

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Přírodovědecká fakulta

Ortogonalní matice a geometrie kvaternionů

Bakalářská práce

Michaela Loudová

Školitelka: doc. Mgr. Lenka Zalabová, Ph.D.

České Budějovice 2023

Loudová, M., 2023: Ortogonální matice a geometrie kvaternionů [Orthogonal matrices and the geometry of quaternions. Bc. Thesis, in Czech.] – 74 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech republic.

Anotace

The bachelor's thesis deals with orthogonal matrices and the geometry of quaternions. In the first part, on orthogonal matrices, important properties of these matrices are summarized. Next, it is described, what geometric transformations they describe in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$. At the end of the chapter on orthogonal matrices, several examples on rotations are solved.

The second part of the thesis deals with quaternions and their use for describing vector rotations in $\mathbb{R}^3$. At the beginning, several important properties of quaternions are described. Next, there is a general explanation of how to use quaternions to describe rotations in $\mathbb{R}^3$. At the end of the chapter, two examples about vector rotations in $\mathbb{R}^3$ are solved using quaternions.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem autorem této kvalifikační práce a že jsem ji vypracovala pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Českých Budějovicích, dne 12. dubna 2023

.....

Michaela Loudová



Přírodovědecká
fakulta
Faculty
of Science

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

ZADÁVACÍ PROTOKOL BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: Michaela Loudová
(jméno, příjmení, tituly)

Program studia/specializace:
Matematika se zaměřením na vzdělávání – Fyzika se zaměřením na vzdělávání

Pracoviště PřF JU, kde bude práce vypracována a obhájena: Katedra matematiky

Školitel: doc. Mgr. Lenka Zalabová, Ph.D.
(jméno, příjmení, tituly, u externího š. název a adresa pracoviště, telefon, e-mail)

Garant z PřF:
(jméno, příjmení, tituly, katedra – jen v případě externího školitele)

Školitel – specialista, konzultant:
(jméno, příjmení, tituly, u externího š. název a adresa pracoviště, telefon, e-mail)

Téma práce: Ortogonální matice a geometrie kvaternionů

Cíle práce:

Cílem práce je definovat ortogonální matice a kvaterniony, zkoumat jejich algebraické vlastnosti a popsat jejich geometrický význam pro studium rotací v Euklidovském prostoru.

Základní doporučená literatura:

Conway, J.H., & Smith, D.A., On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry (1st ed.). A K Peters/CRC Press, 2003

J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, MU, 2013

P. Zlatoš, Lineárna algebra a geometria, Marenčin PT, 2011

Zvláštní poznámky pracoviště:

Financování práce:

Školitel práce

podpis : 

U externích vedoucích fakultní garant práce

podpis :



Přírodovědecká
fakulta
Faculty
of Science

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Garant programu/specializace¹²

podpis :

Vedoucí pracoviště PřF JU, kde proběhne obhajoba

podpis :

Souhlas vedoucího ústavu AV nebo jiné instituce³

podpis :

V Českých Budějovicích dne 30. 11. 2021

podpis studenta: Londorá

1 v případě prací v bakalářském programu Biologie není podpis garanta programu vyžadován

2 v případě magisterských prací v programech učitelství pro SŠ podpis proděkana pro učitelské obory

3 v případě, že práce bude vypracovávána jinde než prostorách PřF, například na ústavu AV

Poděkování

Děkuji své školitelce doc. Mgr. Lence Zalabové, Ph.D. za odborné vedení bakalářské práce, za cenné rady a čas poskytnutý při konzultacích.

Obsah

1	Úvod.....	1
2	Ortogonalní matice.....	1
2.1	Co je ortogonalní matice a jaké má vlastnosti.....	1
2.2	Ortogonalní grupa.....	11
2.3	Ortogonalní matice řádu 2	13
2.4	Řešené příklady – Ortogonalní matice v rovině.....	21
2.5	Řešené příklady – ortogonalní matice v prostoru.....	29
2.5	Eulerovy úhly	34
2.6	Eulerovy úhly – příklady	35
3	Kvaterniony.....	46
3.1	Motivace.....	46
3.2	Co jsou kvaterniony a jaké mají vlastnosti	47
3.3	Okruh kvaternionů	51
3.4	Kvaterniony jako komplexní matice.....	61
3.4	Inverzní kvaterniony.....	62
4	Geometrický význam kvaternionů pro studium rotací v Euklidovském prostoru ..	63
4.1	Rotace	63
4.2	Řešené příklady – kvaterniony a rotace v R^3	67
5	Závěr	71
	Zdroje	72

1 Úvod

Cílem této bakalářské práce je definovat ortogonální matice a kvaterniony, popsat jejich algebraické vlastnosti a jejich význam pro studium rotací v Euklidovském prostoru.

První část práce bude zabývat ortogonálními maticemi. Ortogonální matice je taková čtvercová matice, jejíž transponovaná matice je současně její inverzní maticí. Nejdříve popíšeme, jak tyto matice popisují transformace v prostoru $\mathbb{R}^2$. Dále se budeme zabývat tzv. Eulerovými úhly, tedy čtvercovými maticemi řádu 3 popisujícími rotace kolem souřadných os v prostoru $\mathbb{R}^3$. S využitím Eulerových úhlů vyřešíme několik úloh o rotacích v $\mathbb{R}^3$.

Druhá část práce se zabývá kvaterniony. Nejdříve popíšeme některé jejich důležité algebraické vlastnosti. Dále si vysvětlíme, jak lze pomocí kvaternionů popisovat rotace v prostoru $\mathbb{R}^3$. Na závěr kapitoly vyřešíme pomocí kvaternionů dvě úlohy, již vyřešené pomocí ortogonálních matic, a porovnáme výsledky.

2 Ortogonální matice

V této kapitole se budeme zabývat ortogonálními maticemi. V první části uvedeme jejich definici a některé jejich důležité vlastnosti. Vysvětlíme, jak se ortogonální matice využívají k popisu rotací, a spočítáme několik příkladů.

2.1 Co je ortogonální matice a jaké má vlastnosti

Definice 1.1 (ortogonální matice) [11]:

Ortogonální matice je čtvercová matice A , pro kterou platí vztah:

$$A^T A = A A^T = I$$

I zde značí jednotkovou matici, A^T značí matici transponovanou.

Jednotková matice I je sama ortogonální maticí. [10]

Připomeňme si nyní, jak je definována inverzní matice.

Definice 1.2 (inverzní matice) [6 – s.72]:

Inverzní maticí k čtvercové matici A n -tého stupně nazýváme takovou čtvercovou matici A^{-1} takéž n -tého stupně, pro kterou platí vztah:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Z definice ortogonální matice a definice inverzní matice vyplývá, že pro ortogonální matici A se A^T a A^{-1} sobě rovnají.

Definice 1.3 (skalární součin) [19]:

Mějme vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ z prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{u} = (u_1; \dots; u_n)^T$$

$$\vec{v} = (v_1; \dots; v_n)^T$$

Skalární součin vektorů na prostoru $\mathbb{R}^n$ definujeme následovně:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Definice 1.4 (norma vektoru) [23]:

Mějme vektor $\vec{v}$ z prostoru $\mathbb{R}^n$. Normou vektoru $\vec{v}$ nazýváme takové číslo $\|\vec{v}\|$, pro které platí následující vztah:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Definice 1.5 (ortogonální vektory) [19]:

Mějme vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ z prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{u} = (u_1; \dots; u_n)^T$$

$$\vec{v} = (v_1; \dots; v_n)^T$$

Tyto vektory jsou ortogonální (kolmé), je-li jejich skalární součin roven 0.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + \dots + u_n \cdot v_n = 0$$

Definice 1.6 (ortonormální vektory):

Mějme vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ z prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{u} = (u_1; \dots; u_n)^T$$

$$\vec{v} = (v_1; \dots; v_n)^T$$

Tyto vektory jsou ortonormální, pokud jsou na sebe kolmé a mají jednotkovou velikost. Musí tedy platit:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} = 1$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = 1$$

Věta 1.1 [14]:

Reálná čtvercová matice řádu n je ortogonální právě tehdy, pokud její řádky tvoří n vektorů, které jsou na sebe navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost.

Důkaz:

Mějme ortogonální matici A a její transponovanou matici A^T . Již víme, že budeme-li tyto matice mezi sebou násobit, dostaneme jednotkovou matici I (viz definice 1.1 (ortogonální matice)). Je zřejmé, že násobíme-li i -tý řádek matice A s i -tým sloupcem matice A^T , výsledkem bude vždy číslo 1. Je tomu tak proto, že v takovém případě násobíme skalárně vektor sám se sebou a tento vektor má jednotkovou velikost. Budeme-li násobit i -tý řádek s j -tým sloupcem ($i \neq j$), dostaneme pokaždé číslo 0. Je-li skalární součin dvou vektorů roven 0, znamená to, že tyto dva vektory jsou na sebe kolmé.

Poznamenejme, že analogické tvrzení platí i pro sloupce ortogonálních matic.

Věta 1.2 [14]:

Ortogonalní matice zachovávají skalární součin vektorů. Pokud je čtvercová matice A řádu n ortogonální, $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou sloupcové vektory řádu n , pak platí:

$$(A\vec{u})^T (A\vec{v}) = \vec{u}^T \vec{v}$$

Důkaz:

Víme, že platí:

$$(A\vec{u})^T = \vec{u}^T A^T$$

Pak tedy pro výraz $(A\vec{u})^T (A\vec{v})$ musí platit následující:

$$(A\vec{u})^T (A\vec{v}) = \vec{u}^T A^T A \vec{v}$$

Z definice ortogonální matice víme, že součin $A^T A$ nám dává ve výsledku jednotkovou matici I . Proto dále platí:

$$\vec{u}^T A^T A \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}$$

Tím jsme dokázali platnost vztahu $(A\vec{u})^T (A\vec{v}) = \vec{u}^T \vec{v}$.

Nyní si uvedeme některé vlastnosti normy vektoru (viz definice 1.4).

Vlastnosti normy vektoru [2]:

- 1) $(\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n) (\|\vec{v}\| \geq 0) \wedge (\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0})$
- 2) $(\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|)$
- 3) $(\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n)(\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)$
- 4) $(\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n) \left((\vec{v} \neq \vec{0}) \Rightarrow \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \text{ je normovaný vektor} \right)$

Důkaz vlastnosti 1:

- 1) Dokážeme, že platí $\|v\| \geq 0$:

$$\vec{v} = (v_1; \dots; v_n)^T$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v^T v} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

Jelikož ve výrazu pod odmocninou jsou všechny sčítance ve druhé mocnině, nemohou být záporné. Nemůže tedy být záporný ani jejich součet. Proto platí $\|\vec{v}\| \geq 0$.

- 2) Dokážeme implikaci $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{v}\| = 0$.

$$\vec{v} = \vec{0} = (0; \dots; 0)^T$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{(0; \dots; 0)^T \cdot (0; \dots; 0)^T} = \sqrt{0 + \dots + 0} = 0$$

Tímto výpočtem jsme dokázali, že pokud je vektor v nulový, pak se jeho norma rovná 0.

- 3) Dokážeme implikaci $\|\vec{v}\| = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$.

$$\vec{v} = (v_1; \dots; v_n)^T$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = 0$$

Rovnost platí pouze tehdy, pokud se všechny členy $v_1; \dots; v_n$ rovnají 0. To znamená, že pokud se norma vektoru $\vec{v}$ rovná nule, vektor $\vec{v}$ musí být nulový ($\vec{v} = \vec{0}$).

Důkaz vlastnosti 2:

Mějme vektor $\vec{v}$ z prostoru $\mathbb{R}^n$ a číslo α z množiny $\mathbb{R}$:

$$\vec{v} = (v_1; \dots; v_n)^T$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

Výraz $\|\alpha \cdot \vec{v}\|$ rozepíšeme podle definice normy vektoru:

$$\|\alpha \cdot \vec{v}\| = \sqrt{\alpha^2 v_1^2 + \dots + \alpha^2 v_n^2}$$

Vidíme, že z výsledného výrazu lze vytknout $\sqrt{\alpha^2}$:

$$\sqrt{\alpha^2 v_1^2 + \dots + \alpha^2 v_n^2} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

Výraz $\sqrt{\alpha^2}$ můžeme dále přepsat jako $|\alpha|$, protože právě takto je absolutní hodnota definována. Výraz $\sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$ nám pak podle definice udává normu vektoru v . Proto platí:

$$\sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$$

Tímto výpočtem jsme dokázali platnost vztahu $\|\alpha \cdot \vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$.

Důkaz vlastnosti 3:

Mějme vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ z prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{v} = (v_1; \dots; v_n)^T$$

$$\vec{w} = (w_1; \dots; w_n)^T$$

Začneme tím, že si vypočítáme hodnotu výrazu $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2$:

$$\begin{aligned}\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 &= (v_1 + w_1)^2 + \dots + (v_n + w_n)^2 \\ &= (v_1^2 + 2v_1w_1 + w_1^2) + \dots + (v_n^2 + 2v_nw_n + w_n^2) \\ &= (v_1^2 + \dots + v_n^2) + (w_1^2 + \dots + w_n^2) \\ &\quad + (2v_1w_1 + \dots + 2v_nw_n) \\ &= (v_1^2 + \dots + v_n^2) + (w_1^2 + \dots + w_n^2) + 2 \\ &\quad \cdot (v_1w_1 + \dots + v_nw_n)\end{aligned}$$

Dále pak vypočítáme hodnoty výrazu $(\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2$:

$$(\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2 = \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| + \|\vec{w}\|^2$$

Vyjádříme si jednotlivé sčítance z výrazu výše:

$$\|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + \dots + v_n^2$$

$$\|\vec{w}\|^2 = w_1^2 + \dots + w_n^2$$

$$\begin{aligned}2 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| &= 2 \cdot \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + \dots + w_n^2} \\ &= 2 \cdot \sqrt{(v_1^2 + \dots + v_n^2) \cdot (w_1^2 + \dots + w_n^2)}\end{aligned}$$

Nyní porovnáme hodnoty výrazů $2 \cdot (v_1w_1 + \dots + v_nw_n)$ a $2 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$:

$$2 \cdot (v_1w_1 + \dots + v_nw_n) \leq 2 \cdot |v_1w_1 + \dots + v_nw_n|$$

$$\begin{aligned}2 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| &= 2 \cdot \sqrt{(v_1^2 + \dots + v_n^2) \cdot (w_1^2 + \dots + w_n^2)} \\ &= 2 \cdot \sqrt{\begin{matrix} v_1^2w_1^2 + \dots + v_1^2w_n^2 \\ + v_2^2w_1^2 + \dots + v_2^2w_n^2 \\ + \dots + v_n^2w_n^2 \end{matrix}}\end{aligned}$$

Vidíme, že hodnota výrazu $2 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$ určitě není menší, než hodnota výrazu $(2v_1w_1 + \dots + 2v_nw_n)$. Platí tedy následující nerovnice:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 \leq (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2$$

Pak také musí platit tato nerovnice:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

Výraz na levé straně nerovnice je vždy menší nebo roven výrazu na straně pravé. Oba výrazy v druhé mocnině obsahují součet normy vektoru $\vec{v}$ s normou vektoru $\vec{w}$. Dále je na levé straně sčítanec $2 \cdot (v_1w_1 + \dots + v_nw_n)$. Na pravé straně máme sčítanec $2 \cdot \sqrt{(v_1^2 + \dots + v_n^2) \cdot (w_1^2 + \dots + w_n^2)}$, který lze přepsat následovně:

$$2 \cdot \sqrt{(v_1 \cdot w_1)^2 + \dots + (v_1 \cdot w_n)^2 + \dots + (v_n \cdot w_1)^2 + \dots + (v_n \cdot w_n)^2}$$

Vidíme, že oproti výrazu na levé straně zde hodně členů přebývá (členy tvaru $v_i \cdot w_j$, kde $i \neq j$), a jelikož jsou všechny v druhé mocnině, jsou kladné.

Tím jsme dokázali platnost vlastnosti 3.

Důkaz vlastnosti 4:

Spočítáme druhou mocninu normy vektoru $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$:

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{v}\|^2} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} \vec{v}^T = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|^2} = 1$$

Výpočtem výše jsme dokázali, že je-li vektor $\vec{v}$ nenulový, pak vektor $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ má velikost 1, a je tedy normovaný.

Věta 1.3 [12]:

Ortogonální matice zachovává normu vektoru. Pokud je čtvercová matice A řádu n ortogonální, $\vec{v}$ je sloupcový vektor řádu n , pak platí:

$$(A\vec{v})^T (A\vec{v}) = \vec{v}^T \vec{v}$$

Tedy platí $\|\vec{v}\| = \|A\vec{v}\|$.

Důkaz:

Víme, že platí:

$$(A\vec{v})^T = \vec{v}^T A^T$$

Výraz $(A\vec{v})^T (A\vec{v})$ lze tedy přepsat následovně:

$$(A\vec{v})^T (A\vec{v}) = \vec{v}^T A^T A \vec{v}$$

Dále víme, že součin ortogonální matice A s její transponovanou maticí A^T

(v libovolném pořadí) se rovná jednotkové matici I . Platí tedy:

$$\vec{v}^T A^T A \vec{v} = \vec{v}^T I \vec{v} = \vec{v}^T \vec{v}$$

Tímto výpočtem jsme dokázali platnost vztahu $(A\vec{v})^T (A\vec{v}) = \vec{v}^T \vec{v}$.

Věta 1.4 [11]:

Ortogonální matice má vždy determinant roven $+1$ nebo -1 .

Důkaz:

Víme, že z Cauchyovy věty platí:

$$\det(AA^T) = (\det A) \cdot (\det A^T) = (\det A)^2$$

Dále také víme, že pro ortogonální matice se součin AA^T rovná jednotkové

matici I , z čehož plyne, že $\det(AA^T) = 1$. Proto také $(\det A)^2 = 1$, a tedy $\det A = \pm 1$.

Podle toho, jestli je determinant ortogonální matice kladný, nebo záporný, dělíme ortogonální matice na *vlastní* (tj. $\det A = 1$) a *nevlastní* (tj. $\det A = -1$).

Věta 1.5 [9, 15]:

Ortogonalnost matic se při součinu zachovává. Mějme matice A_1, A_2 z množiny $\mathbb{R}^{n \times n}$ (množina čtvercových matic řádu n). Jsou-li A_1, A_2 ortogonální, pak je ortogonální i jejich součin $A_1 A_2$.

Důkaz:

Pokud je součin ortogonálních matic A_1 a A_2 opět ortogonální maticí, musí platit, že výsledná matice v součinu se svou transponovanou maticí nám dá jednotkovou matici. Tuto skutečnost ověříme následujícím výpočtem:

$$(A_1 A_2)^T A_1 A_2 = A_2^T A_1^T A_1 A_2 = A_2^T I A_2 = A_2^T A_2 = I$$

Výpočtem jsme dokázali, že součin ortogonálních matic A_1 a A_2 je opět ortogonální matice.

2.2 Ortogonální grupa

Již víme, že součin ortogonálních matic nám dává novou ortogonální matici

(viz věta 1.5). Množina ortogonálních matic je tedy uzavřená na operaci násobení.

Abychom množinu množinu M společně s operací $\circ$ mohli nazvat grupou, musí být splněno několik vlastností [28]:

- 1) Složením dvou prvků z dané množiny dostaneme opět prvek ležící v této množině.

$$(\forall a, b \in M)(a \circ b \in M)$$

- 2) Složení prvků množiny musí být asociativní.

$$(\forall a, b, c \in M)((a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c))$$

- 3) Množina musí obsahovat jednotkový prvek.

$$(\exists e \in M)(\forall a \in M)(a \circ e = e \circ a = a)$$

- 4) Pro každý prvek množiny musí existovat prvek inverzní.

$$(\forall a \in M)(\exists b \in M)(a \circ b = b \circ a = e)$$

Připomeňme, že jednotková matice je taková matice, pro kterou platí:

$$AI = IA = A$$

Dále připomeňme, že inverzní matice k matici A je taková matice A^{-1} , pro kterou platí, že součin $AA^{-1} = A^{-1}A$ nám dá jednotkovou matici I .

Nyní si ukážeme, že množina ortogonálních matic společně s operací násobení tvoří grupu.

Věta 1.6 [27]:

Množina ortogonálních matic s operací násobení tvoří grupu.

Důkaz:

Abychom větu 1.8 dokázali, musíme postupně dokázat platnost všech čtyř vlastností grupy, které jsme si popsali v úvodu této kapitoly.

Důkaz vlastnosti 1:

Tuto vlastnost jsme již dokazovali u věty 1.5, která nám říkala, že ortogonálnost matic se při součinu zachovává.

Důkaz vlastnosti 2:

Násobení matic je obecně asociativní. Musí tedy být asociativní i v případě ortogonálních matic. [26]

Důkaz vlastnosti 3:

Již víme, že jednotková matice I je ortogonální. Vynásobíme-li jednotkovou maticí libovolnou matici A , bez ohledu na pořadí matic v součinu, výsledkem bude opět matice A . Množina ortogonálních matic tedy obsahuje jednotkový prvek, a to právě jednotkovou matici I .

Důkaz vlastnosti 4:

Jelikož se determinant ortogonálních matic nikdy nerovná 0, musí pro každou ortogonální matici existovat matice inverzní. Tato inverzní matice musí být znovu ortogonální. To si ukážeme výpočtem:

Již víme, že pro ortogonální matici musí platit následující vztah:

$$A^{-1} = A^T$$

Pak také platí:

$$AA^T = AA^{-1} = I$$

Tedy pro matici A^{-1} platí:

$$A^{-1}(A^{-1})^T = A^T(A^T)^T = A^T A = I$$

Tímto výpočtem jsme dokázali, že matice A^{-1} je opět ortogonální a je tedy inverzním prvkem k matici A .

Definice 1.7 (ortogonální grupa) [27]:

Ortogonální grupa je grupou ortogonálních matic společně s operací násobení.

Jelikož každá ortogonální matice zadává (vynásobením vektoru zleva) transformaci v prostoru $\mathbb{R}^n$ zachovávající skalární součin, lze je vidět jako grupu těchto transformací společně s jejich skládáním. [27]

2.3 Ortogonální matice řádu 2

Nyní si popíšeme ortogonální matice řádu 2. Tyto matice mohou mít obecně dva různé tvary [28]:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Řecké písmeno α zde představuje libovolný úhel z intervalu $[0; 2\pi)$.

Věta 1.7:

Každá matice tvaru $A_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je vlastní ortogonální matice řádu 2.

Důkaz:

Je-li matice A_1 ortogonální, musí se součin této matice s její transponovanou maticí rovnat matici jednotkové. To dokážeme následující výpočtem:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$A_1^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 & -\cos \alpha \cdot \sin \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ -\cos \alpha \cdot \sin \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha & (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Výpočtem jsme dokázali, že matice A je ortogonální. Dále spočítáme její determinant, abychom zjistili, jestli se skutečně jedná o vlastní ortogonální matici.

$$\det A_1 = (\cos \alpha)^2 - (-\sin \alpha)^2 = (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$$

Determinant matice A_1 je roven 1. Jedná se tedy o vlastní ortogonální matici.

Věta 1.8:

Každá matice tvaru $A_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, je nevlastní ortogonální matice řádu 2.

Důkaz:

Je-li matice A ortogonální, musí se součin této matice s její transponovanou maticí rovnat matici jednotkové. To dokážeme následujícím výpočtem:

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$A_2^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 & \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos \alpha \cdot \sin \alpha & (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Výpočtem jsme dokázali, že matice A_2 je ortogonální. Dále spočítáme její determinant, abychom zjistili, jestli se skutečně jedná o nevlastní ortogonální matici.

$$\det A_2 = -(\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 = -((\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2) = -1$$

Determinant matice A_2 je roven -1 . Jedná se tedy o nevlastní ortogonální matici.

V následujícím textu ukážeme, že:

- 1) Matice ve tvaru A_1 popisují rotace kolem počátku o úhel α proti směru hodinových ručiček.
- 2) Matice ve tvaru A_2 pak popisují zrcadlení podle dané osy procházející počátkem, která s osou x svírá úhel $\alpha/2$.

Obě transformace v rovině pak realizujeme vynásobením vektoru $\vec{u}$ zleva maticí A_1 (chceme-li popsat rotaci) nebo maticí A_2 (chceme-li popsat zrcadlení).

Pro rotaci obecně platí vztah:

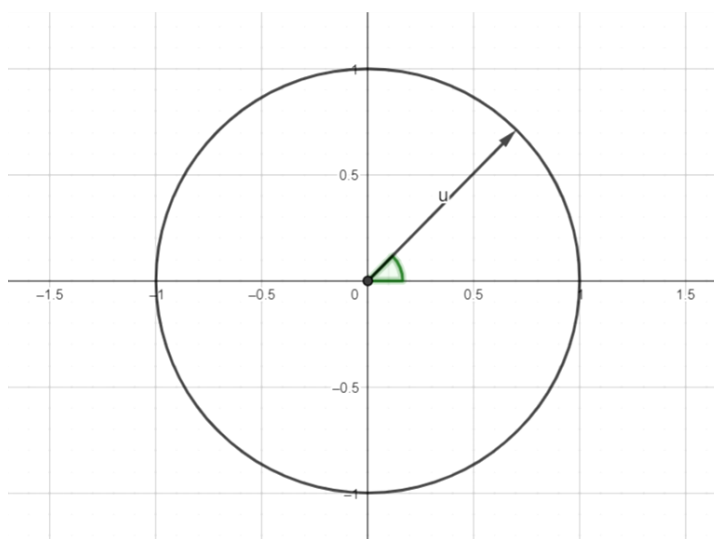
$$\vec{u}' = A_1 \vec{u}$$

Pro reflexi obecně platí vztah:

$$\vec{u}' = A_2 \vec{u}$$

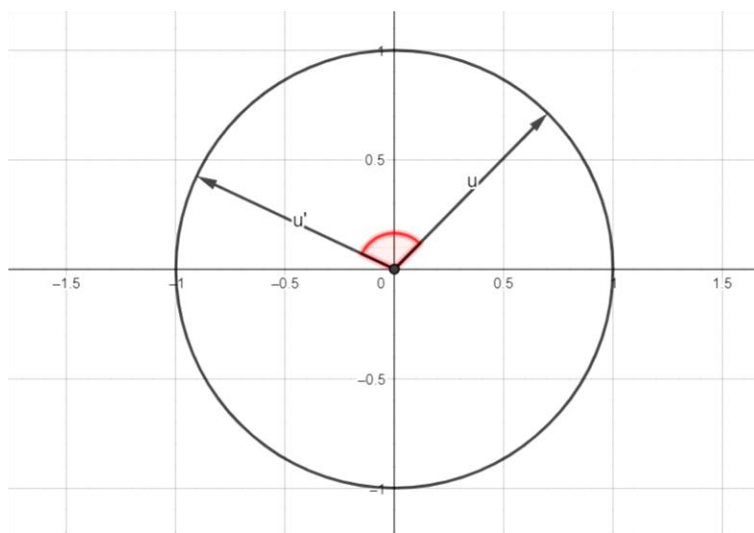
Dále si vysvětlíme, proč oba tyto vztahy platí.

Mějme v rovině jednotkový vektor $\vec{v}$, který má počátek v bodě $[0;0]$, a s osou x svírá úhel φ . Souřadnice jeho koncového bodu jsou tedy $[\cos \varphi ; \sin \varphi]$.



Obr. 1: jednotkový vektor $\vec{u}$ svírající s osou x úhel φ (úhel vyznačen zeleně)

Chceme tímto vektorem otočit o úhel δ proti směru hodinových ručiček. Nový koncový bod vektoru tak bude mít souřadnice $[\cos(\varphi + \delta) ; \sin(\varphi + \delta)]$.



Obr. 2: jednotkový vektor $\vec{u'}$ svírající s vektorem $\vec{u}$ úhel δ (úhel vyznačen červeně)

Obě souřadnice vektoru $\vec{u'}$ rozepíšeme pomocí trigonometrických vzorců:

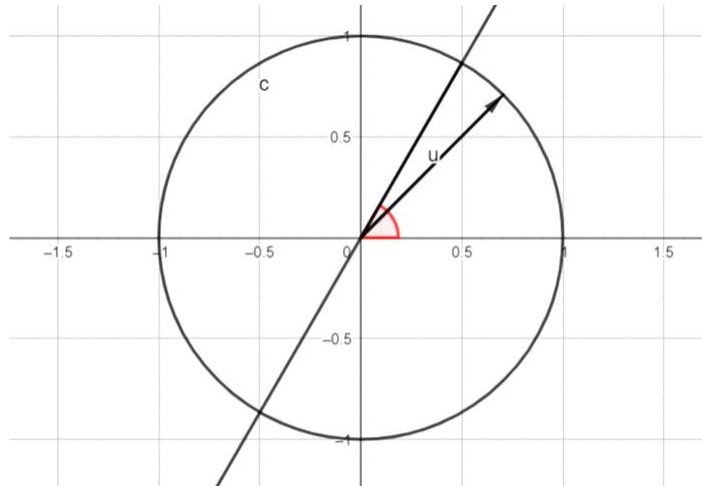
$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi + \delta) \\ \sin(\varphi + \delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \varphi - \sin \delta \sin \varphi \\ \cos \delta \sin \varphi + \sin \delta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Dále pomocí maticového násobení dostaneme:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos \varphi - \sin \delta \sin \varphi \\ \cos \delta \sin \varphi + \sin \delta \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Vidíme tedy, že otočení o úhel δ proti směru hodinových ručiček můžeme realizovat vynásobením maticí $A = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}$.

Nyní si ukážeme, jak je to s maticí zrcadlení. Mějme znovu vektor $\vec{u}$ svírající s osou x úhel φ , jak je tomu na obrázku. Chceme tento vektor zrcadlit podle osy, která s osou x svírá úhel δ (na obrázku níže vyznačen červeně).



Obr. 3: vektor $\vec{u}$ a osa jeho zrcadlení svírající s osou x úhel δ

Reflexi kolem libovolné osy dostaneme složením rotace, která osu dané reflexe zobrazí na osu určenou vektorem $\vec{v} = (1; 0)^T$, reflexí podle této osy a zpětnou rotací. Pokud osa reflexe svírá s osou x úhel δ , dostaneme následující vztah:

$$A_{1(\delta)} A_{2(\varphi)} A_{1(\delta)}^{-1} = A_{1(\delta)} A_{2(\varphi)} A_{1(-\delta)} = \begin{pmatrix} \cos 2\delta & \sin 2\delta \\ \sin 2\delta & -\cos 2\delta \end{pmatrix},$$

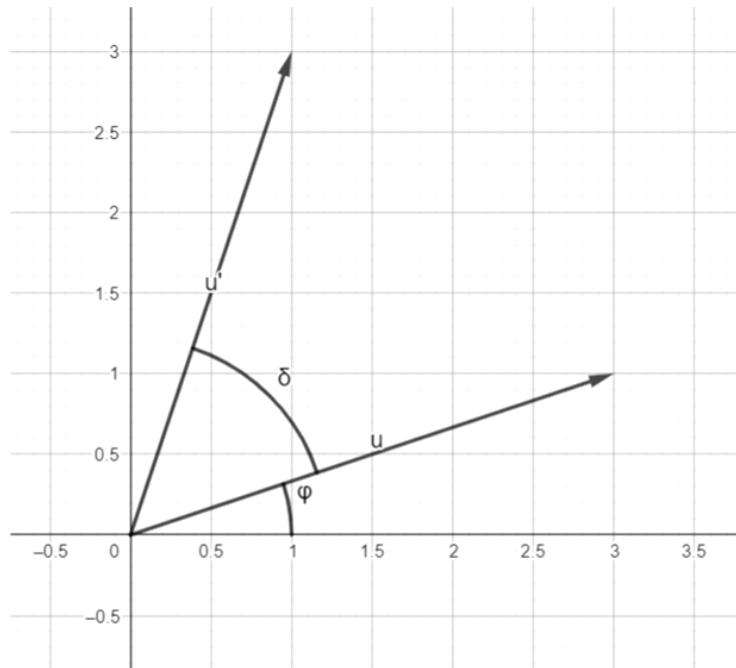
$$\text{kde } A_{2(\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos(0^\circ) & \sin(0^\circ) \\ \sin(0^\circ) & -\cos(0^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektor $\vec{u} = (\cos \varphi; \sin \varphi)^T$ se zobrazí následovně:

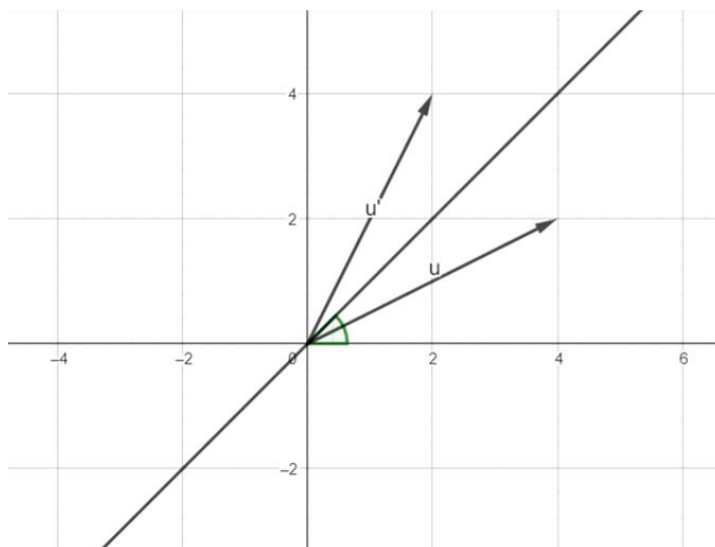
$$\begin{pmatrix} \cos 2\delta & \sin 2\delta \\ \sin 2\delta & -\cos 2\delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\delta - \varphi) \\ \sin(2\delta - \varphi) \end{pmatrix}$$

Všechny reflexe jsou tedy tvaru $A_2 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix}$, kde $\gamma = 2\delta$.

Matice jsme pro jednoduchost odvodili pomocí jednotkových vektorů. Příslušné matice ale samozřejmě realizují transformaci libovolného vektoru.



Obr. 4: otočení vektoru $\vec{u}$, který s osou x svírá úhel φ , o úhel δ proti směru hodinových ručiček v prostoru $\mathbb{R}^2$ (otočený vektor označen jako $\vec{u'}$) [13 - s. 13]



Obr. 5: zrcadlení vektoru $\vec{u}$ na vektor $\vec{u'}$ v prostoru $\mathbb{R}^2$ podle osy, která s osou x svírá úhel δ (na obrázku vyznačen zeleně)
[13 – s. 13]

2.4 Řešené příklady – Ortogonální matice v rovině

Příklad 1:

Ukažte, zda je zadaná matice A ortogonální. Je-li matice A ortogonální, spočítejte její determinant a rozhodněte, zda je vlastní nebo nevlastní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2-8 \\ 2-8 & 4+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 20 \end{pmatrix}$$

Zadaná matice A není ortogonální.

Příklad 2:

Ukažte, zda je zadaná matice B ortogonální. Je-li matice B ortogonální, spočítejte její determinant a rozhodněte, zda je vlastní nebo nevlastní.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$B^T = B$$

$$B^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+(-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Zadaná matice C je ortogonální.

$$\text{Det} B = 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = -1$$

Determinant zadané matice B je roven -1. Jedná se o nevlastní ortogonální matici. Matice B popisuje reflexi podle osy x , kdy úhel α se rovná 0° .

Příklad 3:

Ukažte, zda je zadaná matice C ortogonální. Je-li matice C ortogonální, spočítejte její determinant a rozhodněte, zda je vlastní nebo nevlastní.

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$C^T = C$$

$$C^T \cdot C = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadaná matice C je ortogonální.

$$\text{Det}C = (1/2) \cdot (-1/2) - (\sqrt{3}/2) \cdot (\sqrt{3}/2) = -1$$

Determinant zadané matice C je roven -1. Jedná se o nevlastní ortogonální matici. Matice C popisuje reflexi podle osy, která s osou x svírá úhel 30° .

Příklad 4:

Ukažte, zda je zadaná matice D ortogonální. Je-li matice D ortogonální, spočítejte její determinant a rozhodněte, zda je vlastní nebo nevlastní.

$$D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$D^T = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D^T \cdot D &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zadaná matice D je ortogonální.

$$\text{Det} D = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

Determinant zadané matice D je roven 1. Jedná se o vlastní ortogonální matici. Matice D popisuje rotaci v rovině o úhel 135° po směru hodinových ručiček.

Příklad 5:

Doplňte chybějící číslo x tak, aby matice E popisovala rotaci v prostoru $\mathbb{R}^2$.

$$E = \begin{pmatrix} x & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & x \end{pmatrix}$$

Řešení:

Jak již víme, matice rotací v $\mathbb{R}^2$ mají obecně následující tvar:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Ze zadání lze vyčíst, že $\sin \alpha$ se rovná $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tomu odpovídá úhel $\alpha = 45^\circ$. Na místě neznámých x pak musí být hodnoty $\cos(45^\circ)$.

$$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Výsledná matice E bude mít tvar:

$$E = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Matice E popisuje rotaci v protisměru hodinových ručiček o 45° .

Poznámka (o násobení ortogonálních matic v rovině):

Pokud dvě matice v součinu popisují rotaci, je jejich násobení komutativní. Pokud by jedna z matic popisovala rotaci a druhá zrcadlení, jejich součin komutativní být nemusí. Stejně tak nemusí být komutativní součin dvou matic popisujících reflexi. Ukážeme si to na třech příkladech.

Příklad 6:

Mějme ortogonální matice A a B řádu 2:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Obě uvedené matice popisují rotaci v $\mathbb{R}^2$. Matice A popisuje rotaci o úhel 30° proti směru hodinových ručiček. Matice B popisuje rotaci o 45° po směru hodinových ručiček. Spočítáme nejdříve součin $A \cdot B$.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dále spočítáme součin $B \cdot A$.

$$\begin{aligned}
 B \cdot A &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Vidíme, že výsledky součinů $A \cdot B$ a $B \cdot A$ se rovnají.

Příklad 7:

Mějme ortogonální matice A a B řádu 2:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matice A popisuje rotaci v $\mathbb{R}^2$ o úhel 120° v proti směru hodinových ručiček. Matice B popisuje reflexi podle osy, která s osou x svírá úhel 30° . Spočítáme nejdříve součin $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Výsledek popisuje reflexi podle osy y .

Dále spočítáme součin $B \cdot A$.

$$\begin{aligned}
B \cdot A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vidíme, že výsledky součinů $A \cdot B$ a $B \cdot A$ se nerovnají. Výsledek popisuje reflexi podle osy, která s osou x svírá úhel 150° .

Příklad 8:

Mějme ortogonální matice A a B řádu 2:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice A popisuje reflexi podle osy, která s osou x svírá úhel 60° . Matice B popisuje reflexi podle osy, která s osou x svírá úhel 45° . Spočítáme nejdříve součin $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Všimněme si, že výsledná matice nepopisuje reflexi, ale rotaci. V tomto případě je to rotace o úhel 30° proti směru hodinových ručiček.

Dále spočítáme součin $B \cdot A$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Vidíme, že výsledky obou součinů se nerovnají. Výsledná matice opět popisuje rotaci o úhel 30° , ale v opačném směru.

2.5 Řešené příklady – ortogonální matice v prostoru

Příklad 1:

Ukažte, zda je zadaná matice A ortogonální. Je-li matice A ortogonální, spočítejte její determinant a rozhodněte, zda je vlastní nebo nevlastní.

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A^T = A$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 & 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 & 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 & 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \\ 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 & \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) & 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{9} & 2 \cdot \frac{2}{9} - \frac{4}{9} & 2 \cdot \frac{2}{9} - \frac{4}{9} \\ 2 \cdot \frac{2}{9} - \frac{4}{9} & 2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{9} & \frac{4}{9} - 2 \cdot \frac{2}{9} \\ 2 \cdot \frac{2}{9} - \frac{4}{9} & \frac{4}{9} - 2 \cdot \frac{2}{9} & 2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadaná matice A je ortogonální.

$$\begin{aligned} \det A &= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &\quad \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 1 \end{aligned}$$

Determinant zadané matice A je roven 1. Jedná se o vlastní ortogonální matici.

Příklad 2:

Ukažte, zda je zadaná matice B ortogonální. Je-li matice B ortogonální, spočítejte její determinant a rozhodněte, zda je vlastní nebo nevlastní.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1+4+9 & -2+0+18 & 3-12+3 \\ -2+0+18 & 4+0+36 & -6+0+6 \\ 3-12+3 & -6+0+6 & 9+36+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 & 16 & -6 \\ 16 & 40 & 0 \\ -6 & 0 & 46 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zadaná matice B není ortogonální.

Příklad 3:

Ukažte, zda je zadaná matice C ortogonální. Je-li matice C ortogonální, spočítejte její determinant a rozhodněte, zda je vlastní nebo nevlastní.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^T = C$$

$$C^T \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1^2 + 2^2 + 3^2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2^2 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 2^2 + 1^2 + 2^2 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 2^2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3^2 + 2^2 + 1^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 10 & 10 \\ 10 & 9 & 10 \\ 10 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Zadaná matice C není ortogonální.

Příklad 4:

Ukažte, zda je zadaná matice D ortogonální. Je-li matice D ortogonální, spočítejte její determinant a rozhodněte, zda je vlastní nebo nevlastní.

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot D^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadaná matice D je ortogonální.

$$\text{Det} D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Determinant zadané rovnice D je roven 1. Jedná se o vlastní ortogonální matici.

Příklad 5:

Ukažte, zda je zadaná matice E ortogonální. Je-li matice E ortogonální, spočítejte její determinant a rozhodněte, zda je vlastní nebo nevlastní.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$E^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$E \cdot E^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadaná matice E je ortogonální.

$$\text{Det}E = 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

Determinant zadané matice E je roven 1. Jedná se o vlastní ortogonální matici.

2.5 Eulerovy úhly

Eulerovými úhly popisujeme například rotaci absolutně tuhého tělesa v trojrozměrném euklidovském prostoru. Definují tři rotace systému umožňující přivést libovolnou polohu systému do polohy aktuální.

Rotace v prostoru nám popisují následující matice [13]:

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_X(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$R_Y(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

Matice $R_X(\beta)$ popisuje rotaci kolem osy x o úhel β proti směru hodinových ručiček při pohledu svrchu. Podobně matice $R_Y(\gamma)$ popisuje rotaci kolem osy y o úhel γ proti směru hodinových ručiček při pohledu svrchu a matice $R_Z(\alpha)$ popisuje rotaci kolem osy z o úhel α proti směru hodinových ručiček při pohledu svrchu. Pokud bychom chtěli popisovat rotace po směru hodinových ručiček, stačí matice výše transponovat.

Tato otočení jsou nekomutativní a konečná poloha systému je závislá na pořadí, v jakém byla jednotlivá otočení provedena.

Každou rotaci v prostoru $\mathbb{R}^3$ pak můžeme popsat pomocí matice R , kterou dostaneme postupným prováděním uvedených rotací. Matice R je tedy součinem matic $R_Y(\gamma)$, $R_X(\beta)$ a $R_Z(\alpha)$.

Operace $R \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, kde u_1 , u_2 a u_3 jsou složky vektoru před otočením,

nám dá obraz nového vektoru $\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix}$ po transformaci.

2.6 Eulerovy úhly – příklady

Příklad 1:

Mějme vektor $\vec{v} = (3; 8; 5)^T$. Bude rotovat o úhel 45° po směru hodinových ručiček kolem osy z , dále o úhel 90° po směru hodinových ručiček kolem osy y , a nakonec o úhel 30° po směru hodinových ručiček kolem osy x . Kde se bude vektor nacházet po provedení těchto rotací?

Řešení:

Začneme tím, že si napíšeme matice jednotlivých rotací. V tomto případě budou matice rotací vypadat následovně:

$$R_X(30^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(30^\circ) & \sin(30^\circ) \\ 0 & -\sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_Y(90^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & -\sin(90^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_Z(45^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & \sin(45^\circ) & 0 \\ -\sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úlohu vyřešíme tak, že nejdříve vynásobíme matici $R_X(30^\circ)$ zprava maticí $R_Y(90^\circ)$. Novou matici (kterou si dále označíme jako X) pak vynásobíme maticí $R_Z(45^\circ)$ zprava. Celým výrazem pak vynásobíme zleva vektor $\vec{v} = (3; 8; 5)^T$. V podstatě hledáme výraz $R_X(30^\circ) \cdot R_Y(90^\circ) \cdot R_Z(45^\circ) \cdot \vec{v}$.

$$\begin{aligned} R_X(30^\circ) \cdot R_Y(90^\circ) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X \cdot R_Z(45^\circ) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & 0 \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Výslednou maticí (kterou budu dále značit jako Y) nyní zprava vynásobíme vektor $\vec{v} = (3; 8; 5)^T$. Tím dostaneme souřadnice nového vektoru $\vec{v'}$.

$$\begin{aligned}
\vec{v'} &= Y \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \left(-5; \quad \frac{5\sqrt{6} + 11\sqrt{2}}{4}; \quad \frac{11\sqrt{6} - 5\sqrt{2}}{4} \right)^T
\end{aligned}$$

Příklad 2:

Mějme vektor $\vec{v} = (1; 2; 4)^T$. Bude rotovat o úhel 30° proti směru hodinových ručiček kolem osy z , dále o úhel 270° proti směru hodinových ručiček kolem osy y , a nakonec o úhel 180° proti směru hodinových ručiček kolem osy x . Kde se bude vektor nacházet po provedení těchto rotací?

Řešení:

Začneme znovu tím, že si napíšeme matice jednotlivých rotací. V tomto případě budou matice rotací vypadat následovně:

$$R_X(180^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(180^\circ) & -\sin(180^\circ) \\ 0 & \sin(180^\circ) & \cos(180^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_Y(270^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(270^\circ) & 0 & \sin(270^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(270^\circ) & 0 & \cos(270^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_Z(30^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) & 0 \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úlohu vyřešíme tak, že nejdříve vynásobíme matici $R_X(180^\circ)$ zprava maticí $R_Y(270^\circ)$. Novou matici (kterou si dále označíme jako X) pak vynásobíme maticí $R_Z(30^\circ)$ zprava. Celým výrazem pak vynásobíme vektor $\vec{v}$ zleva. V podstatě hledáme výraz $R_X(180^\circ) \cdot R_Y(270^\circ) \cdot R_Z(30^\circ) \cdot \vec{v}$.

$$\begin{aligned} R_X(180^\circ) \cdot R_Y(270^\circ) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \cdot R_Z(30^\circ) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Výslednou maticí (kterou budu dále značit jako Y) nyní zprava vynásobíme vektor $\vec{v} = (1; 2; 4)^T$. Tím dostaneme nový vektor $\vec{v}'$.

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= Y \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= (-1 - 2\sqrt{3}; \quad 2 - \sqrt{3}; \quad -1)^T\end{aligned}$$

Příklad 3:

Mějme vektor $\vec{v} = (1; 1; 3)^T$. Bude rotovat o úhel 45° po směru hodinových ručiček kolem osy y , dále o úhel 60° proti směru hodinových ručiček kolem osy z , a nakonec o úhel 45° proti směru hodinových ručiček kolem osy y . Kde se bude vektor nacházet po provedení těchto rotací?

Řešení:

Matice jednotlivých rotací budou vypadat následovně:

$$R_{Y1}(45^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & 0 & \sin(45^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(45^\circ) & 0 & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_Z(60^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) & 0 \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{Y2}(45^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & 0 & -\sin(45^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(45^\circ) & 0 & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Úlohu vyřešíme tak, že nejdříve vynásobíme matici $R_{Y1}(45^\circ)$ zprava maticí $R_Z(60^\circ)$. Novou maticí (kterou si dále označíme jako X) pak vynásobíme maticí $R_{Y2}(45^\circ)$ zprava. Celým výrazem pak zprava vynásobíme vektor $\vec{v}$. V podstatě hledáme výraz $R_{Y1}(45^\circ) \cdot R_Z(60^\circ) \cdot R_{Y2}(45^\circ) \cdot \vec{v}$.

$$\begin{aligned}
R_{Y_1}(45^\circ) \cdot R_Z(60^\circ) &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X \cdot R_{Y_2}(45^\circ) &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Výslednou maticí (kterou budu dále značit jako Y) nyní zprava vynásobíme vektor $\vec{v} = (1; 1; 3)^T$. Tím dostaneme souřadnice nového vektoru $\vec{v'}$.

$$\begin{aligned}\vec{v}' = Y \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{6 + \sqrt{6}}{4}; \quad \frac{1 + \sqrt{6}}{2}; \quad \frac{10 - \sqrt{6}}{4} \right)^T\end{aligned}$$

V tomto příkladu jsme v podstatě popsali rotaci podle osy dané vektorem $\vec{v} = (1; 0; 1)^T$. V dalších příkladech si ukážeme detailněji, jak rotovat podle osy zadané vektorem.

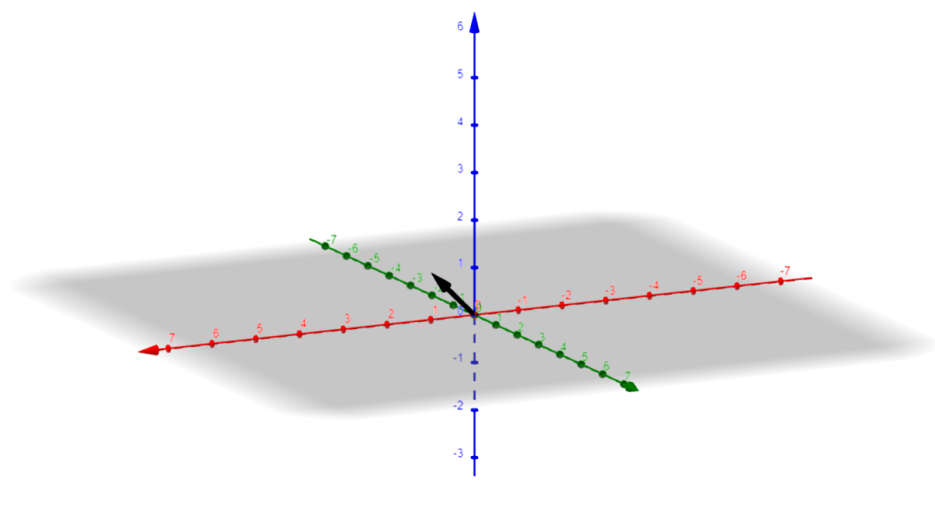
Příklad 4:

Popište pomocí ortogonálních matic rotaci o 30° po směru hodinových ručiček kolem osy dané vektorem $\vec{v} = (1; 0; 1)^T$.

Řešení:

Jelikož Eulerovými úhly umíme popsat pouze rotaci kolem os x , y a z , musíme nejdříve vektor $\vec{v}$ otočit tak, aby některou z těchto os procházel.

Na obrázku níže je červeně vykreslena osa x , zeleně osa y a modře osa z . Dále je černě vykreslen vektor $\vec{v}$.



Obr. 6: vektor $\vec{v} = (1; 0; 1)^T$

Vidíme, že vektor s osou x svírá úhel 45° . Provedeme rotaci o 45° proti směru hodinových ručiček podle osy y . Vektor se pak otočí na osu x .

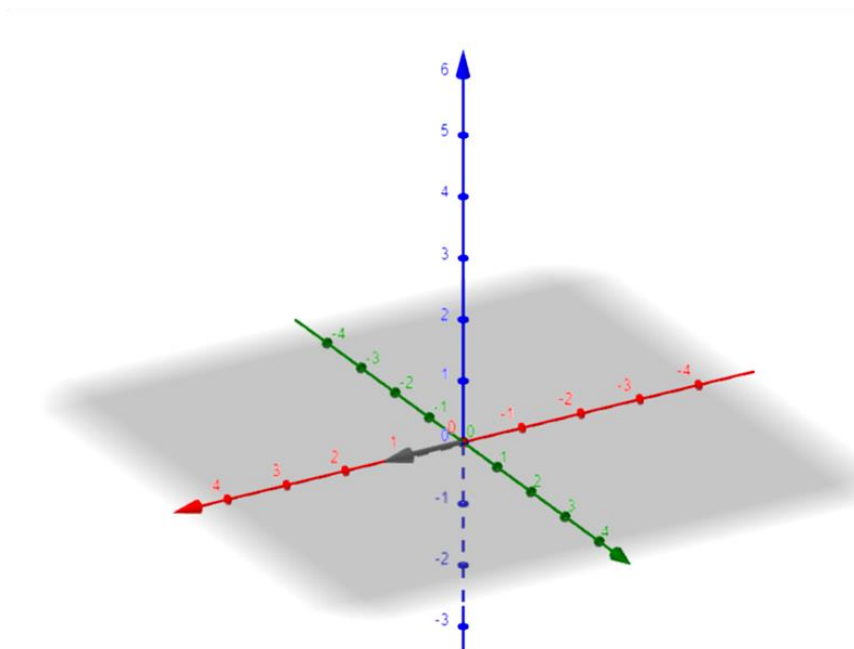
Matice rotace bude vypadat následovně:

$$R_Y(45^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & 0 & \sin(45^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(45^\circ) & 0 & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Maticí $R_Y(45^\circ)$ vynásobíme zleva vektor $\vec{v}$:

$$R_Y(45^\circ) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dostali jsme nový vektor $\vec{v}' = (\sqrt{2}; 0; 0)^T$. Vektor $\vec{v}'$ má stejnou velikost, jako původní vektor $\vec{v}$ a prochází osou x , jak je zakresleno na následujícím obrázku.



Obr. 7: vektor $\vec{v}' = (\sqrt{2}; 0; 0)^T$

Nyní můžeme popsat rotaci o 30° po směru hodinových ručiček kolem osy x , protože tuto rotaci už umíme popsat maticí. Matice rotace bude vypadat následovně:

$$R_X(30^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(30^\circ) & \sin(30^\circ) \\ 0 & -\sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Nakonec provedeme rotaci o 45° podle osy y , tentokrát po směru hodinových ručiček, abychom vrátili vektor $\vec{v}'$ do původní polohy (tedy znovu získali vektor $\vec{v}$). Matice rotace bude vypadat takto:

$$R_Y^{-1}(45^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Rotace kolem osy dané vektorem $\vec{v}$ je dána následujícím součinem:

$$R = R_Y^{-1}(45^\circ) \cdot R_X(30^\circ) \cdot R_Y(45^\circ)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Výsledná matice rotace bude mít tvar:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{4 + \sqrt{12}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{12} - 2}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{12} - 2}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{4 + \sqrt{12}}{8} \end{pmatrix}$$

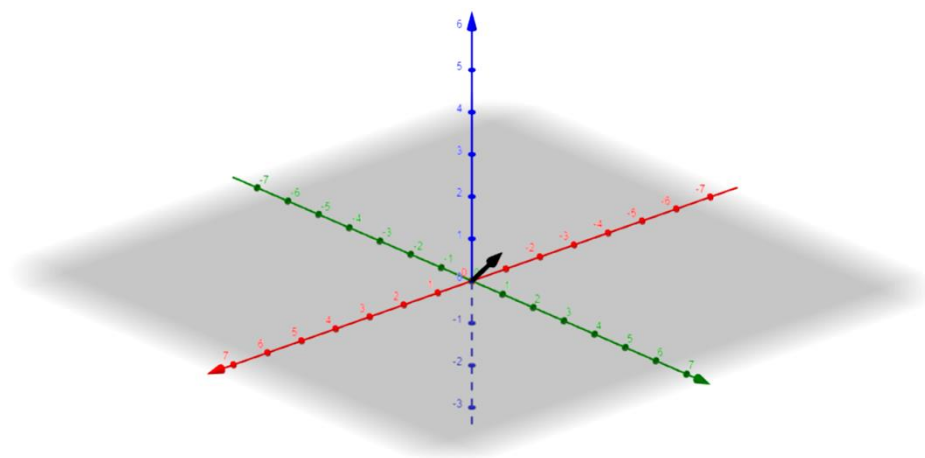
Analogicky bychom mohli příklad vyřešit tím, že bychom nejdříve vektor $\vec{v}$ otočili na osu z . Další postup by byl taktéž analogický.

Příklad 5:

Popište pomocí ortogonálních matic rotaci o 60° proti směru hodinových ručiček kolem osy dané vektorem $\vec{v} = (0; 1; 1)^T$.

Řešení:

Na obrázku níže je červeně vykreslena osa x , zeleně osa y a modře osa z . Dále je černě vykreslen vektor $\vec{v}$.



Obr. 8: vektor $\vec{v} = (0; 1; 1)^T$

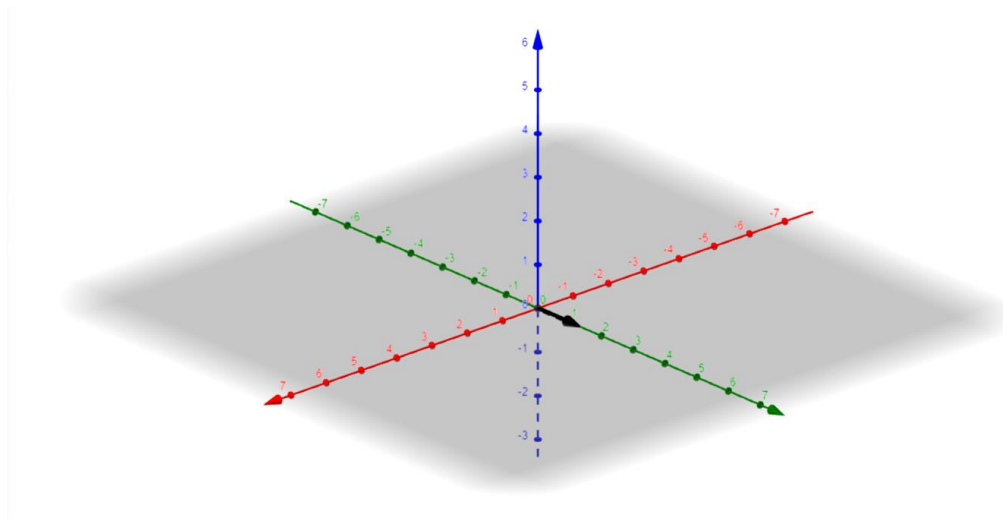
Stejně jako v předešlém příkladě musíme provést rotaci tak, aby se vektor $\vec{v}$ zobrazil na některou ze souřadných os. Tentokrát ho otočíme na osu y . To provedeme tak, že jím budeme rotovat o 45° po směru hodinových ručiček kolem osy x . Matice rotace bude vypadat následovně:

$$R_x(45^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & \sin(45^\circ) \\ 0 & -\sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Maticí $R_X(45^\circ)$ vynásobíme zleva vektor $\vec{v}$:

$$R_X(45^\circ) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dostali jsme nový vektor $\vec{v}' = (0; \sqrt{2}; 0)^T$. Vektor $\vec{v}'$ má stejnou velikost, jako původní vektor $\vec{v}$ a prochází osou y , jak je zakresleno na následujícím obrázku.



Obr. 9: vektor $\vec{v}' = (0; \sqrt{2}; 0)^T$

Nyní můžeme popsat rotaci o 60° proti směru hodinových ručiček kolem osy y . Matice této rotace bude vypadat následovně:

$$R_Y(60^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(60^\circ) & 0 & \sin(60^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(60^\circ) & 0 & \cos(60^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Nakonec provedeme rotaci o 45° podle osy x , tentokrát proti směru hodinových ručiček. Matice rotace bude vypadat takto:

$$R_X^{-1}(45^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Rotace kolem osy dané vektorem $\vec{v}$ je dána následujícím součinem:

$$R = R_X^{-1}(45^\circ) \cdot R_Y(60^\circ) \cdot R_X(45^\circ)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Výsledná matice rotace bude mít tvar:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

3 Kvaterniony

V této kapitole si vysvětlíme pojem kvaternion. Uvedeme definici kvaternionů a popíšeme některé jejich vlastnosti. Řekneme si, jaké aritmetické operace lze s kvaterniony provádět a jaký mají kvaterniony význam pro popis rotací v $\mathbb{R}^3$.

3.1 Motivace

Reálná čísla můžeme zobrazit jako body ležící na jednorozměrné číselné ose, tj. na přímce. Podobně můžeme čísla komplexní znázornit jako body v dvojrozměrné rovině. V této rovině máme dvě základní jednotky, 1 a i (imaginární číslo, $i = \sqrt{-1}$, tedy $i^2 = -1$). Každé komplexní číslo je pak kombinací těchto jednotek.

Rovinu, ve které znázorňujeme komplexní čísla, nazýváme **komplexní rovina**. Bývá také označována jako Gaussova rovina, Argandova rovina nebo Cauchyho rovina.

Na osu x komplexní roviny vynášíme reálnou část komplexního čísla. Proto osu x označujeme jako **osu reálnou**. Na osu y pak vynášíme imaginární část komplexního čísla (tj. násobky čísla i) a nazýváme ji **osou imaginární**.

Komplexní čísla obecně zapisujeme ve tvaru $z = x + iy$, kde x je souřadnice bodu na reálné ose a y je souřadnice bodu na ose komplexní. Existují však také čísla, která mají tři komplexní jednotky. Nazýváme je **kvaterniony** a budeme je používat pro realizaci rotací v $\mathbb{R}^3$.

[7 – s. 136, 137]

3.2 Co jsou kvaterniony a jaké mají vlastnosti

Definice 2.1:

Kvaterniony jsou čísla tvaru $x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, kde α, β, γ a δ jsou reálná čísla.

Písmena i, j a k značí imaginární jednotky, pro které platí následující vztahy:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k \quad ji = -k$$

$$jk = i \quad kj = -i$$

$$ki = j \quad ik = -j$$

[4 – s. 39, 40; 23]

Vynásobíme-li rovnost $ijk = -1$ z obou stran prvkem k , dostaneme $kij = -1$. Podobně také platí, že $jki = -1$. Imaginární jednotky i, j, k jsou tedy cyklicky záměnné.

Vynásobíme-li pouze jedním k zprava, dostaneme $ij = k$. Symetricky platí, že $jk = i$ a $ki = j$. Z rovnice $ij = k$ vynásobením i zleva dostaneme rovnost $j = -ik$. Podobně také $k = -ji$ a $kj = -i$. To znamená, že generátory jsou antikomutativní. Každý kvaternion ale zřejmě komutuje s reálným číslem. Reálné číslo je samo kvaternionem, ve kterém $\beta = \gamma = \delta = 0$. [21]

Množinu kvaternionů obvykle značíme písmenem $\mathbb{H}$ podle jejich objevitele Williama Rowana Hamiltona.

Definice 2.2 [17]:

Mějme kvaternion $x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. **Konjugovaným** (resp. **sduženým**) **kvaternionem** nazveme kvaternion tvaru $\bar{x} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$.

Definice 2.3 [17]:

Kvaternion $x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ nazveme **ryze imaginárním kvaternionem**, je-li $\alpha = 0$.

Nad kvaterniony lze definovat následující operace [18].

Mějme kvaterniony x_1 a x_2 :

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k$$

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k$$

Součet kvaternionů x_1 a x_2 :

$$x_1 + x_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)i + (\gamma_1 + \gamma_2)j + (\delta_1 + \delta_2)k$$

Rozdíl kvaternionů x_1 a x_2 :

$$x_1 - x_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)i + (\gamma_1 - \gamma_2)j + (\delta_1 - \delta_2)k$$

Násobení kvaternionu x_1 **reálným číslem** q :

$$qx_1 = q\alpha_1 + q\beta_1 i + q\gamma_1 j + q\delta_1 k$$

Operace sčítání kvaternionů a násobení kvaternionu reálným číslem jsou komutativní a asociativní.

Násobení kvaternionů x_1 a x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 x_2 = & (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 - \delta_1 \delta_2) + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 + \gamma_1 \delta_2 - \\ & \delta_1 \gamma_2)i \\ & + (\alpha_1 \gamma_2 - \beta_1 \delta_2 + \gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \beta_2)j \\ & + (\alpha_1 \delta_2 + \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \alpha_2)k \end{aligned}$$

Operace násobení kvaternionů není komutativní. Ukážeme si to na příkladu:

Příklad 1:

Mějme kvaterniony x_1 a x_2 :

$$x_1 = 3 + 2i - 2j + k$$

$$x_2 = 2 - 3i + 2j + 2k$$

Vypočítáme nejdříve součin x_1x_2 :

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= (3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) - (-2) \cdot 2 - 2 \cdot 2) \\ &\quad + (3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 - 2 \cdot 2)i \\ &\quad + (3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-3))j \\ &\quad + (3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - (-2) \cdot (-3) + 2 \cdot 2)k \\ &= 12 - 13i - 8j + 11k \end{aligned}$$

Dále vypočítáme součin x_2x_1 :

$$\begin{aligned} x_2x_1 &= (2 \cdot 3 - (-3) \cdot 2 - 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 2) \\ &\quad + (2 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-2))i \\ &\quad + (2 \cdot (-2) - (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2)j \\ &\quad + (2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-2) - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3)k \\ &= 12 + 3i + 12j + 12k \end{aligned}$$

Vidíme, že výsledky součinů se nerovnají, a násobení kvaternionů tedy skutečně není komutativní.

Definice 2.5 [3]:

Normu kvaternionu $|x|$ definujeme vztahem $|x| = \sqrt{x\bar{x}}$.

Nyní si obecným výpočtem ukážeme, že norma kvaternionu je vždy reálné číslo:

$$\begin{aligned}|x| &= \sqrt{x\bar{x}} = \sqrt{(\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \cdot (\alpha_1 - \beta_1 i - \gamma_1 j - \delta_1 k)} \\ &= \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2}\end{aligned}$$

Všechny sčítance pod výslednou odmocninou jsou reálná čísla. Proto i celý tento výraz musí být reálné číslo.

Definice 2.4 [20]:

Jednotkový kvaternion je každý kvaternion x , pro který platí: $|x| = 1$

3.3 Okruh kvaternionů

Abychom množinu M mohli nazvat okruhem, musí být splněno několik podmínek [28]:

- 1) Uzavřenost množiny vůči sčítání a násobení:
$$(\forall x_1, x_2 \in M)(x_1 + x_2 \in M)$$
$$(\forall x_1, x_2 \in M)(x_1 \cdot x_2 \in M)$$
- 2) Asociativita sčítání i násobení prvků množiny:
$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in M)((x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3))$$
$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in M)((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3))$$
- 3) Existence neutrálního prvku vzhledem ke sčítání:
$$(\exists y \in M)(\forall x \in M)(x + y = y + x = x)$$
- 4) Existence opačného prvku vzhledem ke sčítání:
$$(\forall x \in M)(\exists y \in M)(x + y = y + x = 0)$$
- 5) Komutativita sčítání:
$$(\forall x_1, x_2 \in M)(x_1 + x_2 = x_2 + x_1)$$
- 6) Existence jednotkového prvku vůči násobení
$$(\exists y \in M)(\forall x \in M)(x \cdot y = y \cdot x = x)$$
- 7) Distributivita násobení vůči sčítání:
$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in M)(x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3)$$
$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in M)((x_2 + x_3) \cdot x_1 = x_2 \cdot x_1 + x_3 \cdot x_1)$$

Věta 2.2 [25, 28]: *Kvaterniony s operacemi sčítání a násobení tvoří okruh $(\mathbb{H}, +, \cdot)$.*

Důkaz věty 2.2:

Důkaz vlastnosti 1 (uzavřenost množiny vůči sčítání):

Mějme kvaterniony x_1 a x_2 :

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k$$

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k$$

Spočítáme nejdříve jejich součet:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) + (\alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)i + (\gamma_1 + \gamma_2)j + (\delta_1 + \delta_2)k \end{aligned}$$

Jelikož každé z čísel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ je reálné, musí také jejich součty $(\alpha_1 + \alpha_2), (\beta_1 + \beta_2), (\gamma_1 + \gamma_2), (\delta_1 + \delta_2)$ být reálné. Výraz, který jsme získali, tedy opět leží v množině $\mathbb{H}$. Tím jsme dokázali uzavřenost množiny vůči sčítání.

Nyní provedeme důkaz uzavřenosti vůči násobení.

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k) \\ &= (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 - \delta_1 \delta_2) \\ &\quad + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 + \gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2)i \\ &\quad + (\alpha_1 \gamma_2 - \beta_1 \delta_2 + \gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \beta_2)j \\ &\quad + (\alpha_1 \delta_2 + \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \alpha_2)k \end{aligned}$$

Každý z výrazů v závorkách je reálné číslo. Proto celý výraz opět představuje kvaternion. Tím jsme dokázali uzavřenost množiny vůči násobení.

Důkaz vlastnosti 2 (Asociativita sčítání i násobení prvků množiny):

Mějme kvaterniony x_1, x_2 a x_3 :

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k$$

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k$$

$$x_3 = \alpha_3 + \beta_3 i + \gamma_3 j + \delta_3 k$$

Nejdříve dokážeme asociativitu sčítání prvků.

$$(x_1 + x_2) + x_3 = ((\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)i + (\gamma_1 + \gamma_2)j + (\delta_1 + \delta_2)k)$$

$$+(\alpha_3 + \beta_3 i + \gamma_3 j + \delta_3 k)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)i + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)j$$

$$+(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)k$$

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k)$$

$$+((\alpha_2 + \alpha_3) + (\beta_2 + \beta_3)i + (\gamma_2 + \gamma_3)j$$

$$+(\delta_2 + \delta_3)k)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)i + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)j$$

$$+(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)k$$

Vidíme, že oba výsledky se rovnají. Tím jsme dokázali asociativitu sčítání. Obdobně bychom provedli důkaz asociativity násobení.

Pokud bychom spočítali hodnotu součinu $(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$ a poté hodnotu součinu $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$, v obou případech by výsledkem byl následující výraz:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \beta_1\beta_2\alpha_3 - \gamma_1\gamma_2\alpha_3 - \delta_1\delta_2\alpha_3 - \alpha_1\beta_2\beta_3 \\ -\beta_1\alpha_2\beta_3 - \gamma_1\delta_2\beta_3 + \delta_1\gamma_2\beta_3 - \delta_1\gamma_2\gamma_3 \\ +\beta_1\delta_2\gamma_3 - \alpha_1\delta_2\delta_3 - \beta_1\gamma_2\delta_3 + \gamma_1\beta_2\delta_3 - \delta_1\alpha_2\delta_3 \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2\beta_3 - \beta_1\beta_2\beta_3 - \gamma_1\gamma_2\beta_3 - \delta_1\delta_2\beta_3 + \alpha_1\beta_2\alpha_3 \\ +\beta_1\alpha_2\alpha_3 + \gamma_1\delta_2\alpha_3 - \delta_1\gamma_2\alpha_3 + \delta_1\gamma_2\delta_3 \\ -\beta_1\delta_2\delta_3 + \gamma_1\alpha_2\alpha_3 + \delta_1\beta_2\delta_3 + \alpha_1\delta_2\gamma_3 \\ +\beta_1\gamma_2\gamma_3 - \gamma_1\beta_2\gamma_3 + \delta_1\alpha_2\gamma_3 \end{pmatrix} i \\
& + \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2\gamma_3 - \beta_1\beta_2\gamma_3 - \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \delta_1\delta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_2\delta_3 \\ -\beta_1\alpha_2\delta_3 + \gamma_1\delta_2\gamma_3 - \gamma_1\delta_2\delta_3 + \delta_1\gamma_2\delta_3 \\ +\delta_1\gamma_2\alpha_3 - \beta_1\delta_2\alpha_3 - \gamma_1\alpha_2\delta_3 + \delta_1\beta_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2\beta_3 \\ -\beta_1\gamma_2\beta_3 + \gamma_1\beta_2\beta_3 - \delta_1\alpha_2\beta_3 \end{pmatrix} j \\
& + \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2\delta_3 - \beta_1\beta_2\delta_3 - \gamma_1\gamma_2\delta_3 - \delta_1\delta_2\delta_3 + \alpha_1\beta_2\gamma_3 \\ +\beta_1\alpha_2\gamma_3 - \delta_1\gamma_2\gamma_3 + \delta_1\gamma_2\beta_3 - \beta_1\delta_2\beta_3 \\ +\gamma_1\alpha_2\gamma_3 + \delta_1\beta_2\beta_3 + \alpha_1\delta_2\alpha_3 + \beta_1\gamma_2\alpha_3 \\ -\gamma_1\beta_2\alpha_3 + \delta_1\alpha_2\alpha_3 \end{pmatrix} k
\end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že násobení kvaternionů je asociativní.

Než začneme dokazovat vlastnost 3, dokážeme si vlastnost číslo 5, tedy že sčítání kvaternionů je komutativní. Tato vlastnost se nám bude hodit pro důkaz vlastností 3 a 4.

Důkaz vlastnosti 5 (Komutativita sčítání):

Mějme kvaterniony x_1 a x_2 :

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k$$

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k$$

Spočítáme nejdříve součet $x_1 + x_2$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) + (\alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)i + (\gamma_1 + \gamma_2)j + (\delta_1 + \delta_2)k \end{aligned}$$

Dále spočítáme součet $x_2 + x_1$:

$$\begin{aligned} x_2 + x_1 &= (\alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k) + (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \\ &= (\alpha_2 + \alpha_1) + (\beta_2 + \beta_1)i + (\gamma_2 + \gamma_1)j + (\delta_2 + \delta_1)k \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)i + (\gamma_1 + \gamma_2)j + (\delta_1 + \delta_2)k \end{aligned}$$

Vidíme, že oba výsledky se rovnají. Tímto výpočtem jsme dokázali komutativitu sčítání kvaternionů.

Důkaz vlastnosti 3 (Existence neutrálního prvku vzhledem ke sčítání):

Mějme kvaternion x a nulový kvaternion y :

$$x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$$

$$y = 0 + 0i + 0j + 0k$$

Výpočty dokážeme, že kvaternion y je neutrálním prvkem vůči sčítání.

$$\begin{aligned} x + y &= (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k) + (0 + 0i + 0j + 0k) \\ &= (\alpha + 0) + (\beta + 0)i + (\gamma + 0)j + (\delta + 0)k \\ &= \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \end{aligned}$$

Vidíme, že výsledky se sobě navzájem rovnají. Dále také vidíme, že se oba rovnají kvaternionu x . Tím jsme dokázali existenci neutrálního prvku vůči sčítání, a tím je nulový kvaternion y .

Pro výraz $y + x$ již není nutné tuto vlastnost dokazovat, jelikož už jsme dokázali, že sčítání kvaternionů je komutativní.

Důkaz vlastnosti 4 (Existence opačného prvku vzhledem ke sčítání):

Mějme kvaternion x a kvaternion y :

$$x = \alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k$$

$$y = \alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k$$

Jejich součtem bude nulový kvaternion právě tehdy, když bude platit následující:

$$\alpha_2 = -\alpha_1$$

$$\beta_2 = -\beta_1$$

$$\gamma_2 = -\gamma_1$$

$$\delta_2 = -\delta_1$$

Jsou-li čísla $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ a δ_1 reálná, pak jsou reálná také čísla $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ a δ_2 .

Nyní spočítáme součet kvaternionů x a y :

$$\begin{aligned} x + y &= (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) + (\alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \\ &\quad + ((-\alpha_1) + (-\beta_1)i + (-\gamma_1)j + (-\delta_1)k) \\ &= (\alpha_1 - \alpha_1) + (\beta_1 - \beta_1)i + (\gamma_1 - \gamma_1)j + (\delta_1 - \delta_1)k \\ &= 0 + 0i + 0j + 0k \end{aligned}$$

Součtem kvaternionů x a y je nulový kvaternion. Výpočtem jsme dokázali, že pro každý nenulový kvaternion existuje kvaternion opačný.

Pro výraz $y + x$ již není nutné tuto vlastnost dokazovat, jelikož už jsme dokázali, že sčítání kvaternionů je komutativní.

Důkaz vlastnosti 6 (Existence jednotkového prvku vůči násobení):

Mějme kvaterniony x a y :

$$x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$$

$$y = 1$$

Nyní dokážeme, že kvaternion y je jednotkovým prvkem vůči násobení.

Vypočítáme nejdříve součin $x \cdot y$.

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k) \cdot 1 = \alpha \cdot 1 + \beta i \cdot 1 + \gamma j \cdot 1 + \delta k \cdot 1 \\ &= \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \end{aligned}$$

Dále vypočítáme součin $y \cdot x$.

$$\begin{aligned} y \cdot x &= 1 \cdot (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k) = 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta i + 1 \cdot \gamma j + 1 \cdot \delta k \\ &= \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \end{aligned}$$

Vidíme, že výsledky obou součinů se rovnají a v obou případech je výsledkem kvaternion x . Tím jsme dokázali existenci jednotkového prvku vůči násobení, kterým je kvaternion $y = 1$.

Důkaz vlastnosti 7 (Distributivita násobení vůči sčítání):

Mějme kvaterniony x_1 , x_2 a x_3 :

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k$$

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k$$

$$x_3 = \alpha_3 + \beta_3 i + \gamma_3 j + \delta_3 k$$

Spočítáme nejdříve hodnotu výrazu $x_1 \cdot (x_2 + x_3)$.

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot (x_2 + x_3) &= (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \\
&\quad \cdot ((\alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k) + (\alpha_3 + \beta_3 i + \gamma_3 j + \delta_3 k)) \\
&= (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \\
&\quad \cdot ((\alpha_2 + \alpha_3) + (\beta_2 + \beta_3)i + (\gamma_2 + \gamma_3)j + (\delta_2 + \delta_3)k) \\
&= \alpha_1 \cdot (\alpha_2 + \alpha_3) - \beta_1 \cdot (\beta_2 + \beta_3) - \gamma_1 \cdot (\gamma_2 + \gamma_3) \\
&\quad - \delta_1 \cdot (\delta_2 + \delta_3) \\
&\quad + \left(\alpha_1 \cdot (\beta_2 + \beta_3) + \beta_1 \cdot (\alpha_2 + \alpha_3) \right) \cdot i \\
&\quad + \left(\alpha_1 \cdot (\gamma_2 + \gamma_3) - \beta_1 \cdot (\delta_2 + \delta_3) \right) \cdot j \\
&\quad + \left(\alpha_1 \cdot (\delta_2 + \delta_3) + \beta_1 \cdot (\gamma_2 + \gamma_3) \right) \cdot k
\end{aligned}$$

Dále spočítáme hodnotu výrazu $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$.

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 &= (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k) \\
&\quad + (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \cdot (\alpha_3 + \beta_3 i + \gamma_3 j + \delta_3 k) \\
&= (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 - \delta_1 \delta_2) \\
&\quad + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 + \gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2) i \\
&\quad + (\alpha_1 \gamma_2 - \beta_1 \delta_2 + \gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \beta_2) j \\
&\quad + (\alpha_1 \delta_2 + \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \alpha_2) k \\
&\quad + (\alpha_1 \alpha_3 - \beta_1 \beta_3 - \gamma_1 \gamma_3 - \delta_1 \delta_3) \\
&\quad + (\alpha_1 \beta_3 + \beta_1 \alpha_3 + \gamma_1 \delta_3 - \delta_1 \gamma_3) i \\
&\quad + (\alpha_1 \gamma_3 - \beta_1 \delta_3 + \gamma_1 \alpha_3 + \delta_1 \beta_3) j \\
&\quad + (\alpha_1 \delta_3 + \beta_1 \gamma_3 - \gamma_1 \beta_3 + \delta_1 \alpha_3) k \\
&= \alpha_1 \cdot (\alpha_2 + \alpha_3) - \beta_1 \cdot (\beta_2 + \beta_3) - \gamma_1 \cdot (\gamma_2 + \gamma_3) \\
&\quad - \delta_1 \cdot (\delta_2 + \delta_3) \\
&\quad + \left(\alpha_1 \cdot (\beta_2 + \beta_3) + \beta_1 \cdot (\alpha_2 + \alpha_3) \right) \cdot i \\
&\quad + \left(\alpha_1 \cdot (\gamma_2 + \gamma_3) - \beta_1 \cdot (\delta_2 + \delta_3) \right) \cdot j \\
&\quad + \left(\alpha_1 \cdot (\delta_2 + \delta_3) + \beta_1 \cdot (\gamma_2 + \gamma_3) \right) \cdot k
\end{aligned}$$

Vidíme, že oba výsledky se rovnají. Tím jsme dokázali distributivitu násobení vůči sčítání.

Dále musíme dokázat, že tato vlastnost platí i pro opačné pořadí činitelů, tedy že platí $(x_2 + x_3) \cdot x_1 = x_2 \cdot x_1 + x_3 \cdot x_1$.

Vypočítáme nejdříve hodnotu výrazu $(x_2 + x_3) \cdot x_1$:

$$\begin{aligned}
 (x_2 + x_3) \cdot x_1 &= (\alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k + \alpha_3 + \beta_3 i + \gamma_3 j + \delta_3 k) \\
 &\quad \cdot (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \\
 &= ((\alpha_2 + \alpha_3) + (\beta_2 + \beta_3)i + (\gamma_2 + \gamma_3)j + (\delta_2 + \delta_3)k) \\
 &\quad \cdot (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) - \beta_1(\beta_2 + \beta_3) \\ -\gamma_1(\gamma_2 + \gamma_3) - \delta_1(\delta_2 + \delta_3) \end{pmatrix} \\
 &\quad + \begin{pmatrix} \alpha_1(\beta_2 + \beta_3) + \beta_1(\alpha_2 + \alpha_3) \\ +\gamma_1(\delta_2 + \delta_3) - \delta_1(\gamma_2 + \gamma_3) \end{pmatrix} i \\
 &\quad + \begin{pmatrix} \alpha_1(\gamma_2 + \gamma_3) - \beta_1(\delta_2 + \delta_3) \\ +\gamma_1(\alpha_2 + \alpha_3) + \delta_1(\beta_2 + \beta_3) \end{pmatrix} j \\
 &\quad + \begin{pmatrix} \alpha_1(\delta_2 + \delta_3) + \beta_1(\gamma_2 + \gamma_3) \\ -\gamma_1(\beta_2 + \beta_3) + \delta_1(\alpha_2 + \alpha_3) \end{pmatrix} k
 \end{aligned}$$

Dále vypočítáme hodnotu výrazu $x_2 \cdot x_1 + x_3 \cdot x_1$:

$$\begin{aligned}
x_2 \cdot x_1 + x_3 \cdot x_1 &= (\alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k) \cdot (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \\
&\quad + (\alpha_3 + \beta_3 i + \gamma_3 j + \delta_3 k) \cdot (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \\
&= (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k) \\
&\quad + (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) \cdot (\alpha_3 + \beta_3 i + \gamma_3 j + \delta_3 k) \\
&= \begin{bmatrix} (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 - \delta_1 \delta_2) \\ +(\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 + \gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2) i \\ +(\alpha_1 \gamma_2 - \beta_1 \delta_2 + \gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \beta_2) j \\ +(\alpha_1 \delta_2 + \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \alpha_2) k \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} (\alpha_1 \alpha_3 - \beta_1 \beta_3 - \gamma_1 \gamma_3 - \delta_1 \delta_3) \\ +(\alpha_1 \beta_3 + \beta_1 \alpha_3 + \gamma_1 \delta_3 - \delta_1 \gamma_3) i \\ +(\alpha_1 \gamma_3 - \beta_1 \delta_3 + \gamma_1 \alpha_3 + \delta_1 \beta_3) j \\ +(\alpha_1 \delta_3 + \beta_1 \gamma_3 - \gamma_1 \beta_3 + \delta_1 \alpha_3) k \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) - \beta_1(\beta_2 + \beta_3) \\ -\gamma_1(\gamma_2 + \gamma_3) - \delta_1(\delta_2 + \delta_3) \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \alpha_1(\beta_2 + \beta_3) + \beta_1(\alpha_2 + \alpha_3) \\ +\gamma_1(\delta_2 + \delta_3) - \delta_1(\gamma_2 + \gamma_3) \end{pmatrix} i \\
&\quad + \begin{pmatrix} \alpha_1(\gamma_2 + \gamma_3) - \beta_1(\delta_2 + \delta_3) \\ +\gamma_1(\alpha_2 + \alpha_3) + \delta_1(\beta_2 + \beta_3) \end{pmatrix} j \\
&\quad + \begin{pmatrix} \alpha_1(\delta_2 + \delta_3) + \beta_1(\gamma_2 + \gamma_3) \\ -\gamma_1(\beta_2 + \beta_3) + \delta_1(\alpha_2 + \alpha_3) \end{pmatrix} k
\end{aligned}$$

Vidíme, že výsledky se opět rovnají. Tím jsme dokázali distributivitu násobení vůči sčítání.

3.4 Kvaterniony jako komplexní matice

Prvky $1, i, j, k$ lze reprezentovat komplexními maticemi. Tyto matice mají tvar:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Kvaterniony můžeme pomocí reálné matice zapsat následovně:

$$\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k = g + hj = \begin{pmatrix} g & h \\ -\bar{h} & \bar{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & \delta & -\gamma \\ \beta & \alpha & \gamma & \delta \\ -\delta & -\gamma & \alpha & \beta \\ \gamma & -\delta & -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

kde $g = \alpha + \beta i$ a $h = \gamma + \delta i$.

Operace sčítání a násobení kvaternionů odpovídají operacím sčítání a násobení příslušných matic. [20]

3.4 Inverzní kvaterniony

Ačkoliv násobení kvaternionů obecně není komutativní, ke každému nenulovému kvaternionu existuje inverze vůči násobení, tj. prvek splňující vztah

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

Lze ukázat, že kvaternion x^{-1} lze vyjádřit následujícím vztahem:

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{\|x\|^2}$$

Výpočet inverzního kvaternionu pro kvaternion $x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}}{\|x\|^2} &= \frac{\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k}{(\sqrt{(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k) \cdot (\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k)})^2} \\ &= \frac{\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k}{|\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2|} \end{aligned}$$

Má-li kvaternion x jednotkovou velikost, platí:

$$x^{-1} = \bar{x}$$

[16 – s.12]

Definice 2.6 (podobnost kvaternionů) [18]:

Mějme kvaterniony x_1 a x_2 :

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k$$

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k$$

Kvaterniony x_1 a x_2 jsou si podobné, pokud existuje kvaternion $y \neq 0$ takový, že platí:

$$x_1 = y^{-1} x_2 y$$

4 Geometrický význam kvaternionů pro studium rotací v Euklidovském prostoru

Jak jsme si již ukázali, rotaci v Euklidovském vektorovém prostoru lze popsat pomocí ortogonálních matic. V této kapitole si vysvětlíme, jak lze rotace v prostoru $\mathbb{R}^3$ popsat pomocí kvaternionů. Dále také spočítáme několik příkladů.

4.1 Rotace

Každá rotace v $\mathbb{R}^3$ je určena osou rotace a úhlem α . Osa je určena vektorem $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$, pro jednoduchost uvažujeme jednotkový vektor. Nyní si popíšeme, jakým způsobem lze rotace popsat pomocí kvaternionů.

Pro každou rotaci o úhel α v proti směru hodinových ručiček kolem osy dané vektorem $\vec{v}$ lze sestavit kvaternion v následujícím tvaru:

$$x = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + (v_1i + v_2j + v_3k) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Příslušná rotace v $\mathbb{R}^3$ je poté dána vztahem $\vec{u}' = x \cdot \vec{u} \cdot x^{-1}$, kde $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ je obecný vektor, který popisujeme jako kvaternion $u_1i + u_2j + u_3k$.

[16, 20]

Korektnost výrazu plyne z následující věty.

Věta 2.3 [21] :

Pro libovolný ryze imaginární kvaternion $\vec{u}$ a jednotkový kvaternion x platí, že součin $x \cdot \vec{u} \cdot x^{-1}$ je opět ryze imaginární.

Rotace kolem osy x:

Rotaci kolem osy x proti směru hodinových ručiček o úhel φ nám obecně popisuje kvaternion tvaru $x_1 = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Chceme-li rotovat vektorem $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)^T = u_1i + u_2j + u_3k$, pro výsledný vektor $\vec{u'}$ obecně platí vztah:

$$\begin{aligned}\vec{u'} &= x_1 \cdot \vec{u} \cdot x_1^{-1} \\ &= \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \cdot (u_1i + u_2j + u_3k) \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \\ &= u_1i + (u_2 \cdot \cos \varphi - u_3 \cdot \sin \varphi)j + (u_3 \cdot \cos \varphi + u_2 \cdot \sin \varphi)k\end{aligned}$$

To odpovídá ortogonální matici

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

a rotaci vektoru $\vec{u}$ podle vztahu

$$\vec{u'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Rotace kolem osy y:

Rotaci kolem osy y proti směru hodinových ručiček o úhel φ nám obecně popisuje kvaternion $x_2 = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Chceme-li rotovat vektorem

$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)^T = u_1i + u_2j + u_3k$, pro výsledný vektor $\vec{u}'$ obecně platí vztah:

$$\begin{aligned}\vec{u}' &= x_2 \cdot \vec{u} \cdot x_2^{-1} \\ &= \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \cdot (u_1i + u_2j + u_3k) \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \\ &= (u_1 \cdot \cos \varphi + u_3 \cdot \sin \varphi)i + u_2j + (-u_1 \cdot \sin \varphi + u_3 \cdot \cos \varphi)k\end{aligned}$$

To odpovídá ortogonální matici

$$R_Y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

a rotaci vektoru $\vec{u}$ podle vztahu

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Rotace kolem osy z:

Rotaci kolem osy z proti směru hodinových ručiček o úhel φ nám obecně popisuje kvaternion $x_3 = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + k \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Chceme-li rotovat vektorem

$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)^T = u_1i + u_2j + u_3k$, pro výsledný vektor $\vec{u}'$ obecně platí vztah:

$$\begin{aligned}\vec{u}' &= x_3 \cdot \vec{u} \cdot x_3^{-1} \\ &= \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + k \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \cdot (u_1i + u_2j + u_3k) \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - k \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \\ &= (u_1 \cdot \cos \varphi - u_2 \cdot \sin \varphi)i + (u_1 \cdot \sin \varphi + u_2 \cdot \cos \varphi)j + u_3k\end{aligned}$$

To odpovídá ortogonální matici

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

a rotaci vektoru $\vec{u}$ podle vztahu

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Rotace kolem bazových os po směru hodinových ručiček realizují konjugované kvaterniony.

4.2 Řešené příklady – kvaterniony a rotace v R3

V této části spočítáme pomocí kvaternionů dva příklady. Pro srovnání obou postupů se bude jednat o příklady, které už jsme řešili pomocí ortogonálních matic. Konkrétně půjde o příklady 1 a 5 počítané v části 1.5.2 Eulerovy úhly – příklady.

Příklad 1:

Mějme vektor $\vec{v} = (3; 8; 5)^T$. Vektor bude rotovat nejdříve o 45° po směru hodinových ručiček kolem osy z , poté o 90° po směru hodinových ručiček kolem osy y , a nakonec o 30° po směru hodinových ručiček kolem osy x . Určete, kde se bude vektor nacházet po provedení těchto rotací.

Řešení:

Vektor $\vec{v}$ rotuje nejdříve podle osy z , která je dána vektorem $\vec{v}_z = (0; 0; 1)$. Spočítáme normu tohoto vektoru:

$$\|\vec{v}_z\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

Vektor $\vec{v}_z$ má jednotkovou velikost, není tedy třeba ho normovat. Odpovídá kvaternionu $\vec{v}_z = k$.

Dále vytvoříme kvaternion, který odpovídá rotaci o 45° po směru hodinových ručiček, kolem osy z .

$$x_1 = \cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right) - k \cdot \sin\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$$

Dále vytvoříme inverzní kvaternion x_1^{-1} :

$$x_1^{-1} = \cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right) + k \cdot \sin\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$$

Rotaci vektoru $\vec{v}$ pak popisuje následující vztah:

$$\vec{v}_1 = x_1 \cdot \vec{v} \cdot x_1^{-1}$$

Dále popíšeme rotaci nového kvaternionu $\vec{v}_1$ kolem osy y , tedy osy dané vektorem $\vec{v}_y = (0; 1; 0)$, o 90° proti směru hodinových ručiček.

Stejně jako vektor $\vec{v}_Z$ má i vektor $\vec{v}_Y$ jednotkovou velikost, tedy $\|\vec{v}_Y\| = 1$. Odpovídá kvaternionu $\vec{v}_Y = j$.

Dále vytvoříme kvaternion, který odpovídá rotaci o 90° kolem osy y po směru hodinových ručiček.

$$\begin{aligned} x_2 &= \cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{90^\circ}{2}\right) \\ &= \cos(45^\circ) - j \cdot \sin(45^\circ) \end{aligned}$$

Jeho inverzní kvaternion x_2^{-1} bude mít tvar:

$$x_2^{-1} = \cos(45^\circ) + j \cdot \sin(45^\circ)$$

Rotaci vektoru $\vec{v}_1$ nám pak bude popisovat vztah:

$$\vec{v}_2 = x_2 \cdot \vec{v}_1 \cdot x_2^{-1}$$

Nakonec popíšeme rotaci vektoru $\vec{v}_2$ kolem osy x o 30° po směru hodinových ručiček. Osa rotace je dána vektorem $\vec{v}_X = (1; 0; 0)$, který zapíšeme ve tvaru $\vec{v}_X = i$. Kvaternion popisující tuto rotaci bude mít následující tvar:

$$x_3 = \cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \cos(15^\circ) - i \cdot \sin(15^\circ)$$

Jeho inverzní kvaternion bude mít tvar:

$$x_3^{-1} = \cos(15^\circ) + i \cdot \sin(15^\circ)$$

Poslední rotaci nám bude popisovat vztah:

$$\vec{v}_3 = x_3 \cdot \vec{v}_2 \cdot x_3^{-1}$$

Rotaci původního vektoru $\vec{v}$ popisuje následující vztah:

$$\vec{v}_3 = x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot \vec{v} \cdot x_1^{-1} \cdot x_2^{-1} \cdot x_3^{-1}$$

kde $\vec{v}$ odpovídá kvaternionu $\vec{v} = 3i + 8j + 5k$.

Výsledný vektor $\vec{v}_3$ bude mít tvar:

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 6,950949475004983 \\ 4,968329839687369 \end{pmatrix}$$

Výpočet byl proveden numericky, jelikož ho nelze rozumně realizovat symbolicky.

Výsledek odpovídá výsledku, který jsme dostali při řešení stejné úlohy pomocí ortogonálních matic.

Příklad 2:

Popište obecně pomocí kvaternionů rotaci o 60° proti směru hodinových ručiček kolem osy dané vektorem $\vec{v} = (0; 1; 1)^T$.

Řešení:

Vektor $\vec{v} = (0; 1; 1)^T$ můžeme přepsat následujícím způsobem:

$$\vec{v} = 0i + 1j + 1k = j + k$$

Abychom mohli kvaternion použít pro popis rotace, musí mít tento kvaternion jednotkovou velikost. Vydělíme tedy výraz výše normou vektoru $\vec{v}$. Výsledný výraz dále označíme jako $\vec{v}_1$.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (j + k)$$

Dále vytvoříme kvaternion popisující rotaci o 60° proti směru hodinových ručiček kolem osy dané vektorem $\vec{v}$.

$$\begin{aligned} x &= \cos\left(\frac{60^\circ}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (j + k) \cdot \sin\left(\frac{60^\circ}{2}\right) \\ &= \cos(30^\circ) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (j + k) \cdot \sin(30^\circ) \end{aligned}$$

Jeho inverzní kvaternion bude mít tvar:

$$\begin{aligned}x^{-1} &= \cos\left(\frac{60^\circ}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (j + k) \cdot \sin\left(\frac{60^\circ}{2}\right) \\&= \cos(30^\circ) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (j + k) \cdot \sin(30^\circ)\end{aligned}$$

Rotace obecného vektoru $\vec{u} = u_1i + u_2j + u_3k$, kde u_1, u_2, u_3 jsou libovolná reálná čísla, je dána vztahem $\vec{u}' = x \cdot \vec{u} \cdot x^{-1}$.

Výsledný vztah pro zadanou rotaci:

$$\begin{aligned}\vec{u}' &= \left(\cos(30^\circ) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (j + k) \cdot \sin(30^\circ)\right) \cdot \vec{u} \\&\quad \cdot \left(\cos(30^\circ) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (j + k) \cdot \sin(30^\circ)\right) \\&= \left(\frac{1}{2}u_1 - \frac{\sqrt{6}}{4}u_2 + \frac{\sqrt{6}}{4}u_3\right)i + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_3\right)j \\&\quad + \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{3}{4}u_3\right)k\end{aligned}$$

Výsledek odpovídá matici R odvozené v kapitole o Eulerových úhlech:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

5 Závěr

V první části bakalářské práce jsme se zabývali ortogonálními maticemi a jejich vlastnostmi. Vysvětlili jsme si, jak ověřit, zda je daná matice ortogonální, a vyřešili na toto téma několik příkladů. Popsali jsme, jaký tvar mohou obecně mít ortogonální matice 2. řádu, a jak tyto matice popisují rotace a reflexe vektorů v $\mathbb{R}^2$.

Dále jsme si popsali tzv. Eulerovy úhly a jejich využití pro popis rotací vektorů v $\mathbb{R}^3$. Na dané téma jsme opět vyřešili několik příkladů.

V druhé části práci jsme si definovali kvaterniony a popsali některé jejich důležité vlastnosti. Vysvětlili jsme si, proč množina kvaternionů tvoří okruh. Dále jsme si popsali, jakým způsobem lze pomocí kvaternionů popisovat rotace vektorů v $\mathbb{R}^3$. Nakonec jsme vybrali dva příklady dříve vyřešené pomocí Eulerových úhlů, a vyřešili je znovu pomocí kvaternionů. Výsledky odpovídaly.

Hlavní výhodou kvaternionů je, že můžeme snadno rotovat kolem libovolné osy, kdežto při používání Eulerových úhlů musíme vždy složit několik rotací tak, abychom rotovali kolem bázové osy.

V praxi se kvaterniony využívají například v robotice, kde s jejich pomocí například realizujeme otáčení robotických ramen.

Zdroje

Knižní zdroje

- 1) CONWAY, John H. a Derek A. SMITH. *On Quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry*. Wellesley: A K Peters, 2003. ISBN 978-1568811345.
- 2) KLÍČ, Alois. *Matematika I ve strukturovaném studiu*. Vyd. 2., přeprac. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, 2007. ISBN 978-80-7080-656-2.
- 3) KUIPERS, Jack B. *Quaternions and rotation sequences: a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality*. 5th print., 1st paperback ed. Princeton: Princeton University Press, 2002. ISBN 978-0691102986.
- 4) MOTL, Luboš a Miloš ZAHRADNÍK. *Pěstujeme lineární algebru*. Dot. Praha: Karolinum, 1997. ISBN 80-7184-186-2.
- 5) SIKORA, Roman. *DYNAMIKA: Kinematika a dynamika prostorových pohybů*. Ostrava, VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ, 2013. ISBN 978-80-248-3039-1.
- 6) SLOVÁK, Jan, Martin PANÁK, Michal BULANT, Aleš NÁVRAT a Michal VESELÝ. *Matematika drsně a svižně*. Masarykova univerzita, Brno, 2013 [cit. 2023-04-08]. ISBN 978-80-210-6308-2.
- 7) STEWART, Ian. Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta. Přeložil Jan KLÍMA. Praha: Argo, 2019. Zip (Argo: Dokořán). ISBN 978-80-7363-935-8.
- 8) ZLATOŠ, Pavol. *Lineárna algebra a geometria: cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov*. Bratislava: Marenčin PT, 2011. ISBN 978-80-8114-111-9.

Internetové zdroje

- 9) ČERNÝ, Jan. Black Blog: Matfyz, Lineární algebra II. *Blackblog.cz* [online]. 8. 3. 2022 [cit. 2023-04-10]. Dostupné z: <https://blackblog.cz/linearni-algebra-II/>
- 10) Orthogonal Matrix. *Cuemath* [online]. [cit. 2022-11.-04]. Dostupné z: <https://www.cuemath.com/algebra/orthogonal-matrix/>
- 11) HAŠEK, Roman. *OrtogonalniMatice.pdf* [online]. 30. 3. 2015 [cit. 2022-03-07]. Dostupné z: <http://home.pf.jcu.cz/~hasek/LA2/P6/OrtogonalniMatice.pdf>
- 12) VONDRÁK, Vít. *Skalární součin a ortogonalita* [online]. [cit. 2022-09.-14]. Dostupné z: https://homel.vsb.cz/~ber95/LA/Prednasky/LA_10.pdf
- 13) *17_Vlastni_cisla_a_vektory.pdf* [online]. [cit. 2022-12.-13]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/fi/podzim2012/MB101/35612194/17_Vlastni_cisla_a_vektory.pdf

- 14) JUKL, Marek. *Lekce-z-linearni-algebry.pdf* [online]. 1. 12. 2015 [cit. 2022-11.-04]. Dostupné z: <https://kag.upol.cz/data/upload/15/Lekce-z-linearni-algebry.pdf>
- 15) BALKO, Martin. *Prezentace4.pdf* [online]. 4. 3. 2022 [cit. 2022-09-14]. Dostupné z: <https://kam.mff.cuni.cz/~balko/ln22122/prezentace4.pdf>
- 16) HORÁKOVÁ, Nad'a. Využití komplexních čísel a kvaternionů v počítačové grafice. *KRAJSKÝ AKČNÍ PLÁN ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ JMK* [online]. 2022 [cit. 2023-04-10]. Dostupné z: https://kap.kr-jihomoravsky.cz/uploads/attachment/attachment_file/147795/01_Komplexni_cisla_a_kvaterniony_2022.pdf
- 17) PROŠKOVÁ, Jitka. *Kvaterniony, duální kvaterniony a jejich aplikace* [online]. 17. 6. 2010 [cit. 2022-10.-08]. Dostupné z: http://mat.fsv.cvut.cz/KomiseVSTEZ/18sk/files/proskova_prezentace.pdf
- 18) VESELÝ, Martin. *Algoritmus pro hledání vlastních čísel a kvaternionových matic* [online]. 4. 6. 2011 [cit. 2022-11.-04]. Dostupné z: http://mat.fsv.cvut.cz/KomiseVSTEZ/19sk/files/vesely_prezentace.pdf
- 19) HAVRLANT, Lukáš. *Matematika polopatě: Skalární součin*. *Www.matweb.cz* [online]. [cit. 2023-04-08]. Dostupné z: <https://www.matweb.cz/skalarni-soucin/>
- 20) BLAŽKOVÁ, Eva a Zbyněk ŠÍR. *Rotace ve 3D a kvaterniony* [online]. 29. 10. 2014 [cit. 2022-11.-04]. Dostupné z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~sir/soubory/Kvaterniony.pdf>
- 21) *QKvaternion.pdf* [online]. 4. 9. 2020 [cit. 2022-11.-04]. Dostupné z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~holub/soubory/QKvaternion.pdf>
- 22) *04 Lineární kombinace vektorů.pdf*. *Www.realisticky.cz* [online]. 9. 3. 2021 [cit. 2023-02.-13]. Dostupné z: <http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20S%C5%A0/07%20Analytick%C3%A1%20geometrie/02%20Vektory/04%20Line%C3%A1rn%C3%AD%20kombinace%20vektor%C5%AF.pdf>
- 23) *Norma a úhel vektorů: Úloha číslo: 1436. Reseneulohy.cz: Sbírka řešených úloh, Matematika, Lineární algebra* [online]. 2016 [cit. 2023-04-10]. Dostupné z: <https://reseneulohy.cz/1436/norma-a-uhel-vektoru>
- 24) KREJSA, Jiří. *Kinematika, přednáška č.11b: Sférický pohyb - Eulerovy úhly a rovnice*. *YouTube* [online]. VUT Brno, FSI, UMTMB, 14. 4. 2020 [cit. 2023-01-29]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=a73WqXjtODA>
- 25) CLARK, W. Edwin. *Elementary Abstract Algebra* [online]. 1. 2. 2023 [cit. 2022-02.-03]. Dostupné z: <file:///C:/Users/hp/Downloads/Full.pdf>
- 26) EISNER, Jan. *LA1-prednaska-A4.pdf: Lineární algebra (UMB 551)* [online]. 2014 [cit. 2023-04-08]. Dostupné z: <http://fix.prf.jcu.cz/~eisner/lock/UMB-551/LA1-prednaska-A4.pdf>
- 27) STANOVSKÝ, David. *GRUPY: STRUČNÝ NÁVOD V KONTEXTU LINEÁRNÍ ALGEBRY* [online]. In: . s. 3 [cit. 2023-04-08]. Dostupné z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~barto/LinAlg/grupy.pdf>

- 28) ZALABOVÁ, Lenka. *Algebra* [online]. In: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Přírodovědecká fakulta, Centrum pro přírodovědné vzdělávání, 2022, s. 11 [cit. 2023-04-02]. ISBN 978-80-7394-952-5. Dostupné z: <https://publi.cz/books/2120/index.html#08>