

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

SBÍRKA ŘEŠENÝCH ÚLOH
Z GEOMETRIE
BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vedoucí práce

Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

Vypracovala

Lucie Kuklová

duben 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Sbírka řešených úloh z geometrie jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

.....

Poděkování

Chtěla bych tímto poděkovat Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D., který byl vedoucím mé bakalářské práce. Děkuji mu především za jeho cenné rady a ochotu při spolupráci na sestavení mé bakalářské práce.

Anotace:

Cílem bakalářské práce Sbírka řešených úloh z geometrie bylo sestavit soubor řešených úloh, zaměřených především na učivo geometrie na 2. stupni základní školy. Jednotlivé úlohy jsou rozděleny do ročníků. Každá kapitola začíná sérií řešených úloh, po nich následují úlohy určené k procvičování dané problematiky. Na konci práce jsou umístěny výsledky těchto úloh. Úlohy jsou doplněny řadou obrázků vytvořených pomocí programu GeoGebra.

Annotation:

The target of the Bachelor piece of work „Collection of solved exercises from geometry“ was to form a package of solved exercises, directed primarily at schoolwork of geometry at middle schools. The single exercises are separated into grades. Each chapter begins by a set of solved exercises, some exercises designated for practising of the given issues are following. The results of these exercises are placed at the end of this work. The exercises are completed by many pictures created by the GeoGebra program.

OBSAH

1. ÚVOD.....	6
2. RÁMCOVÝ VZDĚLÁVACÍ PROGRAM.....	7
3. ŠESTÁ TŘÍDA.....	12
3.1. Řešené příklady.....	12
3.2. Příklady k procvičování.....	19
4. SEDMÁ TŘÍDA.....	27
4.1. Řešené příklady.....	27
4.2. Příklady k procvičování.....	36
5. OSMÁ TŘÍDA.....	41
5.1. Řešené příklady.....	41
5.2. Příklady k procvičování.....	46
6. DEVÁTÁ TŘÍDA.....	52
6.1. Řešené příklady.....	52
6.2. Příklady k procvičování.....	56
7. VÝSLEDKY.....	62
8. GEOGEBRA.....	67
9. ZÁVĚR.....	69
10. POUŽITÉ ZDROJE.....	70
10.1. Literatura.....	70
10.2. Internetové zdroje.....	72
11. OBSAH CD.....	73

1. Úvod

Bakalářská práce je věnovaná sestavení sbírky úloh obsahující příklady z geometrie na základní škole. Učivo geometrie je rozděleno do jednotlivých ročníků. Každý ročník tvoří jednu kapitolu. Každá kapitola obsahuje řešené příklady a příklady určené k procvičování. Na začátku každé kapitoly je shrnuto učivo, které doporučuje Rámcový vzdělávací program pro daný ročník. Řešené příklady jsou vybrány tak, aby pokryly jednotlivé okruhy každé kapitoly. Příklady jsou doplněny obrázky, které byly vytvořeny pomocí programu GeoGebra, kterému je v práci věnovaná samostatná kapitola. Výsledky všech příkladů jsou uvedeny ke každé kapitole na konci práce.

Tato práce vychází z Rámcového vzdělávacího programu (RVP), jehož obsah je uveden v následující kapitole. RVP jsem měla možnost porovnat se Školním vzdělávacím programem Základní školy Otokara Březiny v Počátkách. Našla jsem několik odlišností, které jsou opět zmíněny v následující kapitole.

Součástí práce je CD, na kterém jsou uloženy postupy konstrukcí všech řešených úloh v programu GeoGebra. Ten umožňuje zobrazit jednotlivé kroky konstrukce, což umožní žákům lepší porozumění danému problému. Díky této možnosti by tak mohla být oživena výuka na základních školách.

2. Rámcový vzdělávací program

(RVP)

Formuluje očekávanou úroveň vzdělání stanovenou pro všechny absolventy jednotlivých etap vzdělávání. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání navazuje na RVP předškolního vzdělávání. Vymezuje vše, co je společné a nezbytné v povinném základním vzdělávání žáků. Specifikuje úroveň klíčových kompetencí, jíž by měli žáci dosáhnout na konci základního vzdělávání. RVP je závazný pro všechny střední školy při stanovování požadavků přijímacího řízení do středního vzdělávání. Dále předpokládá volbu různých vzdělávacích postupů, odlišných metod, forem výuky a využití všech podpůrných opatření ve shodě s individuálními potřebami žáků.

V oblasti matematiky na 2. stupni základní školy jsem se zaměřila na geometrii. Zde se žáci mají seznámit s geometrií v rovině a v prostoru. Určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem) .

Podle RVP by žáci na základní škole měli získat následující vědomosti a dovednosti:

- **rovinné útvary**- přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, kruh, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník (lichoběžník, rovnoběžník), pravidelné mnohoúhelníky, vzájemná poloha přímek v rovině (typy úhlů), shodnost a podobnost (věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků)
- **metrické vlastnosti v rovině**- druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky, trojúhelníková nerovnost, Pythagorova věta
- **prostorové útvary**- kvádr, krychle, rotační válec, jehlan, rotační kužel, koule, kolmý hranol
- **konstrukční úlohy**- množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice), osová souměrnost, středová souměrnost

[33]

Dále ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy vypracovalo doporučené učební osnovy pro základní školu. Kde detailněji rozpracovalo RVP podle jednotlivých ročníků.

Podle těchto doporučených učebních osnov by žáci měli mít v jednotlivých třídách následující vědomosti a dovednosti:

6. třída

- vzájemná poloha dvou přímek v rovině
- trojúhelníková nerovnost, věty o shodnosti trojúhelníků
- shodnost geometrických útvarů
- základní rovinné útvary jako jsou bod, přímka, polopřímka, úsečka, čtyřúhelník, trojúhelník, kruh, kružnice, polovina
- druhy čar
- úhel a jeho velikost, jednotky velikosti úhlu, operace s úhly
- druhy trojúhelníků, vnitřní a vnější úhly trojúhelníku, výška, těžnice a těžiště trojúhelníku
- pravidelný mnohoúhelník
- obsah a obvod čtverce, obdélníku, trojúhelníku, mnohoúhelníku
- konstrukce rovinných útvarů: úhlu, trojúhelníku, čtyřúhelníku
- pravidelný šestiúhelník, osmiúhelník
- osová souměrnost
- krychle, kvádr- objem, povrch
- volné rovnoběžné promítání
- postup při řešení slovní úlohy

7. třída

- čtyřúhelníky (rovnoběžníky a lichoběžníky)- obvod, obsah, konstrukce
- středová souměrnost
- hranoly- objem, povrch , síť kolmého hranolu
- volné rovnoběžné promítání

- postup při řešení aplikační slovní úlohy s využitím znalostí geometrie v rovině a prostoru

8. třída

- pravoúhlý trojúhelník, Pythagorova věta
- kruh, kružnice- obvod, obsah
- množiny bodů dané vlastnosti
- Thaletova kružnice a věta
- konstrukce rovinných útvarů; trojúhelníku, čtyřúhelníku (rovnoběžníku, lichoběžníku), kružnice
- válec, koule- objem, povrch, síť válce
- volné rovnoběžné promítání postup při řešení aplikační slovní úlohy

9. třída

- podobnost, věty o podobnosti trojúhelníků
- jehlan, rotační kužel- objem, povrch, síť
- volné rovnoběžné promítání
- podobnost v úlohách z praxe

[33]

Jednotlivé základní školy si podle RVP vytvářejí své individuální školní vzdělávací programy (ŠVP). Já jsem ve své práci spolupracovala se Základní školou Otokara Březiny v Počátkách. Získala jsem jejich ŠVP a mohla jsem ho proto porovnat s RVP.

ŠVP Základní školy Otokara Březiny v Počátkách

6. třída

- rýsování a přenášení úhlu, osa úhlu
- jednotky velikosti úhlu a měření velikosti úhlu
- ostrý, tupý, pravý a přímý úhel
- početní operace s velikostmi úhlů
- vrcholové a vedlejší úhly

- mnohoúhelníky- pojem, pravidelný šestiúhelník, osmiúhelník (konstrukce, obvod)
- osová souměrnost, osově souměrné útvary
- shodné útvary
- kvádr, krychle, síť těles
- zobrazování těles
- krychle, kvádr- objem, povrch
- jednotky objemu
- trojúhelník, druhy, vnitřní a vnější úhly trojúhelníku, těžnice, těžiště, střední příčka, výšky
- kružnice opsaná, vepsaná

7. třída

- shodnost trojúhelníků
- trojúhelníková nerovnost
- konstrukce trojúhelníků
- opakování osově souměrnosti
- sestrojení obrazu ve středové souměrnosti
- rovnoběžky- vlastnosti, rozdělení, konstrukce
- obvod, obsah rovnoběžníku
- trojúhelník a lichoběžník
- konstrukce
- obsah a obvod lichoběžníku
- obsah trojúhelníku
- hranol- povrch, objem

8. třída

- Pythagorova věta, užití Pythagorovy věty, výpočet délek stran v pravouhlém trojúhelníku
- vzájemná poloha přímky a kružnice
- vzájemná poloha dvou kružnic

- Thaletova věta
- délka kružnice, obsah kruhu
- válec- objem, povrch
- jednoduché konstrukce
- množiny všech bodů dané vlastnosti
- konstrukční úlohy

9. třída

- goniometrické funkce $\sin$, $\cos$, $\tan$ v konstrukčních úlohách
- podobnost, věty o podobnosti trojúhelníků
- užití podobnosti
- jehlan, kužel
- povrch a objem těles

Po porovnání získaného ŠVP s RVP jsem došla k následujícímu závěru. Podle RVP by se měla vzájemná poloha dvou přímek probírat v 6. třídě, tato základní škola tento bod zahrnula až do 7. třídy. Další odlišnost jsem našla u shodnosti trojúhelníků a trojúhelníkové nerovnosti, kde RVP tento bod uvádí v 6. třídě a ŠVP v 7. třídě. Poslední změnu jsem našla v tom, že u ŠVP v 9. ročníku zařadila tato základní škola ještě goniometrické funkce sinus, kosinus a tangens a jejich užití při konstrukčních úlohách.

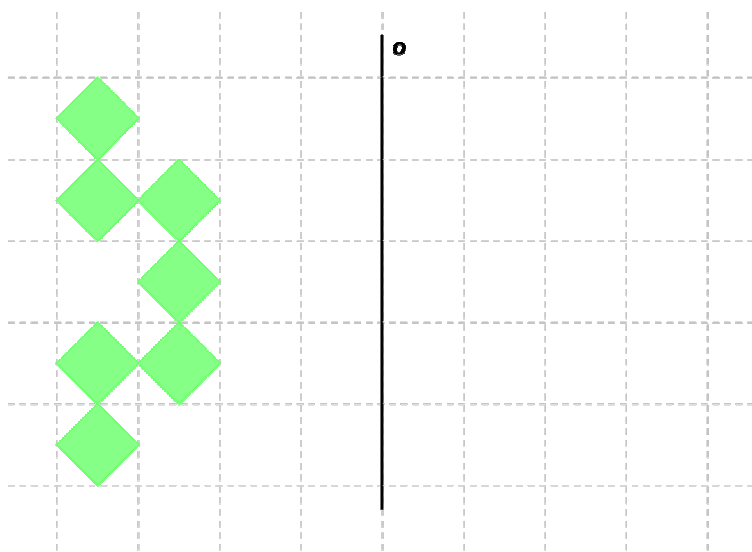
3. Šestá třída

- 1) Osová souměrnost
- 2) Konstrukce
- 3) Úhel-velikost
- 4) Krychle, kvádr- síť, objem, povrch
Čtverec, obdélník- obvod, obsah

3.1. Řešené příklady

Příklad 3.1.1

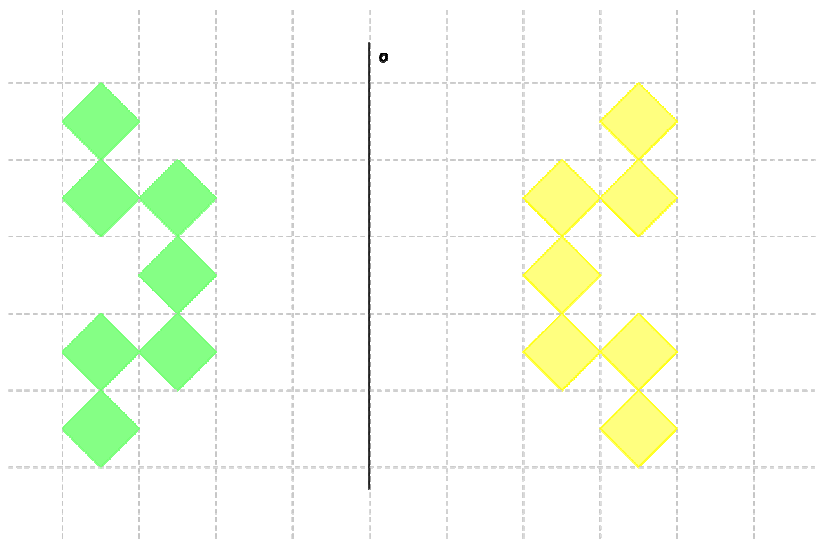
Paní Hrubá si chce v koupelně vytvořit z dlaždic osově souměrný obrazec. Dokresli dlaždice tak, aby vzniklý obrazec byl osově souměrný se zadáním.



Obr. 1 Dlaždice

Řešení:

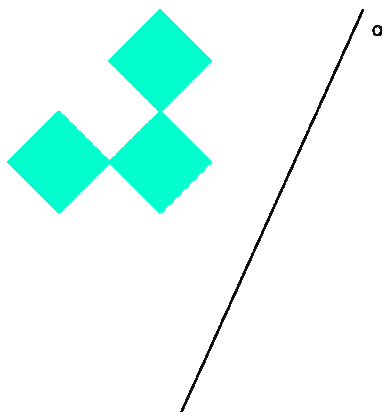
Žlutý obrazec je osově
souměrný k původní-
mu zelenému obrazci,
tedy je jeho obrazem.



Obr. 2 Dlaždice- řešení

Příklad 3.1.2

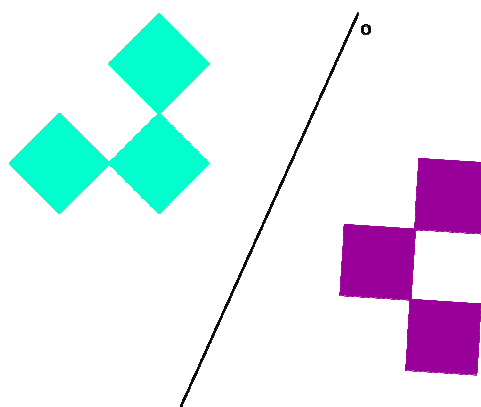
Na obrázku vidíme obrazec a osu o . Dokreslete obrazec, který bude osově souměrný
s původním obrazcem.



Obr. 3 Obrazec

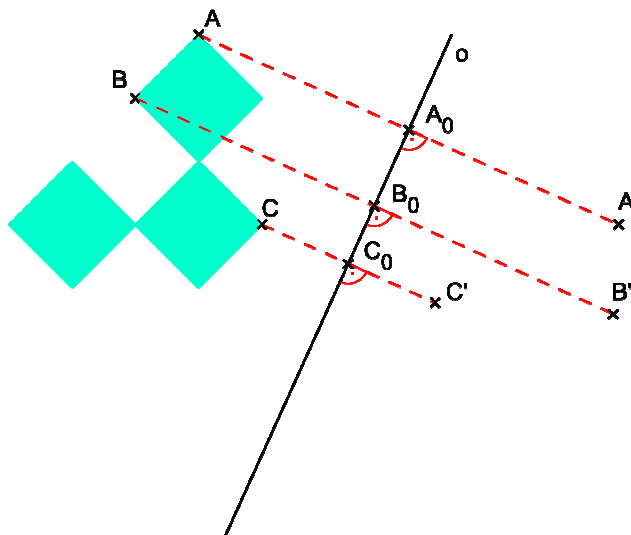
Řešení:

Fialový obrazec je osově souměrný k původnímu obrazci.



Obr. 4 Obrazec – řešení 1. část

1. Bodem A sestrojíme kolmici k ose o .
2. Průsečíkem kolmice a osy o získáme bod A_0 .
3. Na kolmici sestrojíme bod A' tak, že bod A_0 je středem úsečky AA' .
4. Stejně postupujeme při sestrojení bodů B' , C' .
5. Takto postupujeme i u dalších částí obrazce. Vzniklé

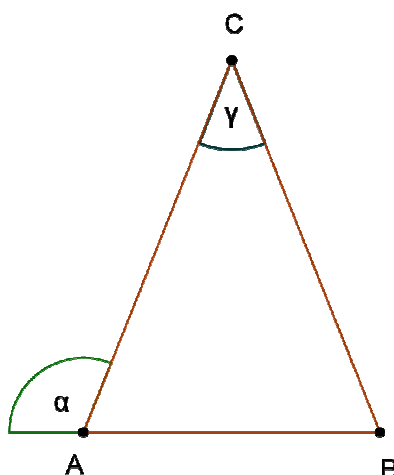


Obr. 5 Obrazec – řešení 2. část

body poté spojíme a získáme tak výsledný osově souměrný obrazec.

Příklad 3.1.3

Při hodině matematiky narýsoval pan učitel rovnoramenný trojúhelník. Zadal pouze úhel γ a chce po žácích dopočítat úhel α . Žáci se ale ohradili tím, že to přeci nejde. Mají pravdu? Pokud ne, dopočítejte úhel α . [14]



Obr. 6 Rovnoramenný trojúhelník

Řešení:

Součet všech tří vnitřních úhlů v obecném trojúhelníku je 180° . V našem případě se ovšem jedná o rovnoramenný trojúhelník. Který má tu vlastnost, že jeho úhly při základně mají shodnou velikost.

Z tohoto důvodu lze tento příklad vyřešit následujícím způsobem:

Známe-li velikost úhlu γ , pak nám na úhly při základně zbývá úhel $180^\circ - \gamma$. Oba tyto úhly mají stejnou velikost, proto každému z nich odpovídá hodnota $\frac{(180^\circ - \gamma)}{2}$. Úhel při vrcholu A tvoří s úhlem α přímý úhel (který má hodnotu 180°). Proto hodnota úhlu α je:

$$180^\circ = \alpha + \frac{(180^\circ - \gamma)}{2}$$

$$\alpha = 180^\circ - \frac{(180^\circ - \gamma)}{2}$$

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

Příklad 3.1.4

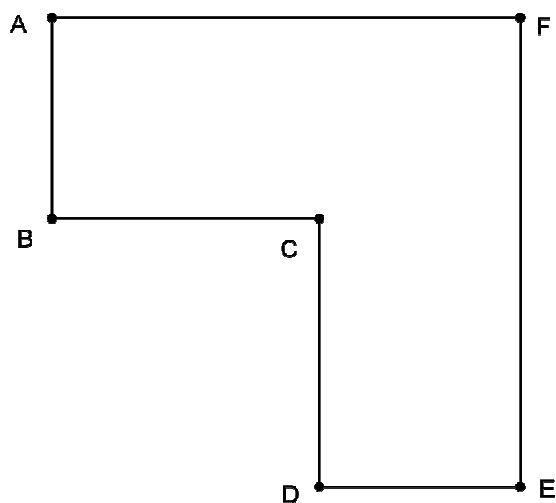
Pan Datel se rozhodl zateplit strop v chodbě. Chce si koupit čtvercové desky, které by poté nalepil na strop. Víš-li, že délka strany čtvercové desky je 100 cm , vypočítej kolik desek bude muset pan Datel koupit. Zároveň zakresli do obrázku potřebné údaje.

$$|AB| = 3\text{ m}$$

$$|EF| = 7\text{ m}$$

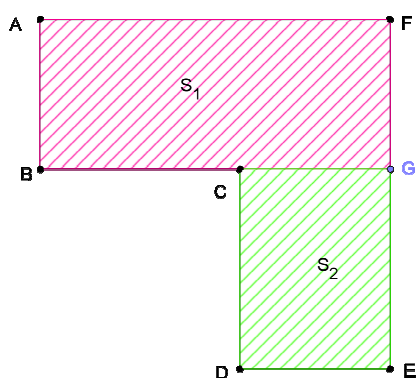
$$|DE| = 3\text{ m}$$

$$|AF| = 7\text{ m}$$

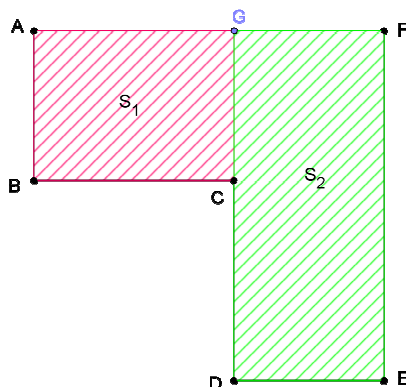


Obr. 7 Strop

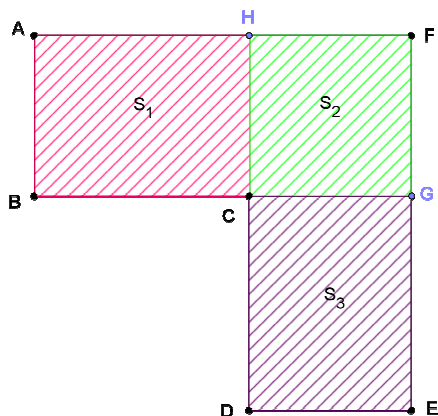
Řešení:



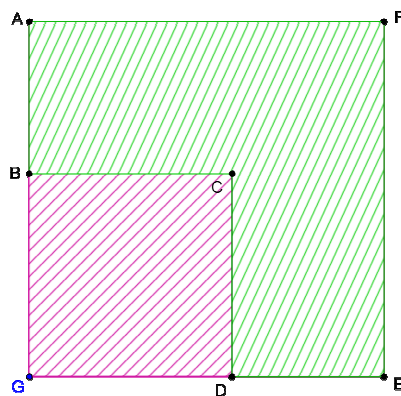
Obr. I.



Obr. II.



Obr. III.



Obr. IV.

Pro výpočet obsahu si plochu stropu rozdělíme. Existuje několik možností, jak vidíme nahoře na obrázku.

My jsme si vybrali obrázek číslo I. Dostaneme tak obdélník $ABGF$ s obsahem S_1 a obdélník $CDEG$ s obsahem S_2 .

Obdélník $ABGF$

$$a = |AB|, b = |BG|$$

$$S_1 = a \cdot b$$

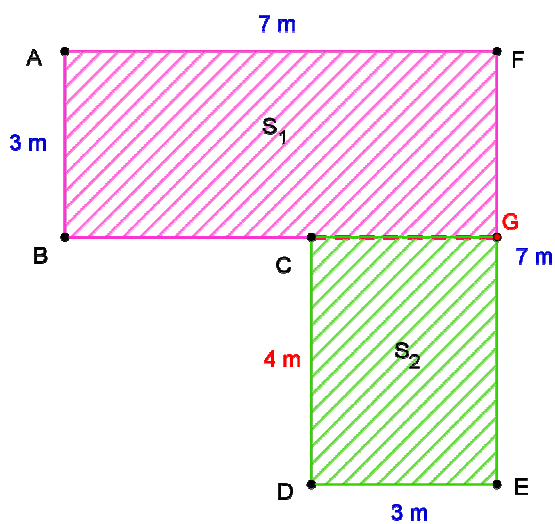
$$S_1 = 3 \cdot 7 = 21 \text{ m}^2$$

Obdélník $CDEG$

$$c = |CD|, d = |DE|$$

$$S_2 = c \cdot d$$

$$S_2 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ m}^2$$



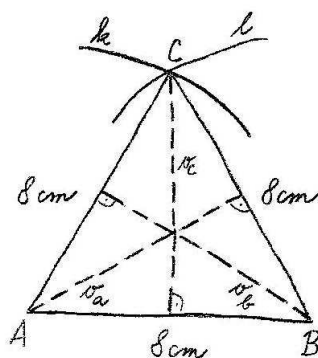
Nyní známe obsah stropu. Víme, že obsah jedné desky je 1 m^2 . Tudiž na celý strop bude potřeba $21ks + 12ks$, tedy 33 kusů desek.

Příklad 3.1.5

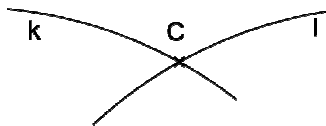
Narýsujte rovnostranný trojúhelník ABC s délkou strany 8 cm a sestrojte všechny jeho výšky.

Řešení:

Rozbor:

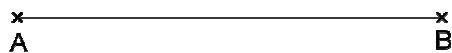


Z rozboru vyplývá, že nejdříve musíme sestrojit kružnice k a l , tím dostaneme bod C .

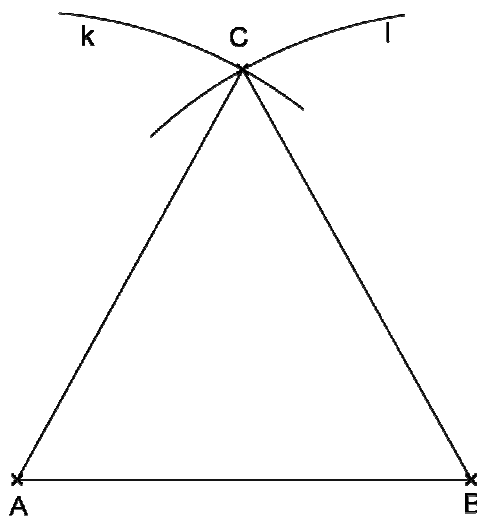


Postup konstrukce:

1. $AB; |AB| = 8\text{ cm}$
2. $k; k(A; 8\text{ cm})$
3. $l; l(B; 8\text{ cm})$
4. $C; C \in k \cap l$



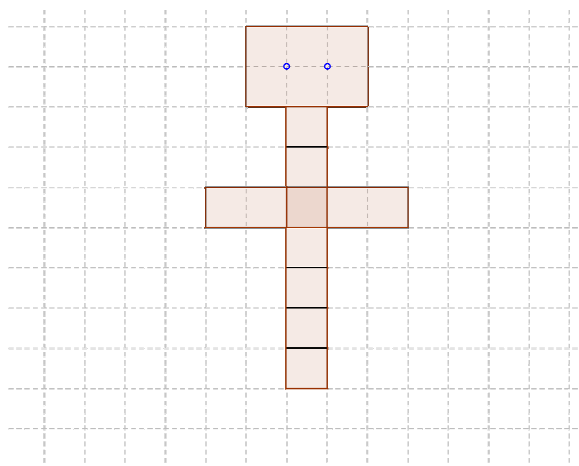
5. $\triangle ABC$



3.2. Příklady k procvičování

Příklad 3.2.1

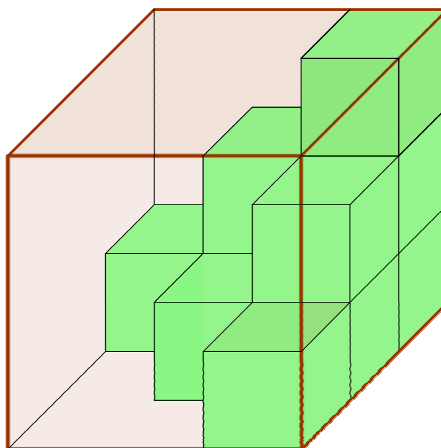
Anička si na cestu chce nakreslit skákacího panáka. Zatím si nakreslila návrh, jak by měl panák vypadat. Honzík by chtěl vědět, jak dlouhá by byla čára, kterou poskládá z čar tvořících obvod skákacího panáka. Urči délku čáry, víš-li, že délka jedné strany čtverečku na nákresu odpovídá 30 cm .



Obr. 8 Skákací panák

Příklad 3.2.2

Jana si vyrobila krabičku ve tvaru krychle. Tuto krabičku chce naplnit kostkovým cukrem, který má také tvar krychle. Krabičku začala plnit, ale zjistila, že jí kostkový cukr došel. Kolik kostiček cukru musí Jana ještě doplnit, aby byla krabička plná?



Obr. 9 Krabička

Příklad 3.2.3

Paní Stará si chce na své zahrádce vytvořit půlkruh, který osází květinami. Tento půlkruh chce rozdělit pod různými úhly. Pan Starý nakreslil návrh, samozřejmě z legrace nepoužil jenom stupně, ale i minuty. Pomůžete paní Staré dopočítat zbývající úhel α a ukázat tak, že tohle přeci není těžký problém.

Víme-li :

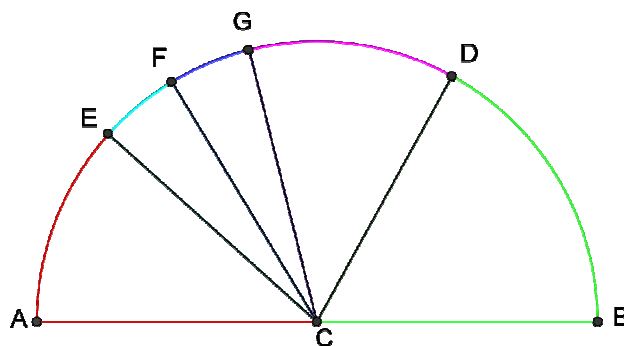
$$|\angle ACE| = 63^\circ 30'$$

$$|\angle ECF| = \alpha$$

$$|\angle FCG| = 17^\circ 40'$$

$$|\angle GCD| = 2\alpha$$

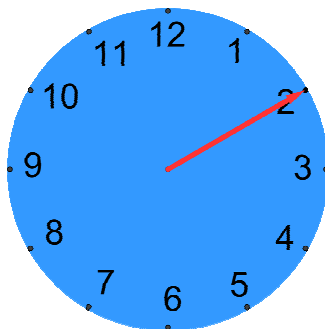
$$|\angle DCB| = 65^\circ 20'$$



Obr. 10 Půlkruh s květinami

Příklad 3.2.4

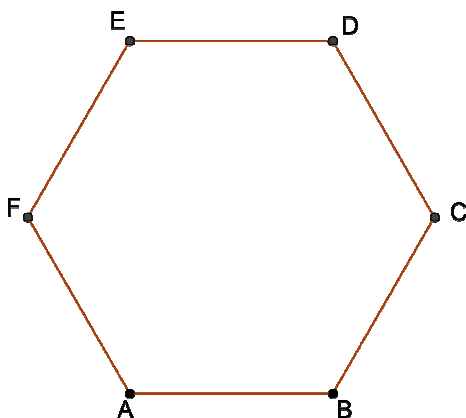
Na obrázku vidíme hodiny. Malá ručička ukazuje na číslici 2. Na jaké číslo(a) musí směřovat velká ručička, aby společně svíraly úhel 120° ?



Obr. 11 Hodiny

Příklad 3.2.5

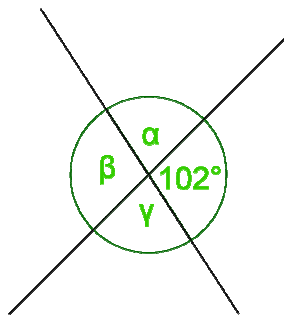
Honzík si postavil krabičku z papíru, jejíž podstava má tvar pravidelného šestiúhelníku. Jaká je velikost jednotlivých úhlů?



Obr. 12 Podstava krabičky

Příklad 3.2.6

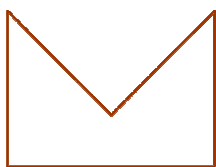
Jindra se pokoušel narýsovat dvě kolmice, ale neměl k tomu potřebné pomůcky. Když si změřil jeden z úhlů, zjistil, že má velikost 102° . Řekl si, že je zbytečné přeci měřit i zbývající úhly, že je raději zkusí dopočítat. Dopočítejte také zbývající úhly.



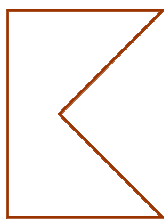
Obr. 13 Pokus o kolmice

Příklad 3.2.7

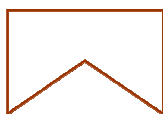
Při hodině matematiky dostaly děti vzor obrázek č. 1, mají za úkol narýsovat k tomuto obrazci obrazce shodné. Vyber ty, které jsou narýsovány správně.



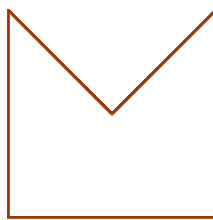
Obr.1



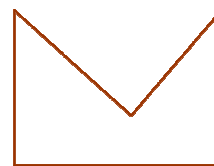
Obr.2



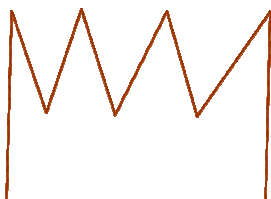
Obr.3



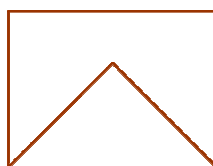
Obr.4



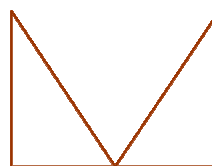
Obr.5



Obr.6



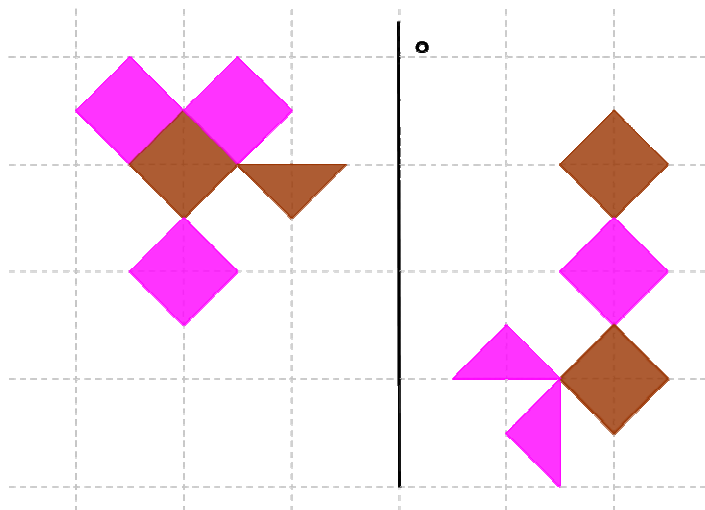
Obr.7



Obr.8

Příklad 3.2.8

Na obrázku vidíte neúplnou mozaiku. Některé dlaždice už stihly odpadnout. Pokuste se, doplnit ji tak, aby byla osově souměrná podle osy o .

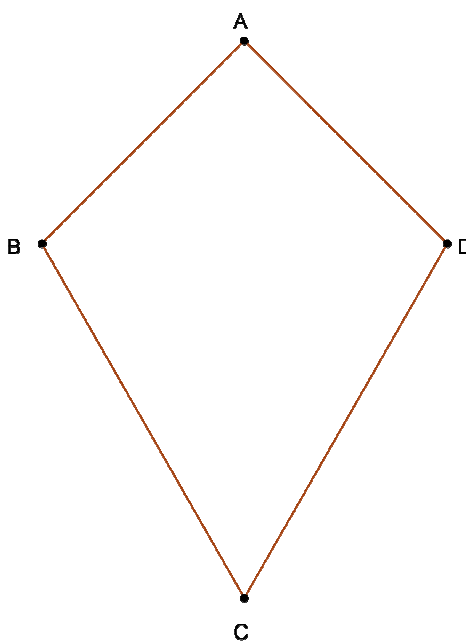


Obr. 14 Mozaika

Příklad 3.2.9

Děti si chtějí vytvořit papírového draka. Sestrojily si plánek. Spočítejte kolik cm^2 papíru budou potřebovat.

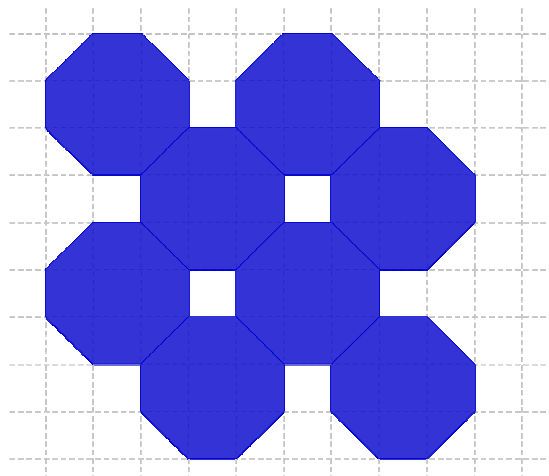
Víš-li: $|BD| = 35\text{cm}$ $|AC| = 57\text{cm}$ přičemž přímka BD dělí přímku AC v poměru $1:2$.
[14]



Obr. 15 Drak

Příklad 3.2.10

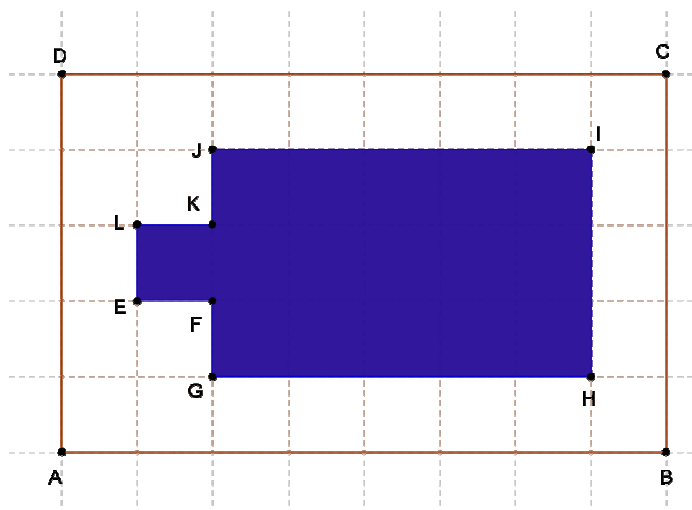
Najděte osu souměrnosti tohoto obrázku.



Obr. 16 Osa obrázku

Příklad 3.2.11

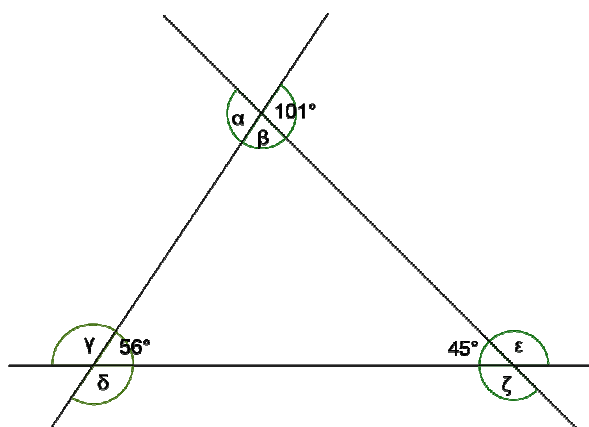
Manželé Novákovi si pořídili loni nový bazén. Letos chtějí prostor kolem bazénu vydláždit. Kolik m^2 dlažby budou potřebovat? Víš-li, že délka jedné strany čtverce na nákresu odpovídá 2 m.



Obr. 17 Bazén

Příklad 3.2.12

Na obrázku je nakreslený trojúhelník. Vaším úkolem je dopočítat zbývající úhly.



Obr. 18 Trojúhelník- úhel

Příklad 3.2.13

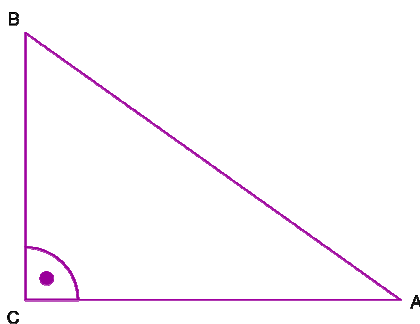
Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno: $v_c = 5,5 \text{ cm}$, $t_c = 6 \text{ cm}$ a $c = 7,8 \text{ cm}$. Proved'te rozbor, zápis konstrukce, konstrukci a závěr.

Příklad 3.2.14

Akvárium tvaru kvádra má rozměry dna 80 cm a 5 dm . Jakou výšku má, je-li naplněno z 88% svého objemu a obsahuje-li $78,8 \text{ litrů}$ vody?

Příklad 3.2.15

Hádanka: Trojúhelník ABC je pravoúhlý, v kterém bodě se protnou všechny jeho výšky?



Obr. 19 Pravoúhlý trojúhelník

Příklad 3.2.16

Mezi třemi záhony je trávník trojúhelníkového tvaru. Dědeček Novák chce na tomto trávníku napást svoji kozu. Kam na trávník musí umístit kolík k uvázání kozy, aby koza spásla co nejvíce trávy a zároveň nedosáhla na žádný ze záhonů?

Příklad 3.2.17

Sestrojte kružnici opsanou trojúhelníku KLM s délkami stran:

$$k = 8 \text{ cm}, l = 7 \text{ cm}, m = 9 \text{ cm}$$

Příklad 3.2.18

Sestrojte kružnici vepsanou trojúhelníku ABC s délkami stran:

$$a = 6 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm}, c = 4 \text{ cm}$$

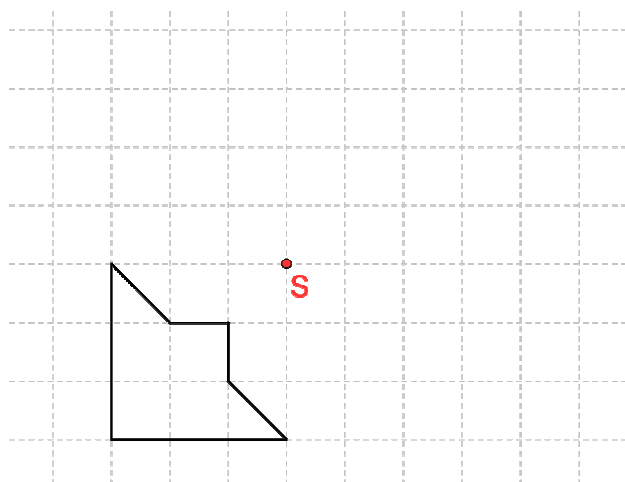
4. Sedmá třída

1. středová souměrnost
2. obvod, obsah- rovnoběžník, trojúhelník, lichoběžník
3. konstrukce- lichoběžník, rovnoběžník
4. hranoly- síť, povrch, objem

4.1. Řešené příklady

Příklad 4.1.1

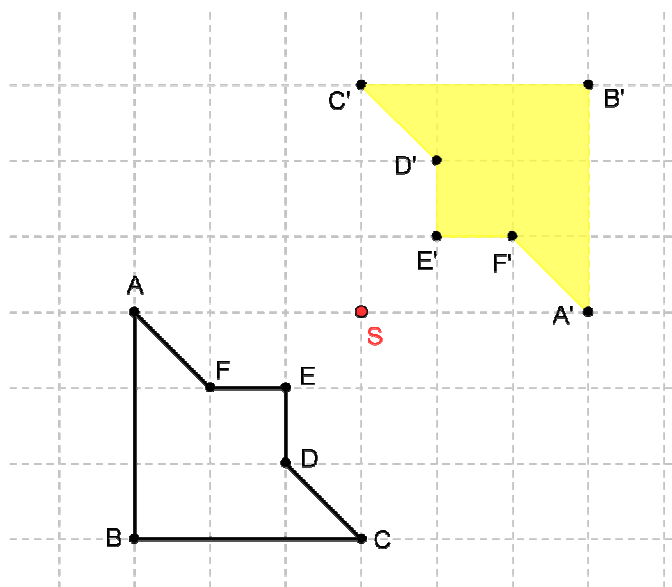
Sestrojte obrazec ve středové souměrnosti se středem S.



Obr. 20 Obrazec- středová souměrnost

Řešení:

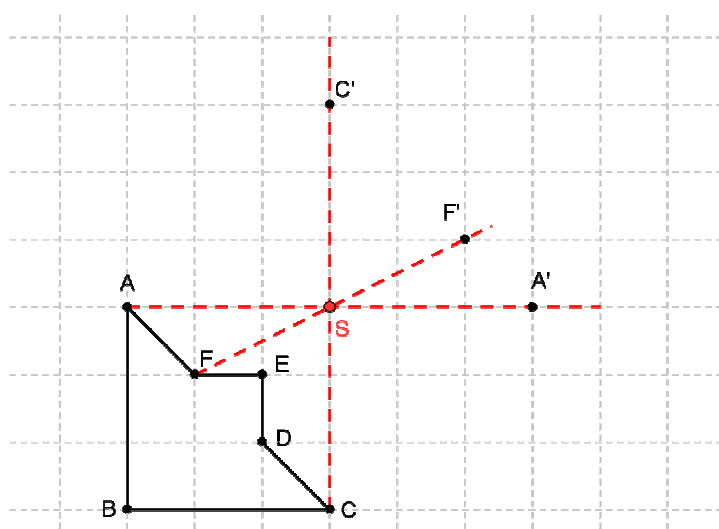
Obrazec $A'B'C'D'E'F'$ je středově souměrný se zadaným obrazcem $ABCDEF$.



Obr. 21 Obrazec- středová souměrnost-
řešení 1. část

1. Sestrojíme přímku AS
2. Na přímce AS sestrojíme bod A' tak, že bod S je středem úsečky AA'
3. Stejně postupujeme při sestavení bodů B' , C' , D' , E' , F'

Takto získané body spojíme a dostaneme tak výsledný obrazec, který je středově souměrný se středem souměrnosti S s původním obrazcem.



Obr. 22 Obrazec- středová souměrnost-
řešení 2. část

Příklad 4.1.2

Jaké rozměry musí mít rovnostranný trojúhelník, který chceme nakreslit na zeď, víme-li, že barva nám vystačí na plochu 9 m^2 a jeho výška musí být 3 metry . Jaký bude obvod tohoto trojúhelníku ?

Řešení:

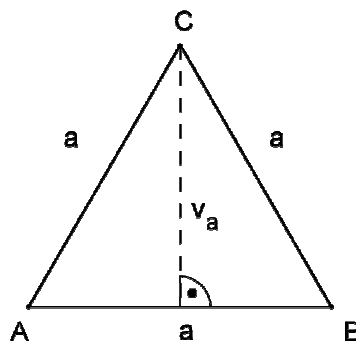
$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$S_{\Delta} = 9\text{ m}^2$$

$$9 = \frac{a \cdot 3}{2}$$

$$18 = 3 \cdot a$$

$$a = 6\text{ m}$$



Obr. 23 Rovnostranný trojúhelník

$$o_{\Delta} = a + b + c$$

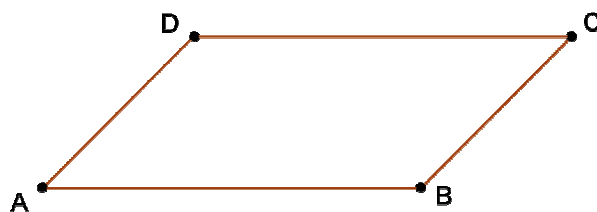
$$o_{\Delta} = 3 \cdot a$$

$$o_{\Delta} = 18\text{ m}$$

Na zeď můžeme nakreslit rovnostranný trojúhelník o maximální délce strany 6 metrů .
Obvod tohoto trojúhelníku bude 18 metrů .

Příklad 4.1.3

Jarda nakreslil na papír rovnoběžník o délce stran : $a = 7\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$. Spočítejte obvod rovnoběžníku.



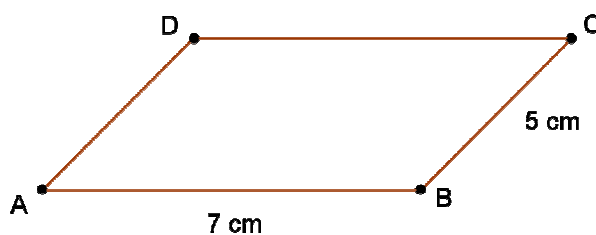
Obr. 24 Rovnoběžník

Řešení:

$$O_{\text{rovnoběžníku}} = 2 \cdot (a + b)$$

$$O_{\text{rovnoběžníku}} = 2 \cdot (7 + 5)$$

$$O_{\text{rovnoběžníku}} = 24\text{ cm}$$

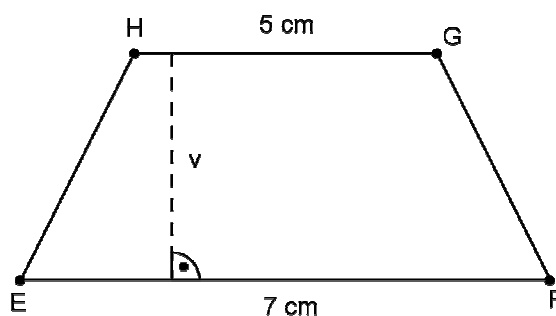


Obr. 24 Rovnoběžník

Obvod rovnoběžníku je 24 cm .

Příklad 4.1.4

Jaký obvod má čtverec $ABCD$, který má stejný obsah jako lichoběžník $EFGH$ o délkách základů 7 cm a 5 cm a výšce, která je aritmetickým průměrem jeho základů?



Obr. 25 Lichoběžník

$$S_{\text{lichoběžníku}} = \frac{(e+g) \cdot v}{2}$$

$$S_{\text{čtverce}} = a^2$$

$$v = \frac{e+g}{2}$$

$$v = \frac{7+5}{2} = 6 \text{ cm}$$

$$S_{\text{lichoběžníku}} = S_{\text{čtverce}}$$

$$O_{\text{čtverce}} = 4 \cdot a$$

$$\frac{(e+g) \cdot v}{2} = a^2$$

$$O_{\text{čtverce}} = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}$$

$$\frac{(7+5) \cdot 6}{2} = a^2$$

$$36 = a^2$$

$$a = 6 \text{ cm}$$

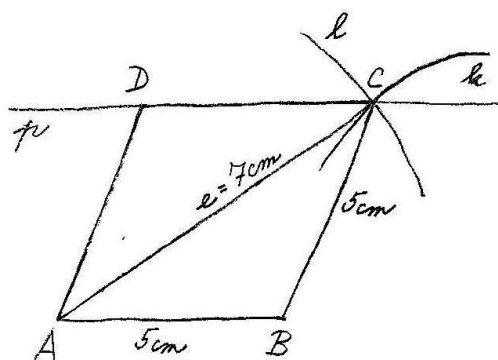
Obvod čtverce $ABCD$ je 24 cm.

Příklad 4.1.5

Sestrojte kosočtverec $ABCD$ o délce strany $a = 5 \text{ cm}$ a úhlopříčce $e = 7 \text{ cm}$.

Řešení:

Rozbor



Z rozboru vyplývá, že konstrukci musí začít sestrojením trojúhelníku ABC .

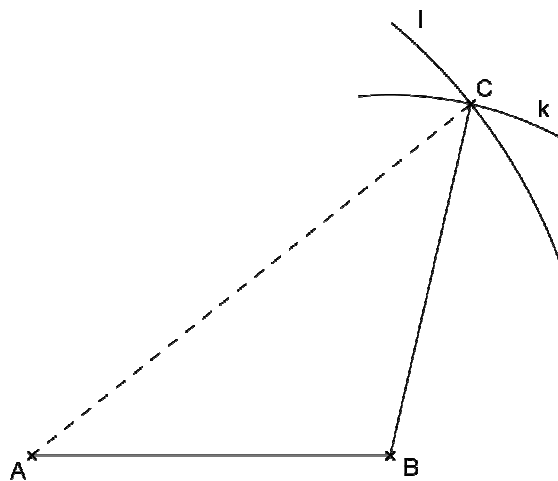
Postup konstrukce

1. $AB; |AB| = 5\text{ cm}$

2. $l; l(A; 7\text{ cm})$

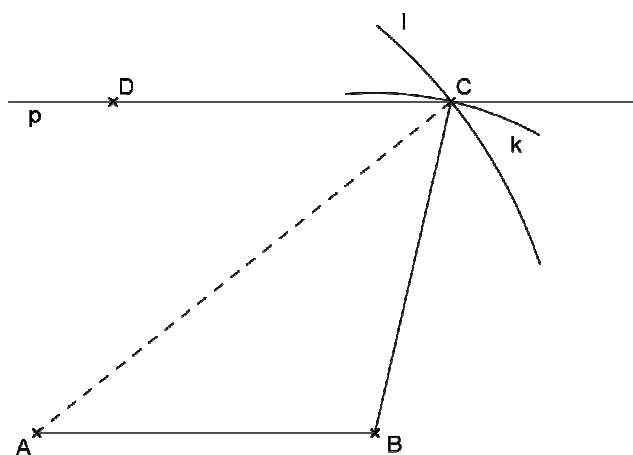
3. $k; k(B; 5\text{ cm})$

4. $C; C \in l \cap k$

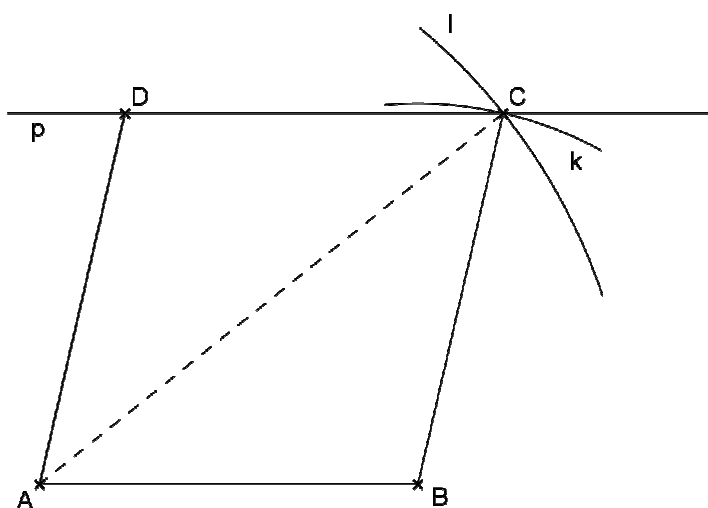


5. $p; p \parallel AB \wedge C \in p$

6. $D; D \in p; |CD| = 5\text{ cm}$



7. rovnoběžník ABCD



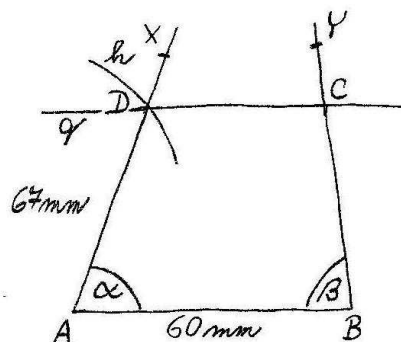
Příklad 4.1.6

Sestrojte lichoběžník $ABCD$, kde : $a = 60 \text{ mm}$, $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $d = 67 \text{ mm}$.

[15]

Řešení:

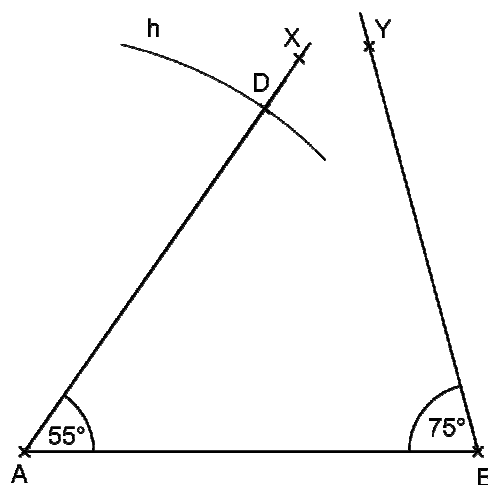
Rozbor



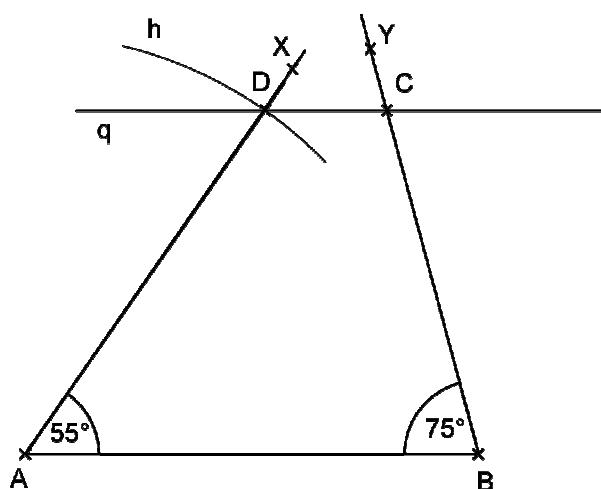
Z rozboru vyplývá, že musíme sestrojit rovnoběžku q s AB ve vzdálenosti 67 mm od bodu A .

Postup konstrukce

1. $AB; |AB| = 60 \text{ mm}$
2. $\angle BAX; |\angle BAX| = \alpha$
3. $\angle ABY; |\angle ABY| = \beta$
4. $h; h(A; 67 \text{ mm})$

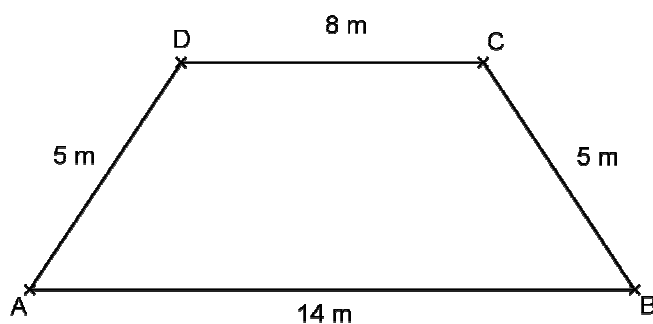


5. $D; D \in h \mapsto AX$
6. $q; q \parallel AB \wedge D \in q$
7. $C; C \in q \cap \mapsto BY$
8. lichoběžník $ABCD$



Příklad 4.1.7

Příčný řez silničního náspu má tvar rovnoramenného lichoběžníku o délkách základů 8 m a 14 m a délce ramen 5 m . Kolik m^3 zeminy je v náspu o délce 350 m ? [19]



Obr. 26 Rovnoramenný lichoběžník

Řešení:

$$V_{náspu} = S_p \cdot v$$

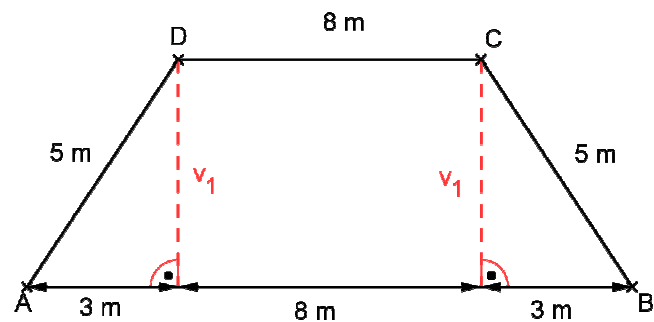
$$S_p = \frac{(a + c) \cdot v_1}{2}$$

$$v_1^2 = 5^2 - 3^2$$

$$v_1 = 4 \text{ m}$$

$$S_p = \frac{(14 + 8) \cdot 4}{2}$$

$$S_p = 44 \text{ m}^2$$



Obr. 27 Rovnoramenný lichoběžník- řešení

$$V_{náspu} = S_p \cdot v$$

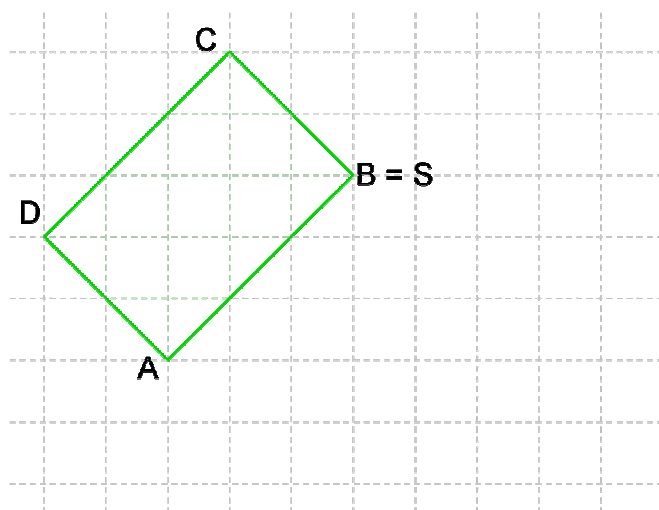
$$V_{náspu} = 44 \cdot 350 = 15400 \text{ m}^3$$

V náspu je 15400 m^3 zeminy.

4.2. Příklady k procvičování

Příklad 4.2.1

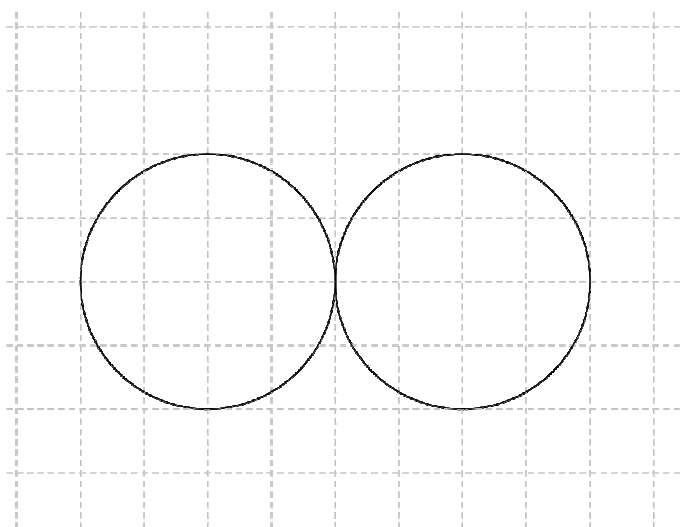
Sestrojte obraz čtyřúhelníku ve středové souměrnosti se středem S .



Obr. 28 Čtyřúhelník- středová souměrnost

Příklad 4.2.2

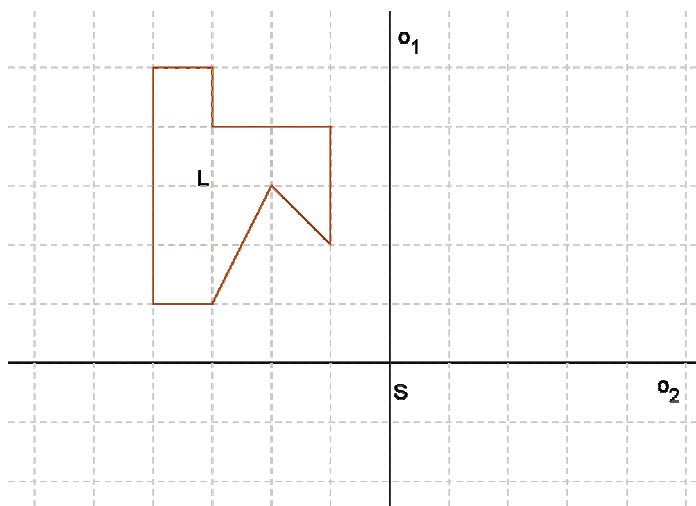
Rozhodněte, zda je obrázek středově souměrný. Pokud ano, najděte střed souměrnosti S .



Obr. 29 Kružnice- středová souměrnost

Příklad 4.2.3

Překreslete si obrázek do sešitu. Poté překresli útvar L středově souměrný podle středu S a poté ho překreslete osově souměrný podle osy o_2 .



Obr. 30 Útvar L

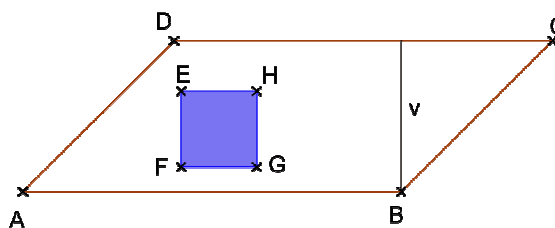
Příklad 4.2.4

Pan David zakoupil zahradu ve tvaru rovnoběžníku (viz. Obr. 31) s výškou 10 metrů . Rozhodl se ji nejprve oplotit a poté část osít trávnikem. Avšak na zahradě je ještě zahradní domek $EFGH$ ve tvaru čtverce s délkou strany 6 metrů .

- Spočítejte, kolik metrů plotu bude potřebovat k jejímu oplocení.
- Spočítejte kolik sloupků bude potřebovat na oplocení, víme-li, že sloupky budou v každém rohu a maximální délka mezi nimi je 5 metrů .
- Kolik metrů čtverečních bude ze zahrady oseto, výsledek vyjádřete v procentech.

$$AB = 36\text{ m}$$

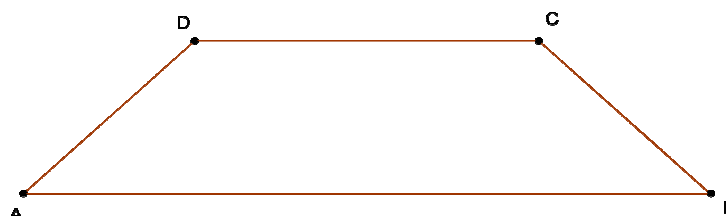
$$BC = 28\text{ m}$$



Obr. 31 Zahrada

Příklad 4.2.5

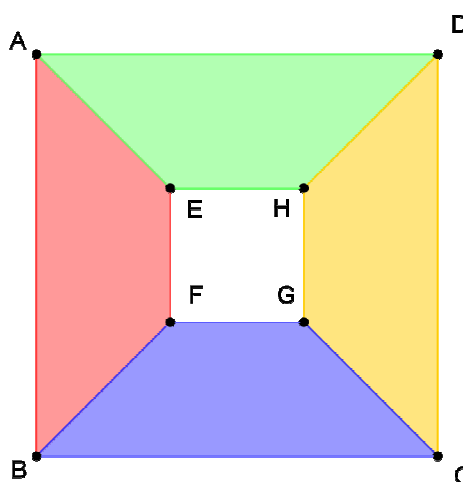
Pavla má za domácí úkol vystříhnout ze čtvrtky o rozměrech 210×297 (mm) rovnoramenný lichoběžník. O tomto lichoběžníku víme, že základna AB má délku 144 mm a základna CD má délku $0,75$ délky AB . Výška je 85 mm. Kolik mm^2 odpadu ze čtvrtky Pavle zbude?



Obr. 32 Lichoběžník

Příklad 4.2.6

Manželé Novákovi se rozhodli vytvořit uprostřed zahrady obrazec z kvetoucích květin. Květiny chtějí rozdělit do čtyř shodných obrazců ve tvaru lichoběžníků podle jednotlivých barev. Tyto lichoběžníky tak vytvoří čtvercový obrazec. Spočítejte, kolik m^2 z celkové plochy budou zabírat jednotlivé barvy květin. Víme-li, že čtverec $ABCD$ má obsah $32\,400 \text{ cm}^2$ a obrazec $EFGH$ $8\,100 \text{ cm}^2$. Dále spočítejte výšku lichoběžníku $ABFE$.



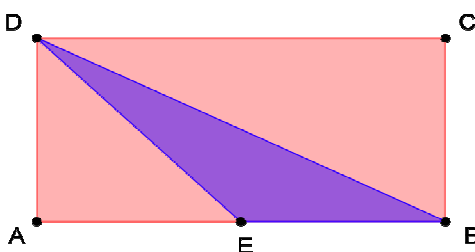
Obr. 33 Obrazec- květiny

Příklad 4.2.7

Obdélník $ABCD$ má délky stran $AB = 36\text{ cm}$ a $BC = 16\text{ cm}$. Bod E je středem strany AB .

- A. Vypočítejte obsah trojúhelníku EBD .
- B. Určete obsah trojúhelníku AED .
- C. Vypočítejte obsah trojúhelníku BCD .
- D. Porovnejte součet obsahů trojúhelníků s obsahem obdélníku $ABCD$.

[25]



Obr. 34 Obdélník

Příklad 4.2.8

Sestrojte rovnoběžník $KLMN$, je-li dáno :

$$k = 6\text{ cm}, n = 7\text{ cm}, |LN| = 4\text{ cm}$$

Příklad 4.2.9

Sestrojte kosodélník $PQRS$ o straně $p = 6\text{ cm}$, $q = 4\text{ cm}$ a úhlu $PQR = 36^\circ$.

Příklad 4.2.10

Sestrojte lichoběžník $ABCD$, ve kterém jsou délky základů $a = 5\text{ cm}$ a $c = 2,8\text{ cm}$. Dále známe délku ramene $b = 3,2\text{ cm}$ a úhlopříčku $|AC| = 2,1\text{ cm}$.

Příklad 4.2.11

Sestrojte lichoběžník $EFGH$, ve kterém : $e = 58\text{ mm}$, $g = 28\text{ mm}$, $h = 26\text{ mm}$ a $|FH| = 54\text{ mm}$.

Příklad 4.2.12

Sestrojte lichoběžník $ABCD$, kde : $a = 60 \text{ mm}$, $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $d = 67 \text{ mm}$.

Příklad 4.2.13

Narýsujte síť hranolu, jehož výška $v = 42 \text{ mm}$ a který má podstavu tvaru rovnoramenného lichoběžníku $PQRS$, kde $|PQ| = 46 \text{ mm}$, $|PS| = 28 \text{ mm}$, $|\angle SPQ| = 55^\circ$.

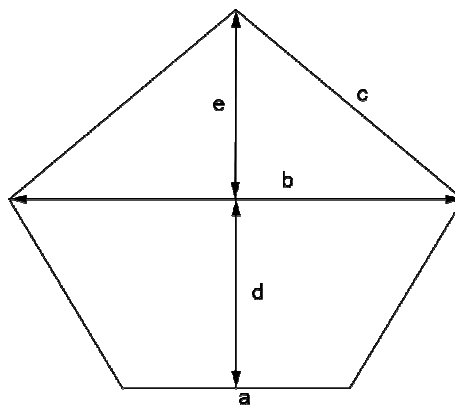
Příklad 4.2.14

Krychle s délkou strany a má povrch $S = 11,52 \text{ dm}^2$. Načrtněte síť krychle a vypočítejte délku strany a .

Příklad 4.2.15

Krmelec má tvar pětibokého hranolu s rozměry $a = 85 \text{ cm}$, $b = 1,25 \text{ m}$, $c = 1,1 \text{ m}$, $d = 7,5 \text{ dm}$, $e = 37 \text{ cm}$. Délka krmelce je 170 cm . Kolik m^3 sena je v něm uloženo, víme-li, že je naplněn z 84 %? [19]

Příčný řez krmelce je znázorněn na obrázku.



Obr. 35 Krmelec

5. Osmá třída

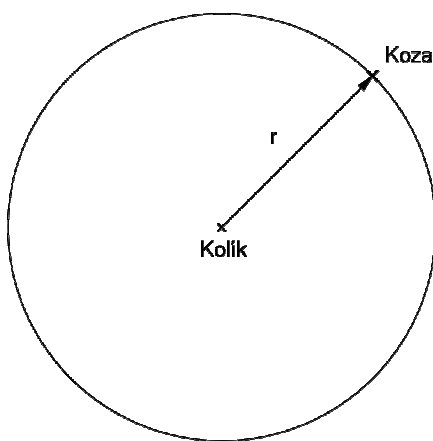
1. Vzájemná poloha útvarů – kružnice a přímka, dvě kružnice
2. Válec - objem, povrch
3. Pythagorova věta
4. Konstrukční úlohy, Thaletova věta

5.1. Řešené příklady

Příklad 5.1.1

Na louce je uvázaná koza. Provaz, jímž je uvázaná, je dlouhý 2,7 m. Jakou maximální plochu může koza spást a jaký je obvod obrazce, který koza vypásla?

Řešení:



Obr. 36 Provaz a koza

Koza se bude pohybovat po ploše tvaru kruhu. Kdy kolík bude středem kružnice a provaz, jímž je koza uvázána bude poloměrem této kružnice.

$$r = 2,7m$$

$$S_{kruhu} = \pi \cdot r^2$$

$$S_{kruhu} = \pi \cdot 2,7^2 = 22,9 m^2$$

Obvod obrazce: .

$$o_{kružnice} = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$o_{kružnice} = 2 \cdot \pi \cdot 2,7$$

$$o_{kružnice} = 17 \text{ m}$$

Koza může spást plochu $22,9 \text{ m}^2$ a obvod tohoto kruhu je 17 m .

Příklad 5.1.2

V obchodě si pan Procházka vyhlédl sud ve tvaru válce. Obsah podstavy tohoto sudu je roven obsahu pláště. Průměr podstavy je $1,2 \text{ m}$. Pan Procházka potřebuje, aby se do sudu vešlo 330 litrů vody. Může si tento sud koupit?

Řešení:

$$S_p = S_{pl}$$

$$S_p = \pi \cdot r^2 \qquad S_{pl} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v$$

$$\pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v$$

$$r = 2 \cdot v$$

$$v = \frac{r}{2}$$

$$r = 0,6 \text{ m}$$

$$v = 0,3 \text{ m}$$

$$V_{sudu} = \pi \cdot r^2 \cdot v$$

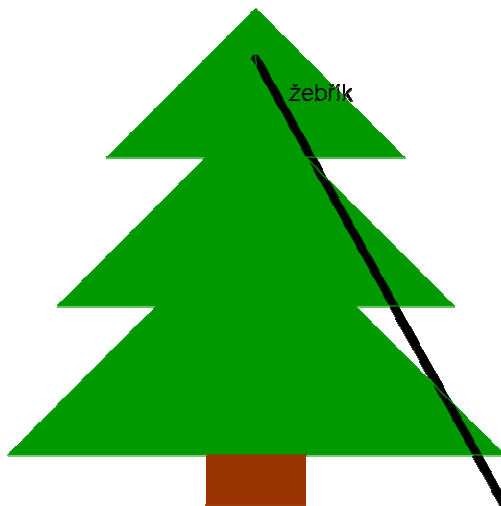
$$V_{sudu} = \pi \cdot 0,6^2 \cdot 0,3$$

$$V_{sudu} = 0,339 \text{ m}^3 = 339 \text{ dm}^3 = 339 \text{ l}$$

Pan Procházka si vybraný sud může koupit, do tohoto sudu se vejde 339 l vody.

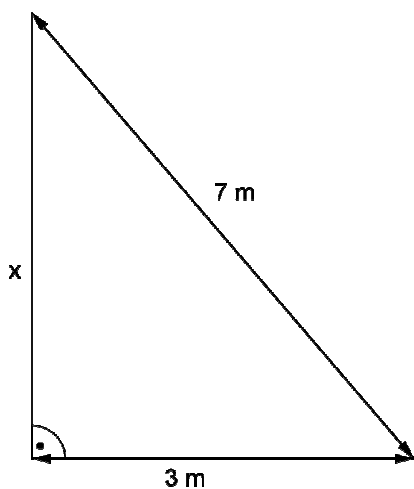
Příklad 5.1.3

Pan Svoboda potřebuje uříznout suchou větev ze smrku. Ke smrku je ovšem složitý přístup, takže žebřík musí být ve vzdálenosti 3 metry. Žebřík je dlouhý 7 metrů. Do jaké maximální výšky dosáhne? Dokáže pan Svoboda suchou větev uříznout? Větev je ve výšce 7 metrů.



Obr. 37 Strom se žebříkem

Řešení:



Výšku stromu, kam dosáhne žebřík, spočítáme pomocí Pythagorovy věty. Jak vidíme na obrázku, známe přeponu, tedy délku žebříku, a jednu z odvěsen, vzdálenost žebříku od stromu.

Z Pythagorovy věty proto plyne:

$$\begin{aligned}7^2 &= x^2 + 3^2 \\49 - 9 &= x^2 \\x &= 6,3\text{ m}\end{aligned}$$

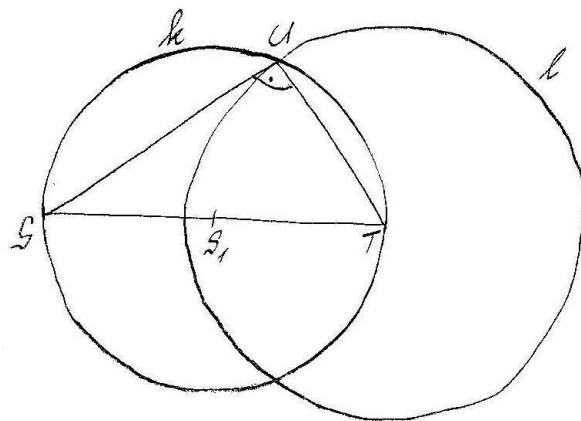
Žebřík dosáhne do maximální výšky 6,3 metrů, tudíž větev ve výšce 7 metrů nemůže pan Svoboda uříznout.

Příklad 5.1.4

Sestrojte pravoúhlý trojúhelník STU s přeponou ST . Ve kterém : $|ST| = 83 \text{ mm}$, $|TU| = 49 \text{ mm}$.

Řešení:

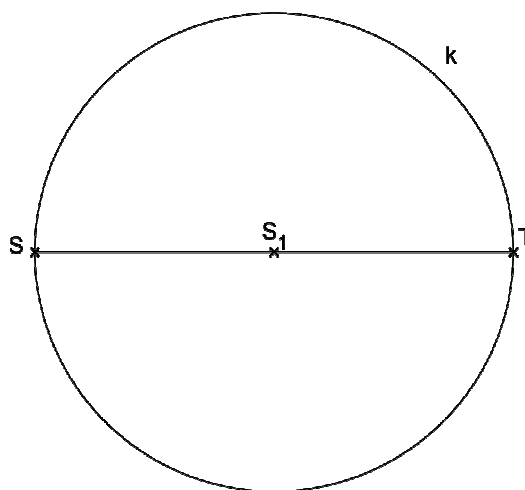
Rozbor:



Z rozboru vyplývá, že musíme sestrojit Thaletovu kružnici k a poté kružnici l o poloměru TU .

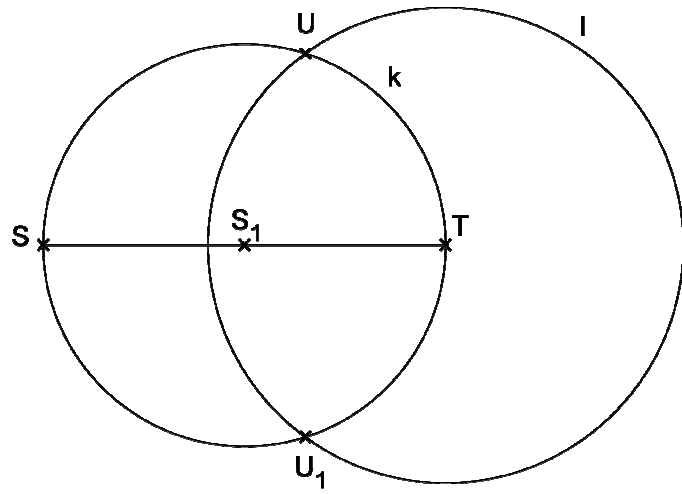
Postup konstrukce:

1. $ST; |ST| = 83 \text{ mm}$
2. $S_1; S_1 \in ST; |S_1S| = |S_1T|$
3. $k; k(S_1; S_1S)$

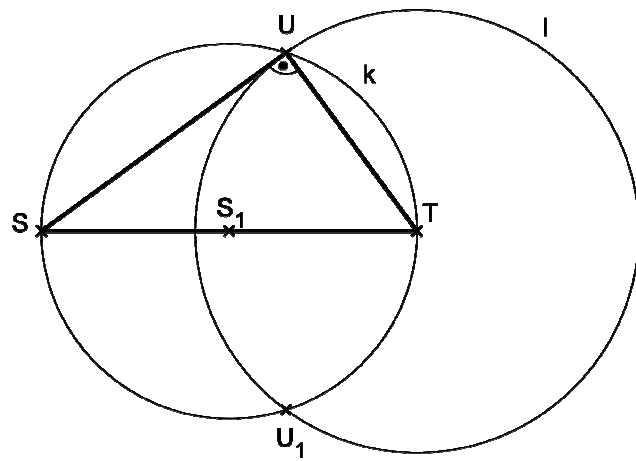


4. $l; l(T; TU)$

5. $U; U \in k \cap l$



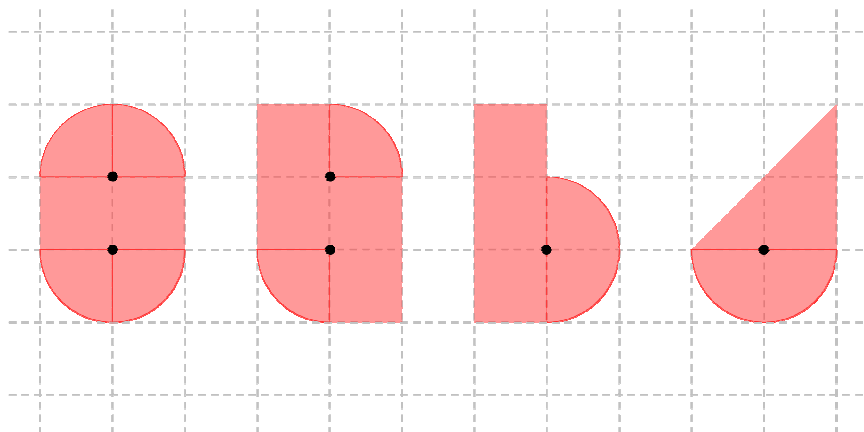
6. $\triangle STU$



5.2. Příklady k procvičování

Příklad 5.2.1

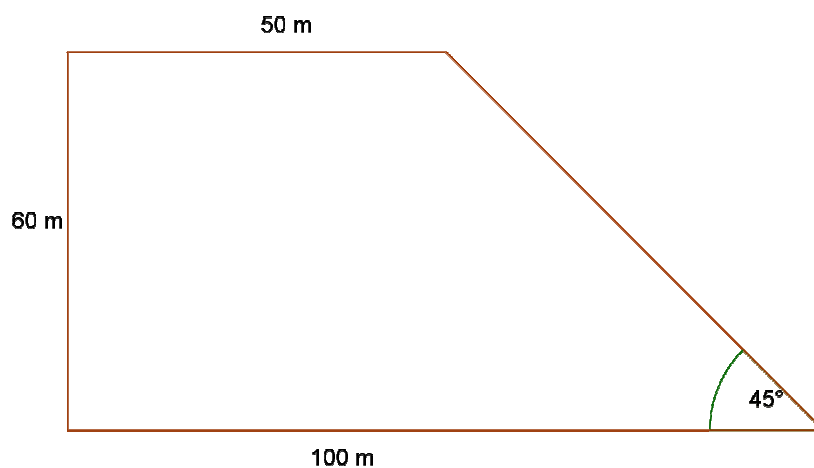
Na obrázku jsou různé obrazce. Délka čtverce ve čtvercové síti je 1 cm . Tečky označují středy jednotlivých kružnic. Vypočítejte obvody a obsahy jednotlivých obrazců. [27]



Obr. 38 Obvod a obsah obrazců I.

Příklad 5.2.2

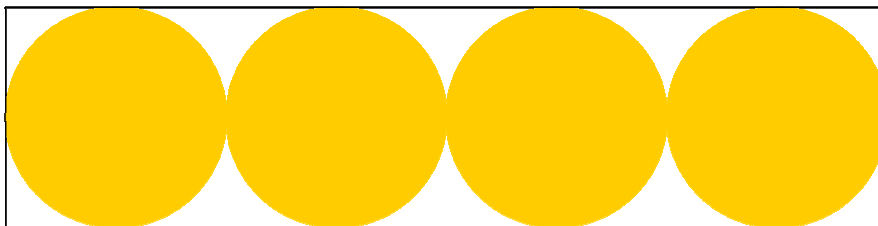
Pan Sobota má zahradu ve tvaru pravidelného lichoběžníku. Na zahradě má 4 postřikovače, které jsou umístěny v rozích pozemku. Dosah postřikovačů je 18 m . Kolik procent z celkové plochy zahrady bude zavlaženo? [16]



Obr. 39 Zahrada tvaru lichoběžníku

Příklad 5.2.3

Reklamní firma vyřezává pro klienta potisky na batohy ve tvaru kruhu. Víme, že délka jednoho pruhu je 230 cm a šířka je $8,6\text{ cm}$. Kolik procent odpadu zbude, máme-li 12030 takových pruhů?



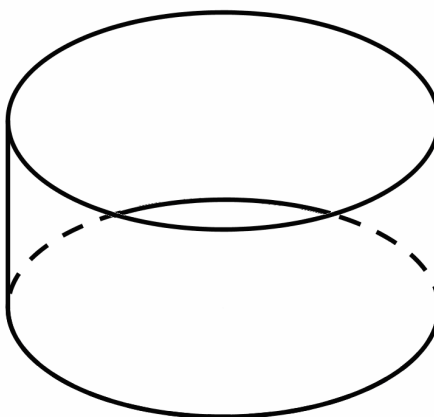
Obr. 40 Potisky na batoh

Příklad 5.2.4

Kruh má obvod 138 cm , spočítejte jeho obsah.

Příklad 5.2.5

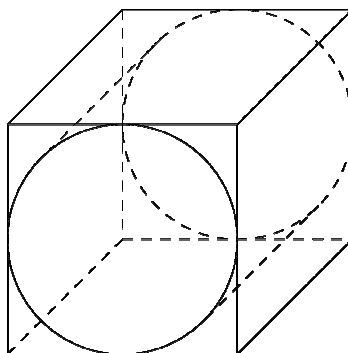
Novákovi si koupili nový bazén, bohužel jim ještě chybí dodělat přívod vody. O víkendu má být krásné počasí. Vnuk Novákových by se chtěl o víkendu koupat. Nabídl babičce, že kbelíkem vodu do bazénu nanosí. Odhadněte a poté spočítejte, kolik kbelíků vody by musel takto nanosit, aby bazén zaplnil ze $\frac{2}{3}$. Bazén má tvar válce o průměru $5,2\text{ m}$ a jeho výška je 135 cm . Do kbelíku se vejde 12 litrů vody. [27]



Obr. 41 Nový bazén

Příklad 5.2.6

Na obrázku vidíme obrys pračky (Válec v krychli). Jaký objem prádla se do pračky vejde, víme-li, že délka hrany krychle je 60 cm .



Obr. 42 Pračka

Příklad 5.2.7

Svinutím téhož obdélníku jsme vytvořili plášť dvou válců. Rozměry tohoto obdélníku jsou 7 cm a 13 cm . Výška jednoho válce je tudíž 7 cm a druhého 13 cm .

A. Má některý z těchto válců větší povrch, pokud ano o kolik? (Uvažujeme i podstavy válců)

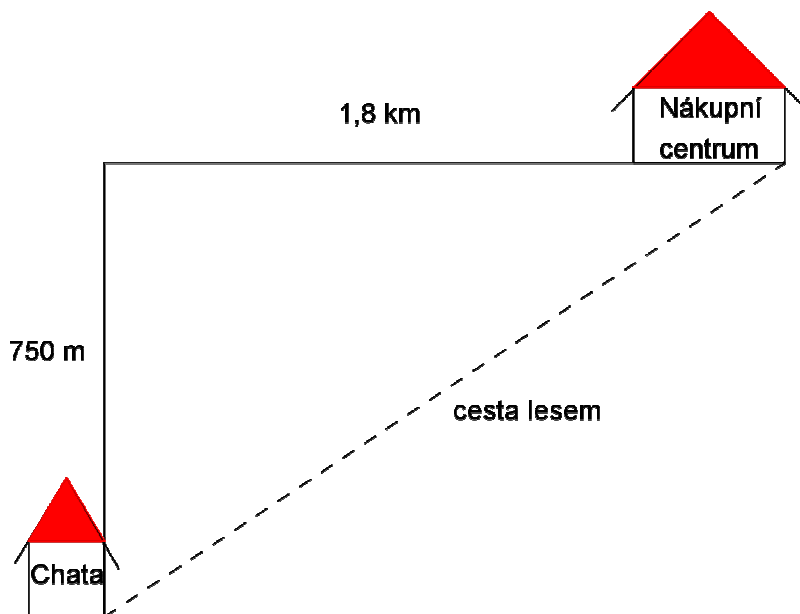
B. Porovnejte objemy obou vzniklých válců. [16]



Obr. 43 Plášť válce

Příklad 5.2.8

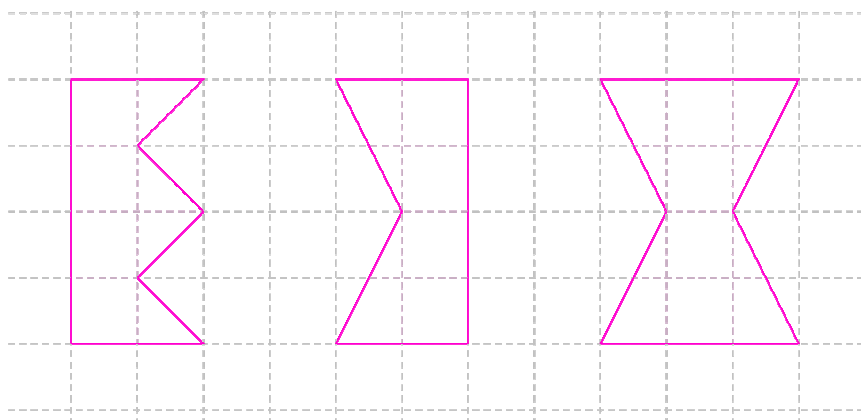
Mácovi odjeli na chatu. Potřebují dojít nakoupit do nedaleké vesnice. Paní Mácová půjde po vyznačené cestě, ale pan Máca chce jít lesem. Kdo přijde do obchodu dříve, víme-li, že oba jdou stejnou rychlostí? O kolik metrů je cesta lesem delší/ kratší než cesta po silnici?



Obr. 44 Cesta do obchodu

Příklad 5.2.9

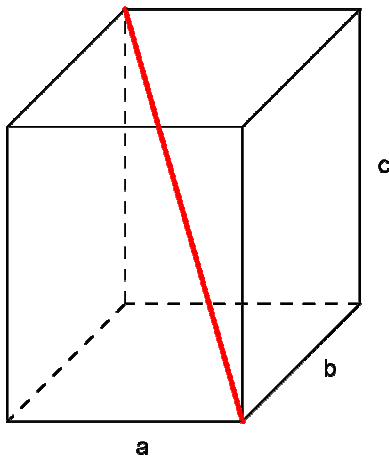
Spočítejte obvody a obsahy jednotlivých obrazců. Víme-li, že délka strany čtverce je ve skutečnosti 1,2 cm. Výsledek zaokrouhlete na setiny centimetru. [27]



Obr. 45 Obvod a obsah obrazců II

Příklad 5.2.10

Určete délku tělesové úhlopříčky kvádra, jehož rozměry jsou $a = 4\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$ a $c = 9\text{ cm}$.



Obr. 46 Tělesová úhlopříčka

Příklad 5.2.11

Sestrojte trojúhelník ABC , ve kterém : $\alpha = 36^\circ$, $a = 7\text{ cm}$, $c = 8\text{ cm}$.

Příklad 5.2.12

Sestrojte trojúhelník KLM , kde délka strany $KL = 9\text{ cm}$, těžnice $t_k = 9,7\text{ cm}$ a úhel při vrcholu L o velikosti $\delta = 78^\circ$.

Příklad 5.2.13

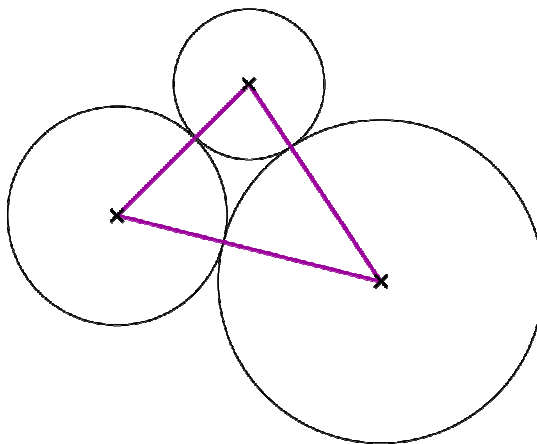
Sestrojte trojúhelník PQR , ve kterém $v_r = 7\text{ cm}$, $t_r = 7,8\text{ cm}$ a úhel $RPQ = 54^\circ$.

Příklad 5.2.14

Sestrojte pravoúhlý trojúhelník STU s přeponou ST . Ve kterém : $|ST| = 83\text{ mm}$, $|TU| = 49\text{ mm}$.

Příklad 5.2.15

Na obrázku je soukolí. Jednotlivá kola mají průměry 6 dm , 4 dm a 2 dm . Tyto kola potřebujeme spojit tyčemi, které spojují středy těchto kol. Kolik dm tyčí budeme potřebovat? [19]



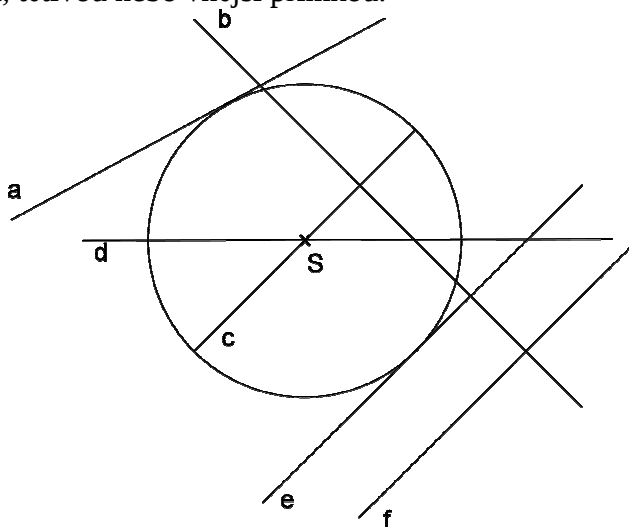
Obr. 47 Soukolí

Příklad 5.2.16

Sestrojte kružnici l_1 (S_1 ; $3,6\text{ cm}$) a kružnici l_2 (S_2 ; $7,4\text{ cm}$), $|S_1S_2| = 9,8\text{ cm}$. Kolik mají tyto kružnice společných bodů? Zvolte si vzdálenost $|S_1S_2|$ tak, aby kružnice měly jeden společný bod. Tímto bodem veďte společnou tečnu obou kružnic.

Příklad 5.2.17

Na obrázku je kružnice k se středem S . Rozhodněte, která z přímek na obrázku je sečnou, tečnou, tětivou nebo vnější přímkou.



Obr. 48 Vzájemná poloha kružnice a přímky

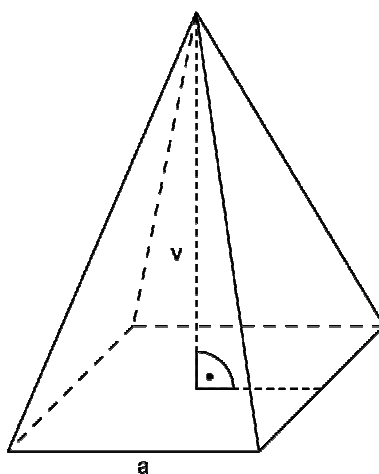
6. Devátá třída

1. Jehlan- objem, povrch
2. Kužel, koule- objem, povrch
3. Sít'- jehlan, kužel, koule

6.1. Řešené příklady

Příklad 6.1.1

Věž kostela má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu s délkou podstavné hrany $a = 1,2\text{ m}$. Výška věže je $1,6\text{ m}$. Kolik metrů čtverečných plechu bude potřeba k jejímu pokrytí? Počítáme- li, že na spoje a odpad padne 8 % plechu navíc.



Obr. 49 Věž kostela

Řešení:

$$S_{\text{jehlanu}} = S_p + S_{pl}$$

$$S_{pl} = 4 \cdot S_{\Delta} \quad S_p = 1,2 \cdot 1,2 = 1,4 \, m^2$$

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad |TU| = \frac{a}{2}$$

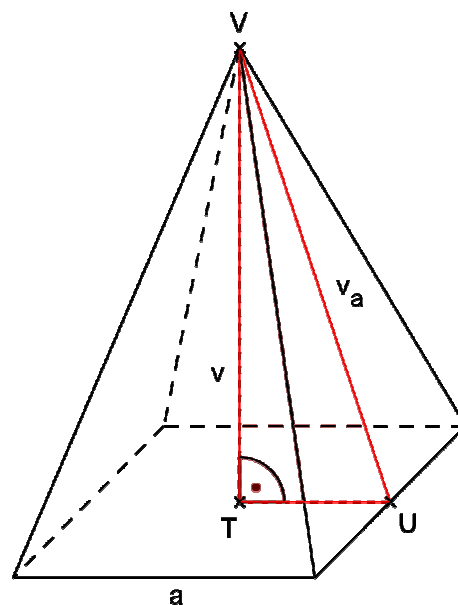
$$v_a^2 = v^2 + |TU|^2$$

$$v_a^2 = 1,6^2 + 0,6^2 = 2,92$$

$$v_a = 1,7 \, m$$

$$S_{\Delta} = \frac{1,2 \cdot 1,7}{2} = 1 \, m^2$$

$$S_{pl} = 4 \cdot 1 = 4 \, m^2$$



Obr. 50 Věž kostela- řešení

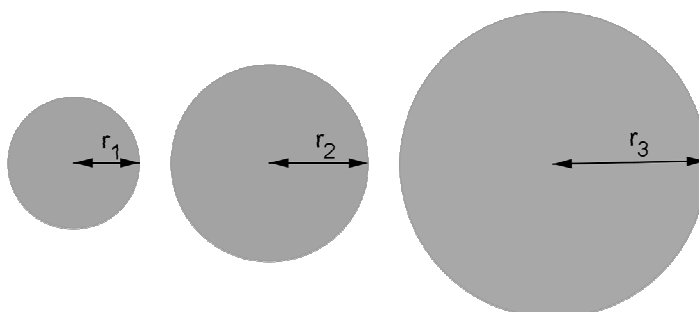
na spoje a odpad: $0,08 \cdot 4 = 0,32 \, m^2$

Celková spotřeba plechu : $4 + 0,32 = 4,32 \, m^2$

Na pokrytí věže kostela bude potřeba $4,32 \, m^2$ plechu.

Příklad 6.1.2

Tři koule z olova, které mají poloměry $r_1 = 3 \text{ cm}$, $r_2 = 5 \text{ cm}$ a $r_3 = 7 \text{ cm}$, máme roztavit a poté z nich vyrobit novou kouli. Jaký bude poloměr nově vzniklé koule?



Obr. 51 Koule z olova

Řešení:

$$V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_1^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_2^3$$

$$V_3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_3^3$$

$$V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3$$

$$V_3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 7^3$$

$$V_1 = 113,1 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = 523,6 \text{ cm}^3$$

$$V_3 = 1436,8 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{novékoule}} = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_{\text{novékoule}} = 2073,5 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{novékoule}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$2073,5 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$r^3 = 495$$

$$r = \sqrt[3]{495} = 7,9 \text{ cm}$$

Poloměr nově vzniklé koule je $7,9 \text{ cm}$.

Příklad 6.1.3

Zmrzlinový kornout tvaru kužele obsahuje $0,45 \text{ dl}$ zmrzliny. Průměr tohoto kužele je $5,5 \text{ cm}$. Určete, jaká je hloubka tohoto kornoutu?



Obr. 52 Zmrzlinový kornoutek [34]

Řešení:

$$V_{\text{kužele}} = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$$

$$V_{\text{kužele}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v$$

$$V = 0,45 \text{ dl} = 45 \text{ cm}^3$$

$$d = 5,5 \text{ cm} \quad r = 2,75 \text{ cm}$$

$$45 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2,75^2 \cdot v$$

$$v = 5,68 \text{ cm}$$

Hloubka kornoutku na zmrzlinu je $5,68 \text{ cm}$.

6.2. Příklady k procvičování

Příklad 6.2.1

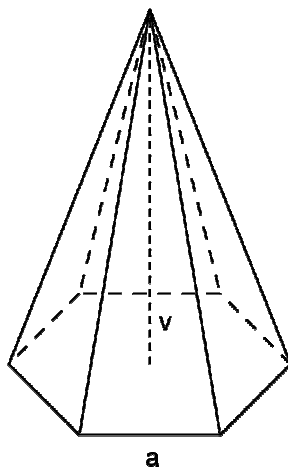
Cheopsova pyramida v Egyptě měla v době svého vzniku, který se datuje přibližně 2,5 tisíce let př. n. l., tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu. Tato pyramida byla vysoká přibližně 147 m . Její stěnová výška svírá s rovinou podstavy úhel přibližně 52° . Na její stavbu bylo použito přibližně $2,52\text{ milionů } m^3$ kamene. Z těchto údajů zjistěte, jaký je zhruba celkový objem vnitřního prostoru pyramidy, který tvoří pohřební komory, chodby, apod. [28]



Obr. 53 Pyramidy [34]

Příklad 6.2.2

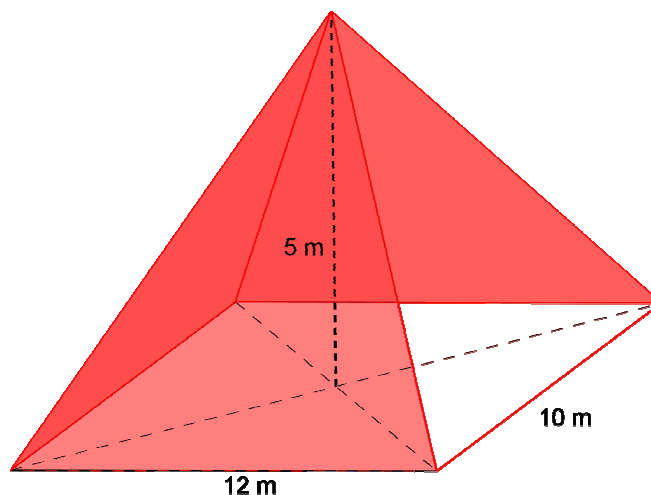
Na obrázku vidíme pravidelný šestiboký jehlan. Tento jehlan má délku podstavné hrany třikrát menší než je jeho výška. Jeho objem je 270 m^3 . Určete délku podstavné hrany a a výšku jehlanu.



Obr. 54 Šestiboký jehlan

Příklad 6.2.3

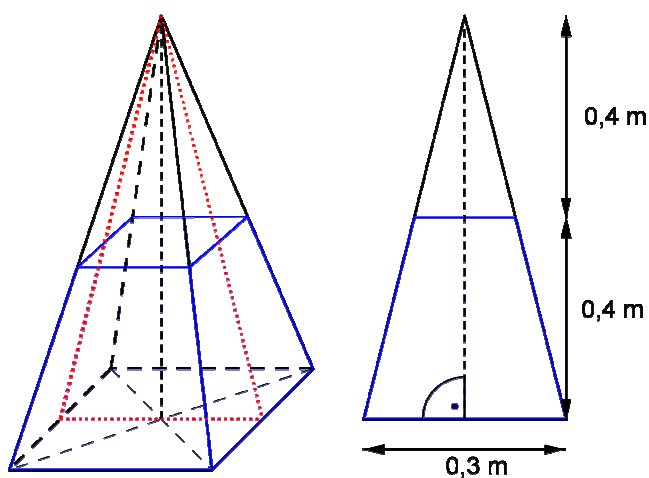
Pan Kozel chce pokrýt střechu. Střecha má tvar čtyřbokého jehlanu s podstavou tvaru obdélníku s rozměry 12 m , 10 m . Kolik m^2 je potřeba na její pokrytí, jestliže sklon hřebene je $\alpha = 45^\circ$. (na spoje a odpad počítáme 11% plechu navíc). [17]



Obr. 55 Střecha

Příklad 6.2.4

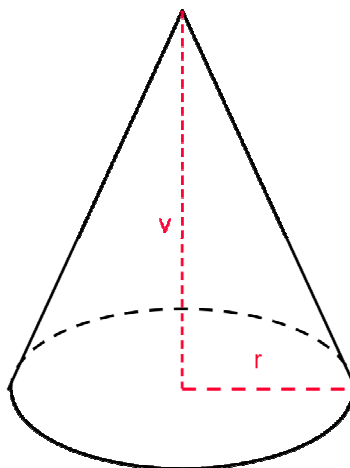
Paní Stará našla na půdě dřevěný pravidelný čtyřboký jehlan. Rozhodla se, že si z jehlanu vytvoří podstavec pod květiny. Jaká je hmotnost podstavce, je-li hustota dřeva $\rho = 630\text{ kg/m}^3$? Dále bude potřeba podstavec povrchově upravit (kromě dolní „podstavy“). Vypočítejte obsah upravené části povrchu podstavce. [28]



Obr. 56 Podstavec pod květiny

Příklad 6.2.5

Kužel má objem 151 cm^3 . Průměr podstavy je 8 cm . Vypočítejte výšku kužele a úhel, který svírá strana kužele s rovinou podstavy.



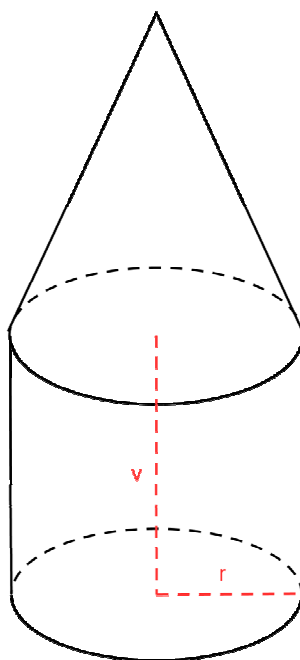
Obr. 57 Kužel

Příklad 6.2.6

Nádoba tvaru kužele o průměru 28 cm a výšce 45 cm je zcela naplněna vodou. Voda je přelita do mísy ve tvaru kvádru. Rozměry kvádru jsou $a = 14 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$, $c = 42 \text{ cm}$, přičemž strany, které se dotýkají země, jsou a a b . Jak vysoko sahá voda v nádobě tvaru kvádru?

Příklad 6.2.7

Kužel je postaven na horní podstavu rotačního válce. Průměr rotačního válce je 16 cm a výška 35 cm . Vypočítejte výšku tohoto kužele, jestliže jeho objem je roven 45% objemu válce.



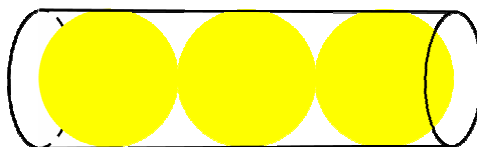
Obr. 58 Kužel a válec

Příklad 6.2.8

Z ocelového válečku o poloměru podstavy 80 mm a výšce 112 mm je vyroben kužel o stejné výšce a průměru podstavy $6,8\text{ cm}$. Vypočítejte objem nové součástky a její povrch. Množství odpadu vyjádřete v procentech.

Příklad 6.2.9

Tenisové míčky jsou v krabici ve tvaru válce. V naší krabici jsou tři míčky umístěné nad sebou tak, že se dotýkají stěn krabice, jak vidíme na obrázku. Průměr tenisového míčku je přibližně $6,5\text{ cm}$. Kolik procent z celkového objemu krabice zabírají tenisové míčky?



Obr. 59 Tenisové míčky

Příklad 6.2.10

Anička si chce vyrobit řetízek z korálek. Od babičky dostala dřevěné korálky tvaru koule. Uprostřed každého korálku je dírka ve tvaru válce. Šňůrka, kterou doma našla, má průměr $1,2\text{ mm}$. Může tuto šňůrku použít, nebo si musí koupit novou? Víme-li, že poloměr korálku je 5 mm a dírka je uprostřed korálku. Kolik korálek se na šňůrku vejde, je-li šňůrka dlouhá $30,5\text{ cm}$.



Obr. 60 Korálky [34]

Příklad 6.2.11

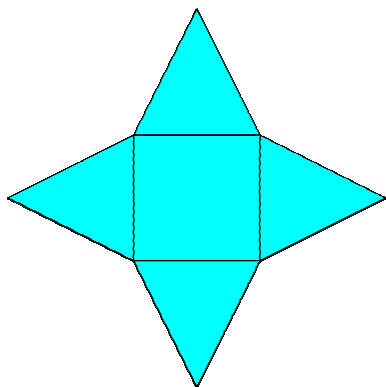
Jana dostala k narozeninám gymnastický relaxační míč. Průměr míče je 65 cm . Jany tatínek začal míč nafukovat. Teď je průměr míče asi 35 cm , Jana říká tatínkovi, že míč už je z poloviny objemu nafouknutý. Tatínek s ní ale nesouhlasí a říká, že je nafouknutý z $1/3$ objemu. Odhadněte, zda má některý z nich pravdu a poté vypočítejte, jakou část objemu míče měl tatínek v danou chvíli nafouklou? [28]



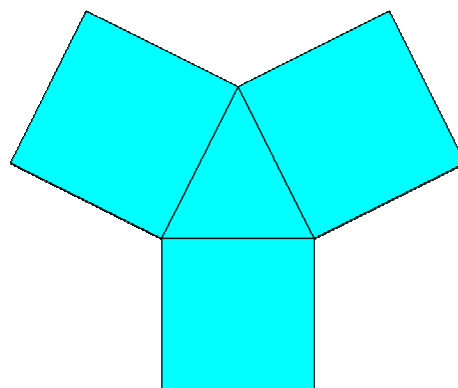
Obr. 61 Gymnastický míč [34]

Příklad 6.2.12

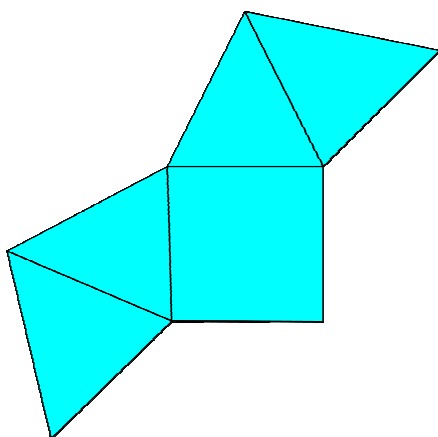
Rozhodněte, který z útvarů na obrázku nám po vystřížení dá model čtyřbokého jehlanu?



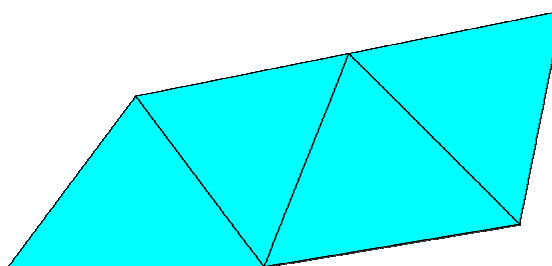
Obr. I.



Obr. II.



Obr. III.



Obr. IV.

7. Výsledky

Šestá třída

3.2.1 960 cm

3.2.2 17 kostek

3.2.3 $\alpha = 11^\circ 10'$

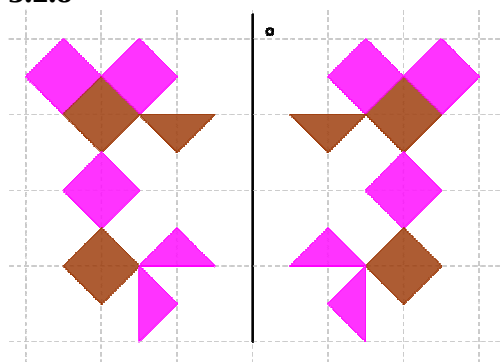
3.2.4 6; 10

3.2.5 120°

3.2.6 $\alpha = 78^\circ$ $\beta = 102^\circ$ $\gamma = 78^\circ$

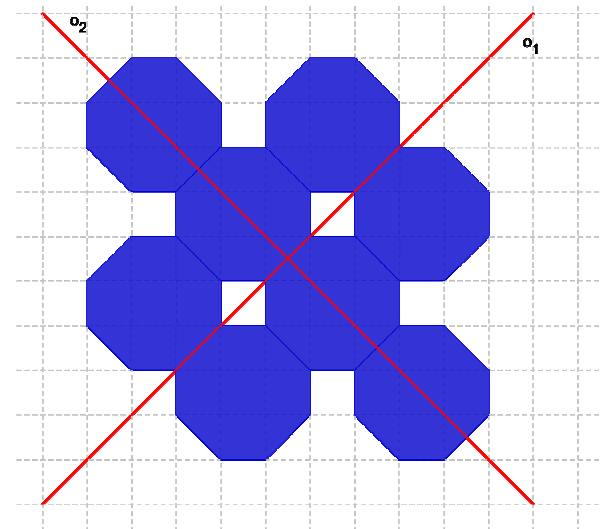
3.2.7 2,7

3.2.8



3.2.9 997,5 cm²

3.2.10



3.2.11 96 m²

3.2.12 $\alpha = 101^\circ$ $\beta = 79^\circ$ $\gamma = \delta = 124^\circ$ $\varepsilon = \zeta = 135^\circ$

3.2.13 kružnice s poloměrem t_c , rovnoběžka s c ve vzdálenosti v_c

3.2.14 2,24 dm

3.2.15 bod C

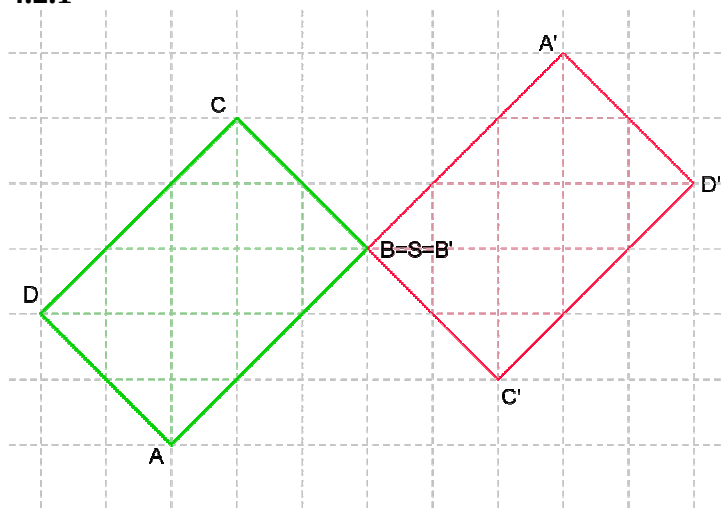
3.2.16 střed kružnice vepsané- střed v průsečíku os vrcholových úhlů trojúhelníku

3.2.17 střed kružnice v průsečíku os stran

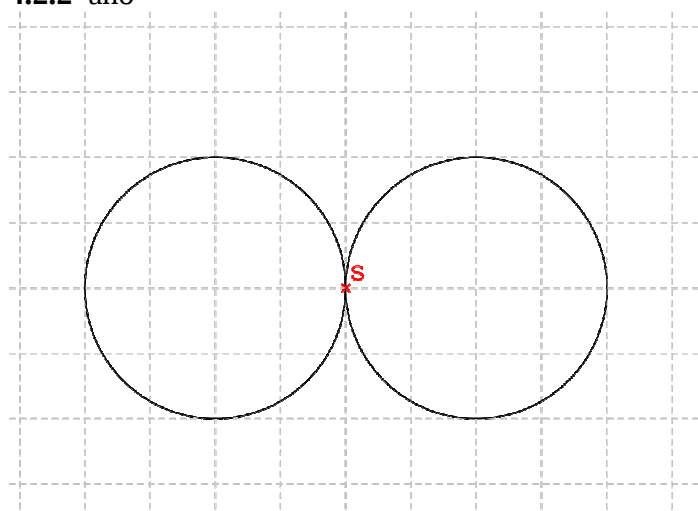
3.2.18 střed kružnice v průsečíku os úhlů

Sedmá třída

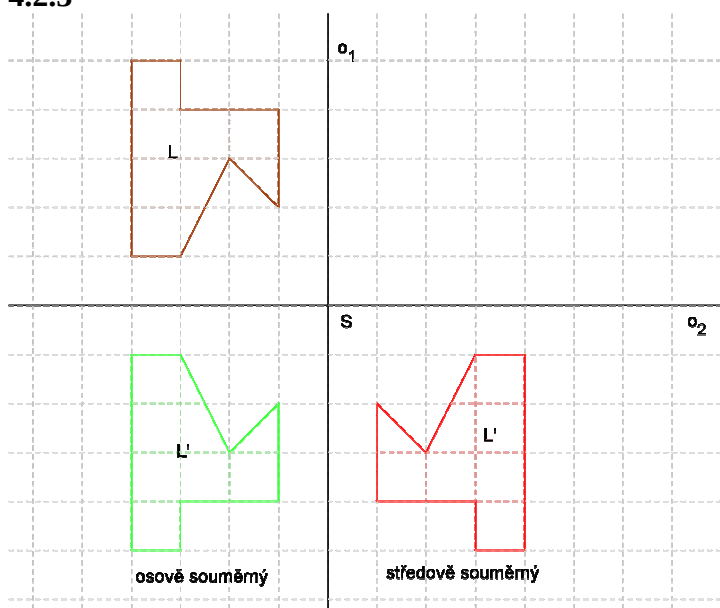
4.2.1



4.2.2 ano



4.2.3



4.2.4

- a) 128 m
- b) 28 sloupků
- c) $324 \text{ m}^2 = 90 \%$

4.2.5 $516,6 \text{ cm}^2$

4.2.6 45 cm

4.2.7

- a) 144 cm^2
- b) 144 cm^2
- c) 288 cm^2
- d) shodné

4.2.8 trojúhelník KLN

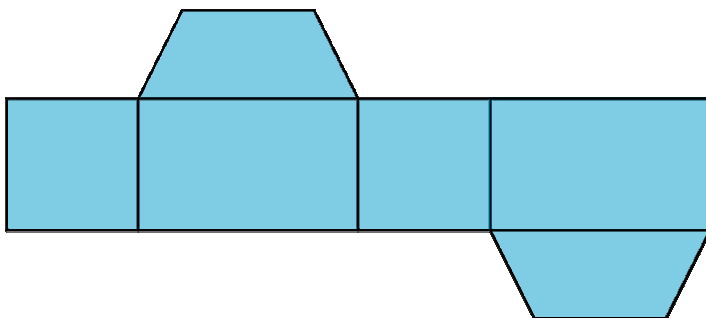
4.2.9 rovnoběžka s PQ bodem R

4.2.10 trojúhelník ABC , rovnoběžka s AB bodem C

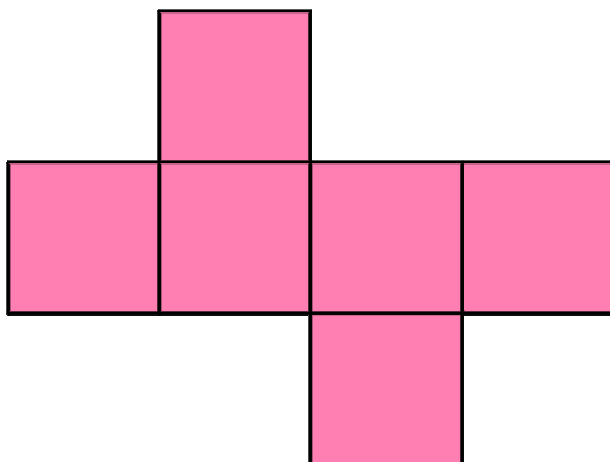
4.2.11 trojúhelník EFH

4.2.12 rovnoběžka s AB bodem D

4.2.13



4.2.14



$$a = 1,4 \text{ dm}$$

4.2.15 $1,46 \text{ m}^3$

Osmá třída

5.2.1 1. obrázek $o = 8,28 \text{ cm}$ $S = 5,14 \text{ cm}^2$

2. obrázek $o = 9,14 \text{ cm}$ $S = 5,57 \text{ cm}^2$

3. obrázek $o = 9,14 \text{ cm}$ $S = 4,57 \text{ cm}^2$

4. obrázek $o = 7,97 \text{ cm}$ $S = 3,57 \text{ cm}^2$

5.2.2 22,6 %

5.2.3 23,7 %

5.2.4 $1515,5 \text{ cm}^2$

5.2.5 1593 kbelíků

5.2.6 169,64 l

5.2.7 a) ano, o $19,1 \text{ cm}^2$

b) $V_1 = 94 \text{ cm}^3$, $V_2 = 51 \text{ cm}^3$

5.2.8 pan Máca, cesta lesem je kratší o 600 metrů

5.2.9 1. obrázek $o = 16,4 \text{ cm}$ $S = 8,64 \text{ cm}^2$

2. obrázek $o = 14,97 \text{ cm}$ $S = 8,64 \text{ cm}^2$

3. obrázek $o = 18 \text{ cm}$ $S = 11,52 \text{ cm}^2$

5.2.10 $t_u = 11,5 \text{ cm}$

5.2.11 kružnice o poloměru a se středem v bodu B

5.2.12 těžnice protíná stranu k ve středu

5.2.13 libovolně zvolíme bod P

5.2.14 kružnice o poloměru ST

5.2.15 12 dm

5.2.16 2 společné body, aby měly jeden společný bod, musela by mít každá poloměr $4,9\text{ cm}$

5.2.17 sečna : b, d ; tečna : a, e ; tětiva : c ; vnější přímká : f

Devátá třída

6.2.1 přibližně $65\,342\text{ m}^3$

6.2.2 $a = 4,7\text{ m}$, $v = 14,1\text{ m}$

6.2.3 $181,2\text{ m}^2$

6.2.4 $m = 13,23\text{ kg}$ $S = 0,38\text{ m}^2$

6.2.5 9 cm , 66°

6.2.6 $36,6\text{ cm}$

6.2.7 $47,3\text{ cm}$

6.2.8 $135,6\text{ cm}^3$, $161,3\text{ cm}^2$, 94%

6.2.9 $66,7\%$

6.2.10 ano, 30 korálků

6.2.11 přibližně $\frac{1}{7}$

6.2.12 $I., III.$

8. GeoGebra

Během psaní své bakalářské práce jsem se blíže seznámila s programem GeoGebra. Jedná se o nekomerční a volně stažitelný matematický program, který je určen především pro podporu výuky matematiky nejen na základních, ale i na středních a vysokých školách. U vzniku programu stál rakouský profesor Markus Hohenwarter, který byl hlavním tvůrcem programu. V současné době na jeho práci navazuje tým programátorů z celého světa, který nadále pracuje na dalším rozvoji a vývoji programu. Možnost bezplatného získání tohoto programu nalezneme pod tímto odkazem (www.geogebra.org).

Program jsem použila při tvorbě rozličných geometrických obrazců. S těmi můžeme různě pracovat ať již při jejich samotné tvorbě, tak se k nim později i vracet a různě upravovat (např. úprava tloušťky čar, barvy, velikosti písma, rozměrů základních těles atd.).

Má práce s programem spočívala v tom, že jsem díky němu mohla tvořit doplňující obrázky, potřebné k zadání matematických úloh. A to jak vzorově vyřešených tak i neřešených úloh. S programem se mi od samého začátku pracovalo velice dobře, protože mi přišel srozumitelný a snadno ovladatelný. Pokud bych měla zdůraznit to, co mne při práci s programem nejvíce zaujalo, tak je to možnost, každý z vytvořených obrázků uložit v různých formátech, s kterými je možno pracovat i v jiných počítačových programech jako s obrázky. Dále mne zaujala šance se kdykoli vrátit k již vytvořenému obrázku a různě ho dodělat, případně na něm něco upravit. Během práce mi pomáhaly i některé pro mne zjednodušující funkce k urychlení práce v programu. Tento program má velkou výhodu v tom, že se jednotlivé konstrukce a postupy nechají přehrát po jednotlivých krocích. Což umožňuje velice názornou interpretaci. Z těchto funkcí bych například ráda vyzdvihla funkce pro vytvoření obrázků ve středové, či osové souměrnosti. Abych zde nejmenovala pouze výhody, tak musím zmínit i problém, se kterým jsem se setkala. Při sestrojování těles s elipsovou podstavou jsem narazila na problém s viditelností elipsy, kdy jsem potřebovala zobrazit část elipsy

plnou čarou a druhou část čerchovaně. Dlouhou dobu se mi nedařilo tento problém odstranit, ale díky rozšířenosti programu a zkušenostem různých lidí, jako například Miroslava Bartyzala studenta informatiky JU, s ním, se mi nakonec podařilo tento problém s jejich pomocí odstranit překrytím dvou elips polygonem.

Celkový můj dojem z práce s tímto programem je velice dobrý. Myslím si, že by tento program měl být nedílnou součástí výuky matematiky na základních školách, protože dokáže žákům objasnit těžko pochopitelné skutečnosti v oblasti matematiky. To díky možnému názornému předvedení dané problematiky žákům v krátkém časovém horizontu na více příkladech, než by bylo možné běžným postupem během jedné vyučovací hodiny.

9. Závěr

V této bakalářské práci jsem sestavila sbírku řešených úloh z geometrie. Sbíрка obsahuje učivo probírané na 2. stupni základních škol. Tato sbírka by měla žákům pomoci objasnit problémy, na které mohou narazit během studia na základní škole.

Při psaní této práce jsem se snažila poukázat na geometrii jako na zábavnou vědu. Příklady vycházejí z běžného života a ukazují, kde všude se s geometrií můžeme setkat a jak nám pomáhá při řešení různých problémů. Díky této sbírce jsem se mohla hlouběji seznámit s programem GeoGebra. Ten mi umožnil vytvořit názorné řešení některých příkladů a myslím si, že se tak sbírka stala pro žáky poutavější.

10. Použité zdroje

10.1. Literatura

- [1] Běloun, F.: Sbírka úloh z matematiky pro základní školu, Praha: Prometheus, 2003
- [2] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: Matematika 6 - učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia – geometrie, Plzeň: Fraus, 2007
- [3] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: Matematika 6 - pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia – geometrie, Plzeň: Fraus, 2007
- [4] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: Matematika 7 - učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia – geometrie, Plzeň: Fraus, 2008
- [5] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: Matematika 7 - pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia – geometrie, Plzeň: Fraus, 2008
- [6] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: Matematika 8 - učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia – geometrie, Plzeň: Fraus, 2009
- [7] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: Matematika 8 - pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia – geometrie, Plzeň: Fraus, 2009
- [8] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: Matematika 9 - učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia – geometrie, Plzeň: Fraus, 2010
- [9] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: Matematika 9 - pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia – geometrie, Plzeň: Fraus, 2010
- [10] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: Matematika 6 - příručka učitele pro základní školy a víceletá gymnázia, Plzeň: Fraus, 2007
- [11] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: Matematika 7 - příručka učitele pro základní školy a víceletá gymnázia - aritmetika, geometrie, Plzeň: Fraus, 2008
- [12] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: Matematika 8 - příručka učitele - aritmetika, geometrie, Plzeň: Fraus, 2009
- [13] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: Matematika 9 - příručka učitele pro základní školy a víceletá gymnázia, Plzeň: Fraus, 2010

- [14] Bušek, I. a kol.: Sbírka úloh z matematiky pro 6. ročník ZŠ, Praha: Prometheus, 1994
- [15] Bušek, I. a kol.: Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník ZŠ, Praha: Prometheus, 1994
- [16] Bušek, I. a kol.: Sbírka úloh z matematiky pro 8. ročník ZŠ, Praha: Prometheus, 1994
- [17] Bušek, I. a kol.: Sbírka úloh z matematiky pro 9. ročník ZŠ, Praha: Prometheus, 1994
- [18] Hejný, M., Kuřina, F.: Dítě, škola a matematika, Praha: Portál, s.r.o., 2001
- [19] Havlíková, A.: Testy z matematiky 2003, Brno: Didaktis spol. s.r.o., 2002
- [20] Kupka, P.: Přehled matematiky pro ZŠ, Praha: Kupka, 2010, ISBN 978-80-87020-89-0
- [21] Kuřina, F.: 10 pohledů na geometrii, Praha: MÚ AV ČR, 1996
- [22] Kuřina, F.: Umění vidět v matematice, Praha: SPN, 1989
- [23] Novočeský, Š. a kol.: Zábavná matematika, Praha: SPN, 1979
- [24] Odvárko, O., Kadleček, J.: Matematika pro 6. ročník základní školy, 3. díl, Praha: Prometheus, 2007
- [25] Odvárko, O., Kadleček, J.: Matematika pro 7. ročník základní školy, 3. díl, Praha: Prometheus, 1999
- [26] Odvárko, O., Kadleček, J.: Matematika pro 8. ročník základní školy, 1. díl, Praha: Prometheus, 1999
- [27] Odvárko, O., Kadleček, J.: Matematika pro 8. ročník základní školy, 3. díl, Praha: Prometheus, 2000
- [28] Odvárko, O., Kadleček, J.: Matematika pro 9. ročník základní školy, 3. díl, Praha: Prometheus, 2001
- [29] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Praha: Prometheus, 2005, ISBN 80-7196-267-8

10.2. Internetové zdroje

- [30] www.edinformatics.com/timss/timss_intro.htm
- [31] www.geogebra.org
- [32] www.matematickyklokan.net/info.php
- [33] www.msmt.cz/vzdelavani/skolskareforma/ramcove-vzdelavaci-programy
- [34] www.obrazky.cz
- [35] <http://rvp.cz>
- [36] www.uiv.cz

11. Obsah CD

Na přiloženém CD nalezneme konstrukce řešených příkladů v programu GeoGebra. Díky tomuto programu máme možnost shlédnout řešení jednotlivých příkladů krok po kroku, což umožní žákům ještě názornější představu postupu řešení těchto příkladů.

Příklady uložené na CD:

- **příklad 3.1.5** konstrukce rovnostranného trojúhelníku ABC
- **příklad 4.1.5** konstrukce kosočtverce ABCD
- **příklad 4.1.6** konstrukce lichoběžníku ABCD
- **příklad 5.1.4** konstrukce pravoúhlého trojúhelníku STU