m v bodě K_1 . Tečna, kterou hledáme, prochází bodem K_2 ($SK_1 = K_1K_2$).

Příklad: Sestrojte rovnoosou hyperbolu h_r , je-li dán její střed S a dva body M_1, M_2 . Narýsujte asymptoty.

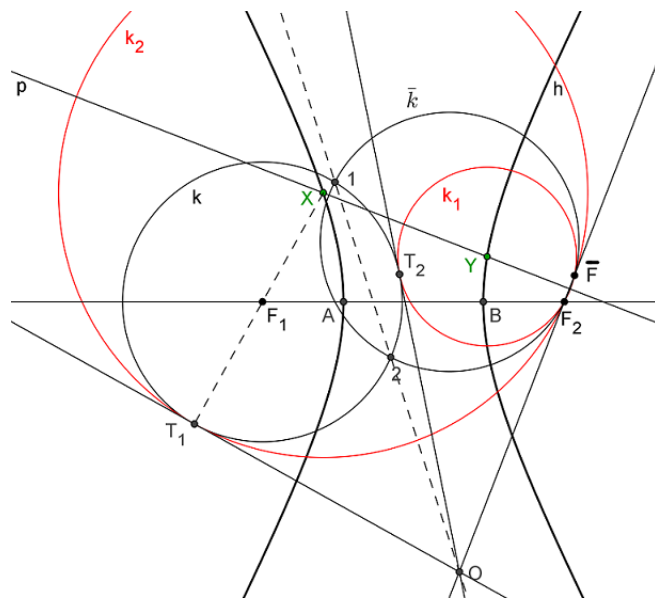


Obr. 37 Rovnoosá hyperbola zadána středem S a body M_1, M_2

Sestrojíme sečnu $s = M_1M_2$ na které hledané asymptoty m, n vytínají úsek KL . Sestrojíme střed O , který je středem úsečky M_1M_2 a zároveň úsečky KL . Sestrojíme kružnici $k(O; r = OS)$, která je opsána pravoúhlému $\triangle KSL$. Kde protne kružnice k sečnu s tam jsou body K, L a můžeme sestrojit asymptoty m, n . Osa o je osou úhlu mezi asymptotami m, n . Dále sestrojíme rovnoběžku o_1 s osou o , která prochází bodem M_2 a na asymptotě n dostaneme bod L_1 . Sestrojíme kolmici, která prochází středem S a kde protne o_1 , tam je střed S_1 kružnice o poloměru S_1M_2 a můžeme sestrojit bod V . Velikost hlavní osy dostaneme z $L_1V = SA = SB$, toto plyne z věty, která říká, že libovolná sečna hyperboly vytíná mezi hyperbolou a jejími asymptotami dva stejné úseky.

Věta: Geometrickým místem středů kružnic, které se dotýkají kružnice $k(F_1; r)$ a jdou bodem F_2 ležícím vně této kružnice, je hyperbola, která má v bodech F_1, F_2 ohniska a délku hlavní osy rovnou poloměru r .(3)

4.8. Průsečíky přímky s hyperbolou



Obr. 38 Průsečíky přímky s hyperbolou

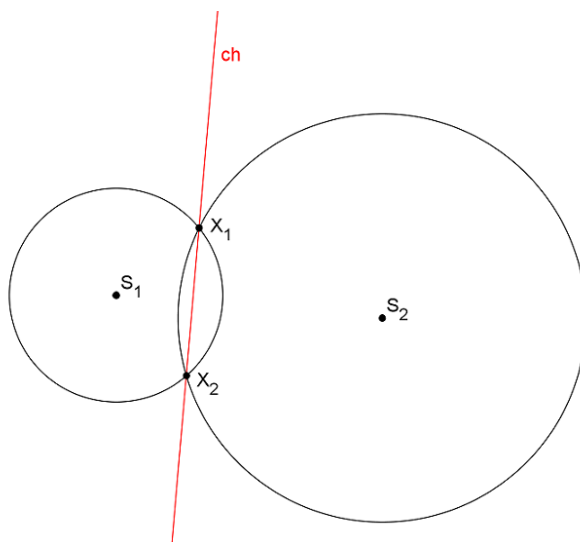
Hyperbolu budeme brát jako geometrické místo středů kružnic, které se dotýkají kružnice k ($F_1; r = 2a$) a jdou druhým ohniskem F_2 .

Průsečíky X, Y přímky p s hyperbolou h jsou středy kružnic k_1, k_2 , které se dotýkají kružnice k ($F_1; 2a$), jdou ohniskem F_2 a bodem $\bar{F}$, který je souměrný k bodu F_2 podle přímky p .

Sestrojíme libovolnou kružnici $\bar{k}$, která prochází body F_2 a $\bar{F}$, ta protne danou kružnici k v chordále 12 a kružnice k_1, k_2 v chordále $F_2\bar{F}$. Dostaneme průsečík O těchto chordál. Z průsečíku O vedeme tečny ke kružnici k , tyto tečny určují dotykové body T_1, T_2 kružnic k_1, k ; popř. k_2, k ; hledané průsečíky X, Y jsou na spojnicích F_1T_1, F_1T_2 , [3].

Chordála dvou kružnic

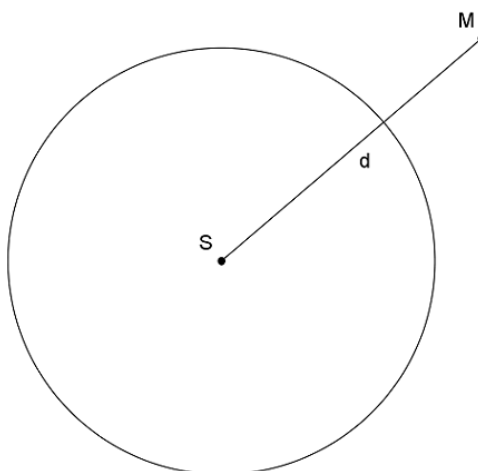
Jedná se o přímku, která je tvořena všemi body v rovině obou kružnic. Tyto body mají k oběma kružnicím stejnou mocnost. Chordálu můžeme najít, když kružnice nejsou soustředné. Pokud se kružnice protínají, tak chordálou je přímka, která prochází oběma průsečíky. Pokud mají kružnice společnou tečnu, chordálou je právě tato tečna.



Obr. 39 Chordála

Mocnost bodu ke kružnici

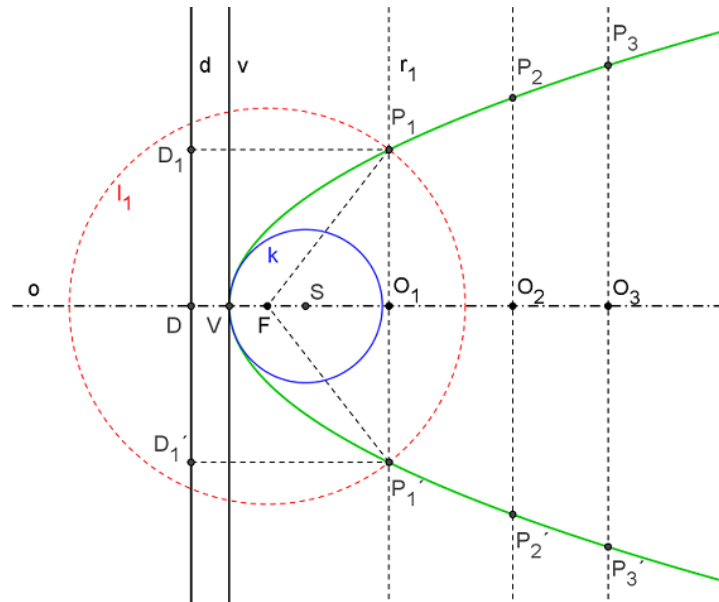
Je to reálné číslo $\mu = d^2 - r^2$, kde d je vzdálenost libovolného bodu M od středu S a r je poloměr kružnice.



Obr. 40 Mocnost bodu ke kružnici

5. Parabola

Definice: Parabola je geometrické místo bodů v rovině, které mají od pevné přímky d a pevného bodu F této roviny stejnou vzdálenost ($F \notin d$), [3]

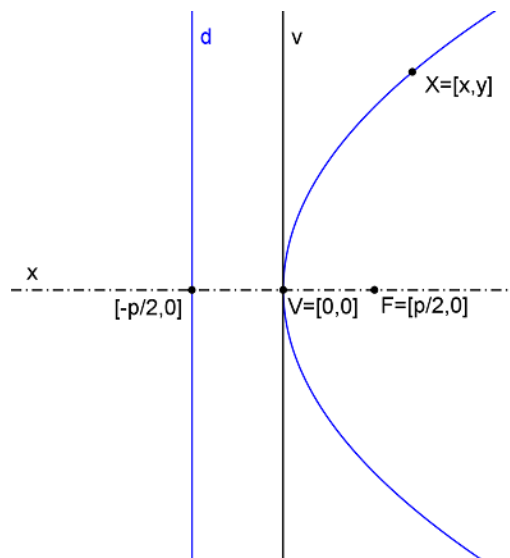


Obr. 41 Parabola zadána ohniskem a řídící přímkou

Přímku d nazýváme řídící přímkou paraboly a bod F je ohnisko paraboly. Vzdálenost mezi řídící přímkou d a ohniskem nazveme parametr paraboly p . Osa paraboly o je kolmá na řídící přímku d . Bod V , který je průsečíkem paraboly s osou o , nazveme vrcholem paraboly. Z definice vyplývá, že vrchol V půlí vzdálenost DF ($DV = DF$). Tečnu v paraboly p ve vrcholu V nazveme vrcholovou tečnou ($v \parallel d$). Průvodiče jsou vzdálenosti bodu P od ohniska F a řídící přímky d , bod P leží na parabole.

5.1. Rovnice paraboly

Nejdříve si zvolíme kartézskou soustavu $F = \left[\frac{p}{2}, O\right]$ a rovnice řídící přímky d je: $x = -\frac{p}{2}$. Bod $X = [x, y]$ je libovolný bod roviny.



Obr. 42 Rovnice paraboly

Nejprve uvažujeme, že bod X náleží parabole. Podle definice můžeme napsat $|XF| = |Xd|$. Tento vztah rozepíšeme pomocí souřadnic

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Tuto rovnici umocníme na druhou a dostaneme

$$y^2 = 2px.$$

Když budeme uvažovat obráceně, že pro bod $X = [x, y]$ platí rovnice $y^2 = 2px$ a dosazením za y^2 z rovnice $y^2 = 2px$ do výrazu $|XF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$ dostaneme $|XF| = \left|x + \frac{p}{2}\right|$. A vidíme, že platí $|XF| = |Xd|$.

Rovnice $y^2 = 2px$ se nazývá kanonická rovnice paraboly.

5.2. Tečna a normála paraboly

Pokud má přímka s parabolou:

- dva společné body P_1, P_2 , nazveme jí sečnou paraboly s ;

- [illegible]

Důkaz: Na začátku sestrojíme průvodiče v libovolném bodě T ($FT = GT, GT \parallel o$); sestrojíme osu úhlu t úhlu GTF . Přímka t je i výškou rovnoramenného trojúhelníka GFT . To znamená, že základna GF trojúhelníka GFT je kolmo půlena přímkou t , průsečík přímky t a základky GF je bod K ($GK = KF, GF \perp t$). FL je vzdálenost mezi libovolným bodem L , který leží na přímce t a ohniskem F a řídící přímkou d ($L_1L < LG$), toto vyplývá z pravoúhlého trojúhelníka L_1LG . Z další souměrnosti F, G podle přímky t vyplývá, že $GL = FL$ a to znamená opět $L_1L < FL$. Tímto jsme zjistili, že bod L neleží na parabole a dokázali jsme, že přímka t je tečnou.

Věta: Množina bodů souměrných podle všech tečen je řídící přímka d , [1].

40

5.2.1. Subtangent a subnormála paraboly

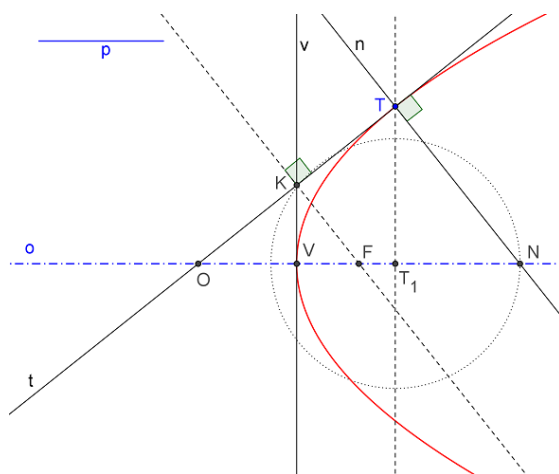
Úhly GTO a TOF jsou stejné, proto je čtyřúhelník $GTFO$ kosočtverec a úhlopříčky se v něm půlí ($OK = KT, OV = VT_1$). Úsečku OT_1 na ose o nazýváme subtangentu paraboly. Bod T_1 pata kolmice z dotykového bodu T na osu o .

Věta: Subtangentu paraboly je půlena vrcholem, [3].

Na obrázku vidíme dva shodné trojúhelníky GDF , TT_1N a z nich vyplývá, že $DF = T_1N$.

Věta: Subnormála paraboly se rovná jejímu parametru, [3].

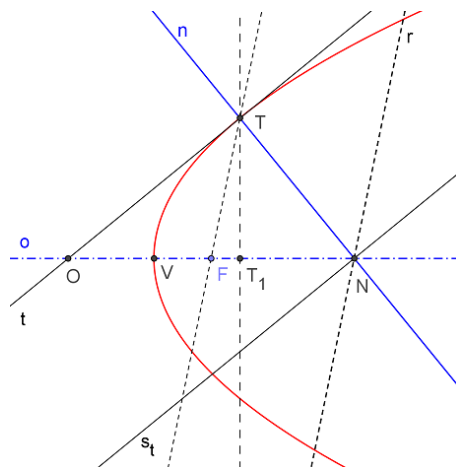
Příklad: Sestrojte parabolu, která je dána osou o , jedním bodem na parabole T a délkou parametru p .



Obr. 44 Parabola zadána osou o , bodem paraboly T a parametrem p

Nejdříve sestrojíme patu kolmice T_1 z bodu T na osu o . Od paty kolmice T_1 naneseleme délku parametru p a vznikne nám bod N (máme dvě možnosti). Sestrojíme normálu n , která prochází body T a N a můžeme sestrojit tečnu t paraboly, která je kolmá na normálu n a prochází bodem T . Protáhneme tečnu t paraboly na osu o a kde se protne je bod O . úsečka OT_1 je subtangentu. Věta nám říká, že subtangentu je půlena vrcholem, tudíž můžeme sestrojit vrchol V a vrcholovou tečnu v . Bod K je průsečík vrcholové tečny v a tečny t paraboly. Bodem K vedeme kolmici na tečnu t a na ose o dostaneme ohnisko F .

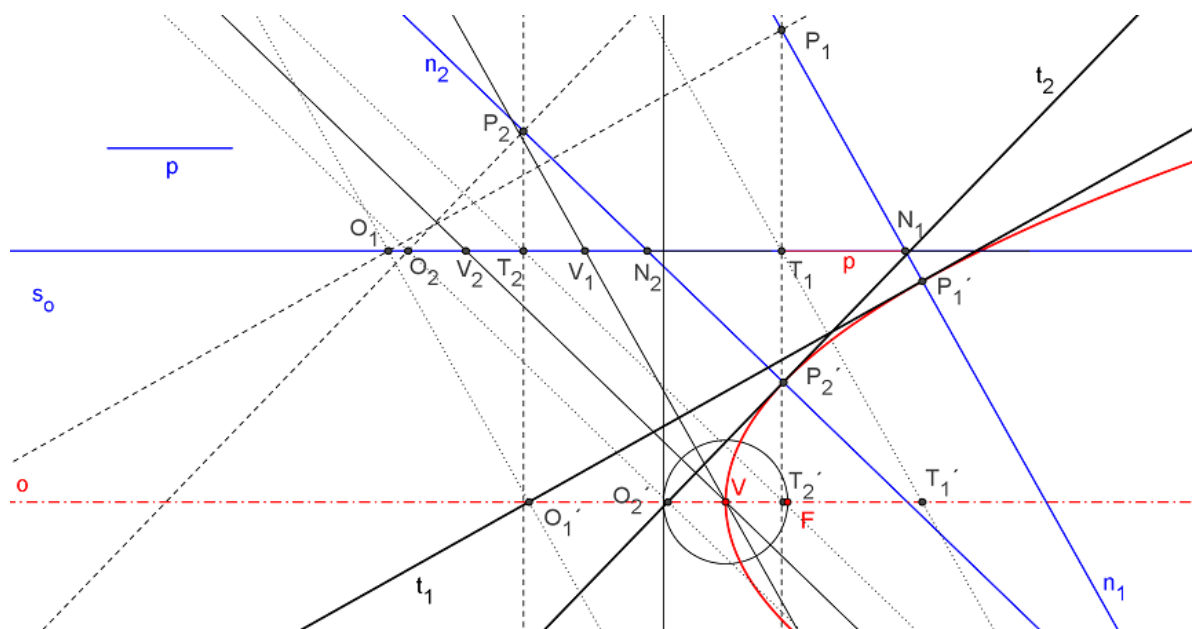
Příklad: Sestrojte parabolu, která je dána osou o , ohniskem F a normálou n .



Obr. 45 Parabola zadána osou o , ohniskem F a normálou n

Průsečíkem normály n a osy o sestrojíme kolmici s_t na normálu n , ta nám udává směr tečny t . Sestrojíme rovnoběžku s přímkou r , která prochází ohniskem F a kde se protne s normálou, tam vznikne bod T ($\sphericalangle os_t = \sphericalangle s_tr$). Můžeme tedy sestroit tečnu t , která prochází bodem T . Nyní můžeme z tečny t zjistit subtangentu OT_1 a dostaneme vrchol V .

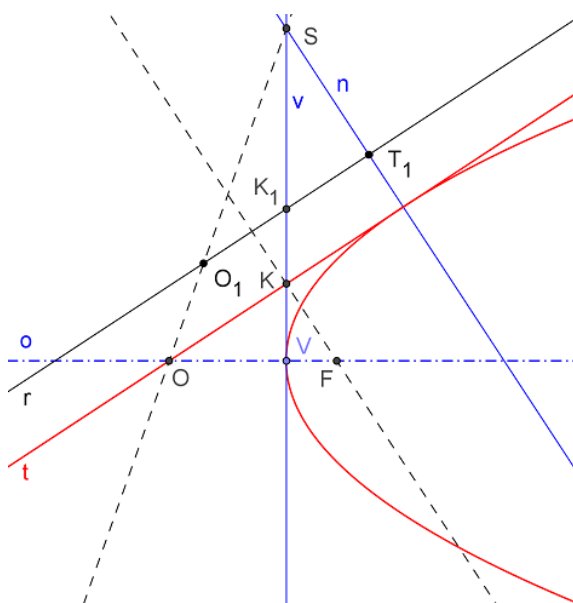
Příklad: Sestrojte parabolu, která je zadána směrem osy s_o , normálami n_1, n_2 a délkou parametru p .



Obr. 46 Parabola zadána směrem osy s_o , normálami n_1, n_2 a délkou parametru p

Sestrojíme průsečíky N_1, N_2 normál n_1, n_2 se směrem osy s_o . Od bodů N_1, N_2 nanese parametr p a vzniknou nám paty kolmic T_1, T_2 (subnormála $T_1N_1 = T_2N_2 = p$). Od bodů T_1, T_2 sestrojíme kolmice na s_o , kde se tyto kolmice protnou s normálami n_1, n_2 , tam vzniknou body P_1, P_2 . Poté sestrojíme další kolmice kolmé na n_1, n_2 procházející body P_1, P_2 . Tam, kde protnou směr osy s_o , vzniknou body O_1, O_2 . Nyní můžeme sestrojit V_1, V_2 , protože subtangenta je půlena vrcholem (subtangenty O_1T_1, O_2T_2). Dále sestrojíme rovnoběžky r_1, r_2 s normálami n_1, n_2 tak, že $r_1 \parallel n_1$ a $r_2 \parallel n_2$. Průsečíkem přímk r_1, r_2 je vrchol V paraboly. Osou o paraboly je rovnoběžka se směrem osy s_o , která prochází vrcholem V . Potřebné body z s_o přeneseme na osu o . Od bodu V nanese vzdálenost $p/2$ a dostaneme ohnisko F . Tečny t_1, t_2 sestrojíme jako kolmice na n_1, n_2 procházející body O_1', O_2' . Dotykové body P_1', P_2' tečen t_1, t_2 jsou průsečíky těchto tečen a normál n_1, n_2 .

Příklad: Sestrojte parabolu, která je zadána osou o , vrcholovou tečnou v a normálou n .

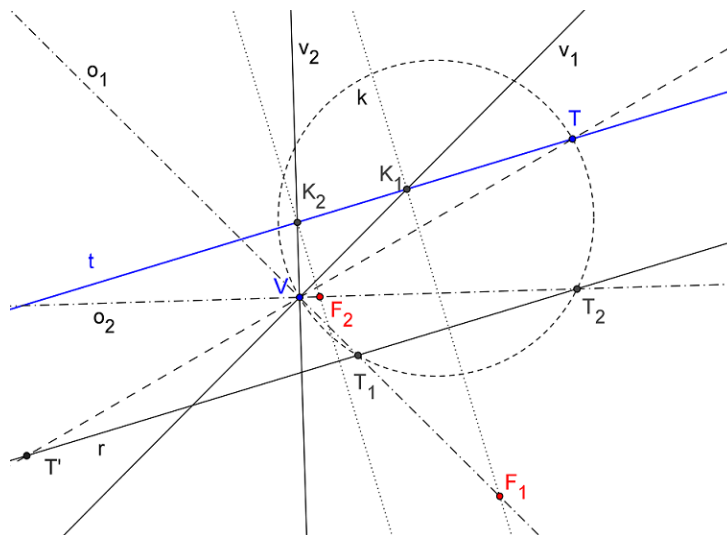


Obr. 47 Parabola zadána osou o , vrcholovou tečnou v a normálou n

Nejdříve sestrojíme libovolnou přímku r , která je kolmá na normálu n a dostaneme tedy body T_1, K_1 . Protože tečna t vytíná mezi osou o , vrcholovou tečnou v a normálou n stejně dlouhé úseky $OK = KT$, tak na přímce r sestrojíme O_1 ($O_1K_1 = K_1T_1$). Bod S je průsečík vrcholové tečny v a normály n . Sestrojíme přímku, která prochází body S, O_1 a kde se protne s osou o , tam je bod O a můžeme sestrojit tečnu t , což je kolmice na normálu n procházející bodem O . Na vrcholové tečně v dostaneme

bod K , ze kterého povedeme kolmici na tečnu t a kde tato kolmice protne osu o , tam je ohnisko F . A máme vše pro sestrojení paraboly.

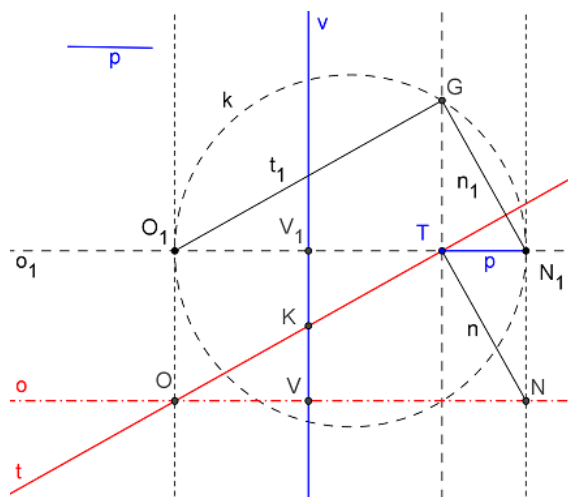
Příklad: Sestrojte parabolu, která je zadána vrcholem V , tečnou t s dotykovým bodem T .



Obr. 48 Parabola zadána vrcholem V , tečnou t a dotykovým bodem T

Nad průměrem VT sestrojíme Thaletovu kružnici k . Sestrojíme přímku r , která prochází bodem T' ($VT' = VT$) a je rovnoběžná s tečnou t . Tato přímka r protne Thaletovu kružnici k v bodech T_1, T_2 . Máme tedy dvě řešení. Přímky procházející body T_1, T_2 a vrcholem V jsou osy o_1, o_2 . Vrcholové tečny v_1, v_2 jsou kolmice na o_1, o_2 procházející vrcholem V . Body K_1, K_2 jsou průsečíky vrcholových tečen v_1, v_2 s tečnou t . Body K_1, K_2 vedeme kolmice na t a kde se protnou s osami o_1, o_2 , tam jsou ohniska F_1, F_2 . A nyní máme vše pro sestrojení obou parabol.

Příklad: Sestrojte parabolu, která je zadána vrcholovou tečnou v , bodem T paraboly a délkou parametru p .



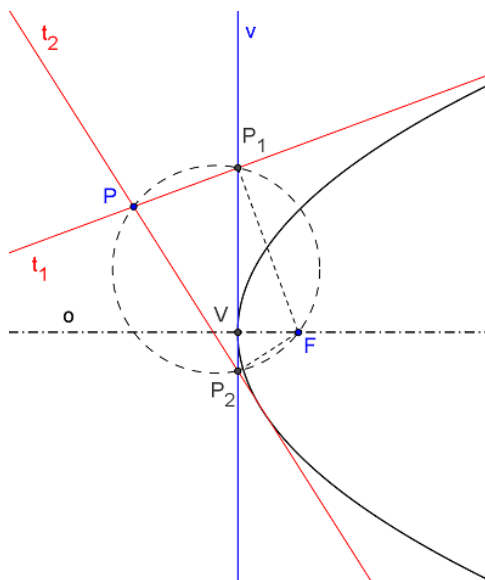
Obr. 49 Parabola zadána vrcholovou tečnou v , bodem T a parametrem p

Máme za úkol najít hledaný trojúhelník OTN , který je omezený tečnou t , normálou n a osou paraboly o . Abychom ho našli, využijeme shodný trojúhelník O_1GN_1 , který má přeponu O_1N_1 a prochází bodem T . Nejdříve sestrojíme kolmici o_1 na vrcholovou tečnu v , která prochází bodem T . Od bodu T nanese parametr p a vznikne nám bod N_1 . Sestrojíme bod O_1 a to tak, že využijeme poznatku subtangenta O_1T je půlena vrcholem V_1 . Nad průměrem O_1N_1 sestrojíme Thaletovu kružnici k . Bod G leží na Thaletově kružnici k , což je vrchol pravého úhlu. Sestrojíme odvěsny t_1 , n_1 trojúhelníka O_1GN_1 . Bodem T vedeme rovnoběžky s t_1 a n_1 , dostaneme tečnu t a normálu n . Nyní můžeme sestrojit body O , N a dostaneme osu paraboly o . Průsečíkem osy o s vrcholovou tečnou v je vrchol paraboly V . A jako poslední nám zbývá ohnisko F a můžeme sestrojit parabolu.

5.2.2. Tečny z bodu k parabole

Příklad: Parabola je zadána ohniskem F a vrcholovou tečnou v . Sestrojte z bodu P tečny k parabole.

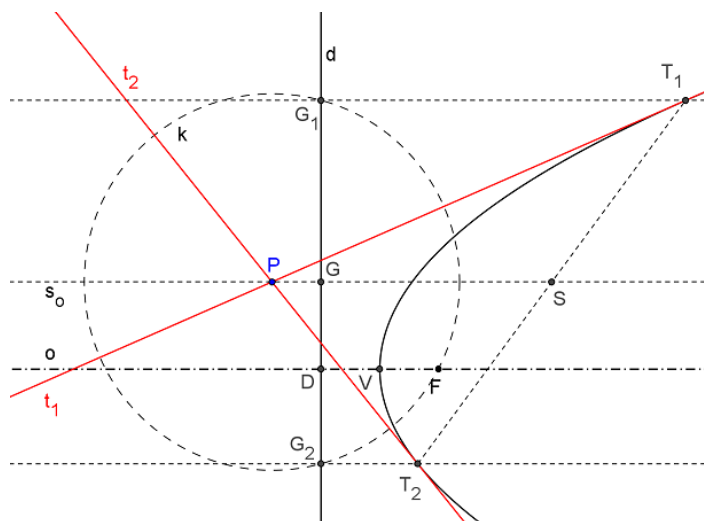
Nejdříve sestrojíme osu paraboly o , ta prochází ohniskem F a je kolmá na vrcholovou tečnu v . Vrchol V je průsečíkem osy o a vrcholové tečny v .



Obr. 50 Tečny paraboly z bodu P (parabola je zadána ohniskem F a vrcholovou tečnou v)

Dále sestrojíme Thaletovu kružnici nad průměrem PF a ta protne vrcholovou tečnu v v bodech P_1, P_2 . Body P_1, P_2 jsou paty kolmic hledaných tečen t_1, t_2 , které jsou spuštěné z ohniska F .

Příklad: Parabola je zadána ohniskem F a řídící přímkou d a máme najít tečny, které jsou vedené z bodu P .



Obr. 51 Tečny vedené z body P

Nejdříve si sestrojíme osu paraboly o a přímkou s_o , která je rovnoběžná s osou o . Příмка s_o protne řídící přímkou d v bodě G . Body G_1, G_2 jsou průsečíky kružnice $k(P, r = PF)$ a řídící přímkou d . Osy úseček G_1F, G_2F jsou hledané tečny t_1, t_2 . Body

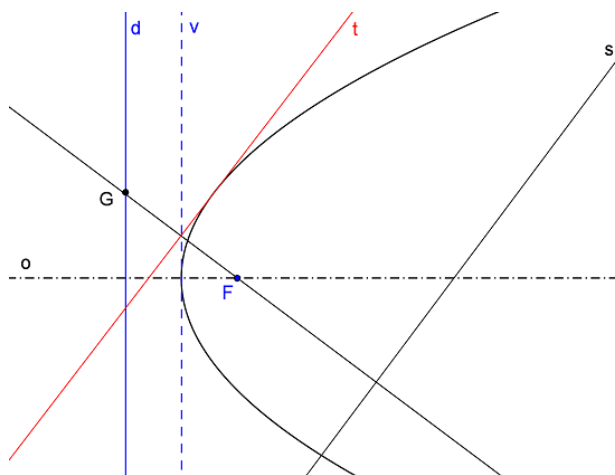
G_1, G_2 povedeme kolmice na řídící přímku d . Průsečíky těchto kolmic s tečnami t_1, t_2 jsou dotykové body hledaných tečen t_1, t_2 .

Dále si můžeme všimnout, že přímka s_o půlí úsečku G_1G_2 a tedy půlí i druhé rameno lichoběžníka $G_1T_1T_2G_2$.

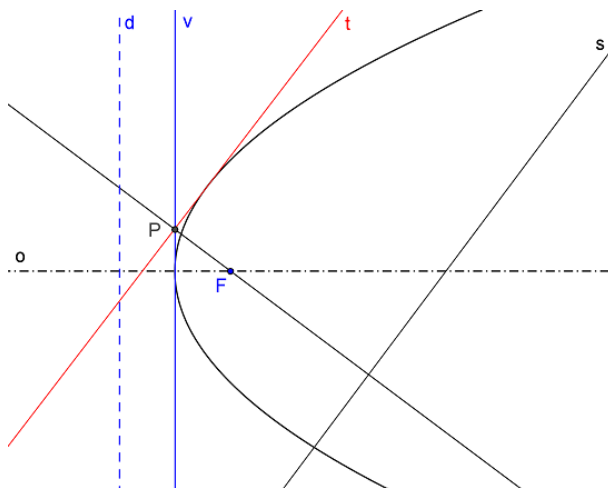
Věta: Přímka, která spojuje průsečík dvou tečen paraboly se středem omezené jejich dotykovými body, je rovnoběžná s osou paraboly, [3].

5.2.3. Tečna rovnoběžná se směrem

Příklad: K dané parabole sestrojte tečnu, která je rovnoběžná se směrem s .



Obr. 52 Tečna paraboly rovnoběžná se směrem s (využití d)



Obr. 53 Tečna paraboly rovnoběžná se směrem s (vyžití v)

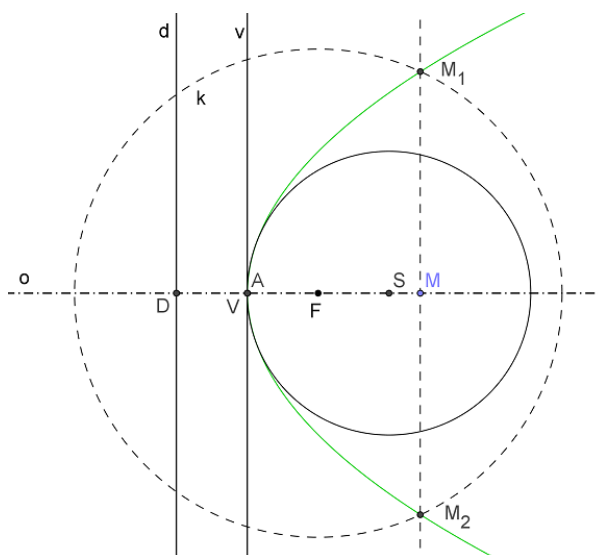
Nejdříve sestrojíme kolmici na směr s , která bude procházet ohniskem F . Kde se tato kolmice protne s řídící přímkou d , tam je bod G . Sestrojíme osu souměrnosti úsečky GF a tato osa je hledanou tečnou t .

Pokud použijeme bod P , to je průsečík kolmice a vrcholové tečny v , tak hledaná tečna t tímto bodem prochází.

5.3. Konstrukce paraboly

5.3.1. Bodová konstrukce paraboly

Máme parabolu, která je zadána ohniskem F a řídící přímkou d .



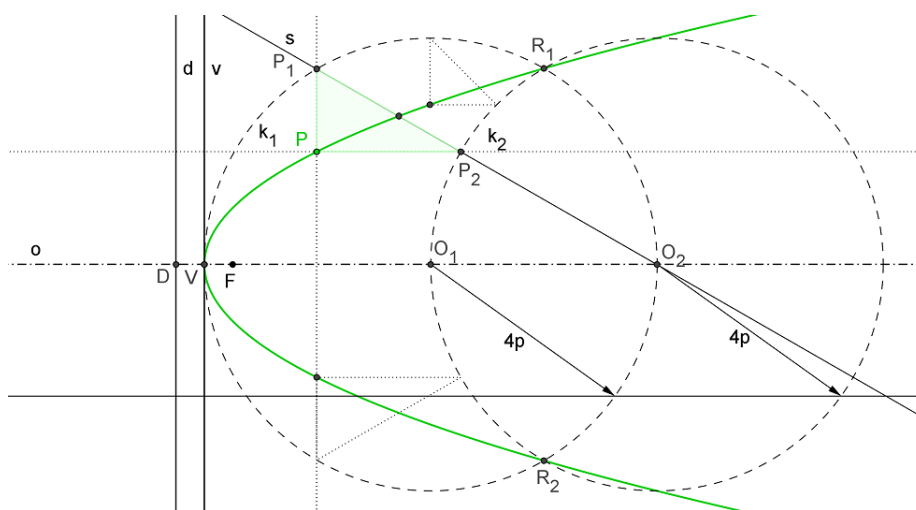
Obr. 54 Bodová konstrukce paraboly

Nejdříve sestrojíme vrchol V . Vrchol v leží na ose paraboly o . Kde osa o protíná řídící přímkou d , tam leží bod D . Vrchol V se nachází ve středu úsečky DF . Zvolíme si libovolný bod M na polopřímce VF . Sestrojíme kolmici na osu o , která prochází bodem M . Dále sestrojíme kružnici $k(F, Md)$. Kružnice k protne kolmici ve dvou bodech M_1, M_2 . Body M_1, M_2 náležejí parabole.

Dále potřebujeme oskulační kružnici, abychom nahradili oblouk paraboly v okolí vrcholu V a to tak, že z bodu V nanese na osu O parametr p a dostaneme střed S oskulační kružnice. A můžeme sestrojit oskulační kružnici se středem S a poloměru VS .

5.3.2. Trojúhelníková konstrukce

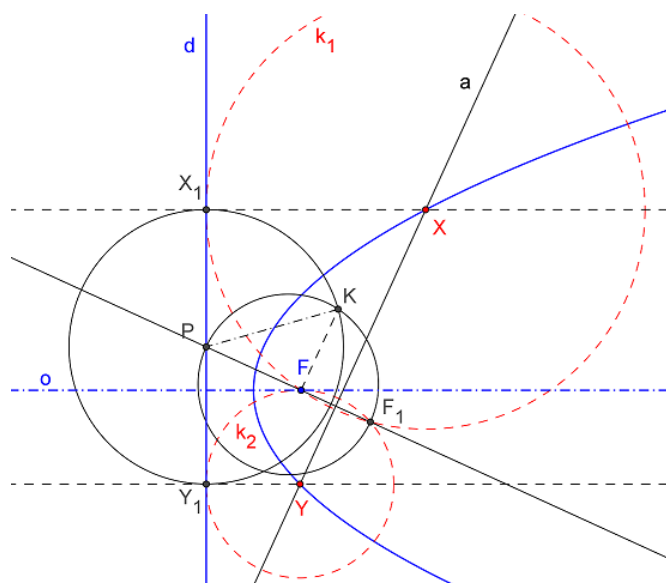
Nejdříve si sestrojíme osu paraboly o , dané ohnisko F a řídící přímkou p . Poté si zvolíme body O_1, O_2 , které leží a ose o . Body O_1, O_2 sestrojíme tak, že $VO_1 = O_1O_2 = 8 \cdot VF = 4p$. Sestrojíme kružnice k_1, k_2 ($k_1(O_1; r = 4p), k_2(O_2; r = 4p)$). Sestrojíme libovolnou přímkou s procházející bodem O_2 , ta protne kružnici k_1 v bodě P_1 a kružnici k_2 v bodě P_2 . Dále sestrojíme rovnoběžku s řídící přímkou d , která prochází bodem P_1 a rovnoběžku s osou o , která prochází bodem P_2 . Vznikne nám bod P . Bod P je průsečíkem těchto rovnoběžek, leží na parabole a je vrcholem pravého úhlu pravoúhlého trojúhelníka P_1PP_2 .



Obr. 55 Trojúhelníková konstrukce

5.4. Průsečíky přímky s parabolou

Máme najít průsečíky X, Y přímky a s parabolou, která je zadána řídící přímkou d a ohniskem F . Tyto průsečíky jsou vlastně středy kružnic k_1, k_2 , které se dotýkají řídící přímky d a procházejí ohniskem F .



Obr. 56 Průsečíky přímky a s parabolou

Bod F_1 je osově souměrný k ohnisku F podle přímky a . Průsečíkem přímky, která prochází body F , F_1 a řídící přímky d je bod P . Nad průměrem PF_1 sestojíme kružnici a dostaneme bod K . Dále musíme sestojit kružnici, která má střed P a poloměr PK . Kde tato kružnice protne řídící přímku d , tam vzniknou body X_1 , Y_1 . Hledané průsečíky přímky a s parabolou dostaneme jako průsečíky kolmic na řídící přímku d , které procházejí body X_1 , Y_1 s přímku a .

6. Afinita

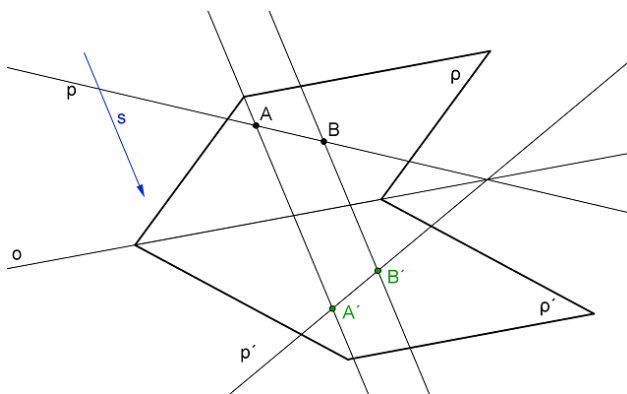
6.1. Osová afinita

Osová afinita mezi dvěma různoběžnými rovinami

Máme dvě různoběžné roviny ρ, ρ' a jejich průsečnice se nazývá osa afinity o . Dále si zvolíme směr afinity s , který není rovnoběžný s žádnou z rovin ρ, ρ' . Potom nám zbývá přiřadit navzájem odpovídající body a přímky roviny ρ bodům a přímkám roviny ρ' .

V osově afinitě platí:

- Spojnice odpovídajících si bodů jsou rovnoběžné se směrem promítání s ($AA' \parallel BB' \parallel \dots \parallel s$),
- průsečíky odpovídajících si přímek leží na ose afinity o ,
- zachovává se incidence - bod na přímce se opět zobrazí jako bod na přímce.

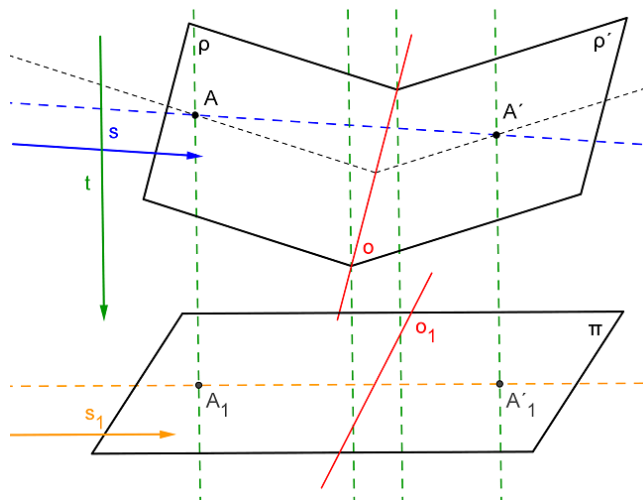


Obr. 57 Osová afinita mezi dvěma různoběžnými rovinami

Délka úsečky AB v rovině ρ není obecně stejně dlouhá jako úsečka $A'B'$ roviny ρ' , tedy délka úsečky v afinitě není invariantní.

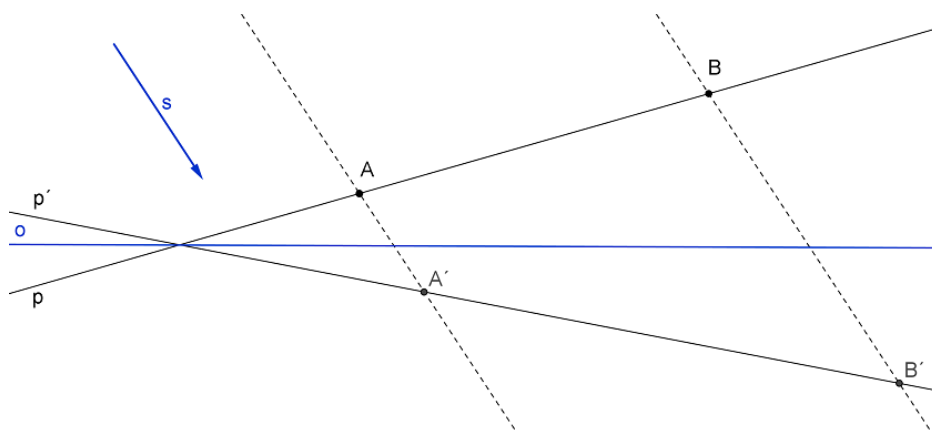
Osová afinita v rovině

Osovou afinitu mezi dvěma různoběžnými rovinami ρ, ρ' promítneme do nějaké třetí roviny π . Zvolíme si směr promítání t tak, aby nebyl rovnoběžný se směrem afinity s a s rovinami ρ, ρ' .



Obr. 58 Osová afinita v rovině

V osově afinitě v rovině opět značíme osu afinity o a směr afinity s . K bodům $A, B, C, \dots$ přiřazujeme body $A', B', C', \dots$ a k přímkám $p, q, \dots$ přiřazujeme přímky $p', q', \dots$



Obr. 59 Osová afinita v rovině

Základní vlastnosti afinity

1. Důležitou vlastností osově afinity je, že dělicí poměr se zachovává, čímž si můžeme pomoci při konstrukcích.

Dělicí poměr:

Máme tři libovolné vlastní body A, B, C , které leží na přímce, pro které platí $A \neq B \neq C$. Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B je reálné číslo λ , kde jeho absolutní hodnota je rovna podílu

$$|\lambda| = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

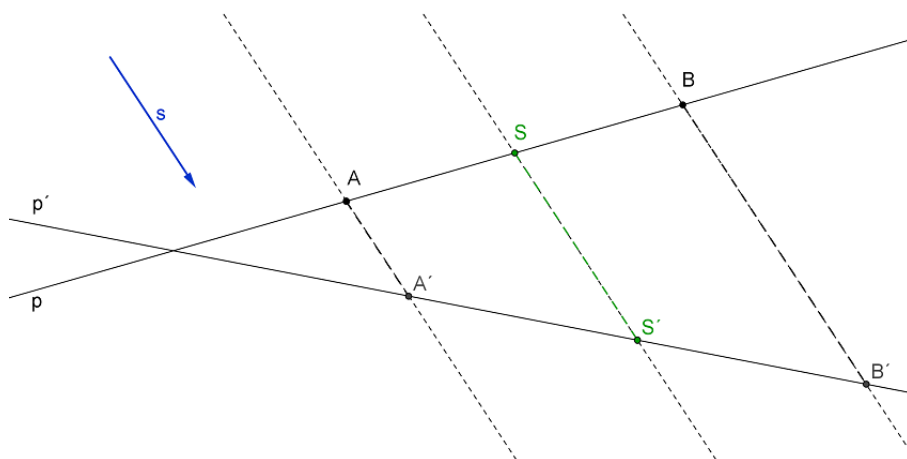
Pokud bod C leží vně úsečky AB , pak číslo λ je kladné. Pokud je bod C uvnitř úsečky, pak číslo λ je záporné.

Dělicí poměr bodů A, B, C značíme $(ABC) = \lambda$. Bodům A, B říkáme základní body. Bod A je první základní bod a bod B je druhý základní bod. Pokud pořadí bodů A, B prohodíme, dostaneme vztah:

$$(ABC) = \frac{1}{(BAC)}.$$

Z toho vyplývá, že pořadí bodů A, B není libovolné.

Této vlastnosti využíváme hlavně tehdy, když hledáme střed úsečky S , protože díky dělicímu poměru platí $(ABS) = (A'B'S')$.

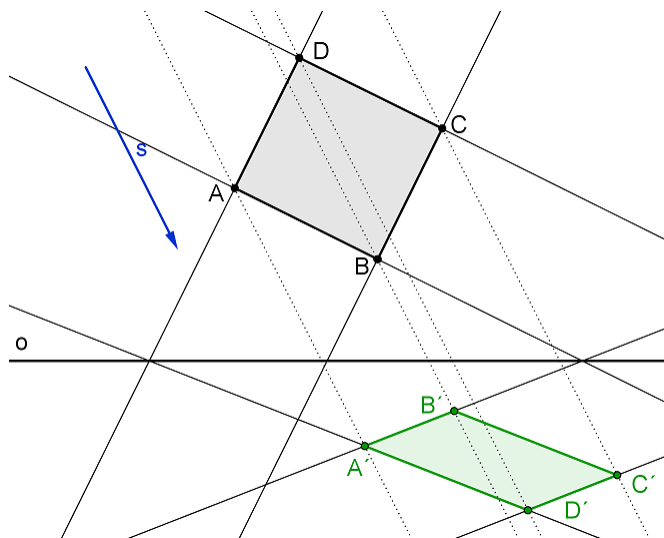


Obr. 60 Dělicí poměr

2. Osová afinita zachovává rovnoběžnost.

Tzn. že dvěma rovnoběžným přímkám p, q ($p \parallel q$) roviny ρ odpovídají dvě jiné přímky p', q' , které jsou opět rovnoběžné ($p' \parallel q'$), roviny ρ' .

Této vlastnosti využíváme, pokud chceme najít obraz rovnoběžníka.



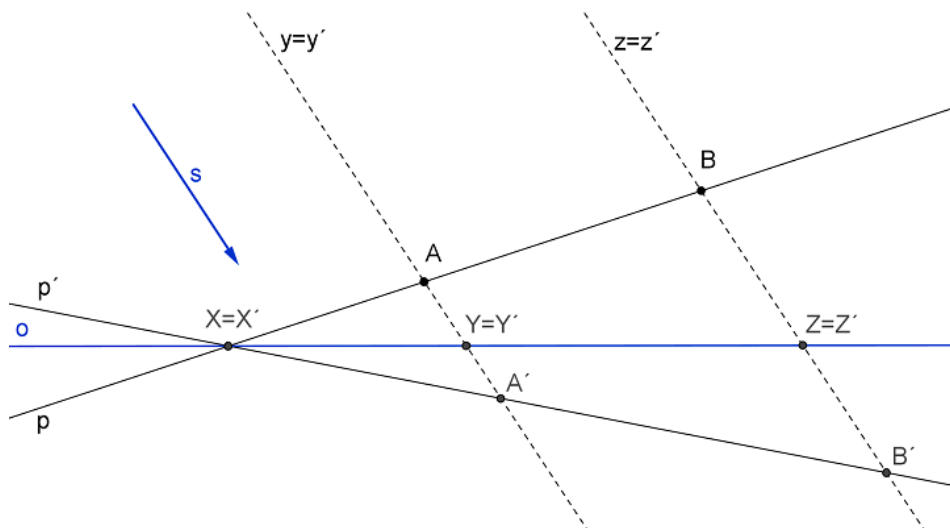
Obr. 61 Rovnoběžnost

3. Incidence

Pokud bod A leží na přímce p , tak jeho obraz A' leží na obrazu přímky p' .

Samodružné prvky

- **Samodružný bod** je bod, který se zobrazí sám na sebe ($X = X'$). Všechny samodružné body leží na ose afinity o .
- **Samodružná přímka** je přímka, která se zobrazí sama na sebe ($x = x'$). Všechny samodružné přímky jsou rovnoběžné se směrem afinity s .
- **Přímka samodružných bodů** je přímka, kde všechny její body jsou samodružné, pro každý bod ležící na přímce platí $X = X$. V osové afinitě je to osa afinity o .



Obr. 62 Samodružné prvky

Typy osové afinity

Podle vzájemné polohy osy afinity o a směru afinity s rozlišujeme několik typů osové afinity.

1. Pravoúhlá afinita

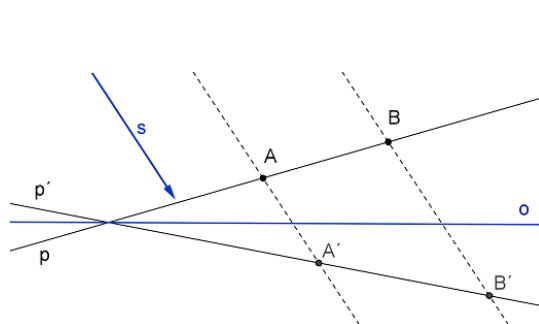
V pravoúhlé afinitě je směr afinity s kolmý na osu afinity o .

2. Šikmá afinita

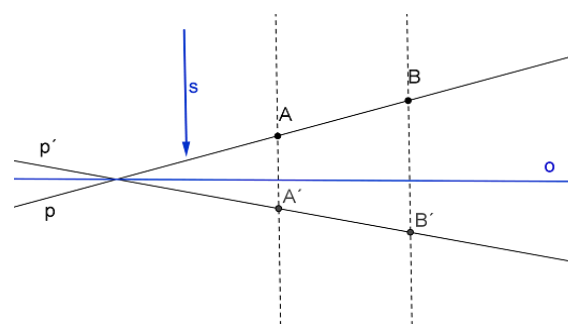
V šikmé afinitě směr s není kolmý na osu afinity.

3. Elace

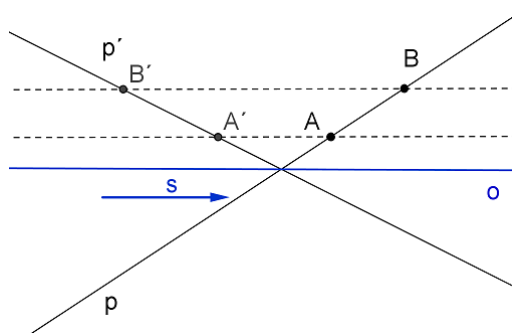
Jedná se o zvláštní případ šikmé afinity, kde směr afinity s je rovnoběžný s osou afinity o .



Obr. 63 Šikmá afinita



Obr. 64 Pravoúhlá afinita



Obr. 65 Elace

Charakteristika

Pokud máme dvojici sobě odpovídajících bodů A, A' a to tak, že $A \neq A'$, nejsou elací a A^* je průsečík přímky AA' s osou afinity o , pak dělicí poměr $(AA'A^*)$ je konstantní a nezávisí na volbě odpovídajících si bodů.

Dělicí poměr $(AA'A^*)$ se nazývá charakteristika a značí se k , $k = \frac{AA^*}{A'A^*}$.

Pokud je charakteristika kladná ($k > 0$), pak vzory i obrazy leží na stejné polorovině od osy o . V opačném případě, je-li charakteristika záporná ($k < 0$), jsou vzory i obrazy na různých polorovinách od osy o . Charakteristika nemůže být nulová ($k = 0$), protože by muselo platit $A = A^*$ a potom by muselo platit $A' = A^*$. Tudíž body by se zobrazovali na ose afinity o na sebe.

Pokud máme pravoúhlou afinitu s charakteristikou $k = -1$, mluvíme o osově souměrnosti. Pokud máme šikmou afinitu s charakteristikou $k = -1$, mluvíme o šikmé souměrnosti.

Určenost osově afinity

Osová afinita je určena osou afinity o a dvojicí sobě odpovídajících bodů A, A' . Díky tomu, že máme dvojici sobě odpovídajících bodů A, A' , nepotřebujeme směr afinity s , protože je těmito body určen. Pokud máme osovou afinitu zadanou takto, můžeme hned konstruovat obrazy bodů. Pokud ne, musíme nejdříve zjistit osu afinity o . Osovou afinitu můžeme zadat takto:

- dvě různoběžné přímky a její obrazy,
- tři dvojice sobě odpovídajících bodů,
- přímka a bod ležící mimo přímku a jejich obrazy,
- dvě rovnoběžné přímky a jejich obrazy a směr afinity,

- osa afinity, směr afinity a charakteristika,
- charakteristika a dvě dvojice sobě odpovídajících bodů.

6.2. Afinita mezi kružnicí a elipsou

Obraz kružnice v osové afinitě

Máme zadanou osu afinity o a dvojici sobě odpovídajících bodů S, S' . Obrazem kružnice k o poloměru r je elipsa k' .

Z vlastností platných pro osou afinitu plyne pro kružnici a odpovídající elipsu:

1. Středu jedné kuželosečky odpovídá střed druhé kuželosečky.
2. Sdruženým průměrům jedné kuželosečky odpovídají sdružené průměry druhé kuželosečky (sdruženými průměry myslíme takové dva průměry, kde tečny v krajních bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem a naopak).
3. Existují společné tečny kružnice k a k' ní afinní elipsy k' . Tyto tečny jsou rovnoběžné se směrem afinity s .
4. Osa afinity protíná obě sobě odpovídající kuželosečky k, k' ve stejných bodech. Může být tedy tečnou, nebo sečnou nebo nesečnou, [2].

6.3. Afinní vlastnosti elipsy

Nad průměrem $AB = 2a$ jsme sestrojili kružnici k a její polotětvu $KL \perp AB, K'L' \perp AB$ jsme rozdělili body E, E' ve stejném poměru

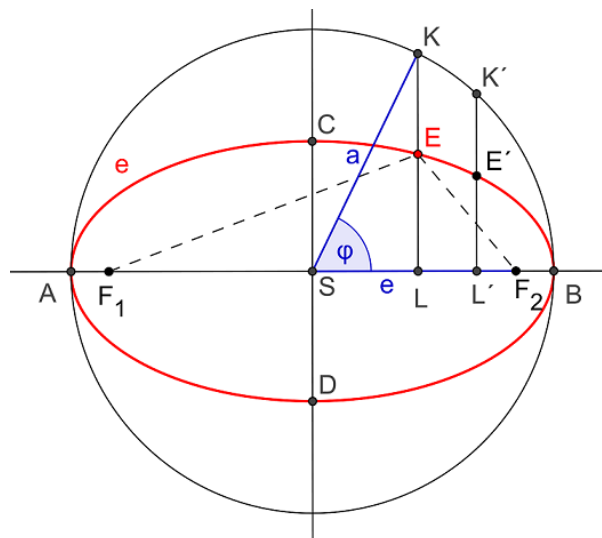
$$\frac{EL}{KL} = \frac{E'L'}{K'L'} = \frac{b}{a} = q.$$

Dále hledáme geometrické místo bodů E . Podle obrázku je

$$\overline{SL}^2 + \overline{KL}^2 = a^2,$$

$$SL = a \cos \varphi,$$

$$KL = a \sin \varphi.$$



Obr. 66 Elipsa jako afinní křivkou ke kružnici

Na průměru AB jsme zvolili body F_1, F_2 tak, aby byly ve vzdálenosti $\pm e$ od středu S kružnice k , přičemž

$$e^2 = a^2 - b^2 = a^2 - a^2 q^2 = a^2(1 - q^2).$$

Z pravoúhlého trojúhelníka F_1LE vypočítáme vzdálenost F_1E :

$$\begin{aligned} |F_1E|^2 &= |F_1L|^2 + |EL|^2 = (F_1L + SL)^2 + |EL|^2 = \\ &= (e + a \cos \varphi)^2 + (qa \sin \varphi)^2 = \\ &= e^2 + 2ae \cos \varphi + a^2 \cos^2 \varphi + a^2 q^2 \sin^2 \varphi = \\ &= a^2 - b^2 + 2ae \cos \varphi + a^2 \cos^2 \varphi + a^2 q^2 \sin^2 \varphi = \\ &= a^2 - b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi + 2ae \cos \varphi = \\ &= a^2 + 2ae \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi = \\ &= (a + e \cos \varphi)^2; \end{aligned}$$

odtud

$$F_1E = a + e \cos \varphi.$$

Podobně vypočítáme z pravoúhlého trojúhelníka F_2LE vzdálenost $F_2E = |a - e \cos \varphi| = a - e \cos \varphi$ (pro $a > e \cos \varphi$).

Po sečtení obou rovnic dostaneme

$$F_1E + F_2E = 2a = konst.$$

Můžeme tedy vyslovit větu.

Věta: Geometrickým místem bodů E , které dělí polotětivy kružnice k kolmé k jejímu průměru AB v poloměru $q = \frac{b}{a}$, je elipsa e , jež má hlavní osu AB a vedlejší poloosu $b = qa$, [3].

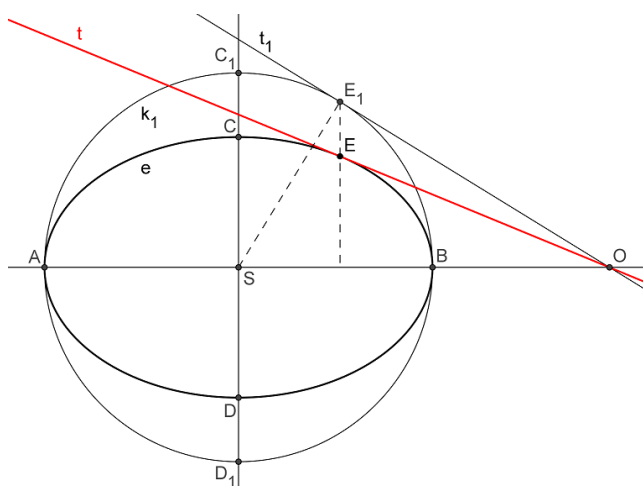
Z této věty plynou další důsledky. Protože odpovídající si body E na elipse a K na kružnici mají od osy AB vzdálenosti EL , KL v konstantním poměru q , jsou křivky e a k ve vztahu pravoúhlé afinity, [3].

Věta: Elipsa e o poloosách a , b je pravoúhle afinní se soustřednou kružnicí k o poloměru a , přičemž osou afinity je společný průměr AB obou křivek a charakteristikou afinity poměr $q = \frac{b}{a}$, [3].

Z této věty plyne tzv. trojúhelníková konstrukce elipsy.

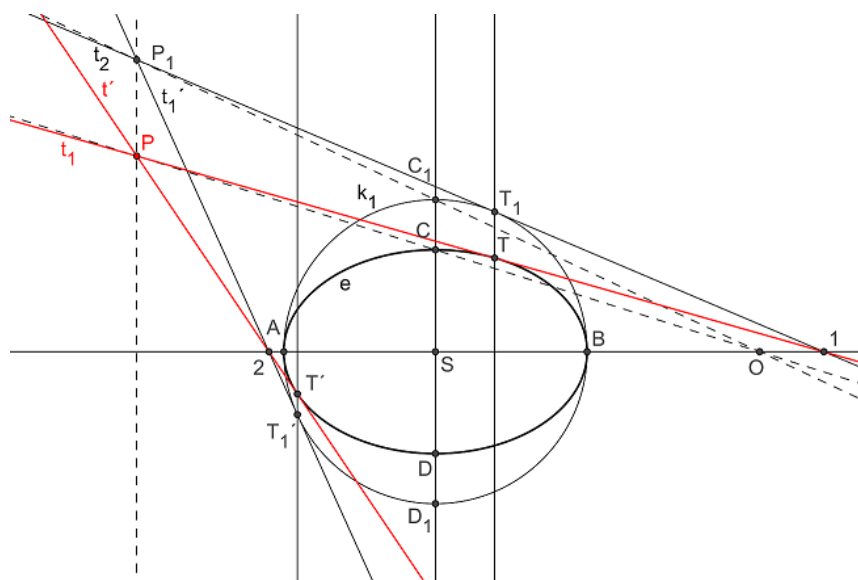
6.4. Použití afinních vlastností elipsy při konstrukcích

Příklad: V bodě E elipsy $e(a; b)$ sestrojte tečnu.



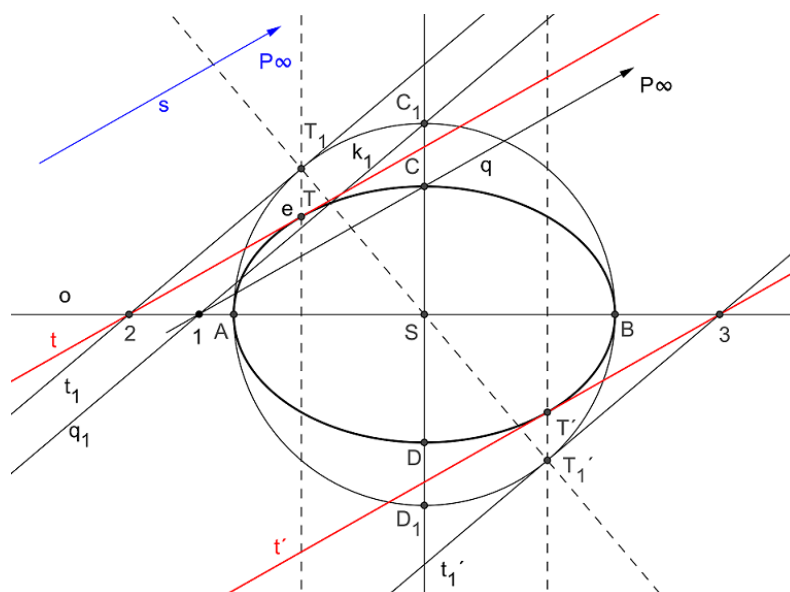
Obr. 67 Tečna v bodě elipsy

Příklad: Z vlastního bodu P sestrojte tečny k elipse e , která je zadána osami. Najděte jejich dotykové body.



Nejdříve sestrojíme k elipse e afinní kružnici k_1 , kde AB je průměr afinní kružnice k_1 . K vedlejšímu vrcholu C elipsy e najdeme afinní bod C_1 na kružnici k_1 ($C_1C \perp o$). Pomocí afinních přímek PC , P_1C najdeme k bodu P odpovídající bod P_1 . Afinní přímky se protínají na ose afinity o v bodě O ($P_1P \perp o$). Ke kružnici k_1 sestrojíme tečny t_1 a t_2' a to tak, aby procházeli bodem P_1 . Odpovídající přímky t a t' jsou hledané tečny elipsy e , abychom je určili, tak musíme využít samodružné body 1 a 2 , které se nachází na ose o . Dotykové body T a T' na tečnách t a t' jsou afinní k dotykovým bodům T_1 a T_1' tečen t_1 a t_1' ($T_1T \perp o$; $T_1'T' \perp o$).

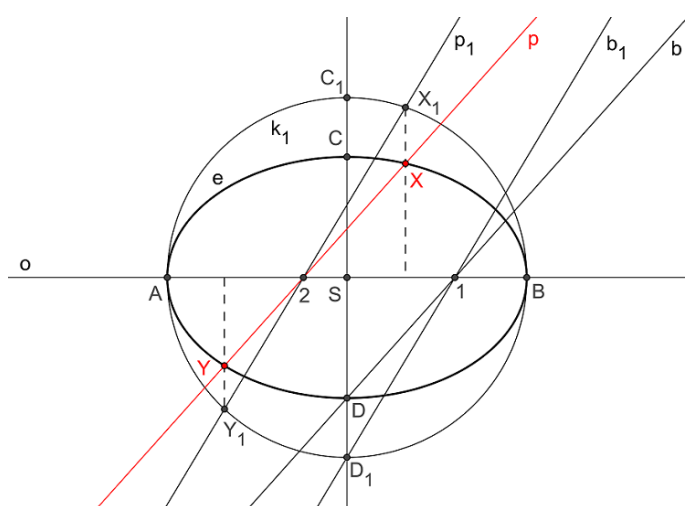
60



Obr. 69 Tečny elipsy rovnoběžné s danou přímkou

K elipse e opět sestrojíme afinní kružnici k_1 , která má průměr AB . Dále sestrojíme přímkou $q \equiv CP^\infty$ ($q \parallel s$) a k ní odpovídající přímkou q_1 . Přímkou q_1 sestrojíme pomocí bodu C_1 a samodružného bodu 1 na ose o . Dále sestrojíme tečny t_1 a t_1' kružnice k_1 a to tak, aby byly rovnoběžné s přímkou q_1 a na nich dotykové body T_1 a T_1' . Tečny t a t' , které hledáme, prochází body 2 a 3 na ose o a jsou rovnoběžné se směrem s . Jejich dotykové body T a T' jsou opět afinní k bodům T_1 a T_1' ($T_1T \perp o$; $T_1'T_1 \perp o$).

Příklad: Určete průsečíky X, Y přímky p s elipsou e .

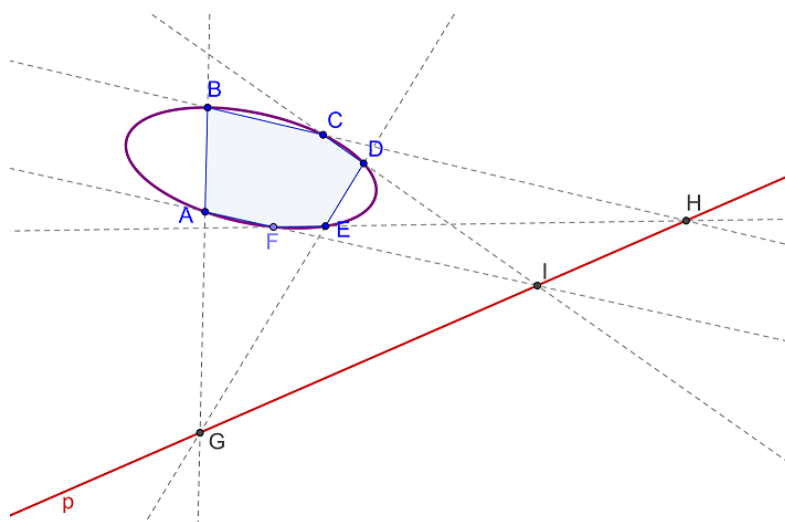


Obr. 70 Průsečíky přímky s elipsou - užitím afinity

V pravoúhlé afinitě odpovídá dané elipse e soustředná kružnice k_1 nad průměrem AB a dané přímce p přímka p_1 , s níž se protíná v samodružném bodě 2 na ose o . Přímce $b \parallel p$ jdoucím bodem D odpovídá afinní přímka $b_1 \equiv D_1 1$. Přímka $p_1 \parallel b_1$ jde bodem 2 a protíná kružnici k_1 v bodech X_1, Y_1 . Odpovídající body X, Y jsou hledané průsečíky, [3].

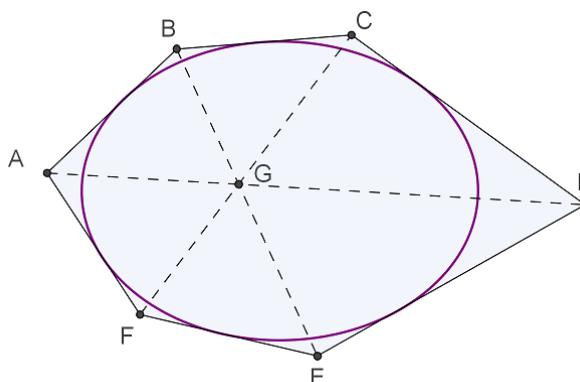
7. Pascalova a Brianchonova věta

Pascalova věta: Máme šestiúhelník, který je vepsaný do kuželosečky. Průsečíky tří dvojic protějších stran šestiúhelníka, leží na jediné přímce tzv. Pascalově přímce.



Obr. 71 Pascalova přímka

Brianchonova věta (věta duální): Máme šestiúhelník, který je opsaný kuželosečce. Spojnice tří protějších vrcholů šestiúhelníka prochází jedním bodem tzv. Brianchonovým bodem.



Obr. 72 Brianchonova věta

8. Závěr

Zjistila jsem, že problematika kolem kuželoseček je velmi zajímavá. Vlastností kuželoseček je mnohem více, uvedla jsem jen ty vlastnosti, které byly probírány na střední či vysoké škole a doplnila jsem je o věci nové.

K pochopení problematiky mi pomáhal program GeoGebra, ve kterém jsem si mohla vytvořit přehledné obrázky.

Myslím si, že by tato bakalářská práce mohla posloužit pro výuku matematiky na středních a vysokých školách.

9. Citovaná literatura

1. Pech, Pavel. *Kuželosečky*. České Budějovice : Jihočeská univerzita, 2004. 80-7040-755-7.
2. Karel Drábek, František Harant, Ota Setzer. *Deskriptivní geometrie I*. Praha : SNTL/ALFA, 1978. 04-011-78.
3. Miroslav Menšík, Ota Setzer, Karel Špaček. *Deskriptivní geometrie*. Praha : SNTL, 1966. 04-001-66.
4. Miroslav Menšík, Ota Setzer. *Deskriptivní geometrie I*. Praha : SNTL, 1976. 04-001-76.