

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

**ANALÝZA ŘEŠENÍ ÚLOH 2. KOLA
56. ROČNÍKU MO V JIHOČESKÉM
KRAJI**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Radovan VELC

České Budějovice 2009

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích dne 20.4.2009

.....

Anotace

Název: Analýza řešení úloh 2. kola 56. ročníku MO v jihočeském kraji

Vypracoval: Radovan Velc

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Klíčová slova: Matematická olympiáda, didaktika matematiky, dělení mnohočlenu mnohočlenem, Pythagorova věta, Thaletova kružnice.

Obsahem této práce je provedení analýzy krajského kola matematické olympiády, zahrnující statistiku úspěšnosti žáků v jednotlivých úlohách, analýzu jejich postupů a rozbor chyb, kterých se dopouštěli. Práce by měla sloužit jako ucelený přehled řešení úloh 56. ročníku MO a jako studijní materiál pro účastníky matematické olympiády.

Abstract

Title: The analysis of problem solutions in 2nd round of 56th year of the Mathematical olympiad in South Bohemia.

Author: Radovan Velc

Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Keywords: Mathematical olympiad, mathematics didactics, polynomial division, Pythagorean theorem, Thales' theorem.

The purpose of this thesis is the analysis of the 2nd round of the mathematical olympiad, including the statistics of the success rate of the students in particular problems, analysis of their procedures and error analysis. This thesis should serve as a survey of the problems of 56th year of MO and as a study text for the mathematical olympiad participants.

Poděkování

Děkuji panu RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D. za jeho odborné vedení, cenné rady a připomínky, které mi poskytoval.

Obsah

1	ÚVOD	8
2	KATEGORIE B.....	9
2.1	ÚLOHA B-1	9
2.1.1	Zadání úlohy.....	9
2.1.2	Vzorové řešení	9
2.1.3	Analýza řešitelských postupů.....	11
2.1.4	Statistika úspěšnosti při řešení úlohy B-1.....	13
2.1.5	Rozbor chyb žáků.....	15
2.2	ÚLOHA B-2	16
2.2.1	Zadání úlohy.....	16
2.2.2	Vzorové řešení	16
2.2.3	Analýza řešitelských postupů.....	18
2.2.4	Statistika úspěšnosti při řešení úlohy B-2.....	18
2.2.5	Rozbor chyb žáků.....	20
2.3	ÚLOHA B-3	21
2.3.1	Zadání úlohy.....	21
2.3.2	Vzorové řešení	21
2.3.3	Analýza řešitelských postupů.....	22
2.3.4	Statistika úspěšnosti při řešení úlohy B-3.....	22
2.3.5	Rozbor chyb žáků.....	24
2.4	ÚLOHA B-4	25
2.4.1	Zadání úlohy.....	25
2.4.2	Vzorové řešení	25
2.4.3	Analýza řešitelských postupů.....	27
2.4.4	Statistika úspěšnosti při řešení úlohy B-4.....	30
2.4.5	Rozbor chyb žáků.....	31
2.5	SOUHRNNÁ STATISTIKA PŘÍKLADŮ KATEGORIE B	32
3	KATEGORIE C	33
3.1	ÚLOHA C-1	33
3.1.1	Zadání úlohy.....	33
3.1.2	Vzorové řešení	33
3.1.3	Analýza řešitelských postupů.....	36
3.1.4	Statistika úspěšnosti při řešení úlohy C-1.....	38
3.1.5	Rozbor chyb žáků.....	39
3.2	ÚLOHA C-2	40
3.2.1	Zadání úlohy.....	40

3.2.2	<i>Vzorové řešení</i>	40
3.2.3	<i>Analýza řešitelských postupů</i>	42
3.2.4	<i>Statistika úspěšnosti při řešení úlohy C-2</i>	43
3.2.5	<i>Rozbor chyb žáků</i>	44
3.3	ÚLOHA C-3	45
3.3.1	<i>Zadání úlohy</i>	45
3.3.2	<i>Vzorové řešení</i>	45
3.3.3	<i>Analýza řešitelských postupů</i>	48
3.3.4	<i>Statistika úspěšnosti při řešení úlohy C-3</i>	50
3.3.5	<i>Rozbor chyb žáků</i>	51
3.4	ÚLOHA C-4	52
3.4.1	<i>Zadání úlohy</i>	52
3.4.2	<i>Vzorové řešení</i>	52
3.4.3	<i>Analýza řešitelských postupů</i>	54
3.4.4	<i>Statistika úspěšnosti při řešení úlohy C-4</i>	54
3.4.5	<i>Rozbor chyb žáků</i>	56
3.5	SOUHRNNÁ STATISTIKA PŘÍKLADŮ KATEGORIE C	57
4	ZÁVĚR	58
5	POUŽITÁ LITERATURA	59
6	SEZNAM PŘÍLOH	60

1 Úvod

Matematická olympiáda patří mezi významné školské soutěže. Byla založena roku 1951, tedy v letošním roce se konal již její 58. ročník. Matematická olympiáda byla první oborovou olympiádou, která u nás vznikla a stala se vzorem pro olympiády ostatních oborů.

Původně byla tato soutěž určena pro studenty středních škol, postupem času se rozšířila i na základní školy. Pro řešitele na základních školách (kategorie Z) jsou od 6. do 8. třídy kola domácí a školní, pro 9. třídu navíc kolo krajské. Na středních školách jsou účastníci rozděleni do tří kategorií: A (3. a 4. ročník), B (2. ročník) a C (1. ročník). Všechny středoškolské kategorie mají kolo domácí, školní a krajské, pro kategorii A se navíc koná kolo celorepublikové a mezinárodní (vznik roku 1959). V roce 1986 vznikla v soutěži nová kategorie P – programování.

Postupem let se organizace MO rozrostla i o doplňkové aktivity, jako jsou různá školení, semináře a soustředění řešitelů MO, korespondenční seminář, vydávání sbírek úloh, atd.

Přípravou matematické olympiády se zabývá ústřední výbor MO, který sestává z vědeckých pracovníků a učitelů matematiky ze škol základních, středních i vysokých.

Tato práce je zaměřena na analýzu úloh 56. ročníku krajského kola MO v jihočeském kraji, konaného v roce 2007. Je rozdělena do dvou hlavních částí podle kategorií matematické olympiády, tedy kategorie B a kategorie C. V každé kategorii jsou postupně analyzovány čtyři příklady. Každý příklad je zde rozdělen na zadání, vzorové řešení, analýzu řešitelských postupů, statistiku úspěšnosti a rozbor chyb žáků.

2 Kategorie B

Kategorie B je určena studentům druhých ročníků středních škol. V krajském kole byly zadány čtyři úlohy, na jejichž řešení měli studenti čtyři hodiny čistého času (tzn. 240 minut). Soutěž se konala v budově Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích dne 27. března 2007.

2.1 Úloha B-1

2.1.1 Zadání úlohy

Určete reálná čísla a , b , c tak, aby mnohočlen $x^4 + ax^2 + bx + c$ byl dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$ a přitom součet $a^2 + b^2 + c^2$ byl co nejmenší.

2.1.2 Vzorové řešení

Dělením mnohočlenu $x^4 + ax^2 + bx + c$ mnohočlenem $x^2 + x + 1$ zjistíme, že platí

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + a) + (b - a + 1)x + (c - a).$$

Mnohočlen $x^4 + ax^2 + bx + c$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$, právě když je zbytek při dělení nulový mnohočlen, tedy $b - a + 1 = 0$ a současně $c - a = 0$; odtud $b = a - 1, c = a$.

Potom

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (a - 1)^2 + a^2 = 3a^2 - 2a + 1 = 3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}.$$

Tento výraz má nejmenší hodnotu pro $a = \frac{1}{3}$; snadno dopočítáme

$$b = a - 1 = -\frac{2}{3}, c = a = \frac{1}{3}.$$

Jiné řešení

Mnohočlen $x^4 + ax^2 + bx + c$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$, právě když existují reálná čísla p, q , pro něž

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 + px + q).$$

Roznásobením pravé strany a porovnáním odpovídajících koeficientů dostaneme čtyři rovnice $p + 1 = 0$, $q + p + 1 = a$, $q + p = b$, $q = c$. Z nich vyjádříme $p = -1$, $q = a$, $c = a$, $b = a - 1$ a pokračujeme jako v prvním řešení.

Kritéria hodnocení

Za úplné řešení byli studenti ohodnoceni šesti body. Dva body získali za vyjádření rovnosti $x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + a) + (b - a + 1)x + (c - a)$, jeden bod za vyjádření dvou z neznámých a, b, c pomocí třetí z nich, dva body za úpravu výrazu $a^2 + b^2 + c^2$ na tvar

$$3a^2 - 2a + 1 = 3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \quad (\text{nebo } 3\left(b + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}) \quad \text{a jeden bod za správné určení čísel } a, b, c.$$

Obdobně se uděloval jeden bod za rovnost $x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 + px + q)$, jeden bod za soustavu rovnic $p + 1 = 0$, $q + p + 1 = a$, $q + p = b$, $q = c$, jeden bod za vyjádření $c = a$, $b = a - 1$ a dále jako v prvním řešení.

2.1.3 Analýza řešitelských postupů

Při řešení této úlohy hrálo klíčovou úlohu umět správně dělit polynomy. Všichni řešitelé, kteří dosáhli plného počtu bodů, použili jedno z výše uvedených vzorových řešení, kdy výraz $3a^2 - 2a + 1$ chápali jako kvadratickou funkci a hledali její vrchol. Pouze jeden student při řešení využil derivací, proto si jeho řešení přiblížíme.

Jedná se o studenta Jana Matějku z Gymnázia Jírovce v Českých Budějovicích. V první části úlohy použil druhou variantu vzorového řešení, až dospěl k výrazu $a^2 + (a-1)^2 + a^2$. K nalezení minima tohoto výrazu použil derivaci, tedy výraz si představil jako funkci (za povšimnutí stojí záměna a za x , jelikož je student zvyklý derivovat podle x):

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^2 + 1 - 2x, \\f'(x) &= 6x - 2,\end{aligned}$$

Dále $f'(x)$ položil rovno nule a vyjádřil hledanou minimální hodnotu x neboli:

$$\begin{aligned}6x - 2 &= 0, \\x &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

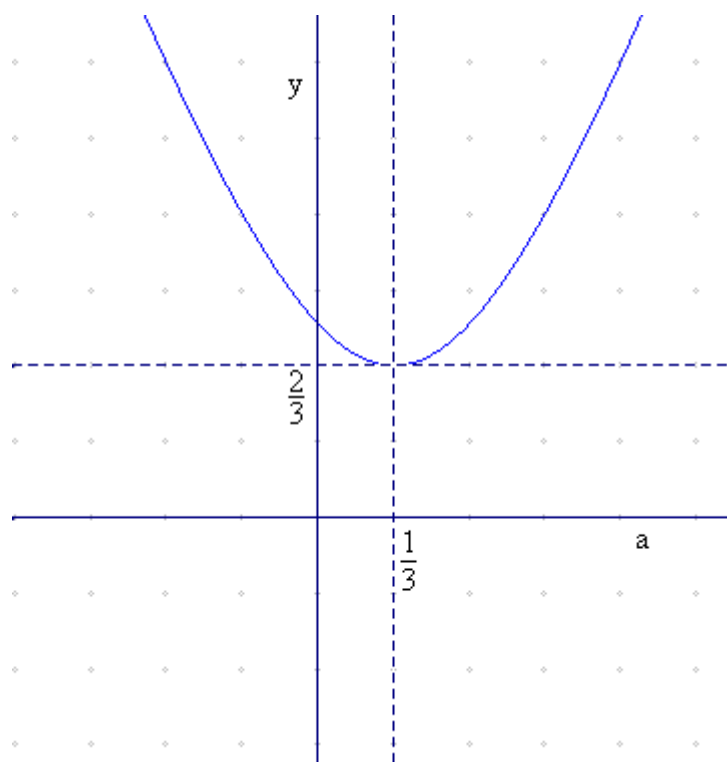
Zde se již student vrátil k označení a , b , c , dosadil do rovnic získaných v první části úkolu a získal plný počet bodů.

Jako doplnění tento žák ještě příklad dořešil i dalším způsobem, a to jako hledání vrcholu kvadratické funkce. Jeho postup:

$$\begin{aligned}y &= 3a^2 + 1 - 2a, \\y &= 3\left[a^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= 3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}, \\y &= 3a^2 - 2a + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Jan Matějka si zde nakreslil tento graf:



Obr. 1: Graf z řešení Jana Matějky

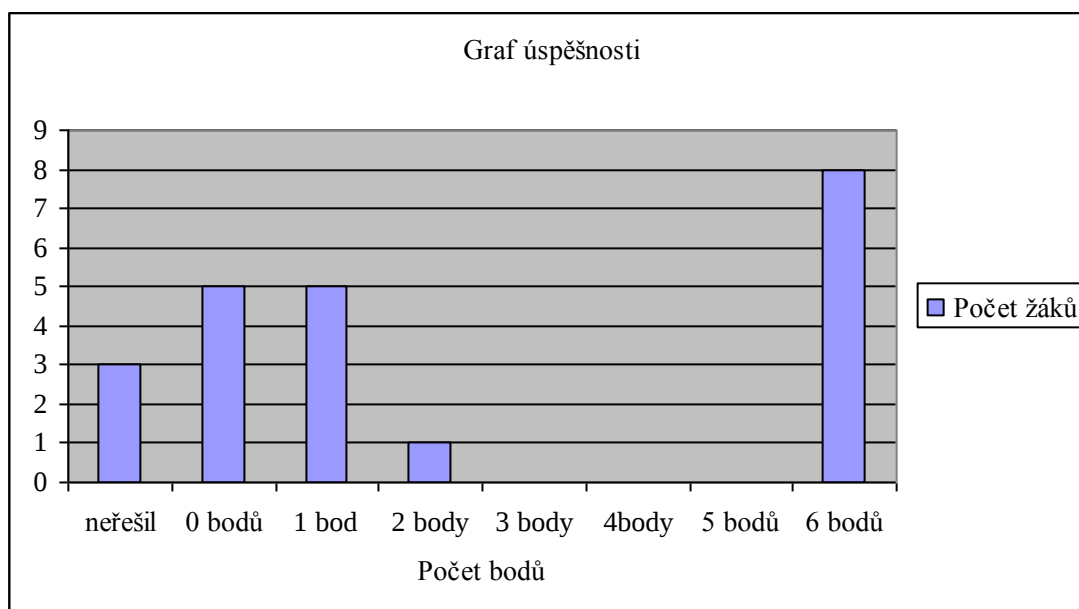
Odtud již student odvodil minimální hodnotu výrazu $y = 3a^2 - 2a + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$, rovnu $\frac{2}{3}$ pro $a = \frac{1}{3}$.

2.1.4 Statistika úspěšnosti při řešení úlohy B-1

Jak již bylo zmíněno, v této úloze byla důležitá znalost dělení polynomů. Absence této znalosti se projevila hned u pěti žáků (23%), kteří proto byli ohodnoceni nejnižším počtem bodů. Dalších pět žáků vydělilo polynomy správně, ale nebyli schopni toho dále využít k úspěšnému řešení příkladu. Jeden žák úlohu neřešil vůbec.

Hodnocení	Počet studentů	Relativní četnost
neřešil	3	0,14
0 bodů	5	0,23
1 bod	5	0,23
2 body	1	0,05
3 body	0	0,00
4 body	0	0,00
5 bodů	0	0,00
6 bodů	8	0,36

Tabulka 1: Statistika úspěšnosti řešení úlohy B-1



Obr. 2: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze B-1

Pokud se zaměříme na žáky, kteří získali plné bodové ohodnocení, můžeme je rozdělit podle způsobu řešení, jak ukazuje tabulka 2.

Způsob řešení	Počet studentů	Relativní četnost
Vzorové řešení č.1	4	0,50
Vzorové řešení č.2	3	0,38
Vzorové řešení č.2 s využitím derivací	1	0,12

Tabulka 2

2.1.5 Rozbor chyb žáků

Po řešitelích s plným počtem bodů bylo nejvyšší dosažené ohodnocení dva body, které získal pouze jeden student. Vyšel z toho, že mnohočlen $x^4 + ax^2 + bx + c$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$, právě když je zbytek při dělení nulový mnohočlen, tedy $b - a + 1 = 0$ a současně $c - a = 0$. To je správná úvaha, avšak dál student uvažuje tak, že jelikož $a = c$, bude výraz $a^2 + b^2 + c^2$ nabývat nejmenší hodnoty právě tehdy, když dosadíme za $a = c = 0$. Takto nelze uvažovat a student má zbytek příkladu špatně, přichází tedy o čtyři body.

Následují řešitelé s jednobodovým ohodnocením a jejich chyby, takových řešitelů bylo pět. Jeden bod získali všichni shodně za správné vydělení mnohočlenu, určení zbytku a správnou úvahu, že je nutno položit zbytek rovno nule. Hned tři žáci zde uvažovali stejně jako jejich kolega ohodnocený dvěma body, avšak nedokázali vyjádřit ani rovnice $b - a + 1 = 0$, $c - a = 0$. Další dva studenti se ze zbytku snažili vyjádřit proměnné x , a , b , c , zde se však zasekli a dál nepokračovali.

Žáci, kteří nezískali žádný bod, až na jednoho dělili špatně polynomy, a tak hned od začátku neměli šanci dospět ke správnému výsledku. Onen zmiňovaný žák se do dělení nepouštěl, uvažoval, že polynom čtvrtého stupně se bude chovat stejně jako stupně druhého, a jal se počítat diskriminant, samozřejmě bez úspěchu.

Jako zajímavost zde zmíním žáka, jehož řešení je ke zhlédnutí jako příloha této práce. Nezískal ani bod, jelikož neuměl vydělit polynomy, avšak úlohu doprovází slovním komentářem (s rovněž špatnou úvahou), ve kterém si říká o body: ... „*dále bych musel ještě uvažovat o $a^2 + b^2 + c^2$, ale jak vidíte, nějak jsem se do toho zamotal. Ale tak 1 nebo 2 bodíky za snahu???*“ Jedná se o studenta, který nakonec v celém kole nezískal ani jeden bod.

2.2 Úloha B-2

2.2.1 Zadání úlohy

Je dán trojúhelník ABC se stranou BC délky 22cm a stranou AC délky 19cm, jehož těžnice t_a , t_b jsou navzájem kolmé. Vypočítejte délku strany AB .

2.2.2 Vzorové řešení

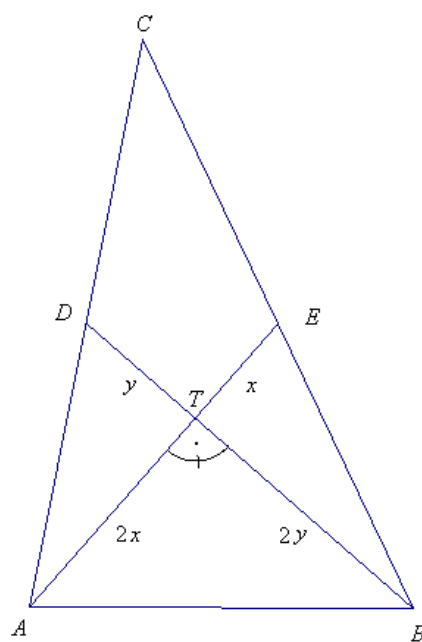
Označme D střed strany AC , E střed strany BC a T těžiště trojúhelníku ABC (obr. 3). Označíme-li dále $3x$ a $3y$ délky těžnic t_a a t_b , máme $|AT| = 2x$, $|ET| = x$, $|BT| = 2y$, $|DT| = y$. Ze zadání plyne, že trojúhelníky ATD , BET , ABT jsou pravoúhlé, takže podle Pythagorovy věty platí

$$2x^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$x^2 + 2y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$2x^2 + 2y^2 = c^2.$$

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme $5x^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$ a po dosazení do třetí rovnice máme $c^2 = 4x^2 + y^2 = \frac{1}{5}a^2 + b^2$. Numericky pak vzhledem k tomu, že $\frac{1}{5}22^2 + 19^2 = 169$, vychází $c = 13\text{cm}$.



Obr. 3

Kritéria hodnocení

Za úplné řešení se udělovalo 6 bodů. Jeden bod za využití toho, že těžiště dělí těžnici v poměru $1:2$, po jednom bodu za použití Pythagorovy věty pro trojúhelníky ATD , BET , ABT a dva body za výpočet délky strany AB .

2.2.3 Analýza řešitelských postupů

V této úloze všichni řešitelé, kteří získali alespoň jeden bod, postupovali stejným způsobem, který je uveden jako vzorové řešení.

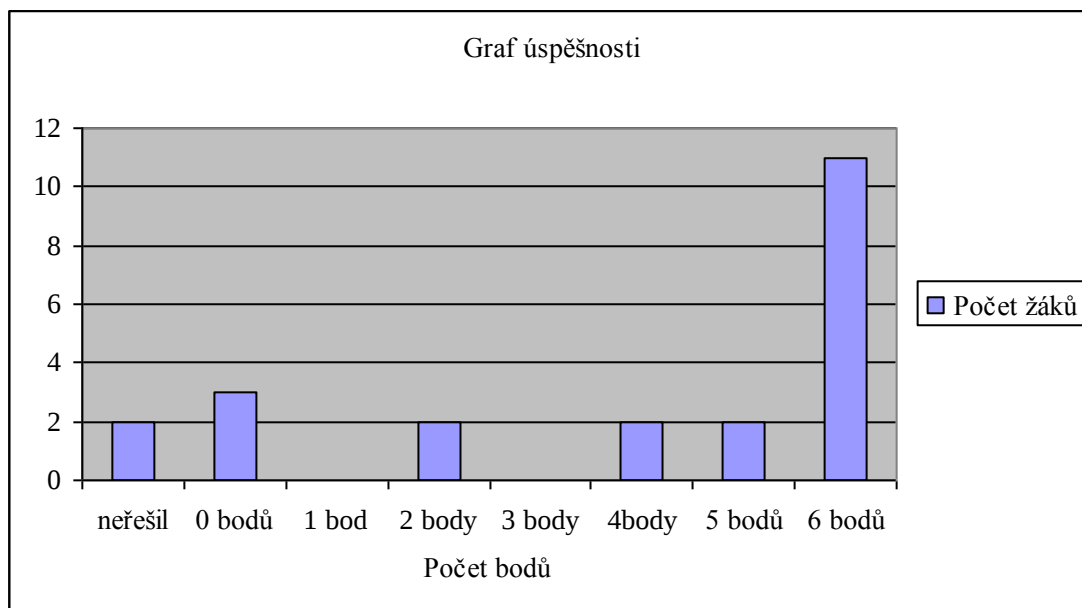
2.2.4 Statistika úspěšnosti při řešení úlohy B-2

Jak ukazuje tabulka 3, v této úloze plného bodového ohodnocení dosáhlo hned 11 žáků (50%). Alespoň čtyři body získalo 15 žáků.

Hodnocení	Počet studentů	Relativní četnost
neřešil	2	0,00
0 bodů	3	0,14
1 bod	0	0,00
2 body	2	0,09
3 body	0	0,00
4 body	2	0,09
5 bodů	2	0,09
6 bodů	11	0,50

Tabulka 3

Graf úspěšnosti žáků na obr. 4 názorně ukazuje velké zastoupení úspěšných řešitelů.



Obr. 4: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze B-2

2.2.5 Rozbor chyb žáků

Nejčastější chybou, která připravila žáky o plný počet bodů, bylo zbytečné zaokrouhlování, a z toho plynoucí pouze přibližný výsledek. Tohoto se dopustili čtyři žáci.

Další chybou byla neznalost vlastností těžnic, kdy jeden žák vycházel z předpokladu, že těžiště dělí těžnice v polovině jejich délky. Jeden student neznal správně Pythagorovu větu. Použil ji ve tvaru $c = a^2 + b^2$. U dalšího studenta se projevila neznalost pravidel odmocňování, kdy tvrdil: $\sqrt{\frac{3249 - 16t_a^2}{36}} = \frac{57 - 4t_a}{6}$.

Následovali žáci s nulovým ohodnocením, jejichž chybou byl naprosto mylný předpoklad, z něhož vycházeli.

2.3 Úloha B-3

2.3.1 Zadání úlohy

Přirozené číslo nazveme *vlnitým*, pokud pro každé tři po sobě jdoucí číslice a, b, c jeho desítkového zápisu platí $a - b \cdot b - c < 0$. Dokažte, že z číslic 0, 1, ..., 9 je možno sestavit více než 25 000 desetimístných vlnitých čísel, která obsahují všechny číslice od nuly do devítky (čísllice 0 nemůže být na prvním místě).

2.3.2 Vzorové řešení

Číslice 0, 1, 2, 3 a 4 nazvěme malé (zkráceně m), číslice 5, 6, 7, 8 a 9 naopak velké (zkráceně v). Pravidelným střídáním malých a velkých číslic vždy vznikne vlnité číslo.

Čísel tvaru $vmvmvmvmvm$ je $5!^2$, čísel tvaru $mvmvmvmvmv$ $4 \cdot 4! \cdot 5!$. Těch vlnitých čísel, která vzniknou pravidelným střídáním malých a velkých číslic, je tedy $5! \cdot 5! + 4 \cdot 4! \cdot 5! = 5! \cdot 4! \cdot (5 + 4) = 120 \cdot 24 \cdot 9 = 25920 > 25000$.

Poznámka. Všech desetimístných vlnitých čísel s vesměs různými číslicemi je 93 106.

Kritéria hodnocení

Za úplné řešení bylo možné získat 6 bodů. Jeden bod za poznatek, že pravidelným střídáním malých a velkých číslic vznikne vlnité číslo. Po dvou bodech za správné určení počtu vlnitých čísel tvaru $vmvmvmvmvm$ a tvaru $mvmvmvmvmv$ a jeden bod za dokončení důkazu.

2.3.3 Analýza řešitelských postupů

Všichni řešitelé, kteří dosáhli plného počtu bodů, použili postup analogický se vzorovým řešením. Jelikož ostatní řešitelé nezískali ani bod, jejich postupy byly zcela špatné, a proto se jim budeme věnovat v části rozboru žakovských chyb.

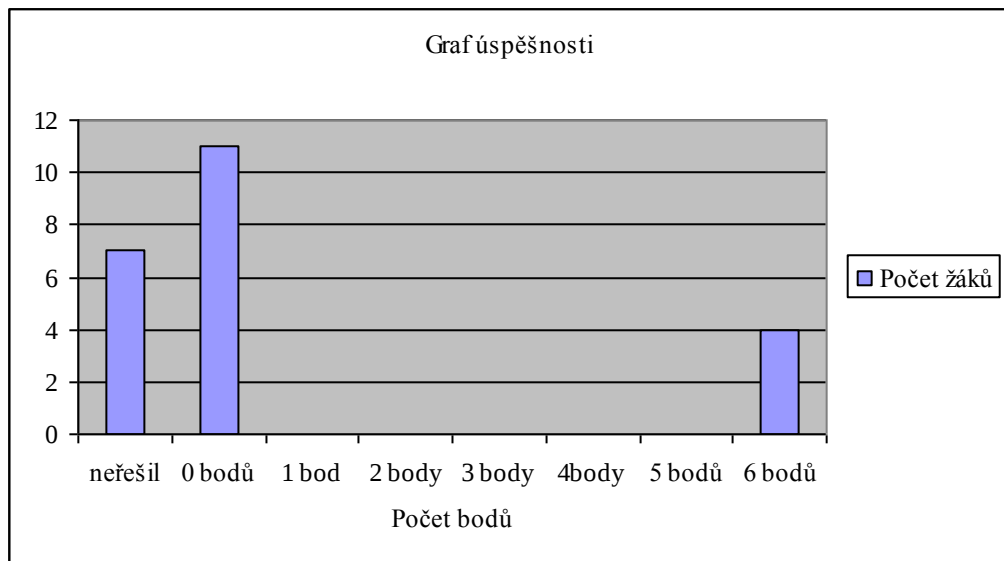
2.3.4 Statistika úspěšnosti při řešení úlohy B-3

V této úloze se ukázalo klíčem k řešení to, zda si studenti dokázali rozdělit číslce na malé a velké. Jak je vidět v tabulce 4, plného počtu bodů dosáhli pouze čtyři žáci (18%). Ostatní žáci (82%) nezískali ani bod, z toho jedenáct žáků se o řešení pokusilo, dalších sedm se rozhodlo příklad neřešit vůbec.

Hodnocení	Počet studentů	Relativní četnost
neřešil	7	0,32
0 bodů	11	0,50
1 bod	0	0,00
2 body	0	0,00
3 body	0	0,00
4 body	0	0,00
5 bodů	0	0,00
6 bodů	4	0,18

Tabulka 4

Z grafu na obr. 5 je patrné, jak velkou roli zde představoval nápad rozdělit číslce na malé a velké. Všichni studenti, kteří na toto rozdělení přišli, již dokázali příklad úspěšně vyřešit.



Obr. 5: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze B-3

2.3.5 Rozbor chyb žáků

Čtyři studenti měli úlohu zcela správně, dalších 7 úlohu neřešilo. Budeme se proto věnovat chybám zbylých jedenácti žáků, kteří nezískali žádný bod.

Základní chybou hned dvou studentů bylo, že si nepečlivě přečetli zadání a zapomněli na fakt, že hledaná desetimístná čísla mají obsahovat všechny číslice od nuly do devíti. Další dva studenti špatně pochopili definici vlnitých čísel, takže například i číslo 1234567890 považovali za vlnité.

Ostatní pochopili definici vlnitých čísel správně, avšak jelikož je nenapadlo rozdělit si číslice na malé a velké, snažili se buď čísla vypisovat do různých tabulek a z nich odečíst počet vlnitých čísel, nebo postupovali logickou úvahou, která se však vždy ukázala jako nesprávná.

2.4 Úloha B-4

2.4.1 Zadání úlohy

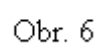
Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Pro libovolný bod L jeho strany AB označme K, M paty kolmic z bodu L na strany AC, BC . Zjistěte, pro kterou polohu bodu L je úsečka KM nejkratší.

2.4.2 Vzorové řešení

Protože jsou úhly LKC a LMC pravé, leží body K a M na Thaletově kružnici nad průměrem CL (obr.6). Podle věty o obvodovém úhlu přísluší těživě KM středový úhel velikosti 2γ , proto $|KM| = |CL| \sin \gamma$ (v pravoúhlém trojúhelníku KPS , kde P je střed úsečky KM a S střed úsečky CL , je totiž $|KS| = \frac{1}{2}|CL|, |\sphericalangle KSP| = \gamma$). Úsečka KM je tedy nejkratší, právě když je nejkratší úsečka CL ; to nastává právě tehdy, je-li L pata výšky z vrcholu C na stranu AB .

Kritéria hodnocení

Za úplné řešení žáci získali 6 bodů. Dva body získali řešitelé za poznatek, že body K a M leží na Thaletově kružnici nad průměrem CL , dva body za důkaz rovnosti $|KM| = |CL| \sin \gamma$ a dva body za určení polohy bodu L .



2.4.3 Analýza řešitelských postupů

U této úlohy pouze jeden student postupoval obdobným způsobem, jako je uvedeno ve vzorovém řešení, a to Jan Matějka z Gymnázia Jírovce v Českých Budějovicích. Správně určil, že body K a M leží na Thaletově kružnici nad průměrem CL . Dále již postupuje následovně (uvádíme doslovnou citaci, pouze u středu Thaletovy kružnice se pro přehlednost držíme předešlého označení S):

$$\text{„} \sphericalangle KSM = 2 \sphericalangle KCM = \text{konst. (obvodové a středové úhly)}$$

$$|KS| = |SM| \text{ (poloměry kružnice opsané)}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle MKS = \sphericalangle SMK = 90^\circ - \sphericalangle KCM$$

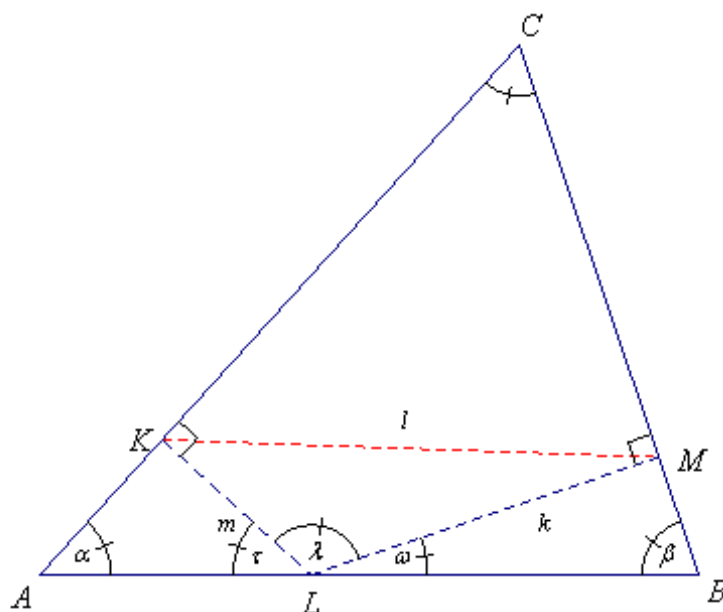
Trojúhelník KMS je rovnoramenný a všechny trojúhelníky KMS jsou podobné ($\sphericalangle KSM = \text{konst.}$)

$$\Rightarrow \text{hledám } \min(KS); |KS| = |CS| \text{ (poloměry kružnice opsané)} \Rightarrow \min(CL) \Rightarrow \text{“}$$

...odtud už student nachází správné řešení.

Tento postup je správný a vede ke správnému výsledku, avšak student zapomněl zdůvodnit vazbu mezi $\min(KS)$ a $\min(CL)$ a zároveň mezi $\min(KS)$ a $\min(KM)$.

Další student, Ondřej Leder z Gymnázia Česká v Českých Budějovicích, použil jiné řešení, kdy vycházel z náčrtku (obr.7):



Obr. 7

Zde si student správně vyjádřil, že¹:

$$\omega = 180 - (90 + \beta)$$

$$\tau = 180 - (90 + \alpha)$$

$$\lambda = 180 - (\omega + \tau)$$

$$\Rightarrow |\angle KLM| = \text{konst.}$$

Pro daný trojúhelník ABC . Všechny úsečky KL jsou rovnoběžné, úsečky ML také.

$$l^2 = k^2 + m^2 - 2km \cos \lambda.$$

$\cos \lambda$ je konstantní.

Až doposud tento student postupuje správně, v další části řešení dojde k chybné úvaze, a z ní plynoucímu špatnému výsledku:

$$l^2 = k^2 + m^2 - 2km \cdot x$$

¹ Správné by zde bylo uvádět velikosti úhlů ve stupních, držím se však originálu studentova řešení.

Fce x^2 je parabola $\Rightarrow$ neroste úměrně. Chceme-li tedy, aby součet $k^2 + m^2$ byl co nejmenší, musí $k = m$. Pak $l^2 = 2k^2 - 2k^2 \cos \lambda$. To platí pro tento případ, protože roste-li k , pak m klesá. Úsečka KM bude nejkratší, bude-li trojúhelník KLM rovnoramenný a KM bude základna (chybná úvaha i výsledek – toto nastane pouze ve speciálním případě).

Další student přišel ke správnému výsledku, jak sám uvádí, „pečlivým zkoušením“ z obrázku, tedy samozřejmě bez postupu či důkazu.

Poslední způsob řešení, který se liší od ostatních, je od studentky, která hned v úvodu prohlašuje, že v pravoúhlém trojúhelníku je všechno jednodušší, a pracuje dále pouze s pravoúhlým trojúhelníkem. Dochází ke správné hypotéze, která je však bez důkazu a samozřejmě pouze speciálním případem.

Ostatní řešitelé použili (alespoň náznak) jedné z těchto možností řešení.

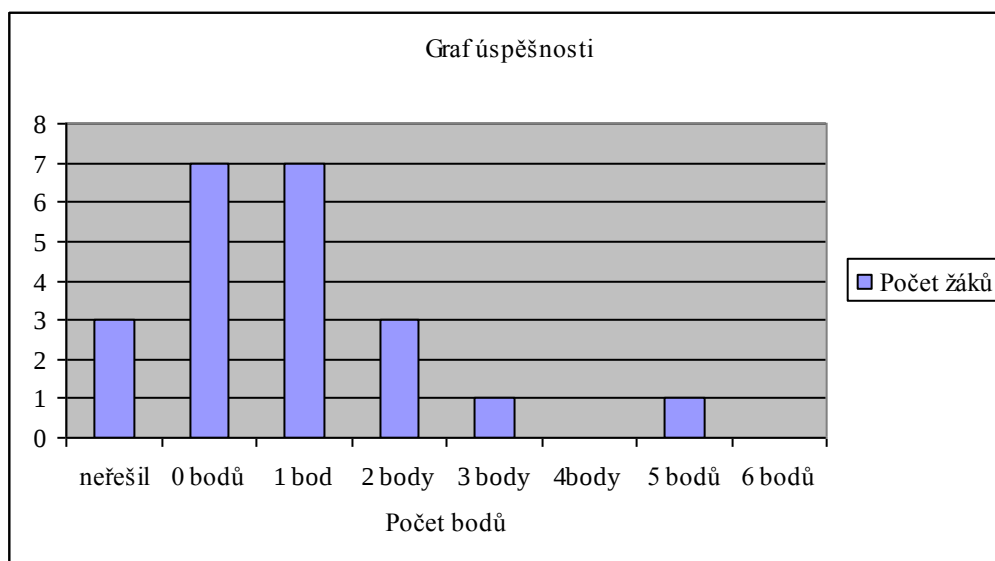
2.4.4 Statistika úspěšnosti při řešení úlohy B-4

V této úloze nedosáhl žádný z žáků na plné bodové ohodnocení. Naopak maximálně dva body získalo 20 žáků (91% účastníků).

Hodnocení	Počet studentů	Relativní četnost
neřešil	3	0,14
0 bodů	7	0,32
1 bod	7	0,32
2 body	3	0,14
3 body	1	0,05
4 body	0	0,00
5 bodů	1	0,05
6 bodů	0	0,00

Tabulka 5

Následující graf uvádí přehled o obtížnosti úlohy číslo 4.



Obr. 8: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze B-4

2.4.5 Rozbor chyb žáků

V této úloze jeden žák řešil úlohu správně, avšak pominul důležité zdůvodnění, další jeden žák došel ke správnému vyjádření, ze kterého vyvodil chybnou úvahou nesprávný výsledek (oba viz analýza řešitelských postupů).

Ostatní studenty rozdělíme na ty, kteří získali alespoň jeden bod (10 žáků), a na studenty bez bodového zisku (10 žáků).

Prvně jmenovaní se dopouštěli těchto chyb:

- a) vypracovali hypotézu pouze pro speciální případ (4 žáci),
- b) hypotéza vyřčená pouze na základě obrázku (3 žáci),
- c) chybné úvahy po správném postupu na začátku řešení (3 žáci). Těmito úvahami jsou tvrzení žáků, že „aby KM byla co nejkratší, musí paty výšek těchto trojúhelníků být totožné,“ dále „v tětiovém čtyřúhelníku jsou úhlopříčky stejně dlouhé“ a „oddalování bodu L od středu úsečky AB způsobuje zvětšování úsečky KM .“

Studenti s nulovým počtem bodů se dopouštěli těchto chyb:

- a) chybné tvrzení vycházející pouze z obrázku (4 žáci). Jsou to tvrzení „ KM je nejkratší pro $L = A$,“ dále „ L je střed úsečky AB ,“ jedna studentka si přizpůsobila obrázek tak, aby jí vyšlo správné řešení,
- b) chybná úvaha typu „ KM je nejkratší, když $KM \parallel AB$ “ (2 žáci),
- c) tvrzení, že $|KM|$ je nejmenší, pokud $c_a : c_b = \sin \beta : \sin \alpha$, kde c_a je ta část strany c , která tvoří úsečku AL ,
- d) tři studenti neřešili úlohu vůbec.

2.5 Souhrnná statistika příkladů kategorie B

V následující tabulce je pro srovnání zobrazena úspěšnost žáků v úlohách kategorie B. Při srovnávání obtížnosti příkladů je vidět, že nejlehčí úlohou pro žáky byla úloha B-2, následovně pak úloha B-1. Naopak jednoznačně největší potíže v této kategorii studentům činila úloha B-4. Zde studenty nenapadlo použít větu o obvodovém úhlu, což bylo zřejmě největší překážkou k vyřešení úlohy.

	Úloha B-1		Úloha B-2		Úloha B-3		Úloha B-4	
Hodnocení	Počet žáků	Relativní četnost	Počet žáků	Relativní četnost	Počet žáků	Relativní četnost	Počet žáků	Relativní četnost
neřešil	3	0,14	2	0,00	7	0,32	3	0,14
0 bodů	5	0,23	3	0,14	11	0,50	7	0,32
1 bod	5	0,23	0	0,00	0	0,00	7	0,32
2 body	1	0,05	2	0,09	0	0,00	3	0,14
3 body	0	0,00	0	0,00	0	0,00	1	0,05
4 body	0	0,00	2	0,09	0	0,00	0	0,00
5 bodů	0	0,00	2	0,09	0	0,00	1	0,05
6 bodů	8	0,36	11	0,50	4	0,18	0	0,00

Tabulka 6

3 Kategorie C

Kategorie C je určena studentům prvních ročníků středních škol. V krajském kole byly zadány čtyři úlohy, na jejichž řešení měli studenti čtyři hodiny čistého času (tzn. 240 minut). Soutěž se konala v budově Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích dne 27. března 2007.

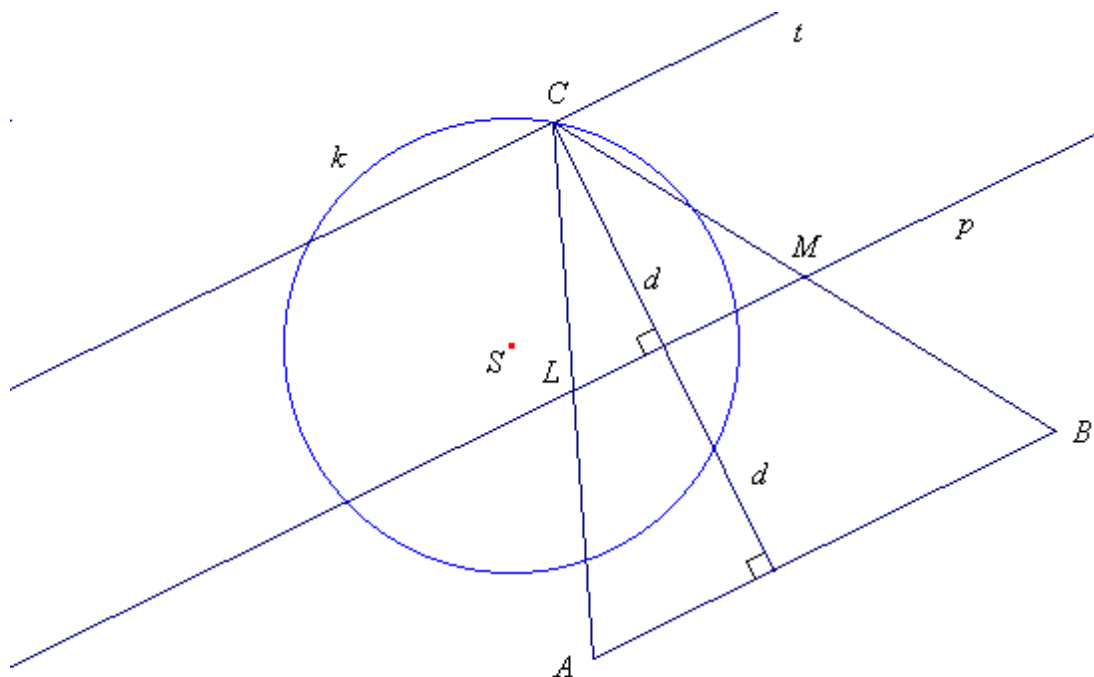
3.1 Úloha C-1

3.1.1 Zadání úlohy

V rovině jsou dány dva různé body L, M a kružnice k . Sestrojte trojúhelník ABC co největšího obsahu tak, aby jeho vrchol C ležel na kružnici k , bod L byl středem strany AC a bod M středem strany BC .

3.1.2 Vzorové řešení

Při rozboru uvažme libovolný trojúhelník ABC s vrcholem C na kružnici k , jehož strany AC, BC mají středy po řadě v bodech L, M (obr. 8). Protože LM je střední příčkou takového trojúhelníku, je jeho obsah roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku LMC . Tento trojúhelník má pevnou stranu LM , takže jeho obsah je největší, právě když je největší jeho výška z vrcholu C , tedy vzdálenost d bodu C od přímky p určené body L, M .



Obr. 8

Dodejme, že místo srovnání obsahů trojúhelníků ABC a LMC dojdeme ke stejné podmínce také takto: trojúhelník ABC má stranu AB pevné délky $c = 2|LM|$ a výšku $v_c = 2d$. Proto je jeho obsah $\frac{1}{2}cv_c$ roven $2|LM| \cdot d$, takže je největší možný, když je taková vzdálenost d .

Pro který bod $C \in k$ je vzdálenost d největší? Veďme bodem C přímkou t rovnoběžnou s přímkou p . Je-li vzdálenost d největší možná, musí celá kružnice k ležet ve stejné polorovině s hraniční přímkou t jako přímka p (volbou bodu $C \in k$ uvnitř opačné poloroviny bychom vzdálenost d zvětšili). Přímka t je proto nutně tečnou kružnice k (rovnoběžnou s danou přímkou p) a bod C je jejím dotykovým bodem.

Odtud již plyne *konstrukce*: bod C určíme jako ten ze dvou průsečíků kružnice k s kolmicí na přímkou p vedenou středem S kružnice k , který má od přímky p větší vzdálenost (mají-li ji oba průsečíky stejnou, vybereme kterýkoli z nich). Body A, B pak sestrojíme jako obrazy bodu C v souměrnosti podle středu L , resp. M .

Diskuse: Tečny kružnice k rovnoběžné s přímkou LM mají od této přímky dvě různé vzdálenosti, právě když střed S kružnice k na přímce LM neleží; tehdy má úloha jediné řešení. V opačném případě, kdy střed S na přímce LM leží, má úloha dvě řešení.

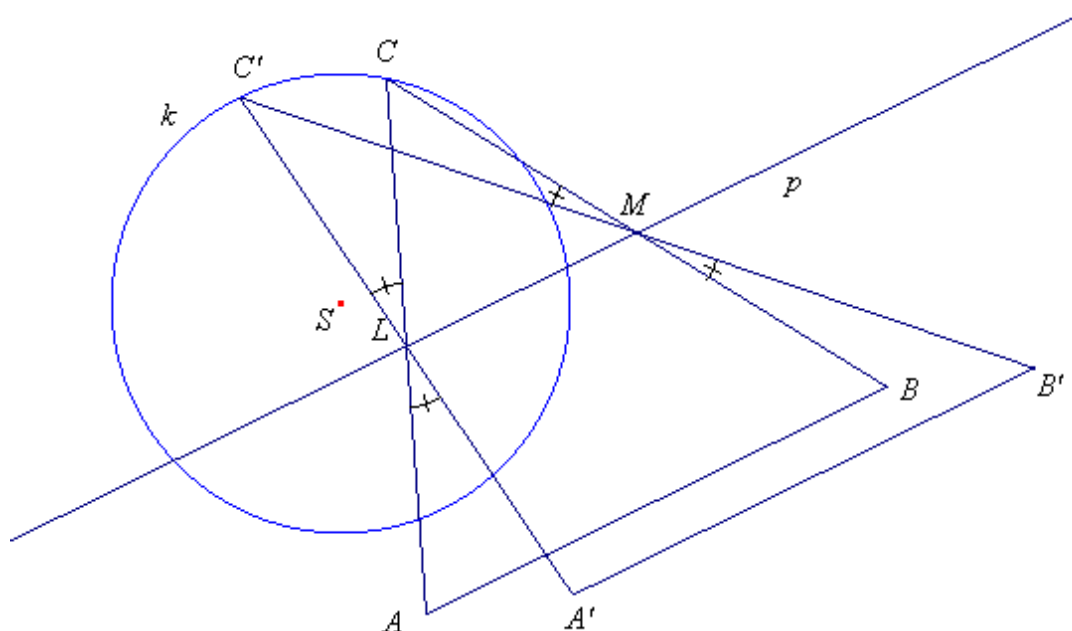
Kritéria hodnocení

Za úplné řešení bylo možno dosáhnout 6 bodů, z toho 3 body za nalezení podmínky maximální vzdálenosti bodu C od LM , 2 body za postup konstrukce a 1 bod za správné určení obou možných počtů řešení. Intuitivně jasné určení nejvzdálenějšího bodu kružnice k od přímky LM není nutné zdůvodňovat (třetí odstavec řešení).

3.1.3 Analýza řešitelských postupů

V této úloze bylo důležité uvědomit si, že velikost obsahu daného trojúhelníku závisí na délce výšky v_c . Téměř všichni studenti, kteří dosáhli počtu alespoň tří bodů, řešili příklad obdobně, a to postupy shodujícími se se vzorovým řešením. Zde si uvedeme řešení dvou studentů, u kterých se v řešení objevila nějaká zajímavost.

Student Petr Doležal z Gymnázia Jírovcova 8 v Českých Budějovicích řešil úlohu takto (stylisticky upravená citace autora):



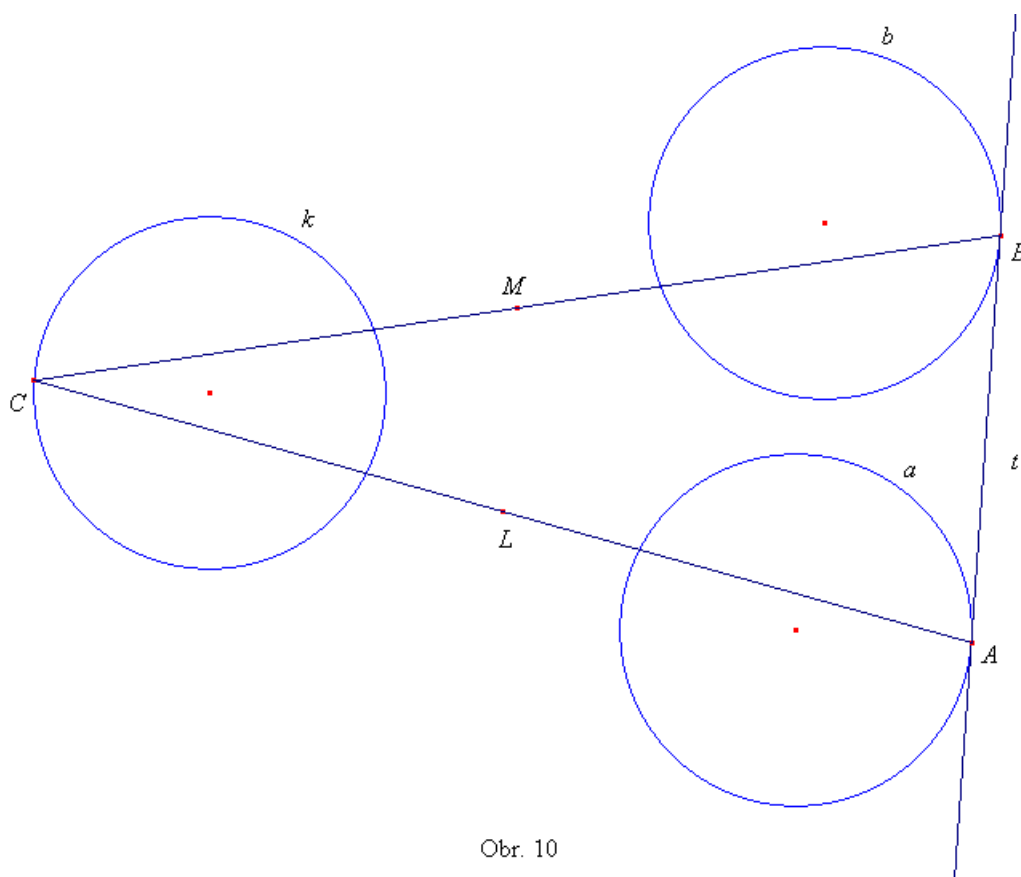
Obz. 9

$AB \parallel A'B'$, protože $|\sphericalangle C'LC| = |\sphericalangle ALA'|$ a $|\sphericalangle C'MC| = |\sphericalangle BMB'|$, poté i $ML \parallel AB \parallel A'B'$.
Mění-li bod C' po obvodu kružnice, mění se úhly α, β , ale jejich součet je stejný, tedy $A'B'$ je stále stejně dlouhá jako AB . Kolmice (výšky) jsou také rovnoběžné.
Vlivem posunutí AB na $A'B'$ je obsah trojúhelníku $C'A'B'$ větší než obsah trojúhelníku CAB .

Nejdelší výšku proto můžeme získat, když bod C bude průsečíkem kružnice k a přímky p , která prochází bodem S a je kolmá na LM .

Další zajímavé řešení vymyslel žák František Steinhauser z Gymnázia Dačice (stylisticky upravená citace autora):

Napřed si udělám náhodnou kružnici k a dva body M, L (obr. 10). Dále si udělám další dvě kružnice a a b . Kružnice a bude množina možných bodů A a b množina možných bodů B .² Pak mě napadne, že základny AB jsou všechny rovnoběžné (takže i výšky budou rovnoběžné) a stejně dlouhé.³ Z toho plyne, že na sestrojení trojúhelníku s největším obsahem je třeba jen sestrojit ten s největší výškou. To bude ten, u kterého bude AB tečnou kružnic a a b , samozřejmě tou vzdálenější od kružnice k .



Obr. 10

² Kružnice a, b sestrojil jako obrazy kružnice k ve středových souměrnostech se středy L, M .

³ Zde student neuvedl zdůvodnění, avšak patrně využil vlastností středních příček trojúhelníku.

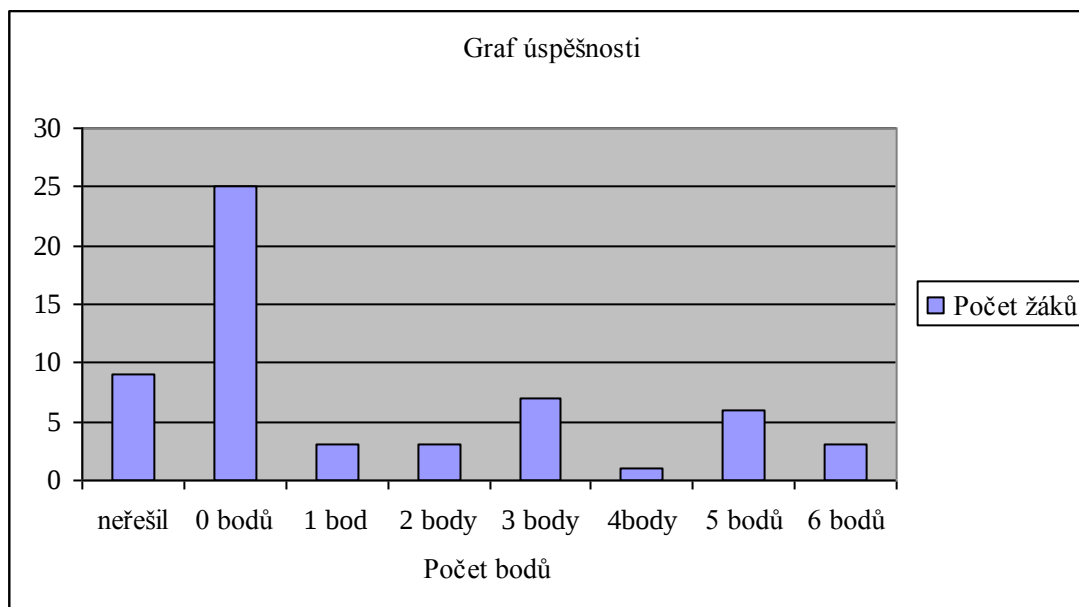
3.1.4 Statistika úspěšnosti při řešení úlohy C-1

V této úloze dosáhli pouze tři žáci plného bodového ohodnocení. Maximálně dvou bodů dosáhlo 40 žáků (70%).

Hodnocení	Počet studentů	Relativní četnost
neřešil	9	0,16
0 bodů	25	0,44
1 bod	3	0,05
2 body	3	0,05
3 body	7	0,12
4 body	1	0,02
5 bodů	6	0,11
6 bodů	3	0,05

Tabulka 7

Následující graf nám názorně ukazuje, jak velký podíl z celkového počtu žáků v této úloze nezískal ani bod. Takových žáků zde bylo hned 34 (60%).



Obr. 11: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze C-1

3.1.5 Rozbor chyb žáků

Zde si studenty rozdělíme do dvou skupin, a to na ty, kteří získali alespoň jeden bod (23 žáků), a na ostatní.

V první jmenované skupině byla nejčastější chybou opomenutá diskuse počtu řešení (20 žáků). Dalšími chybami bylo:

- a) žádné, nebo neúplné zdůvodnění postupu (8 žáků),
- b) řešení pouze pro speciální případ (3 žáci),
- c) experimentální řešení (1 žák).

Ve druhé skupině žáků (tedy skupině žáků, kteří nezískali ani jeden bod), se vyskytovaly tyto chyby:

- a) špatně pochopené zadání (8 žáků),
- b) odhad, že řešením bude speciální případ trojúhelníku (rovnostranný, rovnoramenný nebo pravoúhlý), a z toho plynoucí špatný celý postup (6 žáků),
- c) nepodložené tvrzení, že bod C musí ležet na ose úhlu LSM (4 žáci), nebo na ose úsečky LM (2 žáci),
- d) špatné řešení bez zdůvodnění (5 žáků),
- e) tuto úlohu neřešilo devět žáků.

3.2 Úloha C-2

3.2.1 Zadání úlohy

Nechť p, q, r jsou přirozená čísla, pro něž platí $p + r\sqrt{p+q} + q = 2007$.

- Určete, jakých hodnot může nabývat součet $p + q + r$.
- Určete počet všech trojic p, q, r přirozených čísel, které vyhovují dané rovnici.

3.2.2 Vzorové řešení

- Splňují-li přirozená čísla p, q, r danou rovnici, dostaneme z ní vyjádření

$$\sqrt{p+q} = \frac{2007 - p - q}{r},$$

takže číslo $\sqrt{p+q}$ je racionální, a tedy celé (odmocnina z přirozeného čísla je totiž buď číslo celé, nebo číslo iracionální). Proto z rovností

$$2007 = p + r\sqrt{p+q} + q = (p+q) + r\sqrt{p+q} = \sqrt{p+q}(\sqrt{p+q} + r)$$

dostáváme rozklad čísla 2007 na dva celočíselné činitele $\sqrt{p+q}$ a $\sqrt{p+q} + r$, pro které zřejmě platí

$$1 < \sqrt{p+q} < \sqrt{p+q} + r.$$

Z rozkladu na prvočinitele $2007 = 3^2 \cdot 223$ tudíž vidíme, že jsou možné pouze dva případy, které přehledně zapíšeme do tabulky:

$\sqrt{p+q}$	$\sqrt{p+q}+r$		$p+q$	r		$p+q+r$
3	669	$\Leftrightarrow$	9	666	$\Rightarrow$	675
9	223		81	214		295

Tabulka 8

Možné hodnoty součtu $p+q+r$ tedy jsou pouze dvě čísla: 675 a 295. (Konkrétní trojice p, q, r , které to prokazují, nebudeme uvádět, protože rovnou určíme v části b) jejich počet.)

b) Rovnost $p+q+r=675$ nastane, právě když bude trojice p, q, r splňovat podmínky $p+q=9$ a $r=666$; takových trojic je právě tolik co dvojic (p, q) , pro něž $p+q=9$, tedy 8.

Rovnost $p+q+r=295$ nastane, právě když bude trojice p, q, r splňovat podmínky $p+q=81$ a $r=214$; takových trojic je právě tolik co dvojic (p, q) , pro něž $p+q=81$, tedy 80.

Kritéria hodnocení

Za úplné řešení bylo uděleno 6 bodů, z toho 5 bodů za část a) a 1 bod za část b). Za část a) řešení pouze 3 body, chybí-li v jinak úplném postupu zdůvodnění, proč je hodnota $\sqrt{p+q}$ celé číslo.

3.2.3 Analýza řešitelských postupů

V této úloze téměř všichni žáci, kteří získali alespoň čtyři body, postupovali analogicky se vzorovým řešením. Pouze tři žáci postupovali odlišným způsobem, a jelikož tito tři žáci řešili úlohu obdobně, uvedeme zde pro ilustraci pouze řešení jednoho z nich.

Student Petr Doležal z Gymnázia Jírovce 8 v Českých Budějovicích postupoval následovně.

Uvažoval, že rovnici $p + r\sqrt{p+q} + q = 2007$ lze upravit následovně:

$$r\sqrt{p+q} = 2007 - (p+q),$$

$$r\sqrt{y} = 2007 - y,$$

$$\text{kde } p+q = y, y \in N.$$

Zde žák uvádí, že $\sqrt{y}$ musí být přirozené číslo, aby součin $r\sqrt{y}$ byl také přirozené číslo. Odtud volí další substituci, a to $\sqrt{y} = \sigma, \sigma \in N$. Tedy $y = \sigma^2$. Dostává zde vyjádření:

$$r\sigma = 2007 - \sigma^2.$$

Následuje úvaha, že největší hodnota σ bude pro $\sigma = 44$, protože $44^2 = 1936 < 2007$, zároveň nesmí být σ sudé, protože $2007 - \sigma$ by bylo číslo liché a nebylo by beze zbytku dělitelné σ .

Následovně si student vytvořil tabulku, kde vypsál všechny liché hodnoty σ nižší než 44. Pro každou hodnotu veličiny σ spočítal hodnotu veličiny r . Vyhovující hodnoty studentovi vyšly pro $\sigma = 9, \sigma = 3$. Další postup je již analogický se vzorovým řešením.

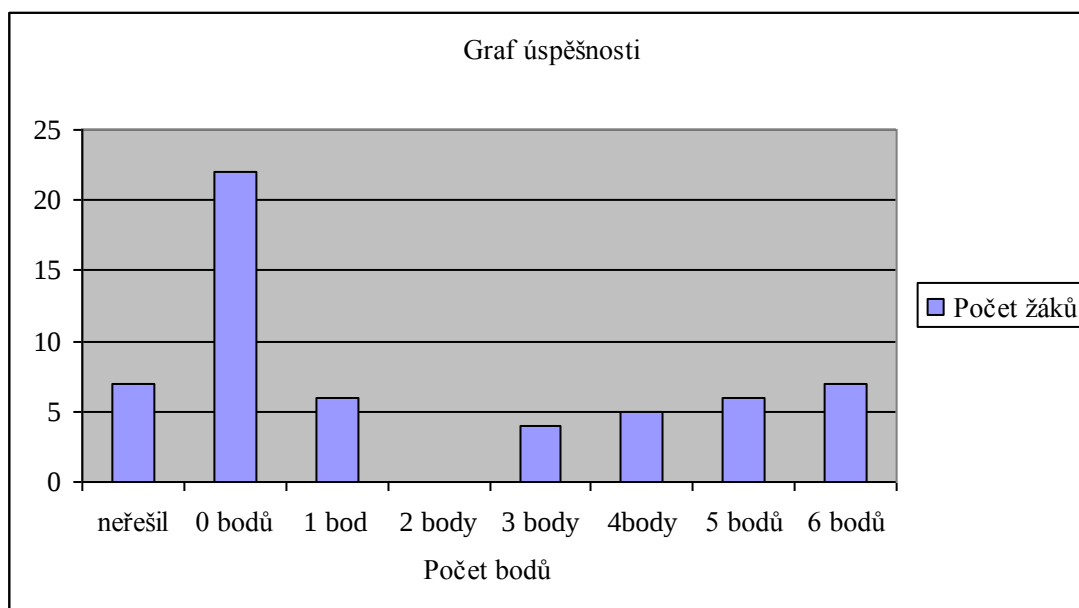
3.2.4 Statistika úspěšnosti při řešení úlohy C-2

V této úloze dosáhlo plného bodového ohodnocení sedm žáků, maximálně dva body získalo 35 žáků (61%).

Hodnocení	Počet studentů	Relativní četnost
neřešil	7	0,12
0 bodů	22	0,39
1 bod	6	0,11
2 body	0	0,00
3 body	4	0,07
4 body	5	0,09
5 bodů	6	0,11
6 bodů	7	0,12

Tabulka 9

Následující graf názorně ukazuje, že v této úloze nezískalo ani bod 29 žáků (51%).



Obr. 12: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze C-2

3.2.5 Rozbor chyb žáků

Zde žáky rozdělíme na ty, kteří získali alespoň jeden bod (28 žáků), a na ty, kteří nezískali ani bod.

V první skupině se vyskytovaly tyto chyby:

- a) nejčastější chybou zde bylo nedostatečné zdůvodnění postupu (21 žáků),
- b) početní chyba (dva žáci).

Ve druhé skupině žáků se objevily následující chyby:

- a) hned 15 žáků si nedovedlo vyjádřit vztah $\sqrt{p+q} = \frac{2007-p-q}{r}$,
- b) jeden žák si předchozí vztah vyjádřil, ale dál se nedostal,
- c) dva studenti se pokusili zadanou rovnici převést (neúspěšně, bez dalšího postupu) na kvadratickou rovnici,
- d) dva žáci uvedli správně součty $p+q+r$, avšak bez jediného náznaku zdůvodnění,
- e) jeden žák se dopustil hrubé chyby hned na začátku. Rozdělil levou stranu zadané rovnice na $p+r$ a $\sqrt{p+q+q}$, tedy se dopustil hned dvou chyb zároveň – roztrhl člen $r\sqrt{p+q}$ a navíc q vepsal nesprávně pod odmocninu,
- f) sedm žáků neřešilo úlohu vůbec.

3.3 Úloha C-3

3.3.1 Zadání úlohy

Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD lze vepsat kružnici se středem O . Určete obsah S lichoběžníku, jsou-li dány délky úseček OB a OC .

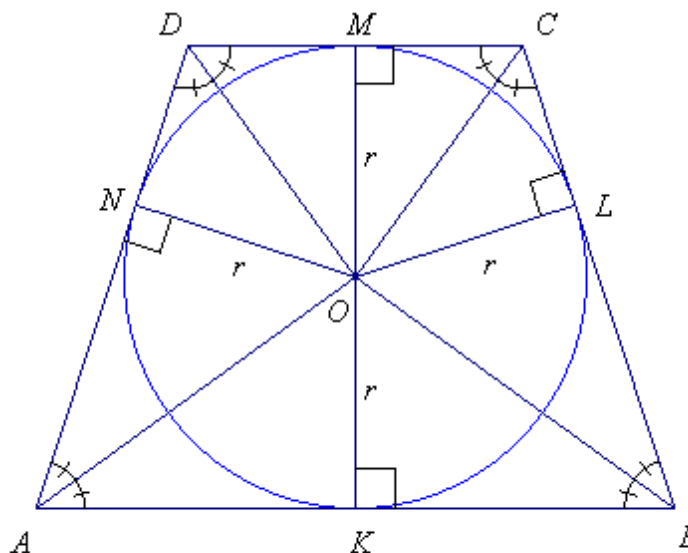
3.3.2 Vzorové řešení

Označme postupně K, L, M, N body dotyku vepsané kružnice po řadě se stranami AB, BC, CD, DA (obr. 13). Protože $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník, jeho vnitřní úhly u vrcholů A, B, C, D mají po řadě velikosti $\alpha, \alpha, 180^\circ - \alpha$ a $180^\circ - \alpha$. Úsečky OA, OB, OC, OD ležící na osách těchto úhlů proto spolu se čtyřmi navzájem shodnými úsečkami OK, OL, OM, ON rozdělují celý lichoběžník na osm pravoúhlých trojúhelníků, které se shodují v jedné odvěsně a mají ostré vnitřní úhly $\frac{1}{2}\alpha$ a $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Těchto osm trojúhelníků lze tudíž rozdělit do dvou čtveřic shodných trojúhelníků: jednu z nich tvoří trojúhelníky OAK, OAN, OBK, OBL a druhou trojúhelníky OCL, OCM, ODM a ODN . Odtud plyne, že obsah S lichoběžníku $ABCD$ je roven čtyřnásobku součtu obsahů trojúhelníků OBL a OCL , tedy čtyřnásobku obsahu trojúhelníku OBC . Podle vnitřních úhlů u vrcholů B a C vidíme, že trojúhelník OBC je pravoúhlý s odvěsnami OB a OC , takže má obsah $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$, a hledaný celkový obsah S je tudíž $S = 2|OB| \cdot |OC|$.

Poznámka. Malá obměna části předchozího postupu: je-li O střed kružnice vepsané tečnovému čtyřúhelníku $ABCD$, je snadné ukázat, že jeho obsah je roven dvojnásobku

součtu obsahů trojúhelníků OAB a OCD , stejně jako trojúhelníků OBC a ODA . Poslední dva trojúhelníky jsou u našeho rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ shodné.

Rovnost $S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OBC} + S_{ODA}$ dokážeme následovně. Jelikož je čtyřúhelník $ABCD$ osově souměrný podle osy MK , stačí dokázat rovnost $S_{OCM} + S_{OBK} = S_{OBC}$. Zde si trojúhelník OBC rozdělíme na dva trojúhelníky OLC a OBL (viz obr. 13). Shodnost trojúhelníků OLC a OCM dokážeme podle věty sss. Jelikož body M, L jsou body dotyku tečen vedených z bodu C ke kružnici k se středem O a poloměrem r , jsou úsečky CM, CL stejně dlouhé. Stranu OC mají trojúhelníky společnou a poslední strana má délku rovnu velikosti poloměru r . Obdobně platí pro shodnost trojúhelníků OKB, OBL .



Obr. 13

Jiné řešení

Pro výšku v a strany a, b, c, d lichoběžníku $ABCD$ s vepsanou kružnicí $k(O, r)$ platí rovnosti $v = 2r$ a $a + c = b + d$ (vlastnost tečnového čtyřúhelníka). Z první z nich plyne, že střed O leží na střední příčce lichoběžníku, jejíž délka $\frac{1}{2}(a + c)$ je podle druhé rovnosti rovna $\frac{1}{2}(b + d)$. V našem případě ovšem platí $b = d$, takže střední příčka

je shodná s oběma rameny a bod O je jejím středem, neboť rovnoramenný lichoběžník je osově souměrný. Dohromady dostáváme, že bod O leží na kružnici sestrojené nad průměrem BC , a proto je OBC pravoúhlý trojúhelník o obsahu $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$. Jeho výška na přeponu BC je však poloměrem r vepsané kružnice k , tudíž obsah trojúhelníku OBC je rovněž roven $\frac{1}{2}br$. Porovnáním obou vyjádření dostaneme rovnost $|OB| \cdot |OC| = br$. Pro hledaný obsah S našeho lichoběžníku proto platí

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v = b \cdot 2r = 2 \cdot |OB| \cdot |OC|.$$

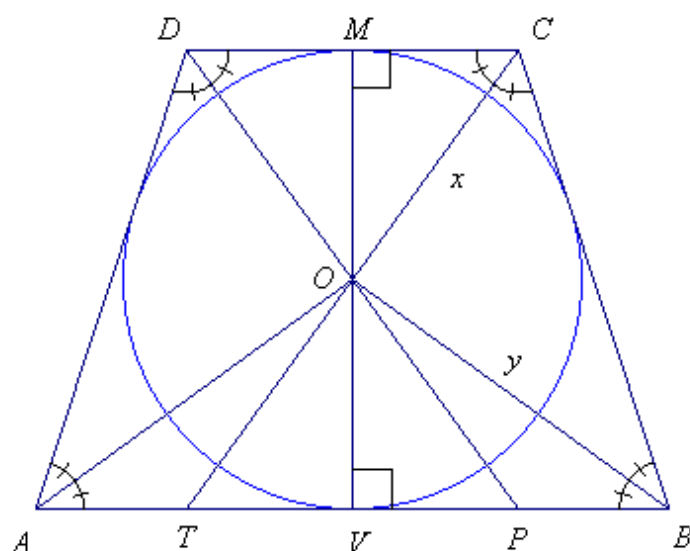
Kritéria hodnocení

Za úplné řešení šlo získat 6 bodů, z toho při prvním postupu 3 body za zdůvodnění, že daný lichoběžník je složen ze dvou čtveřic shodných trojúhelníků, nebo za rovnost typu $S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OBC} + S_{ODA}$. Za hlubší poznatek $S = 4 \cdot S_{OBC}$ už je ohodnocení čtyři body. Jeden bod za zjištění, že OBC je pravoúhlý trojúhelník, stejně tak za postup, kdy řešitel pouze rozdělí daný lichoběžník na čtyři dvojice shodných trojúhelníků a dalšího pokroku v úvahách o jejich obsahu nedosáhne.

3.3.3 Analýza řešitelských postupů

Tato úloha byla řešena hned několika různými postupy, zde si opět uvedeme ty, které se liší od vzorových.

Jako první uvedeme postup studentky Markéty Bláhové z gymnázia v Trhových Svinech. Markéta si zadaný lichoběžník rozdělila na dva navzájem se překrývající trojúhelníky ADP a CTB (obr.14, stylisticky upraveno, ponecháno značení autorky).

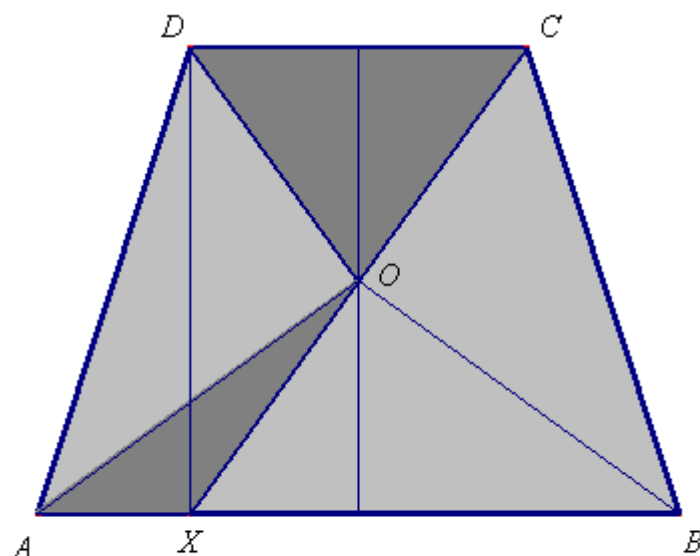


Obr. 14

Body T, P našla jako obrazy bodů C, D ve středové souměrnosti podle O . Dále využila toho, že trojúhelník BOC je pravoúhlý (neboť $\beta + \gamma = 180^\circ$ a $|\angle BOC| = 180^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ$).

Dále uvádí, že $S_{ABCD} = S_{CTB} + S_{ADP}$, protože oba trojúhelníky jsou rovnoramenné. Výsledkem je obsah o velikosti $2xy$, kde x, y jsou zadané délky.

Další způsob řešení použil student Jan Mareš z gymnázia ve Strakonicih. Také Jan využil náčrtku (obr. 15, opět se držíme značení autora).



Obr. 15

Jak je vidět na obrázku, toto řešení spočívá v rozdělení obsahu lichoběžníku na dva obsahy (na obr. 15 barevně odlišený), které si student vyjádřil a následně sečetl. Využil zde shodnosti trojúhelníků AOD, OBC a OXB (součet obsahů těchto tří trojúhelníků označil S_1). Správně (avšak bez důkazu pravoúhlosti trojúhelníku OBC) určil, že

$$S_1 = 3 \cdot \frac{|OB| \cdot |OC|}{2}.$$

Obsahem S_2 nazval součet obsahů trojúhelníků OCD a AXO . Zde uvádí $S_2 = \frac{S_1}{3}$, což je správně, avšak opět bez důkazu. Zřejmě zde vycházel z obrázku,

kde si mohl trojúhelník AOD složit z trojúhelníků AXO a OCD a to tak, že trojúhelník AXO zobrazil v osově souměrnosti podle osy AO , obdobně trojúhelník OCD v osově souměrnosti podle osy OD .

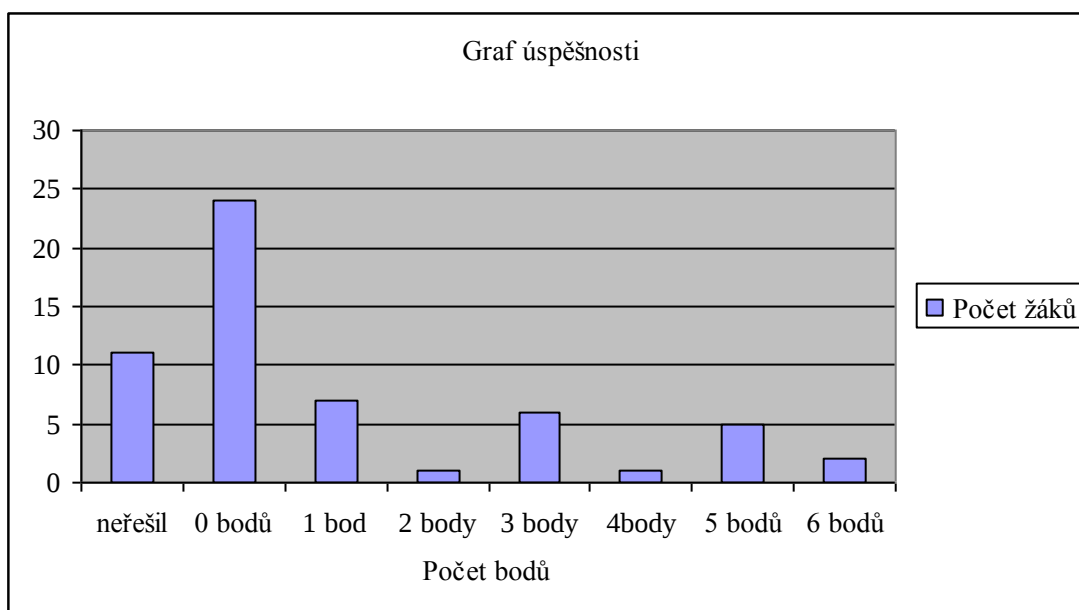
Následně sečetl obsahy S_1 a S_2 a dostal výsledek, tedy $S = 2 \cdot |OB| \cdot |OC|$.

3.3.4 Statistika úspěšnosti při řešení úlohy C-3

V této úloze dosáhli plného bodového ohodnocení dva žáci, maximálně dva body získalo 43 žáků (75%).

Hodnocení	Počet studentů	Relativní četnost
neřešil	11	0,19
0 bodů	24	0,42
1 bod	7	0,12
2 body	1	0,02
3 body	6	0,11
4 body	1	0,02
5 bodů	5	0,09
6 bodů	2	0,04

Tabulka 10



Obr. 16: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze C-3

3.3.5 Rozbor chyb žáků

Zde opět rozdělíme žáky do dvou skupin. Na ty, kteří získali alespoň jeden bod, a na ostatní, kteří byli ohodnoceni nulovým počtem bodů.

V první skupině se vyskytovaly tyto chyby:

- a) nejčastější chybou žáků bylo, že nedokázali (pouze odhadli z obrázku) velikost úhlu *COB*. To, že je tento úhel pravý, dokázali pouze tři žáci,
- b) postup bez náležitého zdůvodnění (sedm žáků),
- c) odevzdaná rozpracovaná úloha (dva žáci),
- d) řešení pouze pro speciální případ (dva žáci),
- e) chybná úvaha na základě nesprávného čtení z náčrtku (čtyři žáci).

Ve druhé skupině žáků byly nejčastější chyby následující:

- a) žáci se snažili vypočítat obsah lichoběžníku pomocí obecného vzorce $S = \frac{a+c}{2} \cdot v$, vždy bez úspěchu (12 žáků),
- b) správný náčrtek bez dalšího postupu (5 žáků),
- c) správný náčrtek se špatným dalším postupem (3 žáci), z toho jeden žák chtěl lichoběžník doplnit na rovnostranný trojúhelník o straně *a*, dva studenti špatně četli z obrázku,
- d) špatný náčrtek (2 žáci),
- e) 11 žáků úlohu neřešilo vůbec.

3.4 Úloha C-4

3.4.1 Zadání úlohy

Určete největší dvojmístné číslo k s následující vlastností: existuje přirozené číslo N , z něž po škrtnutí první číslice zleva dostaneme číslo k -krát menší. (Po vyškrtnutí číslice může zápis čísla začínat jednou či několika nulami.) K určenému číslu k pak najděte nejmenší vyhovující číslo N .

3.4.2 Vzorové řešení

Libovolné $m+1$ – místné přirozené číslo N s první číslicí c má vyjádření $N = c \cdot 10^m + x$, kde x je právě to číslo, které dostaneme z čísla N po škrtnutí první číslice c . Podle zadání má platit $N = c \cdot 10^m + x = kx$ neboli $c \cdot 10^m = (k-1)x$. Číslo $k-1$ tedy musí být dělitelem čísla $c \cdot 10^m$, které má ovšem pouze jednociferné prvočinitele: prvočísla 2, 5 a prvočinitele z rozkladu číslice c . Budeme proto postupně testovat na prvočinitele čísla $k-1$ pro největší dvojmístná k :

- $k = 99: k-1 = 98 = 2 \cdot 7^2$ nevyhovuje, neboť 7^2 nedělí $c \cdot 10^m$.
- $k = 98: k-1 = 97$ nevyhovuje, neboť 97 je dvojmístné prvočíslo.
- $k = 97: k-1 = 96 = 2^5 \cdot 3$ vyhovuje, neboť například $2^5 \cdot 3 \mid c \cdot 10^m$ pro $c = 3$ a $m = 5$; abychom dostali menší N , můžeme ovšem zvolit menší $m = 4$ a $c = 3 \cdot 2 = 6$ (jiné c pro $m = 4$ nevyhovuje). Pro $m \leq 3$ už vztah $2^5 \cdot 3 \mid c \cdot 10^m$ neplatí pro žádnou nenulovou číslici c .

Hledané největší dvojmístné k je tedy 97. Podle předchozí diskuse určíme nejmenší vyhovující N , kterému odpovídá $m = 4, c = 6$ a $x = 6 \cdot 10^4 : 96 = 625$, takže $N = 6 \cdot 10^4 + 625 = 60625$.

Odpověď: Hledané k je rovno 97 a nejmenší vyhovující N je 60625.

Kritéria hodnocení

Za úplné řešení dostali řešitelé 6 bodů, z toho 3 body za obecné zjištění, že číslo $k - 1$ musí být dělitelem součinu nenulové číslice a mocniny čísla 10. Za úplné je třeba považovat i řešení, kdy jsou vyloučeny hodnoty $k = 99, k = 98$ oddělenými postupy a pro hodnotu $k = 97$ je určeno (nikoliv uhodnuto) nejmenší vyhovující N . Při jinak úplném řešení, kdy je pro $k = 97$ uvedeno sice vyhovující, nikoliv však nejmenší možné N (například $N = 303125$), se udělí 5 bodů.

3.4.3 Analýza řešitelských postupů

V této úloze pouze jeden student dosáhl alespoň jednoho bodu, proto se budeme věnovat jeho postupu.

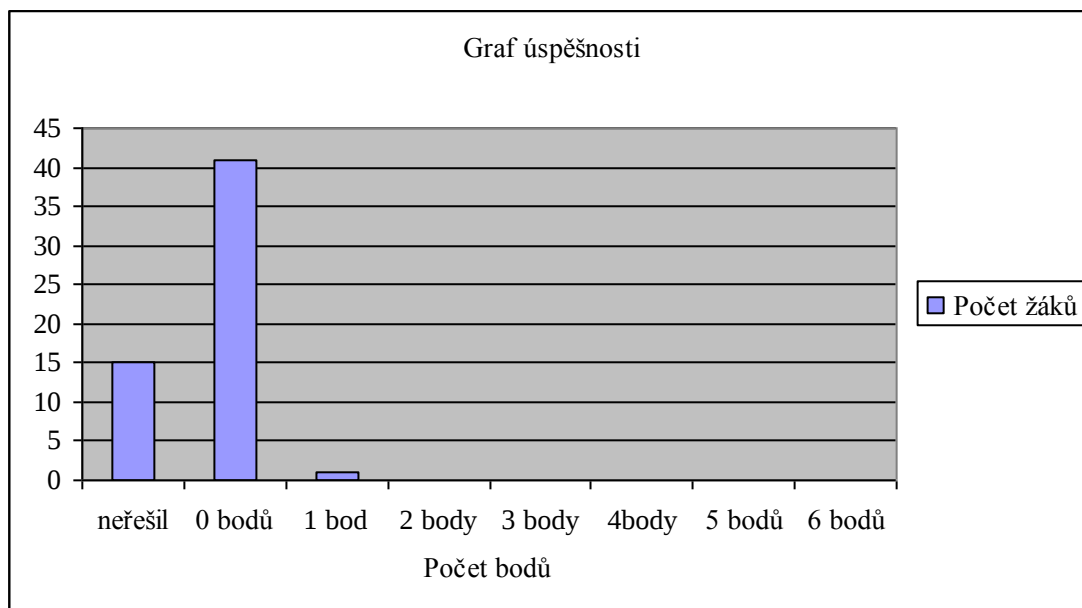
Tento student postupoval analogicky se vzorovým řešením, avšak ve fázi, kdy postupně testoval na prvočinitele čísla $k-1$ pro největší dvojmístná k , se dopustil chyby. Správně sice určil, že $k=99$ a $k=98$ nevyhovují, ale $k=97$ přeskočil a jako největší dvojciferné číslo odpovídající zadání odhadl $k=91$. Zbytek tohoto řešení byl proto špatně.

3.4.4 Statistika úspěšnosti při řešení úlohy C-4

V této úloze nezískalo žádný bod 56 žáků (98%). Jediný student získal právě jeden bod.

Hodnocení	Počet studentů	Relativní četnost
neřešil	15	0,26
0 bodů	41	0,72
1 bod	1	0,02
2 body	0	0,00
3 body	0	0,00
4 body	0	0,00
5 bodů	0	0,00
6 bodů	0	0,00

Tabulka 11



Obr. 17: Grafické znázornění úspěšnosti v úloze C-4

3.4.5 Rozbor chyb žáků

Žákovi, který jako jediný v této úloze získal bodové ohodnocení, jsme se věnovali v oddíle analýzy řešitelských postupů. Zde se proto budeme zabývat chybami, kterých se dopustili ostatní řešitelé.

Hned 26 z těchto žáků dospělo ke stejnému výsledku (konkrétně $k = 91$). Jejich společnou chybou (a nejčastější chybou v této úloze celkově) bylo špatné vyjádření vztahu $N = c \cdot 10^m + x = kx$, kdy nejčastěji používali vztah $N = c \cdot 10 + x = kx$.

Někteří tento vztah vynechali úplně a hledali číslo k logickou úvahou nebo pokusem.

Rovněž častou chybou byla mylná a nepodložená úvaha, že číslo k musí končit číslicí 1.

Další skupina studentů špatně pochopila zadání. Jejich řešení vůbec nesplňovalo požadované vztahy (například častý výsledek $k = 99, N = 11$).

Patnáct studentů úlohu neřešilo.

3.5 Souhrnná statistika příkladů kategorie C

V následující tabulce vidíme souhrnný přehled úspěšnosti žáků při řešení úloh kategorie C. Je zde vidět přibližně stejná úroveň obtížnosti úloh C-1, C-2 a C-3. Naproti tomu je zde patrná vysoká obtížnost úlohy C-4. Největší překážkou v této úloze studentům bylo chybování při obecném vyjádření vztahů uvedených v zadání.

	Úloha C-1		Úloha C-2		Úloha C-3		Úloha C-4	
Hodnocení	Počet žáků	Relativní četnost	Počet žáků	Relativní četnost	Počet žáků	Relativní četnost	Počet žáků	Relativní četnost
neřešil	9	0,16	7	0,12	11	0,19	15	0,26
0 bodů	25	0,44	22	0,39	24	0,42	41	0,72
1 bod	3	0,05	6	0,11	7	0,12	1	0,02
2 body	3	0,05	0	0	1	0,02	0	0
3 body	7	0,12	4	0,07	6	0,11	0	0
4body	1	0,02	5	0,09	1	0,02	0	0
5 bodů	6	0,11	6	0,11	5	0,09	0	0
6 bodů	3	0,05	7	0,12	2	0,04	0	0

Tabulka 12

4 Závěr

Cílem této práce bylo provést analýzu řešení úloh 2. kola 56. ročníku MO v jihočeském kraji. Analýza byla provedena rozбором originálů prací řešitelů. Kromě podání uceleného pohledu na způsoby řešení jednotlivých úloh, statistiku úspěšnosti žáků v jednotlivých úlohách a rozboru chyb, jichž se účastníci krajského kola dopouštěli, může tato práce sloužit jako doplňující studijní materiál pro řešitele matematických olympiád, stejně tak jako rozšiřující materiál pro studenty se zvýšeným zájmem o matematiku.

V kategorii B, určené studentům druhých ročníků středních škol, se v tomto ročníku krajského kola zúčastnilo 22 řešitelů. Z tabulek v oddílech se statistikou úspěšnosti žáků je patrná rozdílná obtížnost úloh, která se promítá do bodového zisku řešitelů. Nejtěžší úlohou zde z tohoto pohledu byla úloha B-4, ve které žádný student nezískal plný počet bodů. Naopak nejlehčí zde byla úloha B-2, kde žáků s maximálním bodovým ohodnocením bylo jedenáct.

Kategorie C, která je určena pro studenty prvních ročníků středních škol, se v tomto kole zúčastnilo 57 studentů. Ze statistiky úspěšnosti v této kategorii plyne přílišná obtížnost úlohy C-4, kde pouze jeden žák získal alespoň jeden bod.

Podkladem této práce byly originály žakovských řešení, z nichž některé jsou k nahlédnutí v přílohách.

5 Použitá literatura

- [1] Zítek F. a kol.: *Třicátý třetí ročník matematické olympiády*, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986
- [2] Hejný M., Michalcová A.: *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*, Metodické centrum v Bratislavě, Bratislava, 2001
- [3] *Matematická olympiáda* [online]. [2008] [cit. 2009-03-25]. Dostupný z WWW: <http://www.math.muni.cz/~rvmo/>
- [4] Boček L., Horák K.: *Padesát let matematické olympiády*, Matematicko-fyzikální Fakulta Univerzity Karlovy v Praze, Praha, 2001

6 Seznam příloh

- [A] Řešení Jana Matějky, kategorie B, úloha č.1
- [B] Řešení Romana Klimeše, kategorie B, úloha č.1
- [C] Řešení Jana Matějky, kategorie B, úloha č.4
- [D] Řešení Ondřeje Ledera, kategorie B, úloha č.4
- [E] Řešení Petra Doležala, kategorie C, úloha č.1
- [F] Řešení Františka Steinhausera, kategorie C, úloha č.1
- [G] Řešení Petra Doležala, kategorie C, úloha č.2
- [H] Řešení Markéty Bláhové, kategorie C, úloha č.3
- [I] Řešení Jana Mareše, kategorie C, úloha č.3

Příloha A

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 + \varphi x + \psi)$$

$$x^4 + ax^2 + bx + c = x^4 + x^3(\varphi + 1) + x^2(1 + \varphi + \psi) + x(\varphi + \psi) + \psi$$

↓

$$\varphi + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = -1$$

$$1 + \varphi + \psi = a \Rightarrow \psi = a$$

$$\varphi + \psi = b \Rightarrow a - 1$$

$$\psi = c = a$$

$$\Rightarrow b = a - 1 \quad \checkmark$$

$$c = a$$

$$\min (a^2 + (a-1)^2 + a^2) :$$

$$f(x) = 3x^2 + 1 - 2x \quad \text{derivuji :}$$

$$f'(x) = 6x - 2 \quad \checkmark \quad \text{a postavím } = 0$$

$$6x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

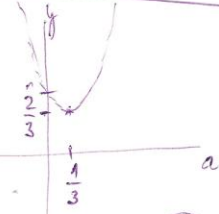
$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{2}{3} \quad \checkmark$$

2. možnost

$$y = 3a^2 + 1 - 2a$$

$$y = 3 \left(a^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a \right) = 3 \left(\left(a - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{2}{9} \right)$$

$$3a^2 - 2a + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$



$$\Rightarrow \min (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{2}{3}$$

$$\text{pro } a = \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

66 92

JAN HATÉJKA

ČUMĀTŮM

VÍKOVCOVA 8

ČERKEŠSKÉ ŽELEZNICE

37161

ČLOHAT Ć. 7

Kat. B

Příloha B

$$\frac{x^7 + ax^2 + bx + c}{x^2 + x + 1}$$

$$\frac{-ax}{x^2} = \left(-\frac{a}{x}\right)$$

$$\frac{a}{x} \cdot x^2 = \frac{ax^2}{x}$$

ob 9A

$$(x^7 + ax^2 + bx + c) : (x^2 + x + 1) = x^5 - x + a - \frac{a}{x} + \frac{a}{x^3} - \frac{a}{x^4} + \frac{a}{x^6}$$

$$\frac{-x^7 - x^3 - x^2}{-x^3 + (a-1)x^2 + bx + c}$$

$$\frac{x^3 + x^2 + x}{ax^2 + (b+1)x + c}$$

$$\frac{-ax^2 - ax - a}{-ax + (b+1)x + c - a}$$

$$\frac{+ax + a + \frac{a}{x}}{\frac{a}{x} + (b+1)x + c}$$

$$\frac{-\frac{a}{x} - \frac{a}{x^2} - \frac{a}{x^3}}{-\frac{a}{x^2} - \frac{a}{x^3} + (b+1)x + c}$$

$$\frac{+\frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3} + \frac{a}{x^4}}{\frac{a}{x^3} + (b+1)x + c}$$

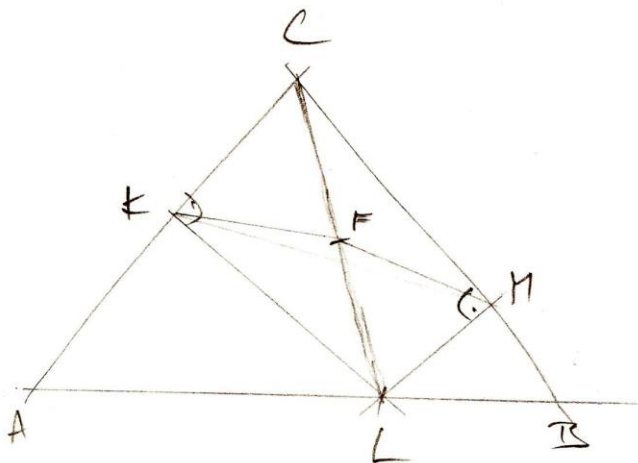
$$\frac{-\frac{a}{x^4} - \frac{a}{x^5} - \frac{a}{x^6}}{-\frac{a}{x^4} - \frac{a}{x^5} - \frac{a}{x^6}}$$

Pakoval jsem se zjednotit množitel
množitelům podle zadání a měl jsem
to co mi vyjde (můj výsledek) musí
byť celé číslo, protože $x^7 + ax^2 + bx + c$ má
byť dělitelný $x^2 + x + 1$. Pak jsem uvažoval, že
do výsledku dosadím číslo a, b, c tak aby
k tomu skutečně šel výsledek, např. když výsledek
dělím $\frac{1}{a}$ pak se a a c musí dostat
celých, ale pak bych chtěl potvrdit dělitelnost, že
a mohu dostat pouze 1, $\frac{1}{a}$ je celé číslo
pouze pro $a = 1$.

Pak jsem musel ještě
uvažovat o $a^2 + b^2 + c^2$,
ale jak říkají, nejlepší
je se do toho pustit.
ale tak 1 nebo 2
hodily za malou ... :-)

Roman Křiváček
Gymnázium
Boškovice nám. 273/V
Pavla
380 01
Úloha číslo 1, bod. B

JAN HATZDA
GYNNA'ZICH
V'ROUOVA P
~~DECE~~ RABONE
371 61
CLOHA C/H
HAT-B



Protože $L \perp K \Rightarrow$ střed K opsane' $\Delta^2 = F$ } Thalesova
 - " - $L \perp M \Rightarrow$ - " - } věta

Tedy KLMC + tetinový $\times KFM = 2 \times KCM = \text{konst.}$
 (Glučové a střední - uhlíky)
 $|K| = |F|$ (polomery tržnice a psane)

$$\angle MKF = \angle FKE = 90^\circ - \angle KCM$$

Δ KMF JE ROVNORAMENNÝ A VŠECHNY OKMF JSOU PODOBNÉ.
($\angle KMF = \text{konst.}$)

nem složité než
všechny

$\Rightarrow$ hledám $\min(KF)$; $|KF| = |CF|$ (podobně kr. opsané)

 $\min(KF)$ a $\min(C)$
$$\Rightarrow \min (CL) \Rightarrow$$

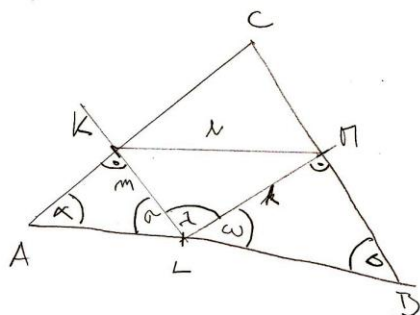
а заповен мери мн (leF) а мн (leF)
и то го заповен е
дрзич 2 $\Rightarrow$

Nejkratší vzdálenost bodu od přímky je na právnici $\Rightarrow$ Pro pozici L takovou, že $CL \perp AB$ (CL výška), je KM NEJkratší!

Příloha D

ONDŘEJ LEDER
GYMNÁZIUM ČESKÁ
ČESKÁ 64
ČESKÉ BUDEJOVICE
ÚLOHA ČÍSLO: 4

3610



$$\omega = 180 - (90 + \beta)$$

$$\varphi = 180 - (90 + \alpha)$$

$$\lambda = 180 - (\omega + \varphi)$$

↓

$|KLM| = l$ pro daný
 ΔABC

všechny úsečky KL jsou
rovnoběžné úsečky ML také

Zadání: $\angle AKL \sim 90^\circ$

$\angle BML \sim 90^\circ$

$L \in AB$

kdy je KM nejmenší
správné vyjádření, se kterým
děláme nepohodlí

chybné znečistění

$$l^2 = k^2 + m^2 - 2km \cos \lambda$$

$\cos \lambda$ je konstantní

$$l^2 = k^2 + m^2 - 2km \cdot x$$

pro x^2 je parabola $\Rightarrow$ neroste úměrně chceme-li
tedy aby součet $k^2 + m^2$ byl co nejmenší musí
se $k = m$ ~~chybné znečistění~~ $l^2 = 2k^2 - 2k^2 \cdot \cos \lambda$

*

úsečka KM bude nejkratší bude-li pravoúhlý
KLMT rovnoramenný a KM bude základna.
* platí pro tento případ protože rosteli k pak m klesá.
- pouze spec příp.

Petr Doležal

Gymnasium

žirocova 8

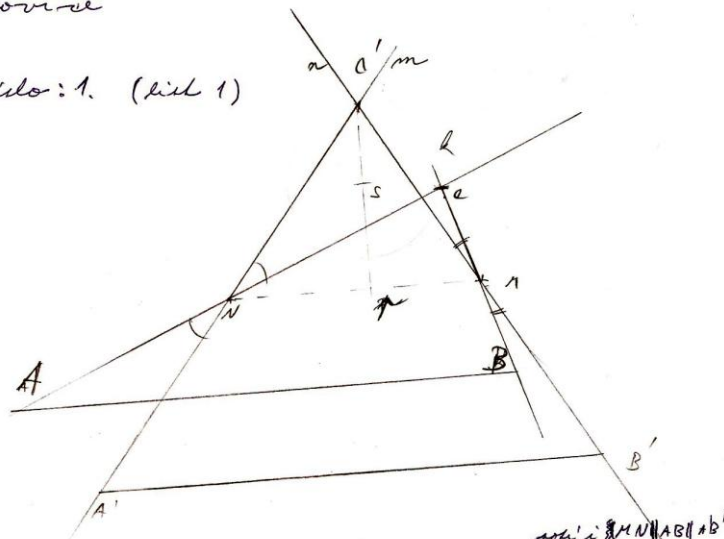
Č. Budijovice

3 01

uloga čisto: 1. (list 1)

Načrt

6 bodas Leischnen


$$AB \parallel A'B' \text{ and } |AC| = |A'C| \wedge |BC| = |B'C|, \text{ minisim-li}$$

bod C' po obvodu kružnice mimo se nitky A, B ale jejíž
soudrž je stejná $\Rightarrow$ je $A'B'$ stále stejné dlouhá jako AB . Kolmice
(výšky) jsou také rovnoběžné $\Rightarrow$ olivem posunuti AB na $A'B'$
je oběh $\Delta C'A'B' \cong \Delta CAB$.

nejedini vjibar, proto morse na ziskat, kdzy bad e bude
pruca i ikem druzica d a pinioty n, ktera' proba' si
podgom s a zi bolma' na AA.

Konstantin

6. B : $B \in m_i \mid B \cap M = M \cap L$

7. $\triangle ABC$

$$1. \pi : \pi \perp NM; s \in \pi$$

2. $c^* : c^* \in \mathbb{R}^n, \|c^*\|_1 \leq \|c\|_1$

3. $m: \text{cem}; N \in m$

4. $A: A \in m; |AN| = |N \cap A|$

5. $n: \text{con}; \text{Men}$

disbure : uloba na 1 rineu
 pohud body N: 7 selu
 na prima prola'rigia
 pohud ano na uloba 2 rineu!

Glinbauer František
Gymnázium Jovice
B. Kamen
Jovice

3. hodiny Leschmer

manama

Ukázka č. 1. ~~ABCD~~

Napřed si uděláme náčrtovou kresličku a ty dva body



někteří se mi
moc líbí

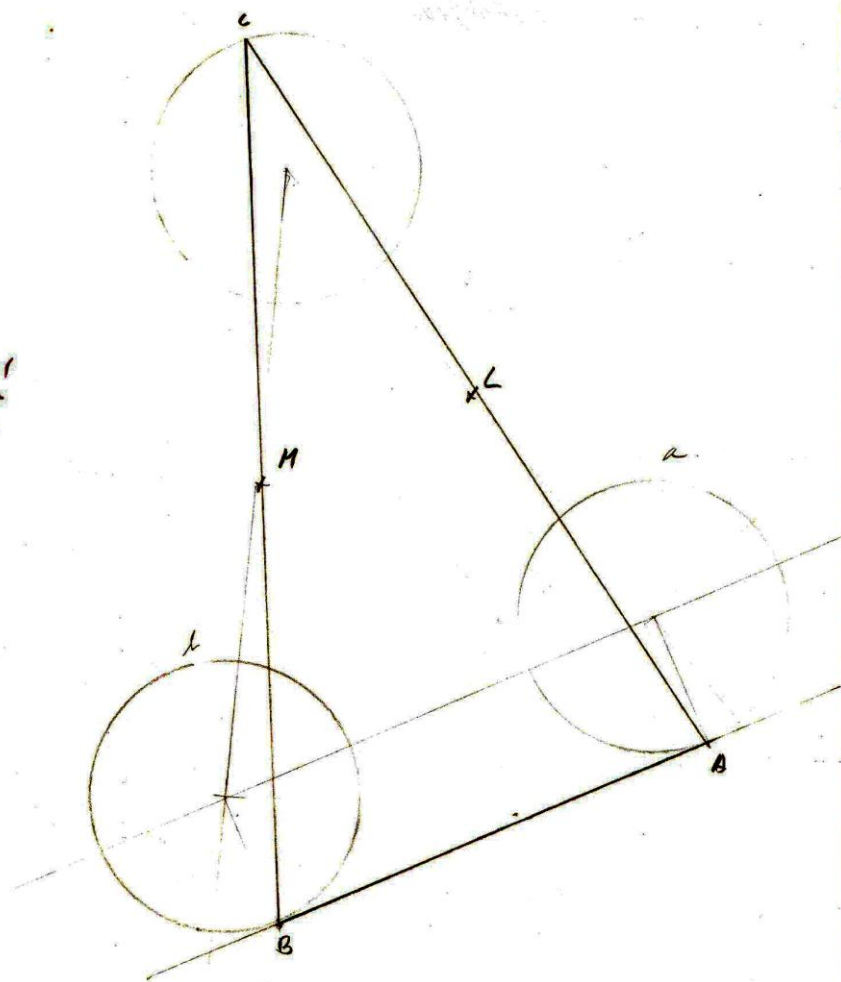
Tedy si uděláme dvě kružnice a a b kružnice a
bude musíme mít body A a b máme body B.
Pokud mi napadne že vzhledem AB jsou vzhledem
rovnoběžné (společná přímka jim může být rovnoběžná) a stejně
délkové (vzhledem bude stejná). Z toho plyne že
na sestavení jeje nejmenšího s největším obsahem
je třeba jen sestavit ten s největší výškou. A to
bude ten který bude mít vzhledem AB a který bude
vzhledem AB jenom kružnice (AB) souviset ten správně
od kružnice k.

Konstrukce (slovně)

Myšlet sestavením co je to radián: pro kružnice a a b , přímka l spojuje
středem kružnic a a b má dvě kolmice na stejné kružnici
pro těchto dvou kružnic, a pro přes ohy skřivky M a L bod c .
máme trojúhelník ABC .

Uspořádání
a opakování
kružnic.
Uspořádání
neuvádělo.

3 body



Příloha G

Petr Doležal
Gymnázium
Jirousova 8
č. Budějovice

6. 6. 9.

✓

úkol číslo 2 (list 1)

rovnici $x + n \cdot \sqrt{x+q} + q = 2007$ lze takto upravit:

$$n \cdot \sqrt{x+q} = 2007 - (x+q) \quad | \quad x+q = y \quad y \in \mathbb{N}$$

$$n \cdot \sqrt{y} = 2007 - y$$

$\sqrt{y}$ musí být $\in \mathbb{N}$, aby
rovnice $n \cdot \sqrt{y}$ byl přirozené
číslo. $\Rightarrow \sqrt{y} = 0 \quad 0 \in \mathbb{N} \Rightarrow$
 $\Rightarrow y = 0^2$ ✓

$$n \cdot 0 = 2007 - 0^2$$

najmenší hodnota 0 musí být
44, protože $44^2 = 1936 < 2007$, zároveň
musí být 0 sudé, protože $2007 - 0^2$
by bylo liché a nelo by rozdělit

0.

$n \cdot 43 = 2007 - 43^2 \Rightarrow$	2,9
$n \cdot 41 = 2007 - 41^2 \Rightarrow$	12,9
$n \cdot 39 = 2007 - 39^2 \Rightarrow$	12,2
$n \cdot 37 = 2007 - 37^2 \Rightarrow$	22,3
$n \cdot 35 = 2007 - 35^2 \Rightarrow$	27,8
$n \cdot 33 = 2007 - 33^2 \Rightarrow$	33,7
$n \cdot 31 = 2007 - 31^2 \Rightarrow$	40,2
$n \cdot 29 = 2007 - 29^2 \Rightarrow$	42,3
$n \cdot 27 = 2007 - 27^2 \Rightarrow$	55,2
$n \cdot 25 = 2007 - 25^2 \Rightarrow$	64,2
$n \cdot 23 = 2007 - 23^2 \Rightarrow$	74,5
$n \cdot 21 = 2007 - 21^2 \Rightarrow$	86,6
$n \cdot 19 = 2007 - 19^2 \Rightarrow$	101,1
$n \cdot 17 = 2007 - 17^2 \Rightarrow$	118,8
$n \cdot 15 = 2007 - 15^2 \Rightarrow$	141,3
$n \cdot 13 = 2007 - 13^2 \Rightarrow$	171,4
$n \cdot 11 = 2007 - 11^2 \Rightarrow$	214
$n \cdot 9 = 2007 - 9^2 \Rightarrow$	279,7

$$n \cdot 5 = 2007 - 5^2 \Rightarrow 396,4$$

$$n \cdot 3 = 2007 - 3^2 \Rightarrow 666$$

$$n \cdot 1 = 2007 - 1^2 = 2006$$

n je přirozené číslo jím

pro $0 \in \{9, 3, 1\} \Rightarrow y \in \{81, 9, 1\}$

$y = x+q \Rightarrow y \neq 1 \Rightarrow y \in \{81, 9\}$

$$\Rightarrow y = x+q$$

$$9 = 1+8$$

$$9 = 2+7$$

$$9 = 3+6$$

$$9 = 4+5$$

$$9 = 5+4$$

$$9 = 6+3$$

$$9 = 7+2$$

$$9 = 8+1$$

$$y = x+q$$

$$81 = 1+80$$

$$\vdots$$

$$80+1 \Rightarrow 80$$

$$\text{celkem: } 80+8 = 88$$

8 možností

%

Celkem tedy existují 88 trojic (p, q, r) , které splňují podmínku.

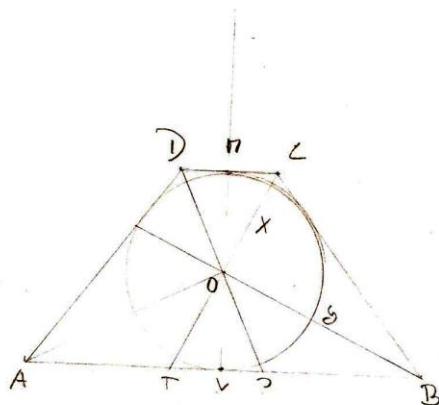
$$a) \quad p+q+r \Rightarrow r=294 \Rightarrow p+q=\overset{81}{\cancel{294}} \Rightarrow p+q+r=\overset{295}{\cancel{294}} \\ \Rightarrow r=666 \Rightarrow p+q=\overset{675}{\cancel{666}} \Rightarrow p+q+r=\overset{675}{\cancel{666}}$$

Trojice může nabývat dvou hodnot a to $\overset{295}{\cancel{294}}$ a $\overset{675}{\cancel{666}}$.

3670

MARIEČKA BUCHOVÁ
GYMNAZIUM
ŠKOLNÍ
TRHOVÉ SVINY
3
KAT. C/3

3)



$$S_{CTB} = \frac{2x \cdot y}{2}$$

$$S_{CTB} = xy$$

4. Dle opakování
použít první vzorek

-1

$$|DO| = x \quad |AO| = y \quad S_{ADP} = S_{CTB}$$

ADP a CTB se překrývají, ale víme, že osa o půli lichoběžníku
ABCD. To znamená, že $S_{VBCH} = S_{AVTD}$. $S_{\Delta TVO} \stackrel{\text{Dělení}}{\sim} S_{\Delta TOV}$
znamená, že $S_{VBCH} = S_{CTB}$ a $S_{AVTD} = S_{ADP}$. Vzhledem
obsah lichoběžníku je tedy $S_{CTB} + S_{ADP} = \boxed{2xy}$.

Příloha I

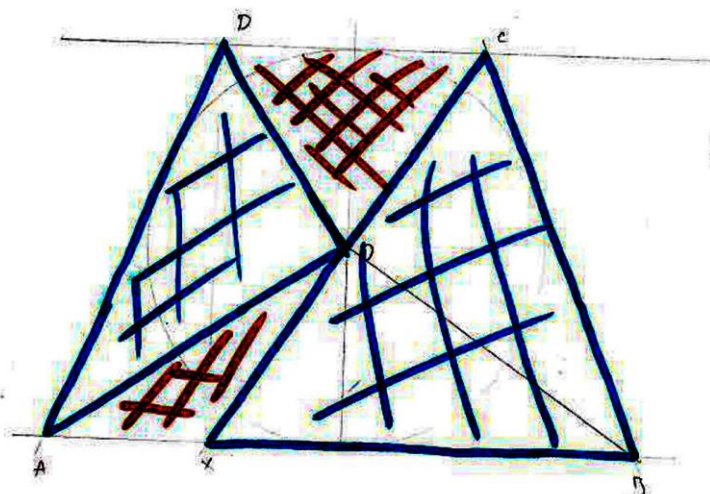
$|OB|$ ----- výše
 $|OC|$ ----- výše

KATEGORIE C.

4685

JAN HAREŠ
 GYMNAZIUM
 MACHOVÁ 124
 STRAKONICE
 386 48
 ÚLOHA č. 3

NÁČRT:



$$|x| = |OC|$$

$$S = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$$

$$\Delta OBC = \Delta OAD$$

$$\Delta OBC = \Delta OBD + \Delta ODX$$

$$S(\Delta OBC + \Delta OBD + \Delta ODX) = 3 \cdot \frac{|OB| \cdot |OC|}{2}$$

$$S_1 + S_2 =$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \frac{|OB| \cdot |OC|}{2} + S_2(\Delta ODC + \Delta AOD) = \frac{S_1 \cdot 2}{3}$$

$$= \frac{4 \cdot |OB| \cdot |OC|}{2} = S(\Delta ODC + \Delta AOD) = S(\Delta OBC)$$

$$= \underline{\underline{2 \cdot |OB| \cdot |OC|}}$$

Obsah nichotěvíčku je $2 \cdot |OB| \cdot |OC|$