

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta – katedra matematiky



OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

(SBÍRKA PŘÍKLADŮ)

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Knihovna JU - PF



3 1 1 5 1 7 2 4 3 1

Vypracovala: Radka HAVLÍKOVÁ

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

České Budějovice, duben 2006

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

(SBÍRKA PŘÍKLADŮ)

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Anotace:

Tato práce poskytuje základní přehled o klasifikaci obyčejných diferenciálních rovnic. Ve stručnosti je zmíněna historie obyčejných diferenciálních rovnic a jejich použití v různých praktických oborech. Je popsán přehled možných metod řešení obyčejných diferenciálních rovnic formou vyřešených vzorových příkladů a na konci každé kapitoly je cvičení s uvedenými výsledky jednotlivých příkladů.

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
(EXAMPLE COLLECTION)
BACHELOR'S THESIS

Annotation:

The thesis provides basic classification of the ordinary differential equations. Basic historic timeline (containing the list of the main scientists) is also presented as well as the practical usage of the ordinary differential equations. Various solving methods are described with a number of examples and exercises at the end of each chapter.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a veškerou použitou literaturu jsem citovala.

V Českých Budějovicích 28. dubna 2006

Havlíková' Z.

Radka Havlíková

Poděkování

Děkuji panu Mgr. Petru Chládkovi, Ph.D., vedoucímu mé bakalářské práce, za pomoc a rady, které mi při zpracování této bakalářské práce poskytl.

1. Obsah

1. Obsah.....	6
2. Úvod.....	8
3. Historie obyčejných diferenciálních rovnic (ODR)	9
4. Obyčejné diferenciální rovnice I. řádu.....	15
4.1. Rovnice se separovanými proměnnými	15
4.2. Cauchyova počáteční úloha.....	21
4.3. Homogenní diferenciální rovnice.....	27
4.3.1. Homogenní diferenciální rovnice typu $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	27
4.3.2. Rovnice typu $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$	34
4.4. Lineární diferenciální rovnice I. řádu.....	54
4.4.1. Homogenní lineární diferenciální rovnice I. řádu	54
4.4.2. Nehomogenní lineární diferenciální rovnice I. řádu	54
5. Exaktní diferenciální rovnice	65
6. Bernoulliova diferenciální rovnice.....	71
7. Obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů	81
7.1. Obyčejné diferenciální rovnice II.řádu	81
7.1.1. Homogenní ODR II. řádu s konstantními koeficienty	81
7.2. Nehomogenní ODR II. řádu.....	86
7.2.1. Metoda variace konstant	86
7.3. Nehomogenní diferenciální rovnice II. řádu se speciální pravou stranou.....	90
7.3.1. Metoda neurčitých koeficientů.....	90
8. Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic	103

8.1.	Homogenní soustavy ODR 1.řádu	103
8.2.	Nehomogenní soustava ODR 1.řádu.....	115
9.	Využití obyčejných diferenciálních rovnic v praxi	126
10.	Závěr	128
11.	Seznam použité literatury	129

2. Úvod

Diferenciální rovnice od dob svého vzniku postupně pronikaly do nejrozličnějších oblastí vědy a stávaly se postupně mocným nástrojem, který umožňoval lépe popisovat přírodní jevy a děje. V současnosti je jejich použití velmi široké, na jejich použití je postaveno například hojně využívané počítačové modelování – např. modelování proudění tekutin, plynů a par, modelování napjatosti a deformací v materiálech atd. Každý děj je popsán svými diferenciálními rovnicemi nebo jejich soustavami (které odvodili badatelé z různých vědních oborů). Uživatel pak sám volí složitost úlohy aktivací výpočtu různých dějů. Výpočty se provádí implementovanými numerickými metodami. Tyto systémy jsou již vysoce sofistikované, nicméně jejich základem (základem pro další zpřesňování – tzn. kvalitnější popis děje) jsou obyčejné diferenciální rovnice.

Tato práce má za cíl seznámit stručnou formou s historií obyčejných diferenciálních rovnic, jejich použitím v praxi a hlavně přiblížit jejich členění s příslušnými metodami řešení. Velký důraz byl kladen na množství příkladů, ať už řešených (potřebných pro porozumění metodám), nebo ve formě cvičení s uvedenými výsledky.

3. Historie obyčejných diferenciálních rovnic (ODR)

S prvopočátky rozvoje teorie ODR se setkáváme již na rozhraní 16. a 17. století, kdy se začínaly řešit úlohy související s ODR. Například skotský matematik *Merchiston John Napier* (1550 – 1617) při sestrojování tabulek logaritmů se základem $\frac{1}{e}$ z čísel tvaru

$$\frac{x_n}{r} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n; \quad n \in N, r = 10^7$$

uváděl hodnotu těchto logaritmů jako

$$\frac{y_n}{r}, \quad \text{kde } y_n = n \cdot \left(1 + \frac{1}{2r}\right).$$

Ověříme, zda daný vztah platí:

$$\log_{\frac{1}{e}} \frac{x_n}{r} = -\ln \frac{x_n}{r} = -n \cdot \ln \left(1 - \frac{1}{r}\right) \approx n \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2r^2}\right) = \frac{y_n}{r}.$$

Přibližná hodnota základu těchto logaritmů $\frac{1}{e}$ je potom

$$\frac{1}{e} \approx \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{\frac{r}{1 + \frac{1}{2r}}}.$$

Z dnešního hlediska Napier řešil tabelárně počáteční problém

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r}{x}; \quad y(r) = 0, r = 10^7.$$

Jeho řešením obdržíme

$$y(x) = -r \cdot \int_r^x \frac{1}{t} dt = -r \cdot [\ln t]_r^x = -r \cdot \ln \frac{x}{r} = r \cdot \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{x}{r}\right)$$

a odtud

$$\frac{y(x)}{r} = \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{x}{r}\right).$$

Dalším matematikem tohoto období je *René Descartes* (1596 – 1650). Zabýval se řešením některých „obrácených úloh na tečny“, např. úlohou nalézt křivku, jejíž subtangenta s_t splňuje rovnici:

$$\frac{y}{s_t} = \frac{x - y}{a},$$

která má při dnešním označení tvar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{a}.$$

Převědeme-li tuto rovnici transformací

$$x = \xi \quad \text{a} \quad y = \eta + \xi - a,$$

dostaneme rovnici

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{a}{\eta},$$

kterou čtvrt století před ním řešil Napier. Descartes pro výpočet použil kinetickou metodu určení bodů hledané křivky, a to jako množinu průsečíků dvou pohybujících se přímek.

Průkopnické období zájmu matematiků a fyziků o ODR začíná poslední čtvrtinou 17. století pracemi *Isaaca Newtona* (1642–1727) a *Gottfrieda Wilhelma Leibnitze* (1646–1716). V tomto období se studium ODR omezovalo na řešení konkrétních úloh, respektive jednotlivých typů rovnic. Všeobecné otázky, jako existence a jednoznačnost řešení, zůstávaly stranou. Řadu ODR vyřešil Newton ve svém díle „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ z roku 1686. Zabývá se zde především rovnicemi, které mají v dnešní symbolice tvar

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad \text{a} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m \pm n \left(\frac{dy}{dx} \right)^2.$$

Výklad se opírá o synteticko-geometrické konstrukce a nevyskytuje se zde zápis diferenciálních rovnic ani jejich integrálů v analytickém tvaru. V explicitním tvaru se setkáváme s diferenciálními rovnicemi v Newtonově díle „*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*“, které bylo napsáno kolem roku 1671 a vydáno r. 1736. V tomto díle byly uvedeny dvě úlohy, ve kterých je formulován obecný problém integrace ODR.

1. Z daného vztahu mezi fluentami (proměnnými x a y , které byly uvažovány jako funkce času t) určit vztah mezi fluxemi (derivacemi).
2. Z dané rovnice, která obsahuje fluxe, najít vztah mezi fluentami.

V druhé úloze šlo tedy v případě jedné proměnné o řešení rovnice

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Newton se zabývá zejména zvláštními případy těchto rovnic, a to rovnicemi s totálními diferenciály

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0.$$

Obecná metoda, kterou Newton užíval u lineárních i jiných rovnic, spočívala na postupných aproximacích řešení ve tvaru nekonečné řady mocnin s kladnými i zápornými exponenty.

Pojem „diferenciální rovnice“ (aequatio differentiale) jako první použil německý matematik a filozof Leibnitz, a to v dopise Newtonovi r. 1676. V tisku se tento pojem vyskytuje až od r. 1684. Leibnitz se také podílel na vzniku klasifikace ODR a uvedl metody jejich převodu na kvadratury. V r. 1693 zveřejnil Leibnitz substituci převádějící homogenní rovnici na rovnici se separovanými proměnnými. Prokázal, že rovnici

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

lze substitucí $y^{1-n} = z$ převést na rovnici lineární.

Tuto rovnici obvykle nazýváme rovnicí bernoulliiovou, která je pojmenovaná dle bratří Bernoulliových. *Jacob Bernoulli (1654-1705)* objevil metodu převedení rovnice druhého řádu neobsahující explicitně jednu z proměnných na rovnici prvního řádu zavedením parametru. *Johann Bernoulli (1667-1748)* v r. 1697 formuloval důležitou úlohu o trajektoriích, jejíž metodu řešení později popsal Leibnitz. Johann Bernoulli v několika případech užil k řešení ODR integračního faktoru. V roce 1700 ukázal, že lze pomocí faktoru x^r snížit o jednotku řád rovnice

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0.$$

Také švýcarský matematik *Daniel Bernoulli (1700 – 1782)*, syn Johanna Bernoulliho, řešil lineární homogenní rovnici s konstantními koeficienty. Objevil metodu variace konstant.

O rozvoj ODR v 18. století se kromě uvedených matematiků podstatně přičinili *Leonhard Euler (1707-1783)*, *Alexis Claude Clairaut (1713-1765)*, *Jean Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783)*, *Joseph Louis Lagrange (1736-1813)*.

Nemalou měrou do historie ODR zasáhl Euler, který působil v Petrohradě a Berlíně. Obohatil teorii ODR o celou řadu důležitých objevů. V pojednání z r. 1743 uvedl klasickou metodu řešení lineární homogenní rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty pomocí substituce $y = e^{kx}$ a v případě mnohonásobných kořenů charakteristické rovnice pomocí substituce $y = e^{kx} u$. Obdobná substituce $e^{\alpha x} u$ v případě páru komplexních kořenů $\alpha \pm i\beta$ charakteristické rovnice druhého stupně vede na rovnici

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \beta^2 u = 0.$$

Její partikulární řešení obdržel Euler ve dvou tvarech:

$$\cos \beta x \quad \text{a} \quad \frac{1}{2} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}),$$

což jej přivedlo k objevu proslulých vzorců:

$$\cos \beta x = \frac{1}{2} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}), \quad \sin \beta x = \frac{1}{2i} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}).$$

Ukázal, že obecným řešením lineární diferenciální rovnice n -tého řádu je lineární kombinace jejích partikulárních řešení. Přitom poprvé zavedl názvy „partikulární“ a „obecné“ řešení. O deset let později zveřejnil způsob řešení nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty metodou postupného snižování řádu rovnice.

Podstatných úspěchů dosáhl při vyšetřování podmínek integrability diferenciálních výrazů. U Eulera se také poprvé setkáváme s ryze analytickým způsobem řešení matematických úloh.

S pojmem singulárního řešení ODR prvního řádu se setkáváme u *Brooka Taylora* (1685-1731) roku 1715, on však nerozlišoval toto řešení od obecného řešení. Až o 20 let později *Clairaut* poukázal na zvláštní vlastnosti singulárního řešení a odlišil ho od obecného řešení. Podmínku integrability výrazu $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ určil r. 1793 *Clairaut* současně s *Eulerem*.

D'Alembert soustavně studoval soustavy ODR. Od něho pochází metoda neurčitých koeficientů pro řešení lineární nehomogenní soustavy diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Ukázal, že obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice je součtem obecného řešení příslušné rovnice homogenní a partikulárního řešení rovnice nehomogenní.

Lagrange v r. 1775 podrobně rozpracoval metodu variace konstant, které používal již *Euler* ve spisech o přílivech a odlivech u rovnice druhého řádu v r. 1740. Ukázal, že známe-li k partikulárních řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n -tého řádu, lze ji transformovat na lineární rovnici řádu $n - k$. V roce 1776 *Lagrange* provedl rozbor charakteru singulárních řešení diferenciálních rovnic a ukázal, že je lze vypočítat buď přímo z diferenciální rovnice, nebo z obecného řešení derivováním podle parametru. Poprvé podal geometrickou interpretaci singulárního řešení jako obálky integrálních křivek.

Začátkem 19. století se přesně formulují základní pojmy matematické analýzy (pojem limity, spojitosti funkce apod.), které v konečném důsledku ovlivnily i rozvoj teorie ODR. Toho času už vystupuje do popředí problém existence řešení ODR. První přesnou formulaci a první řešení této úlohy podává *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857), který ve svých přednáškách 1820-1830 předložil důkaz existence a jednoznačnosti úlohy $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ v oblasti spojitosti funkcí

$$f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y).$$

Pojem lineární nezávislosti řešení lineární ODR zavedl roku 1821 *Josef Hoené de Wronski* (1775-1855). V roce 1858 *Elvin Christoffel* (1829-1900) vyjádřil podmínku lineární nezávislosti řešení homogenní diferenciální rovnice pomocí determinantu, nazývaného Wronskián.

Podrobněji si rozebereme situaci v případě homogenní diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Jsou-li dána dvě řešení této rovnice $u(x)$ a $v(x)$, pak řekneme, že tato řešení jsou lineárně nezávislá, právě když platí:

$$c_1 u(x) + c_2 v(x) = 0 \text{ jen pro } c_1 = c_2 = 0,$$

což lze ekvivalentně zapsat pomocí wronskiánu podmínkou $\text{Det} \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix} \neq 0$.

V roce 1876, při studiu problému existence a jednoznačnosti řešení rovnice $y' = f(x, y)$, nahradil *Rudolf Otto Sigismund Lipschitz* (1832-1903) Cauchyho podmínku spojitosti funkce $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ v daném oboru tzv. Lipschitzovou podmínkou

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \text{ kde } L \in \mathbb{R}_+^0.$$

Nato *Giuseppe Peano* (1858-1932) dokázal existenci aspoň jednoho řešení úlohy $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ v oboru spojitosti funkce $f(x, y)$.

Na myšlenku hledání řešení ODR pomocí postupných aproximací jako první přišel Cauchy a do dnešní podoby ji rozpracoval *Émile Picard* (1856-1941).

4. Obyčejné diferenciální rovnice I. řádu

4.1. Rovnice se separovanými proměnnými

Jsou to rovnice tvaru: $y' = f(x) \cdot g(y)$, kde $g(y) \neq 0$.

Rovnice řešíme tak, že rovnici nejprve upravíme tak, že na jedné straně rovnice máme proměnnou y a na straně druhé proměnnou x . Následně pak obě strany rovnice zintegrujeme.

$$\text{Př: } y' = 2 \cdot \frac{y}{x}$$

$$1. \text{ Úprava rovnice: } \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{y}{x} / : y, y \neq 0$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$2. \text{ Integrace: } \int \frac{1}{y} \cdot dy = \int 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = 2 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + c_1,$$

$$\begin{aligned} &c_1 \in \mathbb{R}, \\ \text{kde } &c_1 = \ln|c_2| \end{aligned}$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + \ln|c_2|$$

$$\ln|y| = \ln|x|^2 + \ln|c_2|$$

$$\ln|y| = \ln|x^2 \cdot c_2|$$

$$|y| = x^2 \cdot c_2$$

$$y = \pm x^2 \cdot c_2, \text{ kde } c_2 = k$$

3. Obecné řešení: $y = x^2 \cdot k$, kde $k \in \mathbb{R}$

4. $y = 0$

Dosadím zpět do zadání a tak zjistím, zda je i 0 řešením dané rovnice.

$$(0)' = 2 \cdot \frac{0}{x}$$

$0 = 0$, tedy $y = 0$ je také řešení

Př: $y'(1-x) = 1+y$

1. Úprava rovnice: $\frac{dy}{dx} \cdot (1-x) = 1+y \quad /:(1-x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y}{1-x} \quad /:(1+y), \quad y \neq -1$$

$$\frac{1}{(1+y)} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x} \quad / \cdot dx$$

$$\frac{1}{(1+y)} \cdot dy = \frac{1}{(1-x)} \cdot dx$$

2. Integrace: $\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{1-x}$

$$\int \frac{dy}{1+y} = - \int \frac{-1}{1-x} \cdot dx$$

$$\ln|1+y| = -\ln|1-x| + c_1,$$

$$\text{kde } c_1 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = \ln|c_2|$$

$$\ln|1+y| = -\ln|1-x| + \ln|c_2|$$

$$\ln|1+y| = \ln \frac{|c_2|}{|1-x|}$$

$$|1+y| = \frac{|c_2|}{|1-x|}$$

$$1+y = \pm \frac{|c_2|}{|1-x|},$$

$$\text{kde } \pm |c_2| = k \\ k \in \mathbb{R}$$

$$1+y = \frac{k}{|1-x|}$$

$$3. \text{Obecné řešení: } y = \frac{k}{|1-x|} - 1$$

$$4. y = -1 \quad (-1)'(1-x) = 1-1$$

$0 = 0$, tak $y = -1$, je také řešení

Př: $y\sqrt{1-x^2}y' + \sqrt{1-y^2} = 0$

1. Úprava rovnice: $y\sqrt{1-x^2}y' = -\sqrt{1-y^2}$

$$y\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = -\sqrt{1-y^2}$$

$$y\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = -\sqrt{1-y^2} / : \sqrt{1-x^2}$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} / : \sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ kde } y \neq \pm 1$$

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} / \cdot dx$$

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \cdot dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. Integrace:

$$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Použijeme substituční metodu: $1-y^2 = t$

$$-2ydy = dt / : (-2y)$$

$$dy = \frac{-dt}{2y}$$

A dosadíme zpět do rovnice:

$$\int \frac{y}{\sqrt{t}} \left(-\frac{dt}{2y} \right) = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} / \cdot (-1)$$

$$\frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \arcsin x + c_1$$

$$\sqrt{t} = \arcsin x + c_1 / \text{dosadíme zpět za } t$$

$$\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + c_1$$

$$\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + c_1 / ^2$$

$$1-y^2 = (\arcsin x + c_1)^2 / \cdot (-1)$$

$$-1+y^2 = -(\arcsin x + c_1)^2$$

$$y^2 = 1 - (\arcsin x + c_1)^2 / \sqrt{}$$

$$|y| = \sqrt{1 - (\arcsin x + c_1)^2}$$

$$y = \pm \sqrt{1 - (\arcsin x + c_1)^2},$$

$$\text{kde } c_1 = k$$

$$3. \text{ Obecné řešení: } y = \pm \sqrt{1 - (\arcsin x + k)^2}$$

$$4. \quad y = -1 \quad -1\sqrt{1-x^2} \cdot 0 + \sqrt{1-1} = 0$$

$$0 = 0 \quad y = -1, \text{ je také řešením}$$

$$y = 1 \quad 1\sqrt{1-x^2} \cdot 0 + \sqrt{1-1} = 0$$

$$0 = 0 \quad y = 1, \text{ je také řešením}$$

Cvičení:

1/ $xy' + y = y^2$

$[y = \frac{1}{1 - k|x|}, y = 0]$

2/ $xyy' = 1 - x^2$

$[y = \pm \sqrt{\ln x^2 - x^2} + k]$

3/ $y' = 10^x 10^y$

$[y = \log \frac{-1}{10^x + k}]$

4/ $y' - y \cotg x = \cotg x$

$[y = k|\sin x| - 1, y = -1]$

5/ $x^2 - e^x y' = 0$

$[y = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x} + k]$

6/ $y' = \frac{1 - 2x}{y^2}$

$[y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + k}]$

7/ $y' = \frac{4x^2 y}{-2xy + y}$

$[y = k - x^2 - x - \frac{1}{2} \ln|2x - 1|]$

8/ $y' = \sin^2(x - y)$

$[y = x - \arctg(x + k)]$

9/ $y \cdot \sqrt{1 - x^2} y' + \sqrt{1 - y^2} = 0$

$[y = \pm \sqrt{1 - (\arcsin x + c)^2},$
 $y = \pm 1]$

10/ $y - y^2 + xy' = 0$

$[y = (1 - k \cdot x)^{-1}, y = 0]$

4.2. Cauchyova počáteční úloha

Jde o diferenciální rovnici tvaru $y' = f(x, y)$, kde její řešení $y(x)$ splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

Př: $x^2 \cdot dy - y^2 \cdot dx = 0$, $y(1) = 2$

1. Úprava rovnice: $x^2 \cdot dy = y^2 \cdot dx$

$$x^2 \cdot dy = y^2 \cdot dx \quad / : y^2 \quad , \text{ kde } y \neq 0$$

$$\frac{x^2}{y^2} \cdot dy = dx \quad / : x^2$$

$$\frac{1}{y^2} \cdot dy = \frac{1}{x^2} \cdot dx$$

2. Integrace: $\int \frac{1}{y^2} \cdot dy = \int \frac{1}{x^2} \cdot dx$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + k, \text{ kde } k \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{-1 + (k \cdot x)}{x}$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{-1 + (k \cdot x)}{x} \quad / \cdot (-1)$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1 - (k \cdot x)}{x}$$

$$y = \frac{x}{1 - (k \cdot x)}$$

3. Obecné řešení: $y = \frac{x}{1 - (k \cdot x)}$

4. Počáteční podmínka: $y(1) = 2$

$$y = 2$$

$$x = 1$$

Dosadíme do obecného řešení: $y = \frac{x}{1 - (k \cdot x)}$

$$2 = \frac{1}{1 - (k \cdot 1)}$$

$$2 = \frac{1}{1 - k} / \cdot (1 - k)$$

$$2 \cdot (1 - k) = 1$$

$$2 - 2 \cdot k = 1$$

$$2 - 1 = 2 \cdot k$$

$$1 = 2 \cdot k / : 2$$

$$\frac{1}{2} = k$$

5. Řešení počáteční úlohy: $y = \frac{x}{1 - \frac{x}{2}}$

$$y = \frac{2x}{2 - x}$$

Př: $\frac{dy}{x+1} = \sin x \cdot dx$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

1. Úprava rovnice: $\frac{dy}{x+1} = \sin x \cdot dx / \cdot (x+1)$

$$dy = \sin x \cdot (x+1) \cdot dx$$

2. Integrace: $\int dy = \int \sin x \cdot (x+1) \cdot dx$

Pozn: Integrál $\int \sin x \cdot (x+1) \cdot dx$ řešíme pomocí metody per partes.

$$\int \sin x \cdot (x+1) dx = (x+1) \cdot (-\cos x) + \int \cos x \cdot dx =$$

$$u = x+1 \quad v' = \sin x$$

$$u' = 1 \quad v = -\cos x$$

$$= (x+1) \cdot (-\cos x) + \sin x + k$$

Tak tedy $\int dy = \int \sin x \cdot (x+1) \cdot dx$

$$y = (x+1) \cdot (-\cos x) + \sin x + k$$

3. Obecné řešení: $y = (x+1) \cdot (-\cos x) + \sin x + k$

4. Počáteční podmínka: $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$y = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Dosadíme do obecného řešení:

$$y = (x+1) \cdot (-\cos x) + \sin x + k$$

$$0 = (\frac{\pi}{2} + 1) \cdot (-\cos \frac{\pi}{2}) + \sin \frac{\pi}{2} + k$$

$$0 = (\frac{\pi}{2} + 1) \cdot 0 + 1 + k$$

$$0 = 1 + k$$

$$k = -1$$

5. Řešení počáteční úlohy: $y = (x+1) \cdot (-\cos x) + \sin x - 1$

$$\text{Př: } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y, \quad y(0) = -7$$

$$1. \text{ Úprava rovnice: } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y /: y$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} / \cdot dx$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

$$2. \text{ Integrace: } \int \frac{1}{y} \cdot dy = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

$$\ln|y| = \arcsin x + c_1,$$

$$\text{kde } \begin{matrix} c_1 \in R, \\ c_1 = \ln|c_2| \end{matrix}$$

$$\ln|y| = \arcsin x + \ln|c_2|$$

$$\ln|y| - \ln|c_2| = \arcsin x$$

$$\ln \left| \frac{y}{c_2} \right| = \arcsin x$$

$$\ln \left| \frac{y}{c_2} \right| = \arcsin x$$

$$\left| \frac{y}{c_2} \right| = e^{\arcsin x}$$

$$\frac{y}{c_2} = \pm e^{\arcsin x}$$

$$\frac{y}{c_2} = \pm e^{\arcsin x} / \cdot c_2, c_2 \neq 0$$

$$y = \pm e^{\arcsin x} \cdot c_2,$$

$$\text{kde } c_2 = k \\ k \in R$$

$$y = e^{\arcsin x} \cdot k$$

3. Obecné řešení: $y = e^{\arcsin x} \cdot k$

4. Počáteční podmínka: $y(0) = -7$

$$y = -7$$

$$x = 0$$

Dosadíme do obecného řešení:

$$y = e^{\arcsin x} \cdot k$$

$$-7 = e^{\arcsin 0} \cdot k$$

$$-7 = e^0 \cdot k$$

$$k = -7$$

5. Řešení počáteční úlohy: $y = -7 \cdot e^{\arcsin x}$

Cvičení:

$$1/ \quad y' + x^2 \cdot y = 0, \quad y(3) = 5 \quad [y = 5 \cdot e^{\frac{1}{3}x^3 + 9}]$$

$$2/ \quad y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0 \quad [y = \operatorname{tg} x]$$

$$3/ \quad y' = -2 \cdot x \cdot y, \quad y(0) = 1 \quad [y = e^{-x^2}]$$

$$4/ \quad y' = \frac{3x}{x^2 + 1} \cdot y, \quad y(0) = -1 \quad [y = -\sqrt{(x^2 + 1)^3}]$$

$$5/ \quad y' = \frac{y}{1-x}, \quad y(-1) = 6 \quad [y = \frac{12}{1-x}]$$

$$6/ \quad y' = y \cdot \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \quad [y = 3 \cdot e^{-\cos x}]$$

$$7/ \quad y' \cdot (1-x) = 1+y, \quad y(-1) = 1 \quad [y = \frac{-1}{(1-x)} - 1]$$

$$8/ \quad y' = \frac{-y}{x}, \quad y(1) = 1 \quad [y = \frac{1}{x}]$$

$$9/ \quad y' = 3 \cdot x^2 \cdot y^3, \quad y(1) = -1 \quad [y = -\sqrt{\frac{1}{3-2x^3}}]$$

$$10/ \quad y \cdot \ln y + x \cdot y' = 0, \quad y(1) = 1 \quad [y = 1]$$

4.3. Homogenní diferenciální rovnice

4.3.1. Homogenní diferenciální rovnice typu $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Tyto rovnice pomocí substituce $\frac{y}{x} = u$ převedeme na rovnice se separovanými proměnnými.

A to tak, že $y = u \cdot x$, pak derivováním dostaneme $y' = u + u' \cdot x$. A dosadíme do původní rovnice. Místo řešení $y(x)$ však hledáme $u(x)$.

Př: $y' = \frac{x+y}{x-y}$

1. Úprava rovnice: $y' = \frac{x+y}{x-y}$

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot (x+y)}{\frac{1}{x} \cdot (x-y)}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{x+y}{x}\right)}{\left(\frac{x-y}{x}\right)}$$

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$$

2. Substitute: $\frac{y}{x} = u$

$$\frac{y}{x} = u \cdot x$$

$$y = u \cdot x$$

$$y' = u + u' \cdot x$$

Dosadíme zpět do upravené rovnice:

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$$

$$u + u' \cdot x = \frac{1 + u}{1 - u}$$

$$u' \cdot x = \frac{1 + u}{1 - u} - u$$

$$u' \cdot x = \frac{1 + u - u + u^2}{1 - u}$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{1 - u}$$

$$x \cdot \frac{dx}{du} = \frac{1 + u^2}{1 - u} / : x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{1 - u} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{1 - u} \cdot \frac{1}{x} / : (1 + u^2)$$

$$\frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1 - u} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1 - u} \cdot \frac{1}{x} / \cdot (1 - u)$$

$$\frac{1 - u}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1 - u}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} / \cdot dx$$

$$\frac{1 - u}{1 + u^2} \cdot du = \frac{1}{x} \cdot dx$$

3. Integrace:

$$\int \frac{1 - u}{1 + u^2} \cdot du = \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{1 + u^2} \cdot du - \int \frac{u}{1 + u^2} \cdot du = \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{1+u^2} \cdot du - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2 \cdot u}{1+u^2} \cdot du = \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \cdot \ln|1+u^2| = \ln|x| + c_1,$$

$$\text{kde } \begin{aligned} c_1 &\in \mathbb{R}, \\ c_1 &= \ln|c_2| \end{aligned}$$

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \cdot \ln|1+u^2| = \ln|x| + \ln|c_2|$$

$$\operatorname{arctg} u - \ln\sqrt{1+u^2} = \ln|x| + \ln|c_2|$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln|x| + \ln|c_2| + \ln\sqrt{1+u^2}$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln\left(\left|x \cdot \sqrt{1+u^2}\right| \cdot c_2\right), \text{ kde } c_2 = k$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln\left(\left|x \cdot \sqrt{1+u^2}\right| \cdot k\right)$$

Dosadíme zpět za substituci:

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln\left(\left|x \cdot \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right| \cdot k\right)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln\left(\left|x \cdot \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\right| \cdot k\right)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln\left(\left|x \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right| \cdot k\right)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2} \cdot k\right)$$

4. Obecné řešení: $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2} \cdot k\right)$

Př: $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

1. Úprava rovnice: $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

2. Substitute: $\frac{y}{x} = u$

$$\frac{y}{x} = u \quad / \cdot x$$

$$y = u \cdot x$$

$$y' = u + u' \cdot x$$

Dosadíme zpět do upravené rovnice $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$:

$$u + u' \cdot x = u + \operatorname{tg} u$$

$$u' \cdot x = \operatorname{tg} u$$

$$u' \cdot x = \operatorname{tg} u \quad / : x$$

$$u' = \frac{\operatorname{tg} u}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\operatorname{tg} u}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\operatorname{tg} u}{x} \quad / \cdot dx$$

$$du = \frac{\operatorname{tg} u}{x} \cdot dx$$

$$du = \frac{\operatorname{tg} u}{x} \cdot dx \quad / : \operatorname{tg} u$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} u} \cdot du = \frac{1}{x} \cdot dx$$

3. Integrace: $\int \frac{1}{\operatorname{tg} u} \cdot du = \int \frac{1}{x} \cdot dx$

$$\int \frac{1}{\frac{\sin u}{\cos u}} \cdot du = \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{\cos u}{\sin u} \cdot du = \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + c_1,$$

$$\text{kde } c_1 \in \mathbb{R},$$

$$c_1 = \ln|c_2|$$

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|c_2|$$

$$\sin u = x \cdot c_2, \text{ kde } c_2 = k$$

$$\sin u = x \cdot k$$

Dosadíme zpět za substituci:

$$\sin \frac{y}{x} = x \cdot k$$

$$\frac{y}{x} = \arcsin k \cdot x \quad / \cdot x$$

$$y = x \cdot \arcsin k \cdot x$$

4. Obecné řešení: $y = x \cdot \arcsin k \cdot x$

Př: $y' - \frac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$

1. Úprava rovnice: $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

2. Substituce: $\frac{y}{x} = u$

$$\frac{y}{x} = u \quad / \cdot x$$

$$y = u \cdot x$$

$$y' = u + u' \cdot x$$

Dosadíme zpět do upravené rovnice $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$:

$$u + u' \cdot x = e^u + u$$

$$u' \cdot x = e^u$$

$$u' \cdot x = e^u \quad / : x$$

$$u' = \frac{e^u}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{e^u}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{e^u}{x} \cdot dx$$

$$du = \frac{e^u}{x} \cdot dx$$

$$du = \frac{e^u}{x} \cdot dx$$

$$\frac{1}{e^u} \cdot du = \frac{1}{x} \cdot dx$$

3. Integrace:

$$\int \frac{1}{e^u} \cdot du = \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\int e^{-u} \cdot du = \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$-e^{-u} = \ln|x| + c_1,$$

$$\text{kde } c_1 \in \mathbb{R},$$

$$c_1 = \ln|c_2|$$

$$-e^{-u} = \ln|x| + \ln|c_2|$$

$$-e^{-u} = \ln|x \cdot c_2|, \text{ kde } c_2 = k$$

$$-e^{-u} = \ln|x \cdot k|$$

Dosadíme zpět za substituci:

$$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x \cdot k|$$

4. Obecné řešení:

$$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x \cdot k|$$

Cvičení:

1/ $x \cdot y' = y - x$

$$[y = x \cdot \ln \left| \frac{k}{x} \right|]$$

2/ $y' = \frac{2 \cdot x \cdot y}{x^2 - y^2}$

$$[y = k \cdot (y^2 + x^2)]$$

3/ $y' = \frac{y^2 - x^2}{2 \cdot x \cdot y}$

$$[k = x \cdot \left(\frac{y^2}{x^2} + 1 \right)]$$

4/ $y' = \frac{2 \cdot x - y}{x + 2 \cdot y}$

$$[k = x^2 - x \cdot y - y^2]$$

5/ $x^2 \cdot y' = y^2 - x \cdot y$

$$[k = \frac{y - 2 \cdot x}{y \cdot x^2}]$$

6/ $y' = \frac{x + 2 \cdot y}{x}$

$$[k = \frac{x + y}{x^2}]$$

7/ $y' = \frac{y^2 - 2 \cdot x \cdot y}{-x^2}$

$$[k = \frac{x \cdot (x - y)}{y}]$$

8/ $y' = \frac{2 \cdot x \cdot y}{x^2 + y^2}$

$$[k = \frac{y}{x^2 - y^2}]$$

4.3.2. Rovnice typu $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$

V této rovnici je f daná funkce, a, b, c, A, B, C jsou konstanty.

Rozlišujeme 3 typy těchto rovnic:

I. $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$

Př: $y' = \frac{-5x + 5y - 1}{-2x + 2y - 1}$

1. Determinant: $\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 10 = 0$

2. Úprava rovnice $y' = \frac{-5x + 5y - 1}{-2x + 2y - 1} :$

$$y' = \frac{5 \cdot (-x + y) - 1}{2 \cdot (-x + y) - 1}$$

3. Substitute: $-x + y = u \Rightarrow y = u + x$

$$y' = u' + 1$$

4. Dosazení do původní rovnice $y' = \frac{5 \cdot (-x + y) - 1}{2 \cdot (-x + y) - 1} :$

$$u' + 1 = \frac{5 \cdot u - 1}{2 \cdot u - 1}$$

$$u' = \frac{5 \cdot u - 1}{2 \cdot u - 1} - 1$$

$$u' = \frac{5 \cdot u - 1 - 2 \cdot u + 1}{2 \cdot u - 1}$$

$$u' = \frac{3 \cdot u}{2 \cdot u - 1}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3 \cdot u}{2 \cdot u - 1}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3 \cdot u}{2 \cdot u - 1} \quad / \cdot dx$$

$$du = \frac{3 \cdot u}{2 \cdot u - 1} \cdot dx$$

$$du = \frac{3 \cdot u}{2 \cdot u - 1} \cdot dx / : 3 \cdot u$$

$$\frac{1}{3u} \cdot du = \frac{1}{2 \cdot u - 1} \cdot dx$$

$$\frac{1}{3u} \cdot du = \frac{1}{2 \cdot u - 1} \cdot dx / \cdot (2 \cdot u - 1)$$

$$\frac{2 \cdot u - 1}{3u} \cdot du = dx$$

5. Integrace

$$\frac{2 \cdot u - 1}{3u} \cdot du = dx :$$

$$\int \frac{2 \cdot u - 1}{3 \cdot u} \cdot du = \int dx$$

$$\text{Pozn: } 2 \cdot u - 1 : 3 \cdot u = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u}$$

$$\int \frac{2}{3} \cdot du - \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{u} \cdot du = \int dx$$

$$\frac{2}{3} \cdot u - \frac{1}{3} \cdot \ln|u| = x + c_1$$

$$\frac{2}{3} \cdot u - \frac{1}{3} \cdot \ln|u| = x + c_1 / \cdot 3$$

$$2 \cdot u - \ln|u| = 3 \cdot x + 3 \cdot c_1, \text{ kde } 3 \cdot c_1 = c_2$$

$$2 \cdot u - \ln|u| = 3 \cdot x + c_2$$

Dosadíme zpět za u , kde $u = -x + y$:

$$2 \cdot (-x + y) - \ln|-x + y| = 3 \cdot x + c_2$$

$$2 \cdot y - 2 \cdot x - \ln|-x + y| = 3 \cdot x + c_2$$

$$2 \cdot y - 5 \cdot x - \ln|-x + y| = c_2, \text{ kde } c_2 = k$$

6. Obecné řešení: $2 \cdot y - 5 \cdot x - \ln|-x + y| = k$

$$\text{Př: } y' = \frac{9 \cdot x - 3 \cdot y + 1}{3 \cdot x - y}$$

$$1. \text{ Determinant: } \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0$$

$$2. \text{ Uprava rovnice } y' = \frac{9 \cdot x - 3 \cdot y + 1}{3 \cdot x - y} :$$

$$y' = \frac{3 \cdot (3 \cdot x - y) + 1}{3 \cdot x - y}$$

$$3. \text{ Substitute: } 3 \cdot x - y = u$$

$$y = 3 \cdot x - u$$

$$y' = 3 - u'$$

$$\text{Dosadíme zpět do upravené rovnice } y' = \frac{3 \cdot (3 \cdot x - y) + 1}{3 \cdot x - y} :$$

$$3 - u' = \frac{3 \cdot u + 1}{u}$$

$$-u' = \frac{3 \cdot u + 1}{u} - 3$$

$$-u' = \frac{3 \cdot u + 1}{u} - 3 / \cdot (-1)$$

$$u' = -\frac{3 \cdot u + 1}{u} + 3$$

$$u' = \frac{-3 \cdot u - 1 + 3 \cdot u}{u}$$

$$u' = \frac{-1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-1}{u} / \cdot u$$

$$u \cdot \frac{du}{dx} = -1$$

$$u \cdot \frac{du}{dx} = -1 / \cdot dx$$

$$u \cdot du = -dx$$

4. Integrace $u \cdot du = -dx$:

$$\int u \cdot du = - \int dx$$

$$\frac{u^2}{2} = -x + c_1$$

Dosadíme zpět za u , kde $u = 3 \cdot x - y$:

$$\frac{(3 \cdot x - y)^2}{2} = -x + c_1$$

$$\frac{(3 \cdot x - y)^2}{2} = -x + c_1 / \cdot 2$$

$$(3 \cdot x - y)^2 = -2 \cdot x + 2 \cdot c_1, \text{ kde } 2 \cdot c_1 = k$$

$$(3 \cdot x - y)^2 = -2 \cdot x + k$$

$$(3 \cdot x - y)^2 + 2 \cdot x = k$$

5. Obecné řešení: $(3 \cdot x - y)^2 + 2 \cdot x = k$

Př: $y' = \frac{x - y + 1}{x - y}$

1. Determinant: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$

2. Substitute: $x - y = u$

$$-y = u - x$$

$$-y = u - x / \cdot (-1)$$

$$y = x - u$$

$$y' = 1 - u'$$

Dosadíme zpět do rovnice $y' = \frac{x-y+1}{x-y}$:

$$1 - u' = \frac{u+1}{u}$$

$$-u' = \frac{u+1}{u} - 1$$

$$-u' = \frac{u+1-u}{u}$$

$$-u' = \frac{1}{u}$$

$$-u' = \frac{1}{u} / \cdot (-1)$$

$$u' = -\frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{u} / \cdot dx$$

$$du = -\frac{1}{u} \cdot dx$$

$$du = -\frac{1}{u} \cdot dx / \cdot (-u)$$

$$(-u) \cdot du = dx$$

4. Integrace $(-u) \cdot du = dx$:

$$- \int u \cdot du = \int dx$$

$$-\frac{u^2}{2} = x + c_1$$

Dosadíme zpět za u , kde $x - y = u$:

$$-\frac{(x-y)^2}{2} = x + c_1$$

$$-\frac{(x-y)^2}{2} = x + c_1 / \cdot (-2)$$

$$(x-y)^2 = -2 \cdot x - 2 \cdot c_1, \text{ kde } -2 \cdot c_1 = k$$

$$(x-y)^2 = -2 \cdot x + k$$

$$(x-y)^2 + 2 \cdot x = k$$

5. Obecné řešení: $(x-y)^2 + 2 \cdot x = k$

$$\text{II. } \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{Př: } y' = \frac{4x - 3y - 1}{3x + 4y - 7}$$

$$1. \text{ Determinant: } \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 9 = 25 \neq 0$$

$$2. \quad \begin{aligned} x &= u + k \\ y &= v + l \end{aligned}$$

$$\text{Dosadíme do zadané rovnice } y' = \frac{4x - 3y - 1}{3x + 4y - 7} :$$

$$4k - 3l - 1 = 0$$

$$3k + 4l - 7 = 0$$

$$k = \frac{7 - 4l}{3}$$

$$4 \cdot \frac{7 - 4l}{3} - 3l - 1 = 0$$

$$4 \cdot \frac{7 - 4l}{3} - 3l - 1 = 0 \quad / \cdot 3$$

$$4 \cdot (7 - 4l) - 9l - 3 = 0$$

$$28 - 16l - 9l - 3 = 0$$

$$25 - 25l = 0$$

$$25 = 25l$$

$$1 = l$$

$$\text{Pak } k = \frac{7 - 4l}{3}$$

$$k = \frac{7 - 4}{3}$$

$$k = 1$$

3. Pak

$$x = u + 1$$

$$y = v + 1$$

Zderivujeme rovnici $y = v + 1$:

$$y' = v'$$

A dosadíme do původní rovnice $y' = \frac{4x - 3y - 1}{3x + 4y - 7}$,

kde $y' = v'$, $x = u + 1$ a $y = v + 1$:

$$v' = \frac{4 \cdot (u + 1) - 3 \cdot (v + 1) - 1}{3 \cdot (u + 1) + 4 \cdot (v + 1) - 7}$$

$$v' = \frac{4u + 4 - 3v - 3 - 1}{3u + 3 + 4v + 4 - 7}$$

$$v' = \frac{4u - 3v}{3u + 4v}$$

$$v' = \frac{u \cdot \left(4 - 3 \frac{v}{u}\right)}{u \cdot \left(3 + 4 \frac{v}{u}\right)}$$

$$v' = \frac{4 - 3 \frac{v}{u}}{3 + 4 \frac{v}{u}}$$

Zavedeme substituci: $\frac{v}{u} = t$

$$v = t \cdot u$$

$$v' = t' \cdot u + t$$

Dosadíme zpět do rovnice $v' = \frac{4 - 3 \frac{v}{u}}{3 + 4 \frac{v}{u}}$:

$$t' \cdot u + t = \frac{4 - 3t}{3 + 4t}$$

$$t' \cdot u = \frac{4 - 3t}{3 + 4t} - t$$

$$t' \cdot u = \frac{4 - 3t - 3t - 4t^2}{3 + 4t}$$

$$t' \cdot u = \frac{4 - 6t - 4t^2}{3 + 4t}$$

$$t' \cdot u = \frac{4 - 6t - 4t^2}{3 + 4t} / \cdot (3 + 4t)$$

$$(3 + 4t) \cdot t' \cdot u = 4 - 6t - 4t^2$$

$$(3 + 4t) \cdot t' \cdot u = 4 - 6t - 4t^2 / : u$$

$$(3 + 4t) \cdot t' = (4 - 6t - 4t^2) \cdot \frac{1}{u} / : (4 - 6t - 4t^2)$$

$$\frac{(3 + 4t)}{(4 - 6t - 4t^2)} \cdot t' = \frac{1}{u}$$

$$\frac{(3 + 4t)}{(4 - 6t - 4t^2)} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{(3 + 4t)}{(4 - 6t - 4t^2)} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{1}{u} / \cdot du$$

$$\frac{(3 + 4t)}{(4 - 6t - 4t^2)} \cdot dt = \frac{1}{u} \cdot du$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{(3 + 4t)}{(-2 + 3t + 2t^2)} \cdot dt = \frac{1}{u} \cdot du$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{(3 + 4t)}{(-2 + 3t + 2t^2)} \cdot dt = \frac{1}{u} \cdot du / \cdot (-2)$$

$$\frac{(3 + 4t)}{(-2 + 3t + 2t^2)} \cdot dt = -2 \frac{1}{u} \cdot du$$

4. Integrace

$$\frac{(3 + 4t)}{(-2 + 3t + 2t^2)} \cdot dt = -2 \frac{1}{u} \cdot du :$$

$$\int \frac{(3 + 4t)}{(-2 + 3t + 2t^2)} \cdot dt = -2 \int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$\ln|-2 + 3t + 2t^2| = -2\ln|u| + c_1,$$

$$\text{kde } c_1 \in R, \\ c_1 = \ln|c_2|$$

$$\ln|-2 + 3t + 2t^2| = -2\ln|u| + \ln|c_2|$$

$$\ln|-2 + 3t + 2t^2| = -\ln u^2 + \ln|c_2|$$

$$\ln|-2 + 3t + 2t^2| + \ln u^2 = \ln|c_2|$$

$$\ln|-2 + 3t + 2t^2| \cdot u^2 = \ln|c_2|$$

$$\ln|-2 + 3t + 2t^2| \cdot u^2 = \ln|c_2|$$

$$(-2 + 3t + 2t^2) \cdot u^2 = c_2, \text{ kde } c_2 = c_3, c_3 \in R$$

$$(-2 + 3t + 2t^2) \cdot u^2 = c_3$$

$$\text{Dosadíme zpět za } t, \text{ kde } t = \frac{v}{u}:$$

$$\left(-2 + 3\frac{v}{u} + 2\left(\frac{v}{u}\right)^2\right) \cdot u^2 = c_3$$

$$\left(\frac{-2u^2 + 3u \cdot v + 2v^2}{u^2}\right) \cdot u^2 = c_3$$

$$-2u^2 + 3u \cdot v + 2v^2 = c_3$$

Dosadíme zpět za u a v , jestliže víme, že:

$$x = u + 1 \rightarrow u = x - 1$$

$$y = v + 1 \rightarrow v = y - 1$$

$$-2(x-1)^2 + 3(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2 = c_3$$

$$-2(x^2 - 2x + 1) + 3(xy - x - y + 1) + 2(y^2 - 2y + 1) = c_3$$

$$-2x^2 + 4x - 2 + 3xy - 3x - 3y + 3 + 2y^2 - 4y + 2 = c_3$$

$$-2x^2 + x + 3xy - 7y + 3 + 2y^2 = c_3 \quad / \cdot (-1)$$

$$2x^2 - x - 3xy + 7y - 3 - 2y^2 = -c_3, \text{ kde } \begin{matrix} -c_3 = k \\ k \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$5. \text{ Obecné řešení: } 2x^2 - x - 3xy + 7y - 3 - 2y^2 = k$$

$$\text{Př: } y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$

$$1. \text{ Determinant: } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$2. \quad \begin{aligned} x &= u + k \\ y &= v + l \end{aligned}$$

$$\text{Dosadíme do zadané rovnice } y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}:$$

$$k - l + 1 = 0$$

$$k + l - 3 = 0$$

$$k = 3 - l$$

$$3 - l - l + 1 = 0$$

$$4 = 2l$$

$$2 = l$$

$$\text{Pak } k = 3 - 2$$

$$k = 1$$

3. Pak

$$x = u + 1$$

$$y = v + 2$$

Zderivujeme rovnici $y = v + 1$:

$$y' = v'$$

$$\text{A dosadíme do původní rovnice } y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}, \text{ kde}$$

$$y' = v' \quad , \quad x = u + 1 \quad \text{a} \quad y = v + 2 :$$

$$v' = \frac{u + 1 - (v + 2) + 1}{u + 1 + v + 2 - 3}$$

$$v' = \frac{u + 1 - v - 2 + 1}{u + 1 + v + 2 - 3}$$

$$v' = \frac{u - v}{u + v}$$

$$v' = \frac{u \cdot \left(1 - \frac{v}{u}\right)}{u \cdot \left(1 + \frac{v}{u}\right)}$$

$$v' = \frac{1 - \frac{v}{u}}{1 + \frac{v}{u}}$$

Zavedeme substituci: $\frac{v}{u} = t$

$$v = t \cdot u$$

$$v' = t' \cdot u + t$$

Dosadíme zpět do rovnice $v' = \frac{1 - \frac{v}{u}}{1 + \frac{v}{u}}$:

$$t' \cdot u + t = \frac{1 - t}{1 + t}$$

$$t' \cdot u = \frac{1 - t}{1 + t} - t$$

$$t' \cdot u = \frac{1 - t - t - t^2}{1 + t}$$

$$t' \cdot u = \frac{1 - 2t - t^2}{1 + t} \quad / \cdot (1 + t)$$

$$(1 + t) \cdot t' \cdot u = 1 - 2t - t^2$$

$$(1+t) \cdot t' \cdot u = 1 - 2t - t^2 \quad / : u$$

$$(1+t) \cdot t' = (1 - 2t - t^2) \cdot \frac{1}{u}$$

$$(1+t) \cdot t' = (1 - 2t - t^2) \cdot \frac{1}{u} \quad / : (1 - 2t - t^2)$$

$$\frac{(1+t)}{(1 - 2t - t^2)} \cdot t' = \frac{1}{u}$$

$$\frac{(1+t)}{(1 - 2t - t^2)} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{(1+t)}{(1 - 2t - t^2)} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{1}{u} \quad / \cdot du$$

$$\frac{(1+t)}{(1 - 2t - t^2)} \cdot dt = \frac{1}{u} \cdot du$$

$$-\frac{(1+t)}{(-1 + 2t + t^2)} \cdot dt = \frac{1}{u} \cdot du$$

$$-\frac{(1+t)}{(-1 + 2t + t^2)} \cdot dt = \frac{1}{u} \cdot du \quad / \cdot (-1)$$

$$\frac{(1+t)}{(-1 + 2t + t^2)} \cdot dt = -\frac{1}{u} \cdot du$$

4. Integrace $\frac{(1+t)}{(-1 + 2t + t^2)} \cdot dt = -\frac{1}{u} \cdot du :$

$$\int \frac{(1+t)}{(-1 + 2t + t^2)} \cdot dt = -\int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2 \cdot (1+t)}{(-1 + 2t + t^2)} \cdot dt = -\int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{(2 + 2t)}{(-1 + 2t + t^2)} \cdot dt = -\int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{(2 + 2t)}{(-1 + 2t + t^2)} \cdot dt = -\int \frac{1}{u} \cdot du \quad / \cdot 2$$

$$\int \frac{(2+2t)}{(-1+2t+t^2)} \cdot dt = -2 \int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$\ln|-1+2t+t^2| = -2 \ln|u| + c_1,$$

$$\text{kde } c_1 \in R,$$

$$c_1 = \ln|c_2|$$

$$\ln|-1+2t+t^2| = -2 \ln|u| + \ln|c_2|$$

$$\ln|-1+2t+t^2| = -\ln u^2 + \ln|c_2|$$

$$\ln|-1+2t+t^2| + \ln u^2 = \ln|c_2|$$

$$\ln(-1+2t+t^2) \cdot u^2 = \ln|c_2|$$

$$(-1+2t+t^2) \cdot u^2 = c_2, \text{ kde } c_2 = c_3, c_3 \in R$$

$$(-1+2t+t^2) \cdot u^2 = c_3$$

Dosadíme zpět za t , kde $t = \frac{v}{u}$:

$$\left(-1+2 \cdot \left(\frac{v}{u}\right) + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right) \cdot u^2 = c_3$$

$$\left(\frac{-u^2 + 2vu + v^2}{u^2}\right) \cdot u^2 = c_3$$

$$-u^2 + 2vu + v^2 = c_3$$

Dosadíme zpět za u a v , jestliže víme, že:

$$x = u + 1 \rightarrow u = x - 1$$

$$y = v + 2 \rightarrow v = y - 2$$

$$-(x-1)^2 + 2(y-2)(x-1) + (y-2)^2 = c_3$$

$$-(x-1)^2 + 2(y-2)(x-1) + (y-2)^2 = c_3 / \cdot (-1)$$

$$(x-1)^2 - 2(y-2)(x-1) - (y-2)^2 = -c_3, \text{ kde } \begin{matrix} -c_3 = k \\ k \in R \end{matrix}$$

$$(x-1)^2 - 2(y-2)(x-1) - (y-2)^2 = k$$

5. Obecné řešení: $(x-1)^2 - 2(y-2)(x-1) - (y-2)^2 = k$

Př: $y' = \frac{2x - y - 1}{x - 2y + 1}$

1. Determinant: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3 \neq 0$

2. $x = u + k$

$$y = v + l$$

Dosadíme do zadané rovnice $y' = \frac{2x - y - 1}{x - 2y + 1}$:

$$2k - l - 1 = 0$$

$$k - 2l + 1 = 0$$

$$k = 2l - 1$$

$$2 \cdot (2l - 1) - l - 1 = 0$$

$$4l - 2 - l - 1 = 0$$

$$3 = 3l$$

$$l = 1$$

Pak $k = 2 - 1$

$$k = 1$$

3. Pak

$$x = u + 1$$

$$y = v + 1$$

Zderivujeme rovnici $y = v + 1$:

$$y' = v'$$

A dosadíme do původní rovnice $y' = \frac{2x - y - 1}{x - 2y + 1}$,

kde $y' = v'$, $x = u + 1$ a $y = v + 1$:

$$v' = \frac{2 \cdot (u+1) - (v+1) - 1}{(u+1) - 2 \cdot (v+1) + 1}$$

$$v' = \frac{2u + 2 - v - 1 - 1}{u + 1 - 2v - 2 + 1}$$

$$v' = \frac{2u - v}{u - 2v}$$

$$v' = \frac{u \cdot \left(2 - \frac{v}{u}\right)}{u \cdot \left(1 - 2 \frac{v}{u}\right)}$$

$$v' = \frac{2 - \frac{v}{u}}{1 - 2 \frac{v}{u}}$$

Zavedeme substituci: $\frac{v}{u} = t$

$$v = t \cdot u$$

$$v' = t' \cdot u + t$$

Dosadíme zpět do rovnice $v' = \frac{2 - \frac{v}{u}}{1 - 2 \frac{v}{u}}$:

$$t' \cdot u + t = \frac{2 - t}{1 - 2t}$$

$$t' \cdot u = \frac{2 - t}{1 - 2t} - t$$

$$t' \cdot u = \frac{2 - t - t + 2t^2}{1 - 2t}$$

$$t' \cdot u = \frac{2 - 2t + 2t^2}{1 - 2t} \quad / \cdot (1 - 2t)$$

$$(1 - 2t) \cdot t' \cdot u = 2 - 2t + 2t^2$$

$$(1 - 2t) \cdot t' \cdot u = 2 - 2t + 2t^2 \quad / : u$$

$$(1-2t) \cdot t' = (2-2t+2t^2) \cdot \frac{1}{u}$$

$$(1-2t) \cdot t' = (2-2t+2t^2) \cdot \frac{1}{u} \quad / : (2-2t+2t^2)$$

$$\frac{(1-2t)}{(2-2t+2t^2)} \cdot t' = \frac{1}{u}$$

$$\frac{(1-2t)}{(2-2t+2t^2)} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{(1-2t)}{(2-2t+2t^2)} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{1}{u} \quad / \cdot du$$

$$\frac{(1-2t)}{(2-2t+2t^2)} \cdot dt = \frac{1}{u} \cdot du$$

$$-\frac{(1-2t)}{(-2+2t-2t^2)} \cdot dt = \frac{1}{u} \cdot du$$

$$-\frac{(1-2t)}{(-2+2t-2t^2)} \cdot dt = \frac{1}{u} \cdot du \quad / \cdot (-1)$$

$$\frac{(1-2t)}{(-2+2t-2t^2)} \cdot dt = -\frac{1}{u} \cdot du$$

4. Integrace $\frac{(1-2t)}{(-2+2t-2t^2)} \cdot dt = -\frac{1}{u} \cdot du :$

$$\int \frac{(1-2t)}{(-2+2t-2t^2)} \cdot dt = -\int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2 \cdot (1-2t)}{(-2+2t-2t^2)} \cdot dt = -\int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2-4t}{(-2+2t-2t^2)} \cdot dt = -\int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2-4t}{(-2+2t-2t^2)} \cdot dt = -\int \frac{1}{u} \cdot du \quad / \cdot 2$$

$$\int \frac{2-4t}{(-2+2t-2t^2)} \cdot dt = -2 \int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$\ln|-2 + 2t - 2t^2| = -2 \ln|u| + c_1,$$

$$\text{kde } \begin{matrix} c_1 \in R, \\ c_1 = \ln|c_2| \end{matrix}$$

$$\ln|-2 + 2t - 2t^2| = -2 \ln|u| + \ln|c_2|$$

$$\ln|-2 + 2t - 2t^2| = -\ln u^2 + \ln|c_2|$$

$$\ln|-2 + 2t - 2t^2| + \ln u^2 = \ln|c_2|$$

$$\ln(-2 + 2t - 2t^2) \cdot u^2 = \ln|c_2|$$

$$(-2 + 2t - 2t^2) \cdot u^2 = c_2, \text{ kde } c_2 = c_3, c_3 \in R$$

$$(-2 + 2t - 2t^2) \cdot u^2 = c_3$$

$$\text{Dosadíme zpět za } t, \text{ kde } t = \frac{v}{u}:$$

$$\left(-2 + 2 \cdot \left(\frac{v}{u}\right) - 2 \cdot \left(\frac{v}{u}\right)^2\right) \cdot u^2 = c_3$$

$$\left(\frac{-2u^2 + 2vu - 2v^2}{u^2}\right) \cdot u^2 = c_3$$

$$-2u^2 + 2vu - 2v^2 = c_3$$

$$\text{Dosadíme zpět za } u \text{ a } v, \text{ jestliže víme, že:}$$

$$x = u + 1 \rightarrow u = x - 1$$

$$y = v + 1 \rightarrow v = y - 1$$

$$-2(x-1)^2 + 2(y-1)(x-1) - 2(y-1)^2 = c_3$$

$$-2(x-1)^2 + 2(y-1)(x-1) - 2(y-1)^2 = c_3 / (-1)$$

$$2(x-1)^2 - 2(y-1)(x-1) + 2(y-1)^2 = -c_3$$

$$2(x-1)^2 - 2(y-1)(x-1) + 2(y-1)^2 = -c_3 / 2$$

$$(x-1)^2 - (y-1)(x-1) + (y-1)^2 = \frac{-c_3}{2}, \text{ kde } \frac{-c_3}{2} = k \\ k \in R$$

$$(x-1)^2 - (y-1)(x-1) + (y-1)^2 = k$$

$$5. \text{ Obecné řešení: } (x-1)^2 - (y-1)(x-1) + (y-1)^2 = k$$

Cvičení:

$$1/ \ y' = -\left(\frac{2x-2y-1}{x-y+1}\right)$$

$$[k = 2x + y - \ln|x-y|]$$

$$2/ \ y' = \frac{x+y+1}{2x+2y-1}$$

$$[k = x - 2y + \ln|x+y|]$$

$$3/ \ y' = \frac{3x+2y+2}{3x+2y+1}$$

$$[k = e^{10(y-x)} - (15x+10y+7)^2]$$

$$4/ \ y' = \left(\frac{x-y-2}{x-y+1}\right)^2$$

$$[k = 2 \cdot ((x-y) \cdot (x-y+5)) + 9 \ln|2x-2y-1| - 24x]$$

$$5/ \ y' = \frac{-3x-2y+4}{2x+5y+1}$$

$$[k = 5y^2 + 3x^2 + 2y + 4xy - 8x]$$

$$6/ \ y' = \frac{x-y-1}{x+y+3}$$

$$[k = (x+1)^2 - 2(x+1)(y+2) - (y+2)^2]$$

$$7/ \ y' = \frac{2x-y-5}{x-3y-5}$$

$$[k = 3(y+1)^2 - 2(x-2)(y-1) + 2(x-2)^2]$$

$$8/ \ y' = \frac{x-y+3}{x+y-5}$$

$$[k = (y-4)^2 + 2(x-1)(y-4) - (x-1)^2]$$

$$9/ \quad y' = \frac{2x - y + 3}{x - 2y + 3}$$

$$[k = y^2 + x^2 - 3y - xy + 3x]$$

$$10/ \quad y' = \frac{x + 2y - 7}{x - 3}$$

$$[k = \frac{(x + y - 5)}{(x - 3)^2}]$$

$$11/ \quad y' = -\frac{4x + 3y + 1}{3x + 2y + 1}$$

$$[k = y^2 + 2x^2 + y + 3xy + x]$$

$$12/ \quad y' = \frac{3x - 4y}{4x + 7y - 1}$$

$$[k = 7y^2 - 3x^2 - 2y + 8xy]$$

4.4. Lineární diferenciální rovnice I. řádu

Jsou to rovnice tvaru:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x).$$

Jestliže $g(x) = 0$, tak se jedná o lineární diferenciální rovnice homogenní.

Jestliže $g(x) \neq 0$, tak jde o lineární diferenciální rovnice nehomogenní.

4.4.1. Homogenní lineární diferenciální rovnice I. řádu

Metodou separace proměnných řešíme příslušnou homogenní rovnici $y' + f(x) \cdot y = 0$.

4.4.2. Nehomogenní lineární diferenciální rovnice I. řádu

Metoda variace konstant

$$\text{Př: } y' - \frac{y}{x} = x^2$$

1. Řešíme homogenní rovnici $y' - \frac{y}{x} = 0$:

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad /: y$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad / \cdot dx$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$2. \text{ Integrace } \frac{1}{y} \cdot dy = \frac{1}{x} \cdot dx :$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1,$$

$$\text{kde } c_1 \in \mathbb{R},$$

$$c_1 = \ln|c_2|$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c_2|$$

$$\ln|y| = \ln x \cdot c_2$$

$$\ln|y| = \ln x \cdot c_2$$

$$y = x \cdot c_2$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y = x \cdot c_2$

4. Variace konstant

Pozn: Obecné řešení nehomogenní rovnice budeme hledat ve stejném tvaru, v jakém vyšlo řešení homogenní rovnice, ale místo konstanty c zde bude funkce $c(x)$.

$$y = x \cdot c(x)$$

$$y' = c(x) + x \cdot c'(x)$$

Dosadíme zpět do původní zadané rovnice $y' - \frac{y}{x} = x^2$:

$$c(x) + x \cdot c'(x) - \frac{x \cdot c(x)}{x} = x^2$$

$$c(x) + x \cdot c'(x) - c(x) = x^2$$

$$x \cdot c'(x) = x^2$$

$$x \cdot c'(x) = x^2 \quad / : x$$

$$c'(x) = x$$

Integrace $c'(x) = x$:

$$\int c'(x) \cdot dx = \int x \cdot dx$$

$$c(x) = \frac{x^2}{2} + k$$

Dosadíme do nehomogenní rovnice $y = x \cdot c(x)$:

$$y = x \cdot \left(\frac{x^2}{2} + k \right)$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice je: $y = x \cdot \left(\frac{x^2}{2} + k \right)$,

kde $k \in \mathbb{R}$.

Př: $x \cdot y' + y = e^x$

1. Řešíme homogenní rovnici $x \cdot y' + y = 0$:

$$x \cdot y' = -y$$

$$x \cdot y' = -y \quad / : x$$

$$y' = \frac{-y}{x}$$

$$y' = \frac{-y}{x} \quad / : y$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{-1}{x}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \quad / \cdot dx$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = -\frac{1}{x} \cdot dx$$

2. Integrace $\frac{1}{y} \cdot dy = -\frac{1}{x} \cdot dx :$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = - \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + c_1,$$

kde $c_1 \in R,$
 $c_1 = \ln|c_2|$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c_2|$$

$$\ln|y| = \ln \frac{c_2}{x}$$

$$\ln|y| = \ln \frac{c_2}{x}$$

$$y = \frac{c_2}{x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y = \frac{c_2}{x}$

4. Variace konstant

$$y = \frac{c(x)}{x}$$

$$y' = \frac{c'(x) \cdot x - c(x)}{x^2}$$

Dosadíme zpět do původní zadané rovnice $x \cdot y' + y = e^x :$

$$x \cdot \frac{c'(x) \cdot x - c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x} = e^x$$

$$\frac{c'(x) \cdot x - c(x) + c(x)}{x} = e^x$$

$$\frac{c'(x) \cdot x}{x} = e^x$$

$$c'(x) = e^x$$

Integrace $c'(x) = e^x$:

$$\int c'(x) \cdot dx = \int e^x \cdot dx$$

$$c(x) = e^x + k$$

Dosadíme do nehomogenní rovnice $y = \frac{c(x)}{x}$:

$$y = \frac{e^x + k}{x}$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice je: $y = \frac{e^x + k}{x}$, kde $k \in \mathbb{R}$.

Př: $y' - \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot y = x^2 + 1$

1. Řešíme homogenní rovnici $y' - \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot y = 0$:

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot y$$

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot y / : y$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1} / \cdot dx$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot dx$$

2. Integrace $\frac{1}{y} \cdot dy = \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot dx :$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot dx$$

$$\ln|y| = \ln|x^2 + 1| + c_1,$$

kde $c_1 \in R,$

$$c_1 = \ln|c_2|$$

$$\ln|y| = \ln|x^2 + 1| + \ln|c_2|$$

$$\ln|y| = \ln(x^2 + 1) \cdot c_2$$

$$\ln|y| = \ln(x^2 + 1) \cdot c_2$$

$$y = (x^2 + 1) \cdot c_2$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y = (x^2 + 1) \cdot c_2$

4. Variace konstant

$$y = (x^2 + 1) \cdot c(x)$$

$$y' = (x^2 + 1) \cdot c'(x) + 2x \cdot c(x)$$

Dosadíme zpět do původní zadané rovnice $y' - \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot y = x^2 + 1 :$

$$(x^2 + 1) \cdot c'(x) + 2x \cdot c(x) - \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1) \cdot c(x) = x^2 + 1$$

$$(x^2 + 1) \cdot c'(x) + 2x \cdot c(x) - 2x \cdot c(x) = x^2 + 1$$

$$(x^2 + 1) \cdot c'(x) = x^2 + 1$$

$$(x^2 + 1) \cdot c'(x) = x^2 + 1 / (x^2 + 1)$$

$$c'(x) = 1$$

Integrace $c'(x) = 1 :$

$$\int c'(x) \cdot dx = \int 1 \cdot dx$$

$$c(x) = x + k$$

Dosadíme do nehomogenní rovnice $y = (x^2 + 1) \cdot c(x)$:

$$y = (x^2 + 1) \cdot (x + k)$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice je: $y = (x^2 + 1) \cdot (x + k)$,

kde $k \in \mathbb{R}$.

Metoda integračního faktoru

Př: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

1. Úprava rovnice $y' + 2xy = xe^{-x^2}$:

$$y' = -2xy + xe^{-x^2}$$

$$a(x) = -2x$$

$$b(x) = x \cdot e^{-x^2}$$

2. Výpočet $e^{-\int a(x)}$:

$$-\int a(x) \cdot dx = -\int (-2x) \cdot dx = 2 \int x \cdot dx = 2 \frac{x^2}{2} = x^2$$

$$\text{Pak } e^{-\int a(x)} = e^{x^2}$$

3. Rovnici $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ vynásobíme e^{x^2} :

$$y' + 2xy = xe^{-x^2} / \cdot e^{x^2}$$

$$y' \cdot e^{x^2} + 2xy \cdot e^{x^2} = xe^{-x^2} \cdot e^{x^2}$$

$$(y \cdot e^{x^2})' = x$$

4. Integruje $(y \cdot e^{x^2})' = x$:

$$\int (y \cdot e^{x^2})' \cdot dx = \int x \cdot dx$$

$$y \cdot e^{x^2} = \frac{x^2}{2} + k$$

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + k \right) \cdot e^{-x^2}$$

5. Obecné řešení : $y = \left(\frac{x^2}{2} + k \right) \cdot e^{-x^2}$

Př: $x \cdot (y' - y) = (1 + x^2) \cdot e^x$

1. Úprava rovnice $x \cdot (y' - y) = (1 + x^2) \cdot e^x$:

$$x \cdot (y' - y) = (1 + x^2) \cdot e^x \quad / : x$$

$$y' - y = \frac{(1 + x^2) \cdot e^x}{x}$$

$$y' = y + \frac{(1 + x^2) \cdot e^x}{x}$$

$$a(x) = 1$$

$$b(x) = \frac{(1 + x^2) \cdot e^x}{x}$$

2. Výpočet $e^{-\int a(x)}$:

$$-\int a(x) \cdot dx = -\int 1 \cdot dx = -x$$

Pak $e^{-\int a(x)} = e^{-x}$

3. Rovnici $y' - y = \frac{(1 + x^2) \cdot e^x}{x}$ vynásobíme e^{-x} :

$$y' - y = \frac{(1 + x^2) \cdot e^x}{x} \quad / \cdot e^{-x}$$

$$y' \cdot e^{-x} - y \cdot e^{-x} = \frac{1 + x^2}{x}$$

$$(y \cdot e^{-x})' = \frac{1 + x^2}{x}$$

4. Integrace $(y \cdot e^{-x})' = \frac{1+x^2}{x}$:

$$\int (y \cdot e^{-x})' \cdot dx = \int \frac{1+x^2}{x} \cdot dx$$

$$\int (y \cdot e^{-x})' \cdot dx = \int x \cdot dx + \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\int (y \cdot e^{-x})' \cdot dx = \int x \cdot dx + \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$y \cdot e^{-x} = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + k$$

$$y \cdot e^{-x} = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + k / e^{-x}$$

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x| + k \right) \cdot e^x$$

5. Obecné řešení : $y = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x| + k \right) \cdot e^x$

Př: $y' + 2y = 6x$

1. Úprava rovnice $y' + 2y = 6x$:

$$y' = -2y + 6x$$

$$a(x) = -2$$

$$b(x) = 6x$$

2. Výpočet $e^{-\int a(x)}$:

$$-\int a(x) \cdot dx = -\int (-2) \cdot dx = 2 \int dx = 2x$$

$$\text{Pak } e^{-\int a(x)} = e^{2x}$$

3. Rovnici $y' + 2y = 6x$ vynásobíme e^{2x} :

$$y' + 2y = 6x \cdot e^{2x}$$

$$y' \cdot e^{2x} + 2y \cdot e^{2x} = 6x \cdot e^{2x}$$

$$(y \cdot e^{2x})' = 6x \cdot e^{2x}$$

4. Integrace $(y \cdot e^{2x})' = 6x \cdot e^{2x}$:

$$\int (y \cdot e^{2x})' \cdot dx = \int 6x \cdot e^{2x} \cdot dx$$

Pozn: per partes $\rightarrow \begin{matrix} u = 6x & v' = e^{2x} \\ u' = 6 & v = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \end{matrix}$

$$\int (y \cdot e^{2x})' \cdot dx = 6x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int 6 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \cdot dx$$

$$\int (y \cdot e^{2x})' \cdot dx = 3x \cdot e^{2x} - 3 \int e^{2x} \cdot dx$$

$$y \cdot e^{2x} = 3x \cdot e^{2x} - \frac{3}{2} e^{2x} + k$$

$$y \cdot e^{2x} = 3x \cdot e^{2x} - \frac{3}{2} e^{2x} + k \quad /: e^{2x}$$

$$y = 3x - \frac{3}{2} + k \cdot e^{-2x}$$

5. Obecné řešení : $y = 3x - \frac{3}{2} + k \cdot e^{-2x}$

Cvičení:

1/ $xy' + 3y = 4x$

$$[y = \frac{x^4 + k}{x^3}]$$

2/ $x^2 y' - y = x^2 \cdot e^{\frac{x-1}{x}}$

$$[y = (e^x + k) \cdot e^{\frac{1}{x}}]$$

3/ $y' - 2y = -8x \cdot e^{2x}$

$$[y = (-4x^2 + k) \cdot e^{2x}]$$

4/ $y' - 3x^2 y = (x + 2) \cdot e^{x^2}$

$$[y = \left(\frac{x^2}{2} + 2x + k\right) \cdot e^{x^3}]$$

5/ $y' + 2y = (2x^2 - 3) \cdot e^{-2x}$

$$[y = \left(\frac{2}{3}x^3 - 3x + k\right) \cdot e^{-2x}]$$

6/ $y' + 2xy = x^3$

$$[y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + k \cdot e^{-x^2}]$$

7/ $y' - y = x \cdot e^x$

$$[y = \frac{x^2}{2} \cdot e^x + k \cdot e^x]$$

8/ $y' - y = x^2$

$$[y = -(x^2 + 2x + 2) + k \cdot e^x]$$

9/ $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

$$[y = (x + k) \cdot (1 + x^2)]$$

10/ $y' + y = e^x$

$$[y = \frac{1}{2}e^x + k \cdot e^{-x}]$$

5. Exaktní diferenciální rovnice

Je tvaru $P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy = 0$.

Jestliže výraz $P \cdot dx + Q \cdot dy$ je totální diferenciál nějaké funkce $f(x, y)$ nazveme rovnici exaktní. Totální diferenciál funkce $f(x, y): df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$.

Označíme-li P'_y parciální derivaci P podle y a Q'_x parciální derivaci Q podle x , pak podmínku exaktnosti příslušné diferenciální rovnice lze zapsat ve tvaru $P'_y = Q'_x$. Funkce $f(x, y)$ je tzv. kmenová funkce.

Hledáme obecné řešení ve tvaru $f(x, y) = c$.

$$\text{Př: } (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$$

1. Označme $P = 2x^3 - xy^2$

$$Q = 2y^3 - x^2y$$

$$\text{Pak } P'_y = -2xy$$

$$Q'_x = -2xy$$

Je zřejmé, že $P'_y = Q'_x \rightarrow$ tedy jde o exaktní rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy$$

2. Srovnáme výrazy u dx a dy :

$$dx: \frac{\partial f}{\partial x} = 2x^3 - xy^2$$

$$dy: \frac{\partial f}{\partial y} = 2y^3 - x^2y$$

3. Integrace:

$$f(x, y) = 2 \int x^3 \cdot dx - y^2 \int x \cdot dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - y^2 \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + g(y)$$

$$f(x, y) = 2 \int y^3 \cdot dy - x^2 \int y \cdot dy = 2 \cdot \frac{y^4}{4} - x^2 \cdot \frac{y^2}{2} = \frac{y^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + h(x)$$

4. Porovnání:

$$\frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + g(y) = \frac{y^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + h(x)$$

$$\frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + g(y) = \frac{y^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + h(x)$$

$$\frac{x^4}{2} + g(y) = \frac{y^4}{2} + h(x)$$

Poněvadž kmenová funkce je určena až na konstantu jednoznačně, je:

$$g(y) = \frac{y^4}{2}, \quad h(x) = \frac{x^4}{2}$$

5. Kmenová funkce:

$$f(x, y) = \frac{y^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + h(x) = \frac{y^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^4}{2}$$

$$c_1 = \frac{y^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^4}{2}$$

$$c_1 = \frac{y^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^4}{2} / \cdot 2$$

$$2c_1 = y^4 - x^2 y^2 + x^4, \text{ kde } 2c_1 = k$$

$$k = y^4 - x^2 y^2 + x^4$$

6. Obecné řešení: $k = y^4 - x^2 y^2 + x^4$

$$\text{Př: } (x \cdot \cos 2y + 1)dx - (x^2 \cdot \sin 2y)dy = 0$$

1. Označme $P = x \cdot \cos 2y + 1$

$$Q = -x^2 \cdot \sin 2y$$

Pak $P'_y = -2x \cdot \sin 2y$

$$Q'_x = -2x \cdot \sin 2y$$

Je zřejmé, že $P'_y = Q'_x \rightarrow$ tedy jde o exaktní rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = (x \cdot \cos 2y + 1)dx - (x^2 \cdot \sin 2y)dy$$

2. Srovnáme výrazy u dx a dy:

$$dx : \frac{\partial f}{\partial x} = x \cdot \cos 2y + 1$$

$$dy : \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \cdot \sin 2y$$

3. Integrace:

$$f(x, y) = \cos 2y \int x \cdot dx + \int 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot \cos 2y + x + g(y)$$

$$f(x, y) = -x^2 \int \sin 2y \cdot dy = \frac{x^2}{2} \cdot \cos 2y + h(x)$$

4. Porovnání:

$$\frac{x^2}{2} \cdot \cos 2y + x + g(y) = \frac{x^2}{2} \cdot \cos 2y + h(x)$$

$$x + g(y) = h(x)$$

Poněvadž kmenová funkce je určena až
na konstantu jednoznačně, je:

$$g(y) = 0, \quad h(x) = x$$

5. Kmenová funkce:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} \cdot \cos 2y + h(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \cos 2y + x$$

$$k = \frac{x^2}{2} \cdot \cos 2y + x$$

6. Obecné řešení: $k = \frac{x^2}{2} \cdot \cos 2y + x$

Př: $(2x - e^x \cdot y) \cdot dx - e^x \cdot dy = 0$

1. Označme $P = 2x - e^x \cdot y$

$$Q = -e^x$$

Pak $P'_y = -e^x$

$$Q'_x = -e^x$$

Je zřejmé, že $P'_y = Q'_x \rightarrow$ tedy jde o exaktní rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = (2x - e^x \cdot y) dx - e^x \cdot dy$$

2. Srovnáme výrazy u dx a dy:

$$dx : \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - e^x \cdot y$$

$$dy : \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x$$

3. Integrace:

$$f(x, y) = 2 \int x \cdot dx - y \int e^x \cdot dx = 2 \frac{x^2}{2} - y \cdot e^x + g(y) = x^2 - y \cdot e^x + g(y)$$

$$f(x, y) = -e^x \int dy = -y \cdot e^x + h(x)$$

4. Porovnání:

$$x^2 - y \cdot e^x + g(y) = -y \cdot e^x + h(x)$$

$$x^2 + g(y) = h(x)$$

Poněvadž kmenová funkce je určena až na konstantu
jednoznačně, je:

$$g(y) = 0, \quad h(x) = x^2$$

5. Kmenová funkce:

$$f(x, y) = -y \cdot e^x + x^2$$

$$k = -y \cdot e^x + x^2$$

6. Obecné řešení: $k = -y \cdot e^x + x^2$

Cvičení:

$$1/ \left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x} dy = 0$$

$$[k = x - \frac{y}{x}]$$

$$2/ (y \cdot \sin x + x^2) dx - (y + \cos x) dy = 0$$

$$[k = \frac{y^2}{2} + y \cdot \cos x + \frac{x^2}{2}]$$

$$3/ (4x^3 \cdot e^y) dx + (x^4 \cdot e^y + 2y) dy = 0$$

$$[k = e^y \cdot x^4 + y^2]$$

$$4/ (2x + y) dx + (x + 2y) dy = 0$$

$$[k = x^2 + xy + y^2]$$

$$5/ (3x^2 + y^2) dx + 2xy \cdot dy = 0$$

$$[k = x \cdot (y^2 + x^2)]$$

$$6/ (3x^2 y + 1) dx + (x^3 - 1) dy = 0$$

$$[k = x^3 y - y + x]$$

$$7/ (e^y + y \cdot e^x + 3) dx + (e^x + x \cdot e^y - 2) dy = 0$$

$$[k = e^x \cdot y + x \cdot e^y - 2y + 3x]$$

$$8/ (2x + y) dx + (1 + x) dy = 0$$

$$[k = x^2 + xy + y]$$

$$9/ (2xy + 4x^3 y) dx + (x^2 + x^4) dy = 0$$

$$[k = x^2 y + x^4 y]$$

$$10/ \ln y \cdot dx + \frac{x}{y} \cdot dy = 0$$

$$[k = x \ln y]$$

$$11/ x(x^2 + y^2) dx + y(x^2 + y^2) dy = 0$$

$$[k = x^2 + y^2]$$

$$12/ \frac{1}{x} \cdot dx - \operatorname{tg} y \cdot dy = 0$$

$$[k = x \cdot \cos y]$$

6. Bernoulliova diferenciální rovnice

Rovnice typu $y' = a(x)y + b(x)y^r$, kde a, b jsou spojité funkce na nějakém intervalu J .

Pro $r = 0$ nebo $r = 1$ je rovnice lineární.

Pro $r \neq 0, r \neq 1$ není tato rovnice lineární, ale vhodnými úpravami ji můžeme na danou rovnici převést.

Jednoduchými úpravami obdržíme: $y' \cdot y^{-r} = a(x)y^{1-r} + b(x)$

$$\frac{1}{1-r} \cdot (y^{1-r})' = a(x)y^{1-r} + b(x)$$

Zavedeme-li substituci: $y^{1-r} = u$,

tak dostaneme $u' = (1-r) \cdot a(x)u + (1-r) \cdot b(x)$ a to už je rovnice lineární.

$$\text{Př: } y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{y}$$

$$1. \text{ Úprava rovnice: } y' = \frac{1}{x}y + y^{-1}$$

$$r = -1$$

$$y^r = y^{-1}$$

$$y' = \frac{1}{x}y + y^{-1} \quad /: y^{-1}$$

$$\frac{y'}{y^{-1}} = \frac{\frac{1}{x}y}{y^{-1}} + 1$$

$$y \cdot y' = \frac{1}{x}y^2 + 1$$

$$\frac{1}{2}(y^2)' = \frac{1}{x}y^2 + 1$$

2. Substituce: $y^2 = u$

Dosadíme do rovnice $\frac{1}{2}(y^2)' = \frac{1}{x}y^2 + 1$:

$$\frac{1}{2}u' = \frac{1}{x}u + 1$$

$$\frac{1}{2}u' = \frac{1}{x}u + 1 \quad / \cdot 2$$

$$u' = \frac{2}{x}u + 2$$

3. Lineární diferenciální rovnice: $u' = \frac{2}{x}u + 2$

4. Řešíme homogenní rovnici $u' - \frac{2}{x}u = 0$:

$$u' = \frac{2}{x}u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x}u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x}u \quad / : u$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{2}{x} \quad / \cdot dx$$

$$\frac{1}{u} \cdot du = \frac{2}{x} \cdot dx$$

Rovnici zintegrujeme:

$$\int \frac{1}{u} \cdot du = \int \frac{2}{x} \cdot dx$$

$$\ln|u| = 2 \ln|x| + c_1,$$

$$\text{kde } c_1 = \ln|c_2|$$

$$\ln|u| = 2\ln|x| + \ln|c_2|$$

$$\ln|u| = \ln x^2 + \ln|c_2|$$

$$\ln|u| = \ln x^2 \cdot c_2$$

$$\ln|u| = \ln x^2 \cdot c_2$$

$$u = x^2 \cdot c_2$$

Obecné řešení homogenní rovnice: $u = x^2 \cdot c_2$

Řešení nehomogenní rovnice bude mít tvar: $u = x^2 \cdot c(x)$

$$\text{Pak } u' = x^2 \cdot c'(x) + 2x \cdot c(x)$$

5. Řešíme nehomogenní rovnici $u' = \frac{2}{x}u + 2$:

Do rovnice dosadíme $u = x^2 \cdot c(x)$,

$$u' = x^2 \cdot c'(x) + 2x \cdot c(x)$$

$$x^2 \cdot c'(x) + 2x \cdot c(x) = \frac{2}{x} \cdot (x^2 \cdot c(x)) + 2$$

$$x^2 \cdot c'(x) + 2x \cdot c(x) = 2x \cdot c(x) + 2$$

$$x^2 \cdot c'(x) = 2$$

$$c'(x) = \frac{2}{x^2}$$

Zintegrujeme $c'(x) = \frac{2}{x^2}$:

$$\int c'(x) \cdot dx = \int \frac{2}{x^2} \cdot dx$$

$$c(x) = -\frac{2}{x} + k$$

Dosadíme do $u = x^2 \cdot c(x)$:

$$u = x^2 \cdot \left(-\frac{2}{x} + k\right)$$

$$u = -2x + kx^2$$

6. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $u = -2x + kx^2$

Dosadíme zpět za u , když víme že $u = y^2$

$$y^2 = -2x + kx^2$$

$$y = \pm(-2x + kx^2)^{\frac{1}{2}}$$

7. Obecné řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice:

$$y = \pm(-2x + kx^2)^{\frac{1}{2}}$$

Př. $y' = -2y + y^2 \cdot e^x$

1. Úprava rovnice $y' = -2y + y^2 \cdot e^x$:

$$r = 2$$

$$y^r = y^2$$

$$y' = -2y + y^2 \cdot e^x / : y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{-2y}{y^2} + e^x$$

$$y^{-2} \cdot y' = -2y^{-1} + e^x$$

$$-(y^{-1})' = -2y^{-1} + e^x$$

2. Substitute: $(y^{-1}) = u$

Dosadíme do rovnice $-(y^{-1})' = -2y^{-1} + e^x$:

$$-u' = -2u + e^x$$

$$-u' = -2u + e^x / \cdot (-1)$$

$$u' = 2u - e^x$$

3. Lineární diferenciální rovnice: $u' = 2u - e^x$

4. Řešíme homogenní rovnici $u' - 2u = 0$:

$$u' = 2u$$

$$\frac{du}{dx} = 2u$$

$$\frac{du}{dx} = 2u \quad / : u$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = 2 \quad / \cdot dx$$

$$\frac{1}{u} \cdot du = 2 \cdot dx$$

Rovnici zintegrujeme:

$$\int \frac{1}{u} \cdot du = \int 2 \cdot dx$$

$$\ln|u| = 2x + c_1,$$

$$\text{kde } c_1 = \ln|c_2|$$

$$\ln|u| = 2x + \ln|c_2|$$

$$\ln|u| = \ln e^{2x} + \ln|c_2|$$

$$\ln|u| = \ln e^{2x} + \ln|c_2|$$

$$u = e^{2x} \cdot c_2$$

Obecné řešení homogenní rovnice: $u = e^{2x} \cdot c_2$

Řešení nehomogenní rovnice bude mít tvar: $u = e^{2x} \cdot c(x)$

$$\text{Pak } u' = e^{2x} \cdot c'(x) + 2e^{2x} \cdot c(x)$$

5. Řešíme nehomogenní rovnici $u' = 2u - e^x$:

Do rovnice dosadíme $u = e^{2x} \cdot c(x)$,

$$u' = e^{2x} \cdot c'(x) + 2e^{2x} \cdot c(x)$$

$$e^{2x} \cdot c'(x) + 2e^{2x} \cdot c(x) = 2 \cdot (e^{2x} \cdot c(x)) - e^x$$

$$e^{2x} \cdot c'(x) + 2e^{2x} \cdot c(x) = 2e^{2x} \cdot c(x) - e^x$$

$$e^{2x} \cdot c'(x) = -e^x$$

$$c'(x) = \frac{-e^x}{e^{2x}}$$

$$c'(x) = -e^{-x}$$

Zintegrujeme $c'(x) = -e^{-x}$:

$$\int c'(x) \cdot dx = \int -e^{-x} \cdot dx$$

$$c(x) = e^{-x} + k$$

Dosadíme do $u = e^{2x} \cdot c(x)$:

$$u = e^{2x} \cdot (e^{-x} + k)$$

$$u = e^x + ke^{2x}$$

6. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $u = e^x + ke^{2x}$

Dosadíme zpět za u , když víme že $u = \frac{1}{y}$

$$\frac{1}{y} = e^x + ke^{2x}$$

$$y = (e^x + ke^{2x})^{-1}$$

7. Obecné řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice:

$$y = (e^x + ke^{2x})^{-1}$$

$$\text{Př: } y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$$

$$1. \text{ Úprava rovnice: } y' = \frac{4}{x}y + x \cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$y^r = y^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{4}{x}y + x \cdot y^{\frac{1}{2}} / : y^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{4}{x}y}{y^{\frac{1}{2}}} + x$$

$$y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' = \frac{4}{x}y^{\frac{1}{2}} + x$$

$$2\left(y^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{4}{x}y^{\frac{1}{2}} + x$$

$$2. \text{ Substitute: } y^{\frac{1}{2}} = u$$

$$\text{Dosadíme do rovnice } 2\left(y^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{4}{x}y^{\frac{1}{2}} + x:$$

$$2u' = \frac{4}{x}u + x$$

$$2u' = \frac{4}{x}u + x / : 2$$

$$u' = \frac{2}{x}u + \frac{x}{2}$$

$$3. \text{ Lineární diferenciální rovnice: } u' = \frac{2}{x}u + \frac{x}{2}$$

4. Řešíme homogenní rovnici $u' - \frac{2}{x}u = 0$:

$$u' = \frac{2}{x}u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x}u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x}u \quad / : u$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{2}{x} \quad / \cdot dx$$

$$\frac{1}{u} \cdot du = \frac{2}{x} \cdot dx$$

Rovnici zintegrujeme:

$$\int \frac{1}{u} \cdot du = \int \frac{2}{x} \cdot dx$$

$$\ln|u| = 2 \ln|x| + c_1,$$

$$\text{kde } c_1 = \ln|c_2|$$

$$\ln|u| = 2 \ln|x| + \ln|c_2|$$

$$\ln|u| = \ln x^2 + \ln|c_2|$$

$$\ln|u| = \ln x^2 \cdot c_2$$

$$\ln|u| = \ln x^2 \cdot c_2$$

$$u = x^2 \cdot c_2$$

Obecné řešení homogenní rovnice: $u = x^2 \cdot c_2$

Řešení nehomogenní rovnice bude mít tvar: $u = x^2 \cdot c(x)$

$$\text{Pak } u' = x^2 \cdot c'(x) + 2x \cdot c(x)$$

5. Řešíme nehomogenní rovnici $u' = \frac{2}{x}u + \frac{x}{2}$:

Do rovnice dosadíme $u = x^2 \cdot c(x)$, $u' = x^2 \cdot c'(x) + 2x \cdot c(x)$:

$$x^2 \cdot c'(x) + 2x \cdot c(x) = \frac{2}{x}(x^2 \cdot c(x)) + \frac{x}{2}$$

$$x^2 \cdot c'(x) + 2x \cdot c(x) = 2x \cdot c(x) + \frac{x}{2}$$

$$x^2 \cdot c'(x) = \frac{x}{2}$$

$$x^2 \cdot c'(x) = \frac{x}{2} \quad / : x^2$$

$$c'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

Zintegrujeme $c'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$:

$$\int c'(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$c(x) = \frac{1}{2} \ln|x| + c_1, \text{ kde } c_1 = \ln e^{c_1}$$

$$c(x) = \ln \sqrt{|x|} + \ln e^{c_1} \Rightarrow c(x) = \ln \sqrt{|x|} \cdot e^{c_1}, \text{ kde } e^{c_1} = k$$

Dosadíme do $u = x^2 \cdot c(x)$:

$$u = x^2 \cdot (\ln \sqrt{|x|} \cdot k)$$

6. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $u = x^2 \cdot (\ln \sqrt{|x|} \cdot k)$

Dosadíme zpět za u , když víme že $u = \sqrt{y}$

$$\sqrt{y} = x^2 \cdot (\ln \sqrt{|x|} \cdot k)$$

$$\sqrt{y} = x^2 \cdot (\ln \sqrt{|x|} \cdot k)^2$$

$$y = x^4 \cdot (\ln \sqrt{|x|} \cdot k)^2$$

7. Obecné řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice:

$$y = x^4 \cdot (\ln \sqrt{|x|} \cdot k)^2$$

Cvičení:

1/ $xy' - y = x^2 \cdot \frac{1}{y}$

$[y^2 = x^2 \cdot (\ln x^2 + k)]$

2/ $xy' + y = y^2 \cdot \ln x$

$[y = (-\ln x - 1 + kx)^{-1}]$

3/ $xy' + 2y + x^5 y^3 x^x = 0$

$[y^2 = \frac{1}{x^4 \cdot (2e^x + k)}]$

4/ $y' - y + y^2 \cos x = 0$

$[y = \frac{2}{\frac{1}{2} \cdot (\cos x + \sin x) + k \cdot e^{-x}}]$

5/ $y' + y = x \cdot \sqrt{y}$

$[y = \left(x - \frac{1}{2} + k \cdot e^{-2x}\right)^2]$

6/ $xy' - y = -x \cdot y^2$

$[y = \left(\frac{x^2 + k}{2x}\right)^{-1}]$

7/ $y' + y + y^2 e^x = 0$

$[y = (xe^x + ke^x)^{-1}]$

8/ $xy' + y = y^2 \cdot x \ln x$

$[y = \left(\frac{-x \ln^2 x}{2} + kx\right)^{-1}]$

7. Obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů

Je to rovnice typu:

$$a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = g(x)$$

Je-li $g(x) = 0$ jedná se o diferenciální rovnice homogenní.

Je-li $g(x) \neq 0$ jedná se o diferenciální rovnice nehomogenní.

Pak např. rovnice $y''' + x \cdot y' + y = \sin x$ je nehomogenní lineární rovnice 3. řádu a nemá konstantní koeficienty.

A rovnice $y'' + y' - 4y = 0$ je homogenní lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty.

7.1. Obyčejné diferenciální rovnice II.řádu

7.1.1. Homogenní ODR II. řádu s konstantními koeficienty

Rovnice typu $a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$, kde a_0, a_1, a_2 jsou reálné konstanty.

Pro tyto rovnice hledáme řešení ve tvaru: $y = e^{h \cdot x}$, kde h je kořen charakteristického polynomu.

Pozn: Charakteristickým polynomem pro rovnici $a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$ rozumíme $a_2 \cdot h^2 + a_1 \cdot h + a_0 = 0$.

Rozlišujeme tři typy řešení těchto rovnic:

I. ($D > 0$) $\rightarrow h$ je jednoduchý reálný kořen charakteristické rovnice, pak rovnice má

partikulární řešení: $y_1 = c_1 \cdot e^{h_1 \cdot x}$
 $y_2 = c_2 \cdot e^{h_2 \cdot x}$

Obecné řešení dané rovnice je lineární kombinací těchto dvou řešení: $y = y_1 + y_2$.

Př: $y'' + 3y' - 4y = 0$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 + 3h - 4 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \rightarrow h_1 = 1, h_2 = -4$$

3. Partikulární řešení: $y_1 = c_1 \cdot e^x$, $y_2 = c_2 \cdot e^{-4x}$

4. Obecné řešení: $y = y_1 + y_2$,

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-4x}$$

Př: $y'' + 5y' + 4y = 0$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 + 5h + 4 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \rightarrow h_1 = -1, h_2 = -4$$

3. Partikulární řešení: $y_1 = c_1 \cdot e^{-x}$, $y_2 = c_2 \cdot e^{-4x}$

4. Obecné řešení: $y = y_1 + y_2$,

$$y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-4x}$$

II. $(D = 0) \rightarrow h_1 = h_2$ je dvojnásobný reálný kořen, pak rovnice má 2 lineárně nezávislá

partikulární řešení: $y_1 = c_1 \cdot e^{h_1 \cdot x}$
 $y_2 = c_2 \cdot x \cdot e^{h_2 \cdot x}$

Př: $y'' - 4y' + 4y = 0$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 - 4h + 4 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (4)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} \rightarrow h_1 = 2, h_2 = 2$$

3. Partikulární řešení: $y_1 = c_1 \cdot e^{2x}, y_2 = c_2 \cdot x \cdot e^{2x}$

4. Obecné řešení: $y = y_1 + y_2,$

$$y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} = e^{2x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x)$$

Př: $y'' = 0$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = 0 \rightarrow h_1 = 0, h_2 = 0$$

3. Partikulární řešení: $y_1 = c_1 \cdot e^{0x} = c_1, y_2 = c_2 \cdot x \cdot e^{0x} = c_2 \cdot x$

4. Obecné řešení: $y = y_1 + y_2,$

$$y = c_1 + c_2 \cdot x$$

III. ($D < 0$) $\rightarrow h_{1,2} = a \pm i \cdot b$ je dvojice komplexně sdružených kořenů, pak rovnice má

2 reálná řešení: $y_1 = c_1 \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos bx$
 $y_2 = c_2 \cdot e^{a \cdot x} \cdot \sin bx$

Př: $y'' + 6y' + 13y = 0$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 + 6h + 13 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (13)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = -3 + 2i \\ h_2 = -3 - 2i \end{matrix}$$

kde $a = -3, b = 2$

3. Partikulární řešení: $y_1 = c_1 \cdot e^{-3 \cdot x} \cdot \cos 2x$
 $y_2 = c_2 \cdot e^{-3 \cdot x} \cdot \sin 2x$

4. Obecné řešení:

$$y = y_1 + y_2,$$

$$y = c_1 \cdot e^{-3x} \cdot \cos 2x + c_2 \cdot e^{-3x} \cdot \sin 2x = e^{-3x} \cdot (c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x)$$

Př: $4y'' + 4y' + 5y = 0$

1. Charakteristická rovnice: $4h^2 + 4h + 5 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (4 \cdot 5)}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm \sqrt{-64}}{8} = \frac{-4 \pm 8i}{8} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = -\frac{1}{2} + i \\ h_2 = -\frac{1}{2} - i \end{matrix}$$

kde $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

3. Partikulární řešení: $y_1 = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x} \cdot \cos x$
 $y_2 = c_2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x} \cdot \sin x$

4. Obecné řešení:

$$y = y_1 + y_2,$$

$$y = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \cos x + c_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sin x = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x)$$

Cvičení:

1/ $y'' + y' - 2y = 0$

$[y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-2x}]$

2/ $y'' - 16y = 0$

$[y = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot e^{-4x}]$

3/ $y'' + 7y' - 8y = 0$

$[y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-8x}]$

4/ $y'' + 4y' - 21y = 0$

$[y = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-7x}]$

5/ $4y'' + 20y' + 25y = 0$

$[y = e^{-\frac{5}{2}x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x)]$

6/ $4y'' + 24y' + 37y = 0$

$[y = e^{-3x} \cdot (c_1 \cdot \cos \frac{x}{2} + c_2 \cdot \sin \frac{x}{2})]$

7/ $y'' + 4y' + 13y = 0$

$[y = e^{-2x} \cdot (c_1 \cdot \cos 3x + c_2 \cdot \sin 3x)]$

8/ $y'' + 81y = 0$

$[y = c_1 \cdot \cos 9x + c_2 \cdot \sin 9x]$

9/ $y'' - 6y' + 13y = 0$

$[y = e^{3x} \cdot (c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x)]$

10/ $y'' - 4y' + 5y = 0$

$[y = e^{2x} \cdot (c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x)]$

7.2. Nehomogenní ODR II. řádu

Rovnice typu $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$.

Obecné řešení nehomogenní rovnice y je rovno součtu obecného řešení homogenní rovnice Y a jednoho libovolného partikulárního řešení y_p nehomogenní rovnice:

$$y = Y + y_p.$$

7.2.1. Metoda variace konstant

1/ Určíme charakteristickou rovnici

2/ Vypočteme kořeny charakteristické rovnice

3/ Určíme řešení homogenní rovnice ve tvaru: $Y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$

4/ Určíme partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru: $y_p = c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2$,

kde

$$c_1 = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx, \quad c_2 = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx \quad \text{a} \quad W(x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \text{ je WRONSKIÁN.}$$

Determinant $W_1(x) \rightarrow$ je determinant, který vznikne z Wronskiánu tak, že jeho první

sloupec nahradíme sloupcem $\begin{bmatrix} 0 \\ b(x) \end{bmatrix}$. Tedy $W_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ b(x) & y_2' \end{bmatrix}$.

Determinant $W_2(x) \rightarrow$ je determinant, který získáme nahrazením druhého sloupce

Wronskiánu sloupcem $\begin{bmatrix} 0 \\ b(x) \end{bmatrix}$. Tedy $W_2(x) = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & b(x) \end{bmatrix}$.

Pozn: Když $W(x) \neq 0$, pak y_1 a y_2 jsou dvě lineárně nezávislá řešení.

Když $W(x) = 0$, pak jde o řešení lineárně závislá.

5/ Určíme obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = Y + y_p$.

Př: $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 - 2h + 1 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (1 \cdot 1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = 1 \\ h_2 = 1 \end{matrix}$$

3. Řešení homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^x \\ y_2 &= x \cdot e^x \end{aligned} \rightarrow Y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 = e^x \cdot (c_1 + c_2 \cdot x)$$

4. Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude mít tvar:

$$y_p = c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2$$

$$y_p = c_1(x) \cdot e^x + c_2(x) \cdot x \cdot e^x$$

5. Derivace y_1' , y_2' řešení homogenní rovnice:

$$y_1' = e^x$$

$$y_2' = e^x + x \cdot e^x$$

6. WRONSKIÁN:

$$W(x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & x \cdot e^x \\ e^x & e^x + x \cdot e^x \end{bmatrix} = e^x \cdot (e^x + x \cdot e^x) - e^x \cdot x \cdot e^x = e^{2x}$$

$$W_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & x \cdot e^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x + x \cdot e^x \end{bmatrix} = 0 - \left(\frac{e^x}{x} \cdot x \cdot e^x \right) = -e^{2x}$$

$$W_2(x) = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{bmatrix} = e^x \cdot \frac{e^x}{x} - 0 = \frac{e^{2x}}{x}$$

$$c_1 = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx = \int \frac{-e^{2x}}{e^{2x}} dx = \int -1 dx = -x + k_1$$

$$c_2 = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx = \int \frac{x}{e^{2x}} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k_2$$

Pozn: k_1, k_2 jsou libovolné integrační konstanty. Můžeme získat jakékoliv partikulární řešení. Pro získání obecného řešení položíme $k_1, k_2 = 0$.

7. Partikulární řešení: $y_p = -x \cdot e^x + \ln|x| \cdot x \cdot e^x = x \cdot e^x \cdot (\ln|x| - 1)$

8. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = Y + y_p$$

$$y = e^x (c_1 + c_2 \cdot x) + x \cdot e^x \cdot (\ln|x| - 1)$$

Př: $y'' + y' = 4x$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 + h = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (1 \cdot 0)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-1 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = 0 \\ h_2 = -1 \end{matrix}$$

3. Řešení homogenní rovnice:

$$\begin{matrix} y_1 = e^0 = 1 \\ y_2 = e^{-x} \end{matrix} \rightarrow Y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 = c_1 + c_2 \cdot e^{-x}$$

4. Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude mít tvar:

$$y_p = c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2$$

$$y_p = c_1(x) + c_2(x) \cdot e^{-x}$$

5. Derivace y_1', y_2' řešení homogenní rovnice:

$$y_1' = 0$$

$$y_2' = -e^{-x}$$

6. WRONSKIÁN:

$$W(x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{bmatrix} = -e^{-x} - 0 = -e^{-x}$$

$$W_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-x} \\ 4x & -e^{-x} \end{bmatrix} = 0 - 4x \cdot e^{-x} = -4x \cdot e^{-x}$$

$$W_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4x \end{bmatrix} = 4x - 0 = 4x$$

$$c_1 = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx = \int \frac{-4xe^{-x}}{-e^{-x}} dx = \int 4x dx = \frac{4x^2}{2} = 2x^2 + k_1$$

$$c_2 = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx = \int \frac{4x}{-e^{-x}} dx = -4 \int x \cdot e^x dx = -4 \cdot (x \cdot e^x - \int e^x dx) = -4xe^x + 4e^x + k_2$$

$$\begin{array}{ll} \text{per partes} & u = x \quad v' = e^x \\ & u' = 1 \quad v = e^x \end{array}$$

$$k_1, k_2 = 0$$

7. Partikulární řešení: $y_p = 2x^2 - 4x + 4$

8. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = Y + y_p$$

$$y = c_1 + c_2 \cdot e^{-x} + 2x^2 - 4x + 4$$

Cvičení:

1/ $y'' + y = x^2 + 2$

$$[y = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x + x^2]$$

7.3. Nehomogenní diferenciální rovnice II. řádu se speciální pravou stranou

7.3.1. Metoda neurčitých koeficientů

Jde o rovnici typu $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$, kde pravá strana nehomogenní diferenciální rovnice, tj. funkce $b(x)$ může mít tvar:

I. $b(x) = P(x)$, kde $P(x)$ je polynom m -tého stupně

Partikulární řešení y_p hledáme ve tvaru analogickému k tvaru pravé strany.

Př: $y'' + 3y' - 4y = 8x^2 - 1$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 + 3h - 4 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (1 \cdot (-4))}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = 1 \\ h_2 = -4 \end{matrix}$$

3. Řešení homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cdot e^x \\ y_2 &= c_2 \cdot e^{-4x} \end{aligned} \rightarrow Y = y_1 + y_2 = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-4x}$$

4. Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude mít tvar:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

a) Vypočteme první derivaci partikulárního řešení rovnice:

$$y'_p = 2Ax + B$$

b) Vypočteme druhou derivaci partikulárního řešení:

$$y''_p = 2A$$

c) Dosadíme zpět do původní rovnice $y'' + 3y' - 4y = 8x^2 - 1$:

$$\begin{aligned} 2A + 6Ax + 3B - 4Ax^2 - 4Bx - 4C &= 8x^2 - 1 \\ -4Ax^2 + x \cdot (6A - 4B) + 2A + 3B - 4C &= 8x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$x^2: -4A = 8$$

$$A = -2$$

$$x: \quad 6A - 4B = 0$$

$$-12 - 4B = 0$$

$$B = -3$$

$$x^0: \quad 2A + 3B - 4C = -1$$

$$-4 - 9 - 4C = -1$$

$$-4C = 12$$

$$C = -3$$

d) Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$y_p = -2x^2 - 3x - 3$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = Y + y_p$
 $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-4x} - 2x^2 - 3x - 3$

Př: $y'' + 3y' - 4y = 1$

2. Charakteristická rovnice: $h^2 + 3h - 4 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (1 \cdot -4)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = 1 \\ h_2 = -4 \end{matrix}$$

3. Řešení homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cdot e^x \\ y_2 &= c_2 \cdot e^{-4x} \end{aligned} \rightarrow Y = y_1 + y_2 = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-4x}$$

4. Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude mít tvar:

$$y_p = A$$

a) Vypočteme první derivaci partikulárního řešení rovnice:

$$y'_p = 0$$

b) Vypočteme druhou derivaci partikulárního řešení:

$$y_p'' = 0$$

c) Dosadíme zpět do původní rovnice $y'' + 3y' - 4y = 1$:

$$-4A = 1$$

$$A = -\frac{1}{4}$$

d) Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$y_p = -\frac{1}{4}$$

$$y = Y + y_p$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-4x} - \frac{1}{4}$$

II. $b(x) = e^{ax} \cdot P(x)$

Partikulární řešení hledáme opět ve tvaru analogickém tvaru pravé strany.

$$\text{Př: } y'' + 3y' - 4y = 3e^{3x}$$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 + 3h - 4 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (1 \cdot (-4))}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = 1 \\ h_2 = -4 \end{matrix}$$

3. Řešení homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cdot e^x \\ y_2 &= c_2 \cdot e^{-4x} \end{aligned} \rightarrow Y = y_1 + y_2 = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-4x}$$

4. Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude mít tvar:

$$y_p = A \cdot e^{3x}$$

a) Vypočteme první derivaci partikulárního řešení rovnice:

$$y_p' = 3A \cdot e^{3x}$$

b) Vypočteme druhou derivaci partikulárního řešení:

$$y_p'' = 9A \cdot e^{3x}$$

c) Dosadíme zpět do původní rovnice $y'' + 3y' - 4y = 3e^{3x}$:

$$9A \cdot e^{3x} + 9A \cdot e^{3x} - 4A \cdot e^{3x} = 3e^{3x}$$

$$14A \cdot e^{3x} = 3e^{3x} \quad / : e^{3x}$$

$$14A = 3$$

$$A = \frac{3}{14}$$

d) Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$y_p = \frac{3}{14} \cdot e^{3x}$$

$$y = Y + y_p$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-4x} + \frac{3}{14} \cdot e^{3x}$$

Př: $y'' - 3y = x \cdot e^x$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 - 3 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot (1 \cdot (-3))}}{2} = \frac{0 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{0 \pm 2\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = \sqrt{3} \\ h_2 = -\sqrt{3} \end{matrix}$$

3. Řešení homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cdot e^{\sqrt{3}x} \\ y_2 &= c_2 \cdot e^{-\sqrt{3}x} \end{aligned} \rightarrow Y = y_1 + y_2 = c_1 \cdot e^{\sqrt{3}x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{3}x}$$

4. Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude mít tvar:

$$y_p = (Ax + B) \cdot e^x$$

a) Vypočteme první derivaci partikulárního řešení rovnice:

$$y'_p = A \cdot e^x + (Ax + B) \cdot e^x$$

b) Vypočteme druhou derivaci partikulárního řešení:

$$y''_p = 2A \cdot e^x + (Ax + B) \cdot e^x$$

c) Dosadíme zpět do původní rovnice $y'' - 3y = x \cdot e^x$:

$$2A \cdot e^x + (Ax + B) \cdot e^x - 3(Ax + B) \cdot e^x = x \cdot e^x \quad / : e^x$$

$$2A + Ax + B - 3Ax - 3B = x$$

$$-2Ax + 2A - 2B = x$$

$$x^1: \quad -2A = 1$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$x^0: \quad 2A - 2B = 0$$

$$-2B = 1$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

d) Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$y_p = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^x$$

$$y = Y + y_p$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = c_1 \cdot e^{\sqrt{3}x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{3}x} + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^x$$

III. $b(x) = e^{ax} \cdot P(x) \cdot \cos bx$, resp. $b(x) = e^{ax} \cdot P(x) \cdot \sin bx$

Partikulární řešení hledáme opět ve tvaru analogickém tvaru pravé strany.

Př: $y'' - 10y' + 26y = 10e^{5x} \cdot \cos x$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 - 10h + 26 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot (1 \cdot 26)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{10 \pm 2i}{2} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = 5 + i \\ h_2 = 5 - i \end{matrix}, \text{ kde}$$

$$a = 5, b = 1$$

3. Řešení homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cdot e^{5x} \cdot \cos x \\ y_2 &= c_2 \cdot e^{5x} \cdot \sin x \end{aligned} \rightarrow Y = y_1 + y_2 = c_1 \cdot e^{5x} \cdot \cos x + c_2 \cdot e^{5x} \cdot \sin x$$

4. Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude mít tvar:

$$y_p = xe^{5x} \cdot (A \cos x + B \sin x) = e^{5x} \cdot (Ax \cos x + Bx \sin x)$$

a) Vypočteme první derivaci partikulárního řešení rovnice:

$$\begin{aligned} y'_p &= 5e^{5x} \cdot (Ax \cos x + Bx \sin x) + \\ &+ e^{5x} \cdot (A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x) \end{aligned}$$

b) Vypočteme druhou derivaci partikulárního řešení:

$$\begin{aligned} y''_p &= 25e^{5x} \cdot (Ax \cos x + Bx \sin x) + \\ &+ 5e^{5x} \cdot (A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x) + \\ &+ 5e^{5x} \cdot (A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x) + \\ &+ e^{5x} \cdot (-A \sin x - A \sin x - Ax \cos x + B \cos x + B \cos x - Bx \sin x) \end{aligned}$$

c) Dosadíme zpět do původní rovnice

$$y'' - 10y' + 26y = 10e^{5x} \cdot \cos x :$$

$$\begin{aligned} & 25e^{5x} \cdot (Ax \cos x + Bx \sin x) + 5e^{5x} \cdot (A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x) + \\ & + 5e^{5x} \cdot (A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x) + \\ & + e^{5x} \cdot (-A \sin x - A \sin x - Ax \cos x + B \cos x + B \cos x - Bx \sin x) - \\ & - 10 \cdot (5e^{5x} \cdot (Ax \cos x + Bx \sin x) + e^{5x} \cdot (A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x)) + \\ & + 26 \cdot (e^{5x} \cdot (xA \cos x + xB \sin x)) = 10e^{5x} \cdot \cos x \end{aligned}$$

Obě strany rovnice vydělíme e^{5x} a dostaneme:

$$\begin{aligned} & 25 \cdot (Ax \cos x + Bx \sin x) + 5 \cdot (A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x) + \\ & + 5 \cdot (A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x) + \\ & - A \sin x - A \sin x - Ax \cos x + B \cos x + B \cos x - Bx \sin x - \\ & - 50 \cdot (Ax \cos x + Bx \sin x) - 10 \cdot (A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x) + \\ & + 26 \cdot (xA \cos x + xB \sin x) = 10 \cos x \end{aligned}$$

$$x \cos x : 25A + 5B + 5B - A - 50A - 10B + 26A = 0$$

$$x \sin x : 25B - 5A - 5A - B - 50B + 10A + 26B = 0$$

$$\cos x : 5A + 5A + B + B - 10A = 10$$

$$\sin x : 5B + 5B - A - A - 10B = 0$$

$$\cos x : 2B = 10$$

$$B = 5$$

$$\sin x : -2A = 0$$

$$A = 0$$

d) Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$y_p = e^{5x} \cdot 5x \sin x$$

$$\begin{aligned} & 5. \text{Obecné řešení nehomogenní rovnice: } y = Y + y_p \\ & y = e^{5x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{5x} \cdot 5x \sin x \end{aligned}$$

Př: $y'' - 2y' + 5y = e^x \cdot \cos 2x$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 - 2h + 5 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (1 \cdot 5)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = 1 + 2i \\ h_2 = 1 - 2i \end{matrix}, \text{ kde}$$

$$a = 1, b = 2$$

3. Řešení homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cdot e^x \cdot \cos 2x \\ y_2 &= c_2 \cdot e^x \cdot \sin 2x \end{aligned} \rightarrow Y = y_1 + y_2 = e^x \cdot (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

4. Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude mít tvar:

$$y_p = x \cdot e^x \cdot (A \cdot \cos 2x + B \cdot \sin 2x)$$

a) Vypočteme první derivaci partikulárního řešení rovnice:

$$\begin{aligned} y_p' &= e^x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) + x \cdot e^x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) + \\ &+ x \cdot e^x \cdot (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) \end{aligned}$$

b) Vypočteme druhou derivaci partikulárního řešení:

$$\begin{aligned} y_p'' &= 2e^x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) + 2e^x \cdot (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + \\ &+ x \cdot e^x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) + 2x \cdot e^x \cdot (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + \\ &+ x \cdot e^x \cdot (-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) \end{aligned}$$

c) Dosadíme zpět do původní rovnice $y'' - 2y' + 5y = e^x \cdot \cos 2x$:

$$\begin{aligned} &2e^x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) + 2e^x \cdot (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + \\ &+ x \cdot e^x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) + 2x \cdot e^x \cdot (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + \\ &+ x \cdot e^x \cdot (-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) - 2e^x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) - \\ &- 2x \cdot e^x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) - 2x \cdot e^x \cdot (-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) + \\ &+ 5x \cdot e^x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) = e^x \cdot \cos 2x \end{aligned}$$

Obě strany rovnice vydělíme e^x a dostaneme:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) + 2 \cdot (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + \\ & + x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) + 2x \cdot (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + \\ & + x \cdot (-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) - 2 \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) - \\ & - 2x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) - 2x \cdot (-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) + \\ & + 5x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) = \cos 2x \end{aligned}$$

$$x \cos 2x: \quad A + 4B - 4A - 2A - 4B + 5A = 0$$

$$x \sin 2x: \quad B - 4A - 4B - 2B - 4A + 5B = 0$$

$$\cos x: \quad 2A + 4B - 2A = 1$$

$$\sin x: \quad 2B - 4A - 2B = 0$$

$$\cos x: \quad 4B = 1$$

$$B = \frac{1}{4}$$

$$\sin x: \quad -4A = 0$$

$$A = 0$$

d) Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$y_p = x \cdot e^x \cdot \frac{1}{4} \sin 2x$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = Y + y_p$$

$$y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{4} \sin 2x)$$

IV. $b(x) = A \cdot \sin Bx$, resp. $b(x) = A \cdot \cos Bx$

Partikulární řešení hledáme opět ve tvaru analogickém tvaru pravé strany.

Př: $y'' - 3y' + 2y = 10 \cos x$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 - 3h + 2 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (1 \cdot 2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = 2 \\ h_2 = 1 \end{matrix}$$

3. Řešení homogenní rovnice: $y_1 = c_1 \cdot e^{2x}$
 $y_2 = c_2 \cdot e^x \rightarrow Y = y_1 + y_2 = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^x$

4. Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude mít tvar:

$$y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$$

a) Vypočteme první derivaci partikulárního řešení rovnice:

$$y'_p = A \cos x - B \sin x$$

b) Vypočteme druhou derivaci partikulárního řešení:

$$y''_p = -A \sin x - B \cos x$$

c) Dosadíme zpět do původní rovnice $y'' - 3y' + 2y = 10 \cos x$:

$$-A \sin x - B \cos x - 3A \cos x + 3B \sin x + 2A \sin x + 2B \cos x = 10 \cos x$$

$$\cos x: \quad -B - 3A + 2B = 10$$

$$\sin x: \quad -A + 3B + 2A = 0$$

$$\sin x: \quad A = -3B \quad A = -3$$

$$\cos x: \quad -B + 9B + 2B = 10$$

$$10B = 10$$

$$B = 1$$

d) Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$y_p = -3 \sin x + \cos x$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = Y + y_p$$

$$y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^x - 3 \sin x + \cos x$$

Př: $y'' + 3y = 4 \cos 3x$

1. Charakteristická rovnice: $h^2 + 3 = 0$

2. Výpočet kořenů charakteristické rovnice:

$$h_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot (1 \cdot 3)}}{2} = \frac{0 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{0 \pm 2\sqrt{3}i}{2} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = \sqrt{3}i \\ h_2 = -\sqrt{3}i \end{matrix}, \text{ kde}$$

$$a = 0, b = \sqrt{3}$$

3. Řešení homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cdot \cos \sqrt{3}x \\ y_2 &= c_2 \cdot \sin \sqrt{3}x \end{aligned} \rightarrow Y = y_1 + y_2 = c_1 \cdot \cos \sqrt{3}x + c_2 \cdot \sin \sqrt{3}x$$

4. Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude mít tvar:

$$y_p = A \cdot \sin 3x + B \cdot \cos 3x$$

a) Vypočteme první derivaci partikulárního řešení rovnice:

$$y'_p = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x$$

b) Vypočteme druhou derivaci partikulárního řešení:

$$y''_p = -9A \sin 3x - 9B \cos 3x$$

c) Dosadíme zpět do původní rovnice $y'' + 3y = 4 \cos 3x$:

$$-9A \sin 3x - 9B \cos 3x + 3A \sin 3x + 3B \cos 3x = 4 \cos 3x$$

$$\cos 3x : -9B + 3B = 4$$

$$\sin x : -9A + 3A = 0$$

$$\sin x : A = 0$$

$$\cos x : -6B = 4$$

$$B = -\frac{2}{3}$$

d) Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$y_p = -\frac{2}{3} \cos 3x$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = Y + y_p$$

$$y = c_1 \cdot \cos \sqrt{3}x + c_2 \cdot \sin \sqrt{3}x - \frac{2}{3} \cos 3x$$

Cvičení:

- 1/ $y'' + 4y' - 5y = 1$ $[y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} - \frac{1}{5}]$
- 2/ $y'' - 2y' + 2y = 2x$ $[y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + (x+1)]$
- 3/ $y'' + y = x^2 + 2$ $[y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2]$
- 4/ $y'' + 3y' - 4y = e^x$ $[y = c_1 e^x + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{5} x e^x]$
- 5/ $y'' - 4y' + 3y = 2e^{3x}$ $[y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x + x e^{3x}]$
- 6/ $2y'' + 5y' = e^x$ $[y = c_1 + c_2 e^{\frac{-5}{2}x} + \frac{1}{7} e^x]$
- 7/ $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$ $[y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + \frac{5}{3} e^{-x}]$
- 8/ $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$ $[y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + 3x e^{2x}]$
- 9/ $y'' + y' - 2y = 12x e^x$ $[y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + (2x^2 - \frac{4}{3}x) \cdot e^x]$
- 10/ $y'' - 2y' + 5y = 5e^{2x} \cdot \sin x$ $[y = c_1 e^x \sin 2x + c_2 e^x \cos 2x + e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} e^{2x} \cos x]$
- 11/ $y'' + y = e^x \cdot \cos x$ $[y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{5} e^x \cos x + \frac{2}{5} e^x \sin x]$
- 12/ $y'' - 2y' + 10y = e^x \cdot \sin 3x$ $[y = c_1 e^x \cos 3x + c_2 e^x \sin 3x - \frac{x}{6} e^x \cos 3x]$
- 13/ $y'' + 6y' + 13y = 30 \sin x$ $[y = e^{-3x} \cdot (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) - \cos x + 2 \sin x]$
- 14/ $y'' + 9y = 5 \cos 2x$ $[y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \cos 2x]$

8. Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

Soustavou obyčejných diferenciálních rovnic 1.řádu rozumíme soustavu typu:

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\&\vdots \\y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x).\end{aligned}$$

Kde $a_{ik}(x)$, $f_i(x)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ jsou reálné funkce.

Zavedeme si toto označení:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Pak příslušnou soustavu ODR 1. řádu lze psát ve tvaru: $y' = A(x)y + f(x)$.

Je-li $f(x) = 0$, tak je daná soustava ODR homogenní.

Je-li $f(x) \neq 0$, tak se soustava ODR zve nehomogenní.

8.1. Homogenní soustavy ODR 1.řádu

Budeme se zabývat situací, kdy matice $A(x)$ je konstantní a vektor $f(x)$ je nulový, pak danou soustavu n – lineárních diferenciálních rovnic typu $y' = A(x)y$ nazveme soustavou s konstantními koeficienty.

a) Metoda eliminace

Algebraickými úpravami a opakovanými derivacemi těchto rovnic lze dosáhnout toho, že z takto získaných rovnic eliminujeme $(n-1)$ neznámých funkcí a tím dostaneme jednu rovnici pro jednu neznámou funkci. Tato metoda se zve eliminační.

$$\text{Př: } y_1' = 2y_2$$

$$y_2' = -5y_1 + 7y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -2$$

$$1. \text{Úprava soustavy metodou sčítací: } y_1' = 2y_2 \cdot 7$$

$$y_2' = -5y_1 + 7y_2 \cdot (-2)$$

$$7y_1' = 14y_2$$

$$-2y_2' = 10y_1 - 14y_2$$

$$\text{Dostaneme: } 7y_1' - 2y_2' = 10y_1$$

$$2. \text{Původní rovnici } y_1' = 2y_2 \text{ zderivujeme: } y_1'' = 2y_2',$$

$$\text{osamostatníme } y_2': \quad y_2' = \frac{y_1''}{2},$$

$$\text{dosadíme za } y_2' \text{ do } 7y_1' - 2y_2' = 10y_1:$$

$$7y_1' - y_1'' = 10y_1$$

$$-y_1'' + 7y_1' - 10y_1 = 0 \cdot (-1)$$

$$y_1'' - 7y_1' + 10y_1 = 0$$

$$3. \text{Rovnice o jedné neznámé: } y_1'' - 7y_1' + 10y_1 = 0$$

$$4. \text{Charakteristická rovnice: } h^2 - 7h + 10 = 0$$

$$h_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = 5 \\ h_2 = 2 \end{matrix}$$

$$5. \text{Partikulární řešení } y_1: y_1 = c_1 e^{5x} + c_2 e^{2x}$$

$$6. \text{Zderivujeme partikulární řešení } y_1 = c_1 e^{5x} + c_2 e^{2x}:$$

$$y_1' = 5c_1e^{5x} + 2c_2e^{2x}$$

7. Zderivované partikulární řešení $y_1' = 5c_1e^{5x} + 2c_2e^{2x}$ dosadíme do
původní rovnice $y_1' = 2y_2$:

$$5c_1e^{5x} + 2c_2e^{2x} = 2y_2$$

$$5c_1e^{5x} + 2c_2e^{2x} = 2y_2 / : 2$$

$$\frac{5}{2}c_1e^{5x} + c_2e^{2x} = y_2$$

8. Partikulární řešení y_2 : $\frac{5}{2}c_1e^{5x} + c_2e^{2x} = y_2$

9. Počáteční podmínka y_1 : $y_1(0) = 1$

$$y_1 = 1$$

$$x_1 = 0$$

Dosadíme do partikulárního řešení $y_1 = c_1e^{5x} + c_2e^{2x}$:

$$1 = c_1e^{5 \cdot 0} + c_2e^{2 \cdot 0}$$

$$1 = c_1 + c_2$$

Počáteční podmínka y_2 : $y_2(0) = -2$

$$y_2 = -2$$

$$x_2 = 0$$

Dosadíme do partikulárního řešení $y_2 = \frac{5}{2}c_1e^{5x} + c_2e^{2x}$:

$$-2 = \frac{5}{2}c_1e^{5 \cdot 0} + c_2e^{2 \cdot 0}$$

$$-2 = \frac{5}{2}c_1 + c_2$$

$$-2 = \frac{5}{2}c_1 + c_2 / \cdot 2$$

$$-4 = 5c_1 + 2c_2$$

Získávám tedy v rámci řešení počáteční podmínky dvě soustavy o dvou neznámých: $1 = c_1 + c_2 \rightarrow c_1 = 1 - c_2$

$$-4 = 5c_1 + 2c_2$$

Za c_1 dosadím do rovnice $-4 = 5c_1 + 2c_2$:

$$-4 = 5(1 - c_2) + 2c_2$$

$$-4 = 5 - 5c_2 + 2c_2$$

$$-9 = -3c_2$$

$$c_2 = 3$$

Za c_2 dosadím do rovnice $c_1 = 1 - c_2$:

$$c_1 = 1 - 3$$

$$c_1 = -2$$

Za c_1 a c_2 dosadíme do jednotlivých partikulárních řešení

$$y_1 = c_1 e^{5x} + c_2 e^{2x}$$

$$y_2 = \frac{5}{2} c_1 e^{5x} + c_2 e^{2x} :$$

$$y_1 = -2e^{5x} + 3e^{2x}$$

$$y_2 = -5e^{5x} + 3e^{2x}$$

10. Partikulární řešení dané soustavy: $y_1 = -2e^{5x} + 3e^{2x}$
 $y_2 = -5e^{5x} + 3e^{2x}$

Př: $y_1' = -2y_1 - y_2$

$$y_2' = -y_1 - 2y_2, y_1(0) = 1, y_2(0) = 2$$

1. Úprava soustavy metodou sčítací: $y_1' = -2y_1 - y_2 \cdot 2$

$$y_2' = -y_1 - 2y_2 \cdot (-1)$$

$$2y_1' = -4y_1 - 2y_2$$

$$-y_2' = y_1 + 2y_2$$

$$\text{Dostaneme: } 2y_1' - y_2' = -3y_1$$

2. Původní rovnici $y_1' = -2y_1 - y_2$ zderivujeme: $y_1'' = -2y_1' - y_2'$,

osamostatníme y_2' : $y_2' = -2y_1' - y_1''$,

dosadíme za y_2' do $2y_1' - y_2' = -3y_1$:

$$2y_1' + 2y_1' + y_1'' = -3y_1$$

$$y_1'' + 4y_1' + 3y_1 = 0$$

3. Rovnice o jedné neznámé: $y_1'' + 4y_1' + 3y_1 = 0$

4. Charakteristická rovnice: $h^2 + 4h + 3 = 0$

$$h_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = -1 \\ h_2 = -3 \end{matrix}$$

5. Partikulární řešení y_1 : $y_{1(1)} = e^{-x}$
 $y_{2(1)} = e^{-3x} \rightarrow y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$

6. Zderivujeme partikulární řešení $y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$:

$$y_1' = -c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{-3x}$$

7. Za y_1', y_1 dosadíme do původní rovnice $y_1' = -2y_1 - y_2$:

$$-c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{-3x} = -2c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-3x} - y_2$$

$$y_2 = c_1 e^{-x} + 3c_2 e^{-3x} - 2c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-3x}$$

$$y_2 = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

8. Partikulární řešení y_2 : $y_2 = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$

9. Počáteční podmínka y_1 : $y_1(0) = 1$

$$y_1 = 1$$

$$x_1 = 0$$

Dosadíme do partikulárního řešení $y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$:

$$1 = c_1 e^{(-1) \cdot 0} + c_2 e^{(-3) \cdot 0}$$

$$1 = c_1 + c_2$$

Počáteční podmínka $y_2: y_2(0) = 2$

$$y_2 = 2$$

$$x_2 = 0$$

Dosadíme do partikulárního řešení $y_2 = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$:

$$2 = -c_1 e^{(-1) \cdot 0} + c_2 e^{(-3) \cdot 0}$$

$$2 = -c_1 + c_2$$

Získávám tedy v rámci řešení počáteční podmínky dvě soustavy o dvou neznámých: $1 = c_1 + c_2 \rightarrow c_1 = 1 - c_2$

$$2 = -c_1 + c_2$$

Za c_1 dosadím do rovnice $2 = -c_1 + c_2$:

$$2 = -(1 - c_2) + c_2$$

$$2 = -1 + 2c_2$$

$$3 = 2c_2$$

$$c_2 = \frac{3}{2}$$

Za c_2 dosadím do rovnice $c_1 = 1 - c_2$:

$$c_1 = 1 - \frac{3}{2}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}$$

Za c_1 a c_2 dosadíme do jednotlivých partikulárních řešení

$$y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

$$y_2 = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

$$y_1 = -\frac{1}{2} e^{-x} + \frac{3}{2} e^{-3x}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$$

10. Partikulární řešení dané soustavy: $y_1 = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$

$$y_2 = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$$

b) Eulerova metoda

Je-li $y' = A(x)y$ soustava s konstantními koeficienty, pak jsou prvky matice $A(x)$ konstanty. Eulerova metoda spočívá v tom, že nejprve najdeme :

1. Matice soustavy
2. Charakteristickou rovnici a kořeny řešení této rovnice
3. Partikulární řešení
4. Fundamentální systém, který je tvořen jednotlivými partikulárními řešeními.
5. Obecné řešení homogenní rovnice.

Př: $y_1' = y_1 + 2y_2$

$$y_2' = 3y_1 - 4y_2$$

1. Matice soustavy: $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

2. Charakteristická rovnice: $\text{Det}(A - \lambda E) = 0$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-4-\lambda) - (3 \cdot 2) = 0$$

$$-4 - \lambda + 4\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -5 \end{matrix}$$

3. Hledání partikulárního řešení:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lambda_1 = 2 \quad & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} -h_1 + 2h_2 = 0 \\ 3h_1 - 6h_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow \text{LZ} \\ & -h_1 + 2h_2 = 0 \rightarrow \text{volím libovolně } h_1 = 1 \\ & -1 + 2h_2 = 0 \rightarrow h_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$u_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ \frac{1}{2} e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lambda_2 = -5 \quad & \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} 6h_1 + 2h_2 = 0 \\ 3h_1 + h_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow \text{LZ} \\ & 3h_1 + h_2 = 0 \rightarrow \text{volím libovolně } h_1 = 1 \\ & 3 + h_2 = 0 \rightarrow h_2 = -3 \end{aligned}$$

$$u_2 = e^{-5x} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-5x} \\ -3e^{-5x} \end{pmatrix}$$

4. Fundamentální matice $Y = (u_1, u_2)$:

$$Y = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-5x} \\ \frac{1}{2}e^{2x} & -3e^{-5x} \end{pmatrix}$$

5. Obecné řešení $y = Y \cdot C$, kde $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ je vektor konstant:

$$y = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-5x} \\ \frac{1}{2}e^{2x} & -3e^{-5x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

6. Obecné řešení:

$$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x}$$
$$y_2 = \frac{1}{2} c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-5x}$$

Př: $y_1' = y_2$

$$y_2' = y_3$$

$$y_3' = y_2$$

1. Matice soustavy: $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Charakteristická rovnice: $\text{Det}(A - \lambda E) = 0$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-\lambda)[(-\lambda)(-\lambda) - (1 \cdot 1)] = 0$$

$$(-\lambda) \cdot \lambda^2 - 1 = 0$$

$$(-\lambda) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\rightarrow \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = -1$$

3. Hledání partikulárního řešení:

$$\text{a) } \lambda_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_2 = 0$$

$$h_3 = 0$$

$$h_2 = 0$$

→ volím libovolně $h_1 = 1$

$$u_1 = e^{0 \cdot x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \lambda_2 = 1 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-h_1 + h_2 = 0$$

$$-h_2 + h_3 = 0 \rightarrow \text{LZ}$$

$$h_2 - h_3 = 0$$

$$-h_1 + h_2 = 0 \rightarrow \text{volím libovolně } h_1 = 1$$

$$-1 + h_2 = 0 \rightarrow h_2 = 1$$

$$h_2 - h_3 = 0 \rightarrow h_3 = 1$$

$$u_2 = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \lambda_2 = -1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_1 + h_2 = 0$$

$$h_2 + h_3 = 0 \rightarrow \text{LZ}$$

$$h_2 + h_3 = 0$$

$$h_1 + h_2 = 0 \rightarrow \text{volím libovolně } h_1 = 1$$

$$1 + h_2 = 0 \rightarrow h_2 = -1$$

$$h_2 + h_3 = 0 \rightarrow h_3 = 1$$

$$u_3 = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

4. Fundamentální matice $Y = (u_1, u_2, u_3)$:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{pmatrix}$$

5. Obecné řešení $y = Y \cdot C$, kde $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ je vektor konstant:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

6. Obecné řešení: $y_2 = c_2 e^x - c_3 e^{-x}$

$$y_3 = c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

Cvičení:

$$\begin{aligned} 1/ \quad y_1' &= 7y_1 - 18y_2 \\ y_2' &= 3y_1 - 8y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [y_1 &= 3e^x c_1 + 2e^{-2x} c_2, \\ y_2 &= e^x c_1 + e^{-2x} c_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2/ \quad y_1' &= -3y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 - y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [y_1 &= e^{-2x} c_1 + x e^{-2x} c_2, \\ y_2 &= -e^{-2x} c_1 - (x+1) e^{-2x} c_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3/ \quad y_1' &= -7y_1 + 9y_2 \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [y_1 &= 3e^{-4x}c_1 + (3x+2)e^{-4x}c_2, \\ y_2 &= e^{-4x}c_1 - (x+1)e^{-4x}c_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4/ \quad y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 \\ y_3' &= y_2 + y_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [y_1 &= c_1e^x, \\ y_2 &= c_2e^x, \\ y_3 &= c_2e^x + c_3xe^x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5/ \quad y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= -y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [y_1 &= c_1 + c_2e^x \cos x + c_3e^x \cos x, \\ y_2 &= -c_2e^x \sin x + c_3e^x \sin x, \\ y_3 &= -c_2e^x \cos x - c_3e^x \cos x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6/ \quad y_1' &= 3y_1 - 5y_2 \\ y_2' &= 5y_1 - 3y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [y_1 &= 5c_1 \cos 4x + 5c_2 \sin 4x \\ y_2 &= (3c_1 - 4c_2) \cos 4x + (4c_1 + 3c_2) \sin 4x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7/ \quad y_1' &= -y_1 - 5y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + 12y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [y_1 &= c_1e^{4x} + 5c_2e^{-3x} \\ y_2 &= -c_1e^{4x} + 2c_2e^{-3x}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8/ \quad y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 3y_1 - 4y_2 \end{aligned} \quad y_1(0)=1, y_2(0)=0$$

$$\begin{aligned} [y_1 &= \frac{1}{7}e^{-5x} + \frac{6}{7}e^{2x} \\ y_2 &= -\frac{3}{7}e^{-5x} + \frac{3}{7}e^{2x}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9/ \quad y_1' &= y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= 5y_1 + 3y_2 \end{aligned} \quad y_1(0)=1, y_2(0)=0$$

$$\begin{aligned} [y_1 &= e^{2x}(\cos 3x - \sin 3x), \\ y_2 &= e^{2x}(\cos 3x + 2 \sin 3x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ 10/ \quad y_2' &= y_1 + 2y_2 - 10y_3 \\ y_3' &= -y_2 + 2y_3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} [y_1 &= 10c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{5x}, \\ y_2 &= 3c_2e^{-x} - 3c_3e^{5x}, \\ y_3 &= c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - c_3e^{5x}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 2y_2 - 3y_3 \\ 11/ \quad y_2' &= y_1 + y_3 \\ y_3' &= 6y_1 - 6y_2 + 5y_3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} [y_1 &= c_1e^x + c_3e^{-x}, \\ y_2 &= c_1e^x + c_2e^{2x}, \\ y_3 &= 2c_2e^{2x} - c_3e^{-x}] \end{aligned}$$

8.2. Nehomogenní soustava ODR 1.řádu

Mějme soustavu typu $y' = A(x)y + f(x)$, kde $f(x)$ je vektorová funkce nebo konstantní vektor.

a) Metoda neurčitých koeficientů:

Postup řešení: 1. Homogenní soustava

2. Obecné řešení homogenní soustavy
3. Nehomogenní soustava rovnic
4. Partikulární řešení nehomogenní soustavy
5. Obecné řešení nehomogenní soustavy

Př: $y_1' = y_2 + 1$

$$y_2' = y_3 + 1$$

$$y_3' = y_1 + 1$$

1. Řešíme homogenní rovnici: $y_1' = y_2$

$$y_2' = y_3$$

$$y_3' = y_1$$

Postup řešení homogenní rovnice je uveden v kapitole 8.1.

Dostaneme obecné řešení typu $Y = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3$:

$$Y = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

$$Y_2 = c_2 e^x - c_3 e^{-x}$$

$$Y_3 = c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

$$Y_1 = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $Y_2 = c_2 e^x - c_3 e^{-x}$

$$Y_3 = c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

3. Řešíme nehomogenní rovnici metodou neurčitých koeficientů

4. Stanovíme tvar partikulárního řešení nehomogenní rovnice

$$y_1' = y_2 + 1$$

$$y_2' = y_3 + 1$$

$$y_3' = y_1 + 1$$

Partikulární řešení bude tvaru: $y_p = \begin{pmatrix} K \\ L \\ M \end{pmatrix}$,

kde $y_1 = K$, $y_2 = L$, $y_3 = M$:

$$y_1 = K$$

$$y_1' = 0$$

$$y_2 = L$$

$$y_2' = 0$$

$$y_3 = M$$

$$y_3' = 0$$

5. Dosadíme za $y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'$ do původní soustavy rovnic

$$y_1' = y_2 + 1$$

$$y_2' = y_3 + 1$$

$$y_3' = y_1 + 1:$$

$$0 = L + 1 \rightarrow L = -1$$

$$0 = M + 1 \rightarrow M = -1$$

$$0 = K + 1 \rightarrow K = -1$$

Za K, L, M dosadíme zpátky do rovnice partikulárního řešení

$$y_p = \begin{pmatrix} K \\ L \\ M \end{pmatrix}:$$

$$y_p = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6. Partikulární řešení nehomogenní rovnice: $y_p = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

7. Obecné řešení nehomogenní soustavy:

$$y = Y + y_p$$

$$y = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \\ c_2 e^x - c_3 e^{-x} \\ c_2 e^x + c_3 e^{-x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - 1$$

$$y_2 = c_2 e^x - c_3 e^{-x} - 1$$

$$y_3 = c_2 e^x + c_3 e^{-x} - 1$$

8. Obecné řešení nehomogenní soustavy:

$$y_1 = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - 1$$

$$y_2 = c_2 e^x - c_3 e^{-x} - 1$$

$$y_3 = c_2 e^x + c_3 e^{-x} - 1$$

Př: $y_1' = y_1 + 3y_2 + e^x$

$$y_2' = -3y_1 + y_2 - 2e^x$$

1. Řešíme homogenní rovnici: $y_1' = y_1 + 3y_2$

$$y_2' = -3y_1 + y_2$$

Postup řešení homogenní rovnice je uveden v kapitole 8.1.

Dostaneme obecné řešení typu: $Y = c_1 u_1 + c_2 u_2$

$$Y = c_1 \begin{pmatrix} \cos 3x \\ -\sin 3x \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} \sin 3x \\ \cos 3x \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = c_1 \cos 3x + c_2 e^x \sin 3x$$

$$Y_2 = -c_1 \sin 3x + c_2 e^x \cos 3x$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $Y_1 = c_1 \cos 3x + c_2 e^x \sin 3x$
 $Y_2 = -c_1 \sin 3x + c_2 e^x \cos 3x$

3. Řešíme nehomogenní rovnici metodou neurčitých koeficientů

4. Stanovíme tvar partikulárního řešení nehomogenní rovnice

$$y_1' = y_1 + 3y_2 + e^x$$

$$y_2' = -3y_1 + y_2 - 2e^x:$$

$$\text{Partikulární řešení bude tvaru: } y_p = \begin{pmatrix} Ke^x \\ Le^x \end{pmatrix},$$

kde $y_1 = Ke^x, y_2 = Le^x$:

$$y_1 = Ke^x$$

$$y_1' = Ke^x$$

$$y_2 = Le^x$$

$$y_2' = Le^x$$

5. Dosadíme za y_1, y_2, y_1', y_2' do původní soustavy rovnic:

$$y_1' = y_1 + 3y_2 + e^x$$

$$y_2' = -3y_1 + y_2 - 2e^x:$$

$$Ke^x = Ke^x + 3Le^x + e^x$$

$$Le^x = -3Ke^x + Le^x - 2e^x$$

$$0 = 3Le^x + e^x$$

$$0 = -3Ke^x - 2e^x$$

$$0 = 3Le^x + e^x / : e^x$$

$$0 = -3Ke^x - 2e^x / : e^x$$

$$0 = 3L + 1$$

$$0 = -3K - 2$$

$$L = -\frac{1}{3}$$

$$K = -\frac{2}{3}$$

Za K, L dosadíme zpátky do rovnice partikulárního řešení

$$y_p = \begin{pmatrix} Ke^x \\ Le^x \end{pmatrix}:$$

$$y_p = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^x \\ -\frac{1}{3}e^x \end{pmatrix}$$

6. Partikulární řešení nehomogenní rovnice: $y_p = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^x \\ -\frac{1}{3}e^x \end{pmatrix}$

7. Obecné řešení nehomogenní soustavy:

$$y = c_1 \cdot u_1 + c_2 \cdot u_2 + y_p$$

$$y = Y + y_p$$

$$y = c_1 \begin{pmatrix} \cos 3x \\ -\sin 3x \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} \sin 3x \\ \cos 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^x \\ -\frac{1}{3}e^x \end{pmatrix}$$

$$y_1 = c_1 \cos 3x + c_2 e^x \sin 3x - \frac{2}{3}e^x$$

$$y_2 = -c_1 \sin 3x + c_2 e^x \cos 3x - \frac{1}{3}e^x$$

8. Obecné řešení nehomogenní soustavy:

$$y_1 = c_1 \cos 3x + c_2 e^x \sin 3x - \frac{2}{3}e^x$$

$$y_2 = -c_1 \sin 3x + c_2 e^x \cos 3x - \frac{1}{3}e^x$$

b) Metoda superpozice:

Postup řešení: 1. Homogenní soustava rovnic

2. Obecné řešení homogenní soustavy

3. Nehomogenní soustava rovnic

4. Partikulární řešení nehomogenní soustavy

5. Obecné řešení nehomogenní soustavy

Př: $y_1' = y_1 + 3y_2 + e^x$

$$y_2' = -3y_1 + y_2 + 1$$

1. Řešíme homogenní rovnici: $y_1' = y_1 + 3y_2$

$$y_2' = -3y_1 + y_2$$

Postup řešení homogenní rovnice je uveden v kapitole 8.1.

Dostaneme obecné řešení typu: $Y = c_1 u_1 + c_2 u_2$

$$Y = c_1 \begin{pmatrix} \cos 3x \\ -\sin 3x \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} \sin 3x \\ \cos 3x \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = c_1 \cos 3x + c_2 e^x \sin 3x$$

$$Y_2 = -c_1 \sin 3x + c_2 e^x \cos 3x$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $Y_1 = c_1 \cos 3x + c_2 e^x \sin 3x$
 $Y_2 = -c_1 \sin 3x + c_2 e^x \cos 3x$

3. Řešíme nehomogenní rovnici metodou superpozice:

$$1/ \quad y_1' = y_1 + 3y_2 + e^x$$

$$y_2' = -3y_1 + y_2$$

$$2/ \quad y_1' = y_1 + 3y_2$$

$$y_2' = -3y_1 + y_2 + 1$$

4. Hledáme partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru:

$$\text{Ad1/ } y_{p1} = \begin{pmatrix} Ke^x \\ Le^x \end{pmatrix} \text{ kde } y_1 = Ke^x, y_2 = Le^x:$$

$$y_1 = Ke^x$$

$$y_1' = Ke^x$$

$$y_2 = Le^x$$

$$y_2' = Le^x$$

Dosadíme za y_1, y_2, y_1', y_2' do soustavy rovnic $y_1' = y_1 + 3y_2 + e^x$

$$y_2' = -3y_1 + y_2:$$

$$Ke^x = Ke^x + 3Le^x + e^x$$

$$Le^x = -3Ke^x + Le^x$$

Soustavu upravíme: $0 = 3Le^x + e^x$

$$0 = -3Ke^x \rightarrow K = 0$$

$$-e^x = 3Le^x$$

$$-e^x = 3Le^x / : e^x$$

$$-1 = 3L$$

$$-\frac{1}{3} = L$$

Za K, L dosadíme zpět do partikulárního řešení $y_{p1} = \begin{pmatrix} Ke^x \\ Le^x \end{pmatrix}$:

$$y_{p1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3}e^x \end{pmatrix}$$

Ad2/ $y_{p2} = \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$, kde $y_1 = M, y_2 = N$:

$$y_1 = M$$

$$y_1' = 0$$

$$y_2 = N$$

$$y_2' = 0$$

Dosadíme za y_1, y_2, y_1', y_2' do soustavy rovnic $y_1' = y_1 + 3y_2$

$$y_2' = -3y_1 + y_2 + 1:$$

$$0 = M + 3N \rightarrow M = -3N$$

$$0 = -3M + N + 1$$

$$0 = -3(-3N) + N + 1$$

$$-1 = 10N$$

$$-\frac{1}{10} = N$$

$$M = -3 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)$$

$$M = \frac{3}{10}$$

Za M, N dosadíme zpět do partikulárního řešení $y_{p2} = \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$:

$$y_{p2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Hledané partikulární řešení je tvaru: $y_p = y_{p1} + y_{p2}$

$$y_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3}e^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

5. Partikulární řešení nehomogenní soustavy:

$$y_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3}e^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

6. Obecné řešení nehomogenní soustavy:

$$y = c_1 \cdot u_1 + c_2 \cdot u_2 + y_p$$

$$y = Y + y_p$$

$$y = c_1 \begin{pmatrix} \cos 3x \\ -\sin 3x \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} \sin 3x \\ \cos 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3}e^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$y_1 = c_1 \cos 3x + c_2 e^x \sin 3x + \frac{3}{10}$$

$$y_2 = -c_1 \sin 3x + c_2 e^x \cos 3x - \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{10}$$

7. Obecné řešení nehomogenní soustavy:

$$y_1 = c_1 \cos 3x + c_2 e^x \sin 3x + \frac{3}{10}$$

$$y_2 = -c_1 \sin 3x + c_2 e^x \cos 3x - \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{10}$$

Cvičení:

Najděte partikulární řešení:

$$\begin{aligned} 1/ \quad y_1' &= 3y_1 + 2y_2 + 1 \\ y_2' &= -2y_1 + 7y_2 + 2 \end{aligned} \quad [y_p = \begin{pmatrix} -\frac{3}{25} \\ -\frac{8}{25} \end{pmatrix}]$$

$$\begin{aligned} 2/ \quad y_1' &= -5y_1 - y_2 + 7e^x \\ y_2' &= 2y_1 - 3y_2 - 3e^x \end{aligned} \quad [y_p = \begin{pmatrix} \frac{31}{26}e^x \\ -\frac{2}{13}e^x \end{pmatrix}]$$

$$\begin{aligned} 3/ \quad y_1' &= 7y_1 - 18y_2 + 12e^{-x} \\ y_2' &= 3y_1 - 8y_2 + 5e^{-x} \end{aligned} \quad [y_p = \begin{pmatrix} 3e^{-x} \\ -2e^{-x} \end{pmatrix}]$$

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + 1 \\ 4/ \quad y_2' &= y_3 + 1 \\ y_3' &= 8y_1 + 8 \end{aligned} \quad [y_p = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}]$$

$$\begin{aligned} 5/ \quad y_1' &= 2y_1 - y_2 + 8e^{-2x} \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 + 2e^{-2x} \end{aligned} \quad [y_p = \begin{pmatrix} -2e^{-2x} \\ 0 \end{pmatrix}]$$

$$\begin{aligned} 6/ \quad y_1' &= y_1 - y_2 + x \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 - 1 \end{aligned} \quad [y_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x + \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3}x + \frac{7}{9} \end{pmatrix}]$$

$$\begin{aligned} 7/ \quad y_1' &= y_1 - 2y_2 + e^x \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 + xe^x \end{aligned} \quad [y_p = \begin{pmatrix} -(x+1)e^x \\ e^x \end{pmatrix}]$$

9. Využití obyčejných diferenciálních rovnic v praxi

Obyčejná diferenciální rovnice je od svého vzniku spojena s řešením problémů geometrie, fyziky, matematiky a proniká i do dalších věd, jako je ekonomie, medicína apod.

V geometrických aplikacích ODR máme většinou určit rovnici křivky zadané některými svými vlastnostmi. Tyto vlastnosti se často týkají jejich tečen nebo poloměru křivosti. Jde o křivky zadané vlastností tečny, či zadané poloměrem křivosti. Zajímavým příkladem je parabolické zrcadlo, kdy se pomocí ODR snažíme najít tvar zrcadla, které odráží světlo bodového zdroje do směru dané polopřímky. Ukazuje se, že zrcadlo musí mít tvar paraboly.

Typickou úlohou z elektrotechniky je řešení elektrického obvodu. Řešením elektrického obvodu rozumíme obvykle nalezení hodnot proudů a napětí ve všech jeho částech. Obsahují-li obvody pouze rezistory, řeší se obvody přes algebraické rovnice nebo jejich soustavy. Jsou-li součástmi obvodů i kondenzátory a cívky, jsou tyto obvody popsány diferenciálními a integro-diferenciálními rovnicemi, nebo jejich soustavami.

Použití obyčejných diferenciálních rovnic v biologii je obdobné jako v jiných odvětvích. Jsou využívány jako prostředek k získání matematických modelů určitých jevů a zákonitostí v biologii. Použití je vsutku rozmanité – modeluje se růst rostlin, růst populace živých organismů, rovnováha počtu druhů na ostrově, symbióza dvou druhů, šíření kapavky, pohyb mravenců aj.

Analýzy v ekonomii jsou velmi vhodné k aplikaci rozmanitého matematického aparátu. Zatímco většina základních ekonomických pojmů vyžaduje pouze jednoduchou matematiku, pokročilejší teorie vyžaduje již rozsáhlejší sadu matematických nástrojů. Použití diferenciálních rovnic začíná u jednoduchých tvarů, kdy např. zjišťujeme vlastnosti křivek popisujících určitý ekonomický jev, nebo sledujeme, jak ovlivní vývoj (na čase či jiném parametru) jedné veličiny průběh veličiny jiné. Složitost diferenciálních rovnic narůstá s jejich použitím v různých modelech, kterými chtěli různí badatelé popsat určité zákonitosti ekonomiky, a tyto rovnice mohou tvořit

i soustavy. Úkolem modelů obecně je osvětlovat působení různých proměnných skrze chování jiných proměnných a skrze způsob, jak se proměnné ovlivňují navzájem.

11. Seznam použité literatury

- [1] Kufner A.: *Obyčejné diferenciální rovnice*. Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň 1993.
- [2] Šalát T.: *Malá encyklopedie matematiky*. Obzor Bratislava, Bratislava 1967.
- [3] Rektorys K.: *Obyčejné a parciální diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami*. ČVUT v Praze, Praha 1997.
- [4] Vlček J.: *Diferenciální rovnice*. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Ostrava 2003.
- [5] Barták J.: *Diferenciální rovnice*. SPN Praha, Praha 1984.
- [6] Res I.: *Matematika-diferenciální rovnice*. SPN Praha, Praha 1988.
- [7] Nagy J.: *Diferenciální rovnice*. ČVUT v Praze, Praha 1998.
- [8] Ráb M.: *Metody řešení diferenciálních rovnic*. SPN Praha, Praha 1989.
- [9] Radochová D.: *Diferenciální rovnice*. Vojenská akademie A. Zápotockého, Brno 1970.
- [10] Gabriel S.: *Diferenciální rovnice*. ČVUT v Praze, Praha 1972.
- [11] Barot J.: *Diferenciální rovnice a nekonečné řady*. VUT v Brně, Brno 1992.
- [12] Ráb M.: *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. MU v Brně, Brno 2004.
- [13] Plch R.: *Příklady z matematické analýzy – diferenciální rovnice*, MU v Brně, Brno 2002.
- [14] Kalas J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*. MU v Brně, Brno 2001.
- [15] Kalas J.: *Spojité modely v biologii*. MU v Brně, Brno 2001.
- [16] Štěpánský V.: *Diferenciální rovnice*. Vědecko-technické nakladatelství Praha, Praha 1951.
- [17] Barták J.: *Užití diferenciálních rovnic*. UK v Praze, Praha 1984.
- [18] Klein M. W.: *Mathematical Methods for Economics*. Addison – Wesley Educational Publishers, Inc., 1998.